Chapitre VII.

—

Méthode des rabattements.

178. Considérations générales. — But des rabattements. — Définitions. Une figure plane est située dans un plan quelconque de l'espace, et doit servir de base à des opérations à exécuter dans ce plan. Cette figure, ainsi que les constructions graphiques à faire, se trouveront déformées dans leurs projections sur P_1 et P_2, et la solution graphique du problème peut présenter des difficultés telles que l'on doit renoncer à toute opération.

Si l'on fait tourner le plan, avec la figure qu'il contient, autour de l'une de ses traces, ou autour d'une de ses droites parallèle à cette trace, jusqu'à ce qu'il soit couché sur le plan de projection de même nom que cette trace, ou sur un plan parallèle à ce dernier, la figure se trouvera convenablement placée pour permettre l'exécution des opérations graphiques nécessaires pour arriver au résultat.

Le résultat ainsi obtenu, on fait retourner le plan de la figure, avec celle-ci, le résultat, ainsi que les constructions exécutées, dans la position primitive du plan, et le résultat du problème se trouvera déterminé et fixé dans l'espace.

Cette manière d'opérer, de faire tourner un plan d'une figure et de le coucher sur un plan de projection ou dans une position parallèle à celui-ci, s'appelle **rabattre le plan de la figure**. On aura opéré **un rabattement**.

Le résultat du problème a été obtenu par **un rabattement**.

Le plan est rabattu autour d'une trace ou bien autour d'une de ses droites parallèle à cette trace. Ces droites autour desquelles se fait le rabattement sont **les axes de rabattement**, **les charnières**, **les axes de rotation**, ou simplement, **les axes**.

La position qu'occupe après l'opération du rabattement un point, une ligne, une figure, constitue **le rabattement de ce point, de cette ligne, de cette figure**. Le plan sur lequel la figure a été rabattue est **le plan du rabattement**.

L'opération de redresser le plan rabattu et de le faire revenir dans sa position primitive, se nomme **relèvement**.

Relever le rabattement d'un point, d'une figure, c'est passer du rabattement de ces éléments à leurs positions primitives, ou à celles qu'ils doivent occuper dans le plan qui les contient, et avec celui-ci dans l'espace.

179. Principes pour rabattre un point et une droite.

Rabattement du point. Pour rabattre un point a situé dans un plan quelconque (perpendiculaire à P_1, à P_2, à l'axe, ou oblique à P_1 et à P_2) autour de l'une des deux traces de ce plan, on fera tourner ce dernier autour de cette trace, jusqu'à ce qu'il soit couché, avec tout ce qu'il contient, sur le plan de projection qui a même nom que la trace qui a servi d'axe de rotation.

1° Dans ce mouvement de rotation, le point a décrira un arc de cercle, dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation, et, par suite, au plan de projection (plan du rabattement) qui contient cet axe.

2° Le rabattement et la projection du point a sur le plan du rabattement se trouvent sur la trace-projection du plan de rotation, laquelle trace est perpendiculaire à l'axe de rotation (**62**).

3° La distance du point a à l'axe ne change pas pendant le mouvement de rotation de ce point.

De ce qui précède, il suit :

1° *Que le rabattement du point a sur l'un des plans de projection est lié à la projection du point sur ce plan par une perpendiculaire à l'axe de rotation ;*

II° *Que la distance du rabattement à l'axe de rotation est égale à la distance du point a non rabattu à cette même ligne ;*

III° *Que la distance du rabattement à un point quelconque x de l'axe de rotation est égale à la distance du point non rabattu à ce même point x.*

Rabattement de la droite. 1° Chacun des points de la droite se meut d'après les principes précédents, et le point de rencontre de la droite avec l'axe de rotation reste fixe. Ce point appartient donc au rabattement de la droite et à la projection de celle-ci sur le plan du rabattement.

2° L'angle que la droite fait avec l'axe de rotation est le même que celui que le rabattement de la droite fait avec ce même axe.

Il suit de là :

Que pour avoir le rabattement d'une droite, il suffira de construire le rabattement d'un point de cette droite, et d'unir ce point rabattu au point de rencontre de la droite avec l'axe de rotation.

180. Remarque. Les propriétés et principes qui précèdent s'appliquent également aux cas particuliers où l'axe de rotation est une parallèle à l'une des traces du plan. Le mouvement de rotation s'arrête, en effet, dès que le plan mobile est parallèle au plan de projection de même nom que la trace à laquelle l'axe est parallèle. Ce plan mobile, dans cette position, peut être considéré comme plan de projection, ou bien le plan de projection peut être considéré comme soulevé parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan du rabattement.

181. Toute solution par rabattement se base sur les deux problèmes fondamentaux suivants :

I. *Construire le rabattement d'un point ou d'une droite situés dans un plan quelconque* T.

II. **Réciproquement.** *Etant donné le rabattement d'un point ou d'une droite situés dans un plan* T, *relever ce point ou cette droite.*

Ces problèmes comprennent réellement six problèmes différents avec leurs réciproques, suivant qu'il s'agit du point ou de la droite, et que le plan T est normal à P_1 ou à P_2, ou quelconque.

Chacun de ces six problèmes et la réciproque de chacun d'eux admettent quatre cas particuliers suivant l'axe de rotation que l'on adopte.

Plan d'études. Nous devons donc suivre, dans l'étude des rabattements, le plan qui nous est tracé par le tableau suivant :

Construire le rabattement d'un point situé dans	un plan T	I. normal à P_1	. . . .	I.	et réciproquement.
			. . . .	II.	
		II. normal à P_2	Problème fondamental	III.	
				IV.	
d'une droite située dans		III. quelconque	. . . .	V.	
			. . . .	VI.	

Chacun de ces six problèmes ainsi que la réciproque de chacun d'eux admettent quatre cas particuliers	suivant que l'axe de rotation est	la trace....	T_1	cas particuliers	I.
			T_2		II.
		une parallèle à la trace	T_1		III.
			T_2		IV.

182. Premier problème fondamental. *Construire le rabattement d'un point situé dans un plan* T *normal à* P_1.

I. **La trace T_1 étant prise pour axe de rotation.**

Solution graphique. (Ep. 110.) Le rabattement (a) sur P_1 du point a est uni à la projection de a sur P_1 par une normale à l'axe de rabattement (**179**. I°). La distance de (a) à l'axe de rotation est égale à $a''m$, véritable longueur de la distance du point a à l'axe T_1 (**179**. II).

II. **La trace T_2 étant prise pour axe de rotation.**

Solution graphique. (Ep. 111.) Le rabattement (a) sur P_2 du point a est uni à la projection a'' de ce point sur ce plan par une normale à l'axe de rabattement T_2 (**179**. I). La distance $(a)m$ qui sépare (a) de l'axe T_2 est égale à xa', véritable longueur de la distance du point a à l'axe T_2. (**179**. II.)

Notations. Dans les épures, nous marquerons les rabattements des points a, b, c, etc. ou des droites d, f, etc. par les lettres qui désignent ces points et ces droites dans l'espace, et nous les placerons entre parenthèses.

(a), (b), (c), etc. sont donc les rabattements des points a, b, c, etc.

(d), (f), ou (R), etc. „ „ „ „ des droites d, f, R, etc.

Cette manière d'annoter les rabattements évite l'emploi de nouvelles lettres ou d'indications non conventionnelles qui ne peuvent manquer de rendre une épure peu lisible.

Les notations (a), (b) etc. seront maintenues pour les rabattements, quelle que soit la méthode de projection (orthogonales, obliques, axonométriques ou centrales) dans laquelle on opère.

III. **Une droite** d **du plan T parallèle à la trace** T_1 **est prise pour axe de rotation.**

Solution dans l'espace. Le plan T tournera autour de la droite d jusqu'à ce qu'il soit parallèle à P_1. Si, dans cette position, on prend ce plan pour plan de projection P'_1, les principes du § **179** s'appliqueront au rabattement et à la projection du point sur ce nouveau plan de projection. Comme P'_1 est parallèle à P_1 et que toute figure de ce plan se projette sur P_1 suivant une figure égale, les relations entre le rabattement et la projection du point sur P'_1 n'auront pas changé quand ces éléments sont projetés sur P_1.

Solution graphique. (**Ep. 112.**) D'après ce qui précède, nous voyons que le rabattement (a) projeté sur P_1 est uni à la projection a' du point a par une normale à d', projection de l'axe de rotation sur P_1. La distance $(a)a'$ sera égale à la distance $a''m$, véritable longueur de la distance du point a à l'axe de rotation d.

IV. **Une droite** e **du plan T parallèle à** T_2 **est prise pour axe de rotation.**

Solution graphique (**Ep. 113.**) En raisonnant comme pour le cas précédent, on voit que le rabattement (a), projeté sur P_2, est uni à la projection a'' du point a sur P_2 par une normale à e''_2, projection de l'axe de rotation sur P_2. La distance de (a) à e'' est égale à $a'e'$, véritable longueur de la distance du point a à l'axe e.

Remarques. I. Dans les quatre cas particuliers précédents, le rabattement peut se faire à droite ou à gauche de l'axe de rotation.

II. En comparant entre elles les solutions graphiques des quatre cas particuliers du problème précédent, nous pouvons déduire de cette comparaison la règle pratique suivante :

Règle pratique. *Un point étant situé dans un plan normal à* P_1, *pour construire le rabattement de ce point, soit sur* P_1, P_2, *ou sur un plan parallèle à* P_1 *ou à* P_2, *de la projection du point sur le plan du rabattement, on abaisse une normale sur la projection, sur ce même plan, de l'axe de rotation, et l'on porte sur cette normale, et à partir de l'axe projeté, une longueur égale à la distance de l'autre projection du point à la projection de même nom de l'axe de rotation.*

183. Problème réciproque. *Le rabattement d'un point* *étant donné, relever ce point, sachant qu'il doit être situé dans un plan* T *normal à* P_1.

I. La trace-projection T_1 étant l'axe de rotation.

Solution graphique (**Ep. 110.**) La projection a' du point sur P_1 sera située sur une perpendiculaire abaissée du rabattement (a) sur l'axe de rotation T_1 (**179-1**). Comme le point a est dans le plan T qui est normal à P_1, la projection a' sera sur T_1, donc en a', point de rencontre de la perpendiculaire $(a)a'$ avec T_1.

La seconde projection a'' du point est située au-dessus de l'axe de projection à une distance $a''m$ égale à $a'(a)$, $a''m$ mesurant la distance du point a du plan T à l'axe de rotation T_1, trace-projection de ce plan.

II. La trace T_2 étant l'axe de rotation.

Solution graphique. (**Ep. 111.**) La seconde projection a'' se trouvera sur la perpendiculaire abaissée de (a) sur l'axe de rotation T_2. La première projection a' doit être sur la trace-projection du plan. Comme le point a de l'espace doit être écarté de T_2 d'une longueur égale à $m(a)$, et que cet écartement se projette en vraie grandeur sur T_1, vu que T est normal à P_1, on n'a qu'à porter $m(a) = xr$ sur T_1 de x en a', et a' sera la première projection du point a. La seconde projection sera en a''.

III. Une droite d du plan T parallèle à la trace-projection T_1 étant l'axe de rotation.

Solution graphique. (**Ep. 112.**) La première projection du point a se trouve en a', pied de la perpendiculaire abaissée du rabattement (a) sur l'axe de rotation projeté en d' (**180**). La seconde projection a'' du même point a se trouve sur la perpendiculaire $a''a'$ à l'axe de projection, et à une distance $a''m = (a)a'$ au-dessus de la seconde projection d'' de l'axe de rotation; $a''m$ mesure, en effet, la distance de a à l'axe d, distance qui doit être égale à $a'(a)$.

IV. Une droite e du plan T parallèle à T_2 étant l'axe de rotation.

Solution graphique. (**Ep. 113.**) La seconde projection du point a se trouvera sur la perpendiculaire abaissée du rabattement (a) sur l'axe de rotation.

La première projection a' sera sur T_1, à une distance $e'a' = n(a)$ de e' ; $e'a'$ mesure, en effet, la distance du point a du plan T à la droite e de ce plan, cette droite étant parallèle à P_2. On portera donc $n(a) = mr = e's$ de e en a', et a' sera la première projection du point a. La seconde projection sera en a''.

184. Deuxième problème fondamental. *Construire le rabattement d'une droite située dans un plan normal à* P_1.

Ce problème, ainsi que sa réciproque, admettent, comme le premier problème fondamental et sa réciproque, quatre cas particuliers suivant l'axe de rotation que l'on adopte.

Cet axe sera l'une des traces du plan ou une droite de ce plan parallèle à l'un des deux plans de projection.

Solution. On construira le rabattement d'un point quelconque de la droite (**179** et **180**). Le point de rencontre de la droite avec l'axe de rotation sera le rabattement d'un deuxième point de la droite.

185. Problème réciproque. Pour relever une droite située dans un plan perpendiculaire à P_1, son rabattement étant donné, on relève un point de cette droite (**183**). Le point de rencontre du rabattement de la droite avec l'axe de rotation sera un deuxième point de la droite dèmandée.

186. Troisième problème fondamental. *Construire le rabattement d'un point situé dans un plan normal à* P_2 (**190**).

187. Problème réciproque. *Le rabattement d'un point étant donné, relever ce point, sachant qu'il doit être situé dans un plan normal à* P_2 (**190**).

188. Quatrième problème fondamental. *Construire le rabattement d'une droite située dans un plan normal à* P_2 (**190**).

189. Problème réciproque. *Le rabattement d'une droite étant donné, relever cette droite, sachant qu'elle doit être située dans un plan normal à* P_2 (**190**).

190. Remarque. Les problèmes des §§ 186 à 189 admettent chacun quatre cas particuliers suivant l'axe de rotation que l'on adopte. Cet axe est une des deux traces du plan à rabattre ou une droite de ce plan parallèle à l'un des plans de projection.

Les raisonnements et les solutions donnés pour les deux premiers problèmes fondamentaux s'appliquent aux problèmes III et IV. Il en est de même de la règle pratique tirée des solutions des deux premiers problèmes.

Nous nous dispenserons donc d'entrer dans tous les détails que comportent les solutions des deux derniers problèmes fondamentaux, et nous proposons ces problèmes, avec leurs cas particuliers et les réciproques, comme exercices des §§ 182, 183 et 184.

191. Cinquième problème fondamental. *Construire le rabattement d'un point situé dans un plan quelconque.*

I. La trace sur P_1 est prise pour axe de rotation.

Première solution. (Ep. 114.) Le point a se meut dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, la trace T_1 du plan T. Le rabattement (a) se trouvera donc sur la perpendiculaire abaissée de a' sur l'axe de rotation (**179**). La distance $b'(a)$ qui, sur cette perpendiculaire, sépare le rabattement (a) de l'axe T_1 est égale à la distance qui, dans le plan T, sépare le point a de la trace T_1. Cette distance se projette sur P_1 en $a'b'$ (**49**) et sur P_2 en $a''b''$ et, comme elle est située dans le plan T et dans le plan de rotation, lequel est normal à P_1, elle sera situee sur l'intersection de ces deux plans, et peut se construire par un rabattement auxiliaire du plan de rotation autour de sa trace-projection prise pour axe (**182-I**). Le point a se rabat alors en (a) sur $b'(c)$ et le point b' reste fixe.

La distance $b'(a)$ portée à partir de b' sur le prolongement de $a'b'$, déterminera le point (a), rabattement du point a autour de T_1.

Remarque. La longueur $b'(a)$ est l'hypothénuse du triangle rectangle $b'a'(a)$, qui a pour côtés de l'angle droit les distances des projections a' et a'' du point donné aux projections de même nom (T_1 et l'axe de projection) de l'axe de rotation T_1.

Autre solution. (Ep. 114.) On sait (**179-III.**) que la distance du point à rabattre à un point quelconque de l'axe de rotation ne change pas pendant le mouvement de rotation. Supposons le point a uni au point m' de l'axe de rotation par une droite parallèle à P_2. Cette ligne se projette suivant sa véritable longueur sur P_2 en $m''a''$ parallèle à T_2.

Le rabattement (a) devant se trouver sur la perpendiculaire abaissée de a' sur l'axe de rotation, et être éloigné de m' d'une longueur égale à $m''a''$, se trouvera en (a), à l'intersection de cette perpendiculaire avec l'arc de cercle décrit de m' comme centre avec $m''a''$ pour rayon.

II. La trace sur P_2 est prise pour axe de rotation.

Première solution. (**Ep. 115.**) Un raisonnement analogue à celui qui a donné la première solution du cas précédent nous montre que, pour avoir le rabattement (a) du point a sur P_2, il faut abaisser de a'' une perpendiculaire sur l'axe T_2, et porter sur cette ligne une longueur $b''(a)$ qui est la véritable longueur de la distance du point a à l'axe T_2. Cette longueur peut se construire par un rabattement auxiliaire du plan de rotation sur P_2 (**182-II**).

Remarque. La longueur $b''(a)$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle $b''(a)a''$, dont les côtés de l'angle droit sont les distances des projections a' et a'' du point a aux projections de même nom de l'axe de rotation.

Seconde solution. (**Ep. 115.**) On unira le point a à un point m'' de T_2, de manière que la ligne am'' soit parallèle à P_1 et, par suite, à T_1; elle se projettera sur P_1 suivant sa véritable longueur en $m'a'$.

Décrivons donc, de m'' comme centre avec $m'a'$ pour rayon, un arc de cercle qui coupera en (a) la perpendiculaire abaissée de a'' sur l'axe de rotation; (a) sera le rabattement du point a (**179-III**).

III. Une droite d du plan parallèle à P_1 est prise pour axe de rotation.

Première solution. (**Ep. 116.**) Le mouvement de rotation du plan S autour de d s'arrête dès que ce plan est devenu parallèle à P_1. La projection sur P_1 du rabattement (a) se trouvera reliée à a' par une perpendiculaire à d', projection de l'axe de rotation sur P_1, et la distance $(a)x$ qui sépare (a) de d' sera égale à la véritable longueur de la distance du point a du plan à la droite d. Cette distance se trouvant dans un plan perpendiculaire à d et, par suite, à P_1, peut se construire par un rabattement auxiliaire de ce plan sur P_1 autour de sa trace-projection prise pour axe de rotation. La distance $(a)(b)$ ainsi obtenue sur $n'(e)$, portée de x en (a), donne, en ce point, le rabattement du point a.

Remarque. $(a)(b)$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle $(b)r(a)$, dont les deux côtés de l'angle droit sont les distances des projections a' et a'' du point a aux projections de même nom d' et d'' de l'axe de rotation.

Seconde solution. (Ep. 116.) On unira le point a à un point c de l'axe de manière que ac soit parallèle à P_2. $c''a''$ sera la vraie longueur qui sépare a de c. Le rabattement (a) se trouvera donc sur l'arc de cercle décrit de c' comme centre avec $a''c''$ pour rayon. L'intersection de cet arc avec la perpendiculaire $x(a)$ donne le rabattement demandé.

IV. Une droite *d* du plan parallèle à P_2 est prise pour axe de rotation.

Première solution. (Ep. 117.) En raisonnant comme pour le troisième cas, on voit que l'on obtient le rabattement (a) du point a sur P_2 en abaissant de a'' une normale sur d'', et en prenant, sur cette normale, une longueur $m''(a)$ égale à la vraie distance du point a à l'axe de rotation d.

Cette distance $(a)m'' = (a)(m)$ peut se construire à l'aide d'un rabattement auxiliaire.

Remarque. $(m)(a)$ est encore l'hypothénuse d'un triangle rectangle $(m)r(a)$, dont les deux côtés de l'angle droit sont les distances des projections a' et a'' du point a aux projections de même nom d' et d'' de l'axe de rotation d.

Seconde solution. (Ep. 117.) On unira le point a à un autre point b de l'axe d de manière que ab soit parallèle à P_1, et s'y projette en $a'b'$ suivant sa véritable longueur, etc.

Remarques. I. Dans les quatre cas particuliers du problème, le rabattement peut s'effectuer à droite ou à gauche de l'axe de rotation.

II. En comparant entre elles les solutions graphiques données pour les quatre cas particuliers, nous pouvons poser la règle pratique suivante :

Règle pratique. *Un point étant situé dans un plan quelconque,* *pour construire le rabattement de ce point sur* P_1, *sur* P_2, *ou sur un plan parallèle à* P_1 *ou à* P_2, *de la projection du point sur le plan du rabattement, on abaisse une perpendiculaire sur la projection, sur ce même plan, de l'axe de rotation. Sur cette perpendiculaire, et à partir de l'axe projeté, on portera une longueur égale à l'hypothénuse du triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont les distances des deux projections du point à rabattre aux projections de même nom de l'axe de rotation. L'extrémité de cette perpendiculaire sera le rabattement du point donné.*

192. Problème réciproque. *Le rabattement d'un point étant donné, relever ce point, sachant qu'il doit se trouver dans un plan donné.*

I. La première trace de ce plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (Ep. 114.) Pour relever le point (a) on devra lui faire décrire le chemin qu'il a dû parcourir dans son rabattement, c'est-à-dire, un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à T_1 et dont le rayon est $b'(a)$. Le point demandé sera donc situé, 1° dans le plan donné, 2° dans le plan perpendiculaire à T_1 et, par suite, à P_1, et dont la trace-projection passe par (a). C'est donc sur l'intersection bc de ces deux plans que nous devons retrouver le point a, et sur cette droite, ce point doit être écarté de b' d'une longueur égale à $b'(a)$. Rabattons bc en $b(c)$, (**182.-I.**) et portons $b'(a)$ de b' sur $b(c)$; nous aurons en (a) sur $b'(c)$ le rabattement du point demandé autour de $b'c'$ prise pour axe.

Les projections a' et a'' du point se trouveront ensuite par le raisonnement du § (**181-I**).

II. La seconde trace de ce plan étant prise pour axe de rotation.

Solution. (Ep. 115.) Même raisonnement comme pour le cas précédent. Le point se trouvera sur bc, intersection du plan T avec le plan perpendiculaire à T_2 dont la trace-projection, normale à T_2, passe par (a).

La distance du point demandé au point b'' sur bc est égale à $(a)b''$. On rabattra le plan auxiliaire sur P_2 en prenant sa trace-projection $b''c''$ pour axe de rotation (**186**). Le point (a) de $b''(c)$, distant de b'' d'une longueur égale à $(a)b''$ donnée par le premier rabattement, sera un nouveau rabattement du point demandé, point dont on construit les projections (**186**).

III. Une droite *d* du plan parallèle à P_1 étant prise pour axe de rotation.

Solution. (**Ep. 116**). D'après les raisonnements précédents, le point se trouvera sur la droite d'intersection du plan donné avec le plan perpendiculaire à l'axe d et passant par (a). Cette droite nc rencontre l'axe d au point b, et le point demandé sera situé sur nc et à une distance de b égale à $(a)b'$. Comme nc, ainsi que le point b, se trouvent dans un plan perpendiculaire à P_1, on rabattra ces éléments sur P_1 autour de la trace-projection $n'c'$ prise pour axe (**182-I**). Sur $n(e)$, et à partir de (b), on portera une longueur r égale à $(a)b'$. Le point (a) ainsi obtenu sera le rabattement, autour de $n'e'$, du point a demandé, lequel se relèvera, d'après le § (**183.-I.**), en a' et a''.

IV. Une droite *d* du plan parallèle à P_2 étant prise pour axe de rotation.

Solution. (**Ep. 117**.) Le point a, rabattu en (a), se trouve dans l'espace sur cb, droite d'intersection du plan donné S avec le plan passant par (a) et perpendiculaire à l'axe de rotation d, donc au plan P_2.

Cette droite cb rencontre d au point m, et le point a doit être situé sur cb à une distance de m égale à $(a)m''$. La détermination de ce point se fait, comme pour le cas précédent, à l'aide d'un rabattement auxiliaire du plan perpendiculaire à P_2 autour de sa trace-projection prise pour axe de rotation (**186**).

193. Sixième problème fondamental. *Construire le rabattement d'une droite située dans un plan quelconque.*

Ce problème, ainsi que sa réciproque, admettent quatre cas particuliers caractérisés par la ligne du plan que l'on adopte pour axe de rotation.

Solution. On construit le rabattement d'un point quelconque de la droite (**191**). Le point de rencontre de la droite avec l'axe de rotation sera un second point du rabattement de la droite.

194. Problème réciproque. *Le rabattement d'une droite étant donné, relever cette droite, sachant qu'elle doit être située dans un plan quelconque donné.*

Solution. On relève un des points de la droite (**192**). Le point de rencontre du rabattement de la droite avec l'axe de rotation fournira un second point de la droite.

195. Septième problème fondamental. *Etant donnés plusieurs points situés dans un plan quelconque et le rabattement de l'un de ces points, construire les rabattements de tous les autres points à l'aide de trois ou de plusieurs séries de droites parallèles.*

Solution graphique (Ep. 118.) Soient a, b et c trois points du plan S et (c) le rabattement du point c, la trace S_1 étant prise pour axe de rotation.

Par le point c et dans le plan S, faisons passer deux droites quelconques, ayant pour projections sur P_1 les lignes $c'x'$ et $c'y'$. Par les points a et b, menons des droites parallèles à cx et à cy. Nous aurons déterminé, dans le plan S, deux séries de droites parallèles, et par chaque point passera une droite de chacune de ces séries. Ces droites parallèles restent parallèles en rabattement et passeront par les rabattements des points a, b et c, ainsi que par leurs points de rencontre avec l'axe de rotation. On voit que (c) sera le point de rencontre des rabattements des lignes cx et cy; que (b) se trouve à la rencontre des lignes rabattues $z'(b)$ et $v'(b)$, respectivement parallèles à $x'(c)$ et $y'(c)$, et que (a) est déterminé par un couple de droites parallèles au couple $y'(b)$ et $a'(c)$.

Remarques. I. Les droites perpendiculaires à l'axe qui passent par les rabattements des points ainsi que par leurs premières projections, constitueront une troisième série de droites parallèles.

II. Plus le nombre des séries de droites parallèles est considérable, plus la détermination des points est rigoureuse.

III. Cette méthode d'opération peut s'employer pour chacun des quatre axes de rotation que le rabattement du plan S peut admettre.

196. Problème réciproque. *Etant donnés les rabattements* *de plusieurs points appartenant tous à un plan donné, et les projections de l'un de ces points, relever les autres points à l'aide de trois ou plusieurs séries de droites parallèles.*

Solution graphique. (Ep. 119.) Soient (a), (b), (c) les rabattements de trois points du plan S, b' et b'' les deux projections de l'un de ces points.

On joint (a) et (b) par une droite $(a)x'$; par (c), on fait passer une droite parallèle à $(a)(b)$. La droite $(a)(b)$ se relèvera en $x'b'$ et $x''b''$, x et b étant deux points connus de cette droite.

Les projections $z'c'$ et z'' c'' de la droite rabattue $(c)z'$ seront respectivement parallèles aux projections de même nom de xb. Cette série de droites parallèles devant contenir les points a, b et c à construire, et les premières projections a', b' et c' de ces points devant être situées sur des perpendiculaires abaissées des rabattements (a), (b) et (c) sur l'axe de rotation, il est évident que les points a', b' et c' se trouvent déterminés par trois séries de droites parallèles.

Il en sera de même des secondes projections a'', b'' et c'' des points a, b et c.

Remarques. I. En unissant (a) et (c), et en menant par (b) une parallèle à $(a)(c)$, on déterminera une nouvelle série de droites parallèles qui, avec les trois premières, déterminent les points d'une manière plus rigoureuse.

II. Plus le nombre des séries de droites parallèles est grand, plus la détermination des points est rigoureuse.

Problèmes. — Applications.

Vraie grandeur des droites.

197. Problème I. *Construire la vraie longueur d'une portion de droite et les angles que cette droite fait avec les deux plans de projection* P_1 *et* P_2.

Solution dans l'espace. Par la droite, on fait passer un plan perpendiculaire à P_1. On rabat ce plan avec la droite sur P_1 (**182-I**). La droite sera rabattue suivant sa vraie longueur; l'angle que fait la droite ainsi rabattue avec la trace-projection du plan auxiliaire sera l'angle de la droite avec P_1.

Solution graphique. (**Ep. 120.**) La droite limitée aux deux points a et b sera rabattue en $(a)(b)$ suivant sa véritable longueur. Ce rabattement se fait en élevant aux points a' et b' des normales à l'axe de rabattement d', et en portant, sur ces lignes, les longueurs $a'(a)=a''m$ et $b'(b)=b''n$ (**182**).

Le prolongement de $(a)(b)$ fait avec d' l'angle n, angle de d avec P_1.

2° En faisant passer par la droite un plan normal à P_2 et en rabattant ce plan avec la droite sur P_2 (**182-II**), on aura l'angle que fera la droite rabattue avec d'', angle de la droite avec P_2.

198. Exercices. *Construire la vraie grandeur d'une droite limitée à deux de ses points et l'angle que cette droite fait avec* P_1 *ou avec* P_2 :

1° Lorsque les deux projections de la droite se coupent sur l'axe.

2° Lorsque la droite est située dans le quatrième angle dièdre.

3° Lorsqu'elle est située en partie dans deux dièdres différents.

4° Lorsqu'elle est située dans un plan de profil et qu'elle est connue par deux de ses points.

199. Problème II. *Sur une droite donnée d, marquer un point b à une distance r d'un point donné a de cette droite.*

Solution dans l'espace. On rabat la droite d sur P_1, en prenant la trace-projection de son premier plan projetant pour axe de rotation (**182-I**). A partir du point rabattu en (a), on porte, sur la droite rabattue, une longueur $(a)(b)$ égale à r. Le point (b), extrémité de cette longueur, sera le rabattement du point demandé. On relèvera ce point en b' et b'' sur la droite.

Solution graphique. (Ep. 120.) La solution est toute marquée dans les constructions du problème précédent. Pour relever le point (b), il suffira d'abaisser de (b) une perpendiculaire sur (d) pour avoir, au pied de cette normale, la projection b' de b et, par suite, b'' (**183**).

200. Problème III. *Joindre un point donné à un point de l'axe de projection, de manière que la distance entre ces deux points ait une longueur donnée.*

Solution dans l'espace. Le point donné et l'axe de projection déterminent un plan qui a l'axe de projection pour trace sur P_1. On rabat ce plan avec le point sur P_1, en prenant l'axe de projection pour axe de rotation. Du point rabattu (a) comme centre, avec la distance r comme rayon, on décrira un arc du cercle qui peut couper l'axe de projection en des points qui répondent aux conditions du problème.

Solution graphique. (Ep. 121.) Le plan qui passe par l'axe de projection et par le point donné a est oblique à P_1 et à P_2 ; il a l'axe pour trace sur P_1. Le rabattement du point a sur P_1, autour de l'axe de projection pris pour axe de rotation, se fera donc à l'aide des principes exposés au § 191.

De a', on abaissera une normale sur l'axe de projection et l'on portera sur cette normale, et à partir de l'axe, une longueur égale à l'hypothénuse du triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont les distances des projections a' et a'' du point à l'axe de projection (**191**. Règle pratique). L'extrémité (a) sera le rabattement du point a. Les deux points de rencontre de l'axe avec l'arc de cercle décrit de (a) comme centre avec r pour rayon, sont à une distance r de a.

Remarque. Le problème admet deux solutions, une seule solution, ou devient impossible, suivant que la longueur r est plus grande que $(a)m$, égale à $(a)m$ ou plus petite que cette distance.

201. **Problème IV**. *Construire la distance d'un point à une droite.*

Solution dans l'espace. Le point et la droite déterminent un plan qui contient la distance demandée. On rabat ce plan sur P_1, avec la droite et le point y situés, en prenant sa première trace pour axe de rotation (**191**). La distance du point rabattu à la droite rabattue mesure la distance du point à la droite.

Solution graphique. (**Ep. 122**.) Pour avoir le plan déterminé par le point et la droite, nous avons uni le point a à la trace n de la droite sur P_2. Nous aurons ainsi les deux traces T_1 et T_2 du plan T (**112**).

Le rabattement de la droite d passe par m' et par (n), rabattement de la trace n de d sur P_2. (n) sera sur la normale $n'(n)$ abaissée de n' sur l'axe de rotation T_1, et à une distance de x égale à xn'' (**191**).

La droite qui unit n et a se rabat en $(n)v'$; sur cette droite se trouve le rabattement (a) du point a.

La perpendiculaire $(a)(b)$ abaissée de (a) sur $(n)m'$ sera le rabattement de la distance du point a à la droite d ; $(a)(b)$ se relève en $a'b'$ et $a''b''$ (**192**).

202. Exercices et Cas particuliers. I. *Construire la distance d'un point de l'axe à une droite quelconque.*

II. *Construire la distance d'un point donné :*

1° A l'axe ;

2° A une parallèle à l'axe ;

3° A une ligne située dans P_2 ;

4° A une ligne parallèle à P_1 ou à P_2.

203. **Problème V**. *Construire la distance de deux droites parallèles.*

Solution dans l'espace. Les deux droites parallèles déterminent un plan qui contient la distance demandée. On rabat ce plan avec les deux droites sur P_1, en prenant sa première trace pour axe de rotation. La perpendiculaire commune aux deux droites rabattues sera le rabattement de la distance demandée. Cette distance rabattue sera relevée.

Solution graphique. (**Ep. 123**.) La solution graphique se déduit aisément de la solution graphique et de l'épure du problème précédent.

204. Problème VI. *Dans un plan donné, mener une droite qui soit à une distance donnée d'une autre droite également située dans ce plan.*

Solution dans l'espace. Le plan T et la droite d y située seront rabattus sur P_1 autour de la trace T_1 prise pour axe de rotation. Dans le rabattement, on construira une droite (e) parallèle à la droite rabattue, et écartée de celle-ci de la longueur donnée. Cette droite (e) est ensuite relevée et donnera les deux projections e' et e'' de la droite demandée.

Solution graphique. (**Ep. 123**). Pour rabattre la droite d autour de T_1, on construira le rabattement (c) de la seconde trace c'' de cette droite. Ce point c'' restera toujours écarté du point m de l'axe de rotation d'une longueur égale à mc'' (**191**). (c) sera donc le point de rencontre de la normale $c'(c)$, abaissée de c' sur T_1, avec l'arc de cercle décrit de m comme centre avec mc'' pour rayon. Le point (c) joint au point x donne le rabattement (d) de la droite d.

En un point de (d), on élève une normale égale à r, et par l'extrémité de cette normale, on mène une parallèle (e) à (d) ; (e) sera le rabattement de la droite demandée.

(e) se relève en e' et e'' ; e' sera parallèle à d' et passera par y' ; e'' sera parallèle à d'' et passera par y'', seconde projection de y (**192**).

205. Problème VII. *Etant donnés un point et une droite, construire, sur cette droite, un point distant du point donné d'une longueur donnée r.*

Solution dans l'espace. Le point a et la droite d déterminent un plan T, que l'on rabat sur P_1 autour T_1 prise pour axe de rotation. Du point rabattu (a) comme centre, avec la distance donnée r pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera la droite rabattue en deux points qui sont les rabattements des points demandés.

Solution graphique. (**Ep. 124.**) On déterminera le plan T en unissant le point *a* à la seconde trace de la droite. Les rabattements de *d* et de *a* s'obtiennent alors comme au § 201. L'arc de cercle de centre (*a*) et de rayon *r* coupera (*d*) aux deux points (*l*) et (*g*), rabattements des points demandés. Ces points se relèvent en l' et l'', g' et g'' (**192**).

Remarque. Le problème n'admet qu'une solution, si *r* est égale à la distance de (*a*) à (*d*); le problème est impossible, si *r* est plus petite que cette distance.

206. **Problème VIII**. *Vérifier si une droite donnée est parallèle à un plan donné.*

Solution dans l'espace. Par la droite, on fait passer un plan quelconque, pour plus de facilité le premier plan projetant de la droite. Ce plan coupe le plan proposé suivant une droite *e*. La droite *d* est parallèle au plan T, si elle est parallèle à *e*.

Le parallélisme des droites *d* et *e* se vérifie par le parallélisme des projections de même nom de ces droites. Il se vérifie également par un rabattement de ces droites sur P_1 autour de la trace-projection du plan projetant qui les contient.

La droite *d* est parallèle au plan, si les droites rabattues (*d*) et (*e*) sont parallèles.

Solution graphique. (**Ep. 125**.) Les rabattements (*d*) et (*e*) des deux droites se construisent comme au § 184.

207. **Problème IX**. *Etant donné un plan* S, *construire un plan parallèle à* S *et distant de ce plan d'une longueur donnée h.*

Solution dans l'espace En un point du plan S, on élève une perpendiculaire à ce plan et l'on porte sur cette perpendiculaire, et à partir de ce point, une longueur égale à *h*. Le problème est alors ramené à celui de mener par l'extrémité de cette longueur un plan parallèle à S (**116**).

Solution graphique. (**Ep. 126**.) Prenons, pour simplifier l'épure, le point de rencontre *m* des deux traces du plan et menons par ce point la perpendiculaire au plan S. A l'aide d'un rabattement de cette normale opéré sur P_1, on portera sur cette normale, et à partir de *m*, une longueur égale à *h* (**199**).

Le plan R parallèle à S mené par l'extrémité a de cette normale sera le plan demandé.

Remarque. Le plan R coupe l'axe de projection en y. La longueur my portée de l'autre côté de m sur l'axe donnera un second point x de l'axe, par lequel passe un plan T parallèle à S et distant de ce dernier d'une longueur h.

208. Problème X. *Par un point donné a, mener un plan parallèle à l'axe de projection et qui soit distant de cette ligne d'une longueur donnée.*

Solution dans l'espace. (Fig. 127.) Supposons le problème résolu et coupons le plan S à construire par un plan perpendiculaire à l'axe et passant par le point donné a. Ce plan sécant coupe le plan S suivant une droite mn qui passe par le point a, et dont la distance à l'axe est égale à la distance r du plan S à cet axe. Cette droite mn forme avec les deux traces du plan sécant un triangle rectangle onm, ayant o pour sommet de l'angle droit et r pour hauteur correspondante à l'hypothénuse. On construira ce triangle omn; les deux sommets n et m détermineront respectivement les traces S_2 et S_1 du plan S, traces qui sont parallèles à l'axe.

Solution graphique. (Ep. 128.) Le plan auxiliaire normal à l'axe, que l'on mène par a, sera rabattu sur P_2 avec le point a (**186**). Du rabattement (a) du point, on mène une tangente $n(m)$ à la circonférence de cercle décrite de o comme centre avec r pour rayon. $(m)n$ sera le rabattement de l'intersection du plan demandé S avec le plan coupant auxiliaire. En relevant $n(m)$, on aura en n et m les points par lesquels passent respectivement les traces S_2 et S_1 du plan S.

Remarque. Le problème n'est possible que si la longueur r est plus petite que la distance du point a à l'axe de projection. Dans ce cas, le problème admet deux solutions.

Si la longueur r est égale à la distance du point a à l'axe, le problème n'admettra qu'une seule solution.

Angles des droites et des plans.

209. Problème XI. *Construire l'angle de deux droites qui se coupent ainsi que la bissectrice de cet angle.*

Solution dans l'espace. Les deux droites déterminent un plan S qui contiendra l'angle demandé ainsi que la bissectrice de cet angle. On rabat le plan S avec les deux droites sur P_1; l'angle des deux droites rabattues mesure l'angle demandé. La bissectrice de cet angle sera le rabattement, sur P_1, de la bissectrice de l'angle des deux droites.

Solution graphique. (Ep. 129.) Après avoir construit les deux traces S_1 et S_2 du plan des deux droites *d* et *e*, on opère le rabattement de celles-ci, en construisant le rabattement (a) de leur point d'intersection *a*, et en unissant (a) ainsi obtenu aux traces de *e* et *d* sur P_1 (**191**).

Le rabattement (a) du point *a* se trouve sur la normale $a'(a)$ abaissée de a' sur S_1, et sur l'arc décrit de m' comme centre avec $m''a''$ pour rayon. $m''a''$, parallèle à S_2, est, en effet, la vraie longueur de la droite qui joint le point *a* au point m' de l'axe de rotation (**191**). L'angle en (a) formé par les deux droites rabattues mesure l'angle des deux droites *d* et *e* de l'espace.

On construira la bissectrice $(a)v'$ de l'angle obtenu et l'on relève cette droite en $v'a'$ et $v''a''$. Il suffira, à cet effet, de construire les deux projections v' et v'' de v', point de P_1, et d'unir ces points respectivement aux projections de même nom a' et a'' du sommet *a* de l'angle des deux droites.

Vérification. La bissectrice obtenue est une droite du plan S; ces traces sont donc sur les traces de même nom du plan.

210. Exercices et cas particuliers. *Construire l'angle de deux droites qui se coupent et la bissectrice de cet angle :*

1° Une des droites étant parallèle à P_1 ou à P_2;

2° Une des droites est perpendiculaire à un des plans de projection, et l'autre est quelconque;

3° Une des droites est parallèle à l'axe de projection, ou se confond avec cet axe;

4° Les deux droites ont même projection sur P_1 ;

5° Une des droites est dans un plan normal à l'axe, et l'autre est quelconque ;

6° Les deux droites sont dans un plan normal à l'axe ;

7° Une des droites est normale à P_2, et les deux projections de l'autre droite font des angles de 45° avec l'axe.

211. Problème XII. *Construire l'angle de deux droites non sécantes.*

Solution. L'angle de deux droites non sécantes est l'angle que forment deux droites parallèles aux deux droites données et menées par un point quelconque de l'espace.

On fera donc passer, par un point de la droite d, une droite f parallèle à la seconde droite donnée e.

L'angle des droites d et f, que l'on construit à l'aide du problème précédent, sera l'angle des deux droites non sécantes d et e.

Cas particulier. *Construire l'angle de deux droites non sécantes, chacune d'elles étant parallèle à l'un des plans de projection.*

212. Problème XIII. *Connaissant les traces et les projections sur* P_1 *de deux droites sécantes, ainsi que la vraie grandeur de l'angle qu'elles forment, trouver les projections de ces droites sur* P_2.

Solution graphique. (**Ep. 129.**) Ce problème peut être considéré comme la réciproque du problème XI. On unira les traces x et y des deux droites sur P_1 par une droite qui sera la trace S_1 du plan des deux droites. Sur xy, on décrira un segment capable de l'angle donné. Le sommet (a) de cet angle, rabattement du point de rencontre des deux droites, se trouvera à l'intersection de la normale $a'(a)$ avec l'arc du segment.

Le point (a) obtenu sera relevé en a' et a''. A cet effet, menons par a' une parallèle à l'axe qui coupera S_1 en m' ; $m'(a)$ sera la distance du point a au point m de S_1, longueur qui se projette sur P_2 suivant sa vraie grandeur en $m''a''$.

Le point m'' étant connu, il suffira, pour avoir a'', de décrire de m'' comme centre, avec $m'(a)$ pour rayon, un arc de cercle qui coupera la normale $a'a''$ à l'axe de projection en a''. Le point a déterminera avec x'' et y'' respectivement les projections e'' et d'' des deux droites e et d de l'espace.

213. Problème XIV. *Construire l'angle des deux traces d'un plan ainsi que la bissectrice de cet angle.*

Solution dans l'espace. On rabat le plan donné S avec sa trace S_2 sur P_1 autour de S_1 prise pour axe de rotation. L'angle que fera S_1 avec (S_2) sera l'angle des deux traces du plan.

On construira la bissectrice $m(e)$ de cet angle, et l'on relève cette ligne.

Solution graphique. (**Ep. 130.**) Pour obtenir le rabattement (S_2), il suffit de construire le rabattement (a) d'un point a'' de S_2. (a) sera le point de rencontre de la normale $a'(a)$ abaissée de a' sur S_1, avec l'arc décrit de m comme centre avec ma'' pour rayon (**119**).

Pour relever la bissectrice $m(e)$, il suffira de relever le point (e), point où la bissectrice coupe le rabattement $b'(a)$ de la droite ba'' du plan S. Ce point (e) se relève en e' et e'' (**192**), et donne me' et me'' pour les projections de la bissectrice.

Remarques. I. La droite $(e)t'$, parallèle à la trace rabattue (S_2), a ses deux projections $e't'$ et $e''t''$ respectivement parallèles à l'axe de projection et à S_2 et passant par t' et t'', points connus. Il est donc inutile de passer par un rabattement auxiliaire pour obtenir le relèvement de (e).

Le point e' sera, en effet, situé sur la normale $(e)e'$ à S_1 et sur $t'e'$.

II. Ce problème peut être considéré comme un cas particulier du problème XI.

Exercice. Résoudre le même problème, les deux traces du plan étant en ligne droite.

214. Problème XV. *Connaissant la première trace d'un plan et l'angle que cette trace fait avec la seconde trace du même plan, construire la seconde trace de ce plan.*

Solution graphique. (**Ep. 130.**) Ce problème peut être considéré comme la réciproque du problème XIV.

Au point de rencontre m de la trace connue S_1 avec l'axe, on mène une droite (S_2) qui fait avec S_1 l'angle donné. (S_2) sera le rabattement de la seconde trace S_2 demandée. On relève (S_2), en en relevant un point, le point (a).

A cet effet, il suffira d'abaisser de (a) une normale à S_1 et de la prolonger jusqu'à l'axe de projection en a' pour avoir, en ce point, la première projection du point a de S_2. La seconde projection a'' sera sur $a'a''$ et à une distance $(a)m$ de m (**192**), donc au point de rencontre de $a'a''$ avec l'arc de cercle décrit de m comme centre avec $m(a)$ pour rayon.

Remarque. Suivant que l'angle donné est plus grand ou plus petit que l'angle que fait S_1 avec l'axe, ou égal à cet angle, le problème admettra deux solutions, une seule solution, ou devient impossible.

Dans le cas d'une seule solution, le plan S se confond avec P_1.

215. Problème XVI. *Construire l'angle d'une droite et d'un plan.*

Solution dans l'espace. D'un point quelconque de la droite d, on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné T. On construit l'angle que fait la droite d avec cette perpendiculaire; cet angle sera le complément de l'angle que d fait avec T.

Solution graphique. Le problème est un cas particulier de celui du § 209.

216. Exercices et cas particuliers. *Construire l'angle d'une droite et d'un plan :*

1° La droite étant quelconque et le plan parallèle à l'axe de projection.

2° La droite étant quelconque et le plan déterminé par un point donné et par l'axe de projection.

3° Le plan étant quelconque et la droite parallèle à l'axe de projection.

4° Le plan étant quelconque et la droite se confondant avec l'axe.

217. Problème XVII. *Construire l'angle qu'une droite fait avec le plan bissecteur* B_1.

Solution dans l'espace. D'un point a de la droite d, on abaisse une perpendiculaire sur B_1. On en détermine le pied b ainsi que le point de rencontre c de la droite donnée avec B_1. Les trois points a, b et c déterminent un triangle rectangle, dont l'angle opposé au côté ab est l'angle demandé.

Solution graphique. (Ep. 131.) Prenons la seconde trace de la droite pour point a et menons, par ce point, un plan normal à l'axe de projection et, par suite, normal à B_1. Ce plan contient la normale abaissée de a sur B_1 et coupe B_1 suivant une droite qui passe par a' et qui fait, comme B_1, 45° avec P_2, donc avec $a''a'$.

Rabattons ce plan auxiliaire T sur P_2 autour de $a''a'$. La droite d'intersection de T avec B_1 se rabat suivant $a'x$, et la normale abaissée de a'' sur B_1 se rabat suivant $a''(b)$, perpendiculaire à $a'x$.

Construisons le point de rencontre c de la droite d avec B_1. Ce point, la première trace principale de d (**66**), se construit en déterminant le point à projections symétriques de la droite (**101**).

Ce point c obtenu, on construira, par rabattement sur P_2, la véritable longueur de la distance $a''c$, et de a'' comme centre, avec cette longueur $a''(c)$ pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera $a'x$ en c, et déterminera le triangle rectangle $a''(b)c$, dans lequel l'angle en c est l'angle de d avec B_1.

218. Problème XVIII. *Construire les angles qu'un plan fait avec les deux plans de projection* P_1 *et* P_2.

Solution dans l'espace. (**Fig. 132.**) Par un point x de l'axe, on mène un plan perpendiculaire à la première trace S_1 du plan donné, et un autre plan perpendiculaire à S_2. Le premier plan auxiliaire coupe le plan S suivant ab ; l'angle abx sera l'angle plan correspondant du dièdre des plans S et P_1.

Le second plan auxiliaire coupera S suivant de, et l'angle edx mesure le dièdre des plans S et P_2.

Ces angles sont situés dans des plans perpendiculaires, le premier à P_1, le second perpendiculaire à P_2, et se construisent par rabattement.

Solution graphique. (**Ep. 133.**) Les deux plans auxiliaires seront rabattus sur P_1 (**182**).

219. Cas particuliers et exercices. *Construire les angles qu'un plan fait avec les deux plans de projection dans les cas particuliers suivants :*

1° Le plan est parallèle à l'axe de projection.

2° Le plan est déterminé par un point donné et pour l'axe de projection.

3° Le plan est normal au plan bissecteur B_1 ; les traces étant symétriques par rapport à l'axe.

4° Le plan est normal au plan bissecteur B_2 ; les traces ne formant qu'une seule trace-double.

Problème. *Construire le plan bissecteur de chaque dièdre formé par un* *plan avec les plans de projection, et déterminer les projections de l'intersection de ces deux plans bissecteurs.*

220. Problème XIX. *Connaissant la première trace d'un plan et l'angle que ce plan fait avec* P_1, *construire la seconde trace de ce plan.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 132.**) L'angle plan qui mesure le dièdre des plans S et P_1 se trouve dans un plan perpendiculaire à S_1 et, par suite, à P_1.

Ce plan coupe P_1 suivant une droite bx perpendiculaire à S_1, le plan P_2 suivant ax perpendiculaire à xb, et le plan S suivant une droite ba, qui fait avec xb en b l'angle que l'on a donné.

Solution graphique. (**Ep. 133.**) Sur une perpendiculaire $b'x$ à S_1, on construira un triangle rectangle, qui a xb' pour côté de l'angle droit, et en b' un angle aigu égal à l'angle donné. Le sommet (a) de ce triangle sera le rabattement du sommet a sur P_1 autour de xb', et ce point, relevé en a'' et a' (**182**), donnera en a'' un point de la seconde trace du plan S. Cette seconde trace sera déterminée par a'' et par le point de rencontre v de S_1 avec l'axe de projection.

221. Problème XX. *Construire l'angle de deux plans.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 134**). On coupe les deux plans par un plan perpendiculaire à leur intersection bc. Ce plan coupera P_1 suivant mn, perpendiculaire à la projection $b'c$ de bc sur P_1, les plans S et T respectivement suivant les droites ma et na, perpendiculaires en a à bc, et formera ainsi le triangle mna, dont l'angle en a est l'angle plan correspondant du dièdre bc.

Il s'agit de construire ce triangle mna et, à cet effet, on construira les véritables longueurs de ses trois côtés. Le côté mn se trouvera tout construit sur P_1 et les côtés ma et na se construiront en rabattant, sur P_1, successivement les plans S et T avec bc et les droites ma et na y situées.

Solution graphique. (**Ep. 135.**) Pour construire le côté ma du triangle mna, on rabat le plan S qui contient cette droite sur P_1 autour de S_1. La droite d'intersection bc des deux plans S et T se rabat en $c'(b)$ (**192**), et la droite ma passera, dans ce rabattement, par m et sera perpendiculaire à $c'(b)$; $m(a)$ est donc la véritable longueur du côté *ma*. On construira d'une manière analogue le côté *na* en rabattant, sur P_1, le plan T qui contient cette droite. Dans ce rabattement, le côté *na* passe par *n*, point fixe, et sera perpendiculaire à $c'(b)$, rabattement de *cb* autour de T_1 ; $n(a)$ sera la vraie longueur du côté *na*.

Sur *mn* comme base, avec les deux côtés obtenus $m(a)$ et $n(a)$, on construira le triangle *mna*, qui a en *a* l'angle plan correspondant du dièdre de T et de S.

Remarque. La hauteur *ah* du triangle *man* est normale à *mn* et se rabat sur P_1 le long de *hc'* ; le sommet *a* se trouvera donc rabattu également en un point de *b'c'*. Il résulte de là que les deux arcs de cercle décrits de *m* et de *n* comme centres, respectivement avec $m(a)$ et $n(a)$ comme rayons, doivent se couper en un point de *b'c'*.

Deuxième solution. (**Fig. 134**.) On coupera les deux plans S et T par un plan normal à la droite d'intersection *bc*. Ce plan coupe le trièdre formé par S, T et P_1 suivant le triangle *man*. La hauteur *ah* de ce triangle étant perpendiculaire en *h* à *mn*, droite de P_1, doit se projeter sur P_1 le long de *b'c'* (**49**) ; *ah* est donc une droite du premier plan projetant de *bc*.

D'un autre côté, *ah* est dans le plan *mna* normal à *bc* ; elle est donc normale également à cette droite, et peut se construire en rabattant *bc* sur P_1 autour de *b'c* pris pour axe, et en abaissant de *h* une perpendiculaire sur ce rabattement de *bc*.

Ayant la base *mn* et la hauteur *ah* du triangle *mna*, ainsi que la trace *h* de cette hauteur sur la base *mn*, on pourra construire ce triangle, dont l'angle *a* est l'angle plan du dièdre formé par les plans T et S.

Solution graphique. (**Ep. 136**.) On coupe donc les deux plans T et S par un plan perpendiculaire à *bc* ; la première trace *mn* de ce plan sera normale à *b'c'* et donne la base *mn* du triangle *man*.

On rabat *bc* sur P_1 en $(b)c'$, et la normale abaissée de *h* sur $(b)c'$ sera la hauteur du triangle *man*. Cette hauteur portée en *h* sur *hc'* donne, en *a*, le sommet du triangle *man*, et, par suite, en *a*, l'angle qui mesure celui des deux plans.

Troisième solution. D'un point pris dans l'angle des deux plans, on abaisse une perpendiculaire sur chacun de ces plans. L'angle de ces deux droites (**209**) sera le supplément de l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans.

222. Problème XXI. *Construire le plan bissecteur du dièdre de deux plans donnés.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 134**.) Le plan bissecteur contient la droite d'intersection *bc* des deux plans, et la bissectrice *ak* de l'angle plan correspondant *man* du dièdre des deux plans.

Les traces du plan bissecteur passeront donc par les traces de même nom de ces deux droites.

Solution graphique. (**Ep. 135**.) La première trace du plan bissecteur passera par c' et k, trace de la bissectrice de l'angle *man*. La seconde trace passe par b'' et par le point de rencontre x de la première trace avec l'axe de projection.

223. Exercices et cas particuliers. *Construire l'angle de deux plans et le plan bissecteur de cet angle :*

1° *Les traces sur* P_1 *ou sur* P_2 *sont parallèles.*

On coupe par un plan perpendiculaire à la droite d'intersection des deux plans.

Ce plan est perpendiculaire à P_1 ou à P_2, suivant que les traces des plans sur P_1 ou sur P_2 sont parallèles. (**Ep. 137.**)

2° *Un des deux plans est parallèle à l'axe.*

Employer la deuxième solution.

3° *Les deux plans sont parallèles à l'axe.*

Le plan auxiliaire perpendiculaire à la droite d'intersection des deux plans devient un plan de profil. Le plan bissecteur v est également parallèle à l'axe. (**Ep. 138.**)

4° *Un des deux plans est perpendiculaire à l'axe.*

Employer la deuxième solution.

5° *Les deux plans ont même trace sur* P_1 *ou sur* P_2.

Le plan auxiliaire devient perpendiculaire à P_1 ou à P_2. (**Ep. 139.**) La trace commune appartient au plan bissecteur v.

6° *Un des deux plans est déterminé par l'axe et par un point* b.

Employons la deuxième solution. A cet effet, construisons d'abord la droite d'intersection des deux plans, dont l'un est représenté par l'axe et par le point b. En unissant b à un point quelconque e de l'axe, on a une droite de ce deuxième plan.

Coupons (**Ep. 140.**) les deux plans par un plan auxiliaire H parallèle à P_1. Ce plan coupera le plan T suivant une droite parallèle à T_1, et l'autre plan suivant une parallèle à l'axe qui passe par le point de rencontre C de H avec bc. Le point de rencontre de ces deux droites d'intersection déterminées par H sera un point d de la droite d'intersection des deux plans proposés, laquelle droite passant par x se trouve déterminée et sera xd.

On coupera les deux plans par un plan auxiliaire normal à xd. La première trace de ce plan sera normale à xd' et donne la base mn du triangle mna de la deuxième solution (**221**). Le sommet a s'obtient en rabattant xd en $x(d)$ sur P_1, et en abaissant de h la normale $h(a)$ sur $x(d)$; $h(a)$ sera la hauteur rabattue du triangle mna, par suite, le sommet a est obtenu ainsi que l'angle man des deux plans.

Le plan bissecteur V a sa trace V_1 qui passe par x et par k, trace de la bissectrice ak de man sur P_1.

La seconde trace V_2 passera par x et par la seconde trace d'une parallèle à V_1 menée par d, point de l'intersection commune des deux plans proposés, donc point du plan bissecteur.

7° *Un des deux plans est parallèle à l'axe; l'autre passe par l'axe et par un point donné.*

Employez la deuxième solution.

8° *Un des deux plans a ses traces en ligne droite; l'autre plan passe par un point donné.*

9° *Les traces des deux plans se coupent toutes au même point de l'axe.*

Construire d'abord la droite d'intersection des deux plans (**132**), puis employer la deuxième solution.

10° *Les deux traces de chacun des deux plans sont en ligne droite.*

Les deux plans T et S (**Ep. 141.**) sont perpendiculaires au plan bissecteur B_2; ils se coupent donc suivant une droite normale à B_2, laquelle droite se projette suivant une normale à l'axe (**73**). On en déterminera les deux points a et b.

On coupe, comme dans la deuxième solution, les deux plans T et S par un plan normal à ab. Ce plan donne la base mn du triangle man et h sera le pied de la hauteur ha, laquelle hauteur se construit par rabattement en (ha), etc.

Le plan bissecteur V passe par k et par le point de rencontre des deux traces T_1 et S_2; il est d'ailleurs normal à B_2, ses traces sont donc en ligne droite et se confondent avec la droite $a'k$.

224. Problème XXII. *Connaissant les traces sur P_1 de deux plans, la première projection de la droite d'intersection et l'angle des deux plans, construire les traces de ces plans sur P_2.*

Solution graphique. (**Ep. 142.**) Ce problème est la réciproque du problème du § 220.

En coupant les deux plans par un plan perpendiculaire à la droite d'intersection, on obtient mn, normale à $c'b'$, pour base du triangle man. Sur mn, on décrit un segment capable de l'angle donné des deux plans. Le point de rencontre de ce segment avec $b'c'$ sera le sommet rabattu du triangle mna ; ah en sera la hauteur.

On décrira, de h comme centre avec ah pour rayon, un arc de cercle; la tangente à cet arc menée par c' sera le rabattement $c'(b)$ de la droite d'intersection des plans T et S, autour de la trace-projection $b'c'$ de son plan projetant. On relèvera (b) en b'', et les traces T_2 et S_2 qui doivent se couper en ce point sont déterminées.

—

Problèmes et exercices.

—

225. Problème XXIII. *Construire les traces d'un plan, connaissant la première projection de sa ligne de plus grande pente et l'angle du plan avec* P_1.

Solution graphique. (**Ep. 143**.) Si d' est la première projection de la ligne de plus grande pente d du plan T, a' la première trace de d, la trace T_1 du plan passe par a' et sera perpendiculaire à d'. La ligne de plus grande pente d étant normale à T_1, elle se trouve dans un plan normal à T_1, plan dont la trace-projection sur P_1 est d', et qui coupe T et P_1 suivant l'angle plan correspondant donné du dièdre P_1T. Il suffira donc de construire en a' sur d' un angle égal à l'angle de T avec P_1, de prolonger le côté de cet angle jusqu'à sa rencontre en (b) avec la normale $b'(b)$ à d', pour avoir, en (b), le rabattement du point b de T_2. Ce point se relève en b'' et déterminera T_2.

226. Problème XXIV. *Déterminer la seconde projection d'un point situé dans un plan, étant donnés la première projection* a' *de ce point, la première trace du plan et l'angle que ce plan fait avec* P_1.

Solution graphique. (**Ep. 144**.) Par a', on mène un plan perpendiculaire à la trace donnée T_1 du plan T. Ce plan coupe les plans T et P_1 suivant l'angle plan connu du dièdre de T avec P_1, et le plan P_2 suivant une normale à l'axe. On rabat ce plan auxiliaire sur P_1 autour de d', et l'on a ainsi le triangle rectangle $c'b'(c)$, dont le sommet (c) est le rabattement du point c de T_2. On relève (c) en c'; on aura $c''b''$, seconde projection de la droite d'intersection de T avec le plan auxiliaire. Le point a est sur cette droite, donc a'' est sur $b''c''$.

227. Problème XXV. *Même problème que le précédent, on donne la seconde projection du point et l'on suppose que, par suite des dimensions de l'épure, il n'est pas possible de déterminer la seconde trace du plan.*

Ce problème est un cas particulier du problème précédent.

228. Problème XXVI. *On donne la première trace d'un plan, les deux projections d'un point et la distance de ce point au plan : déterminer l'autre trace du plan.*

Solution dans l'espace. La distance du point a au plan T se projette sur P_1 sur la perpendiculaire $a'b'$ à T_1, trace-projection sur P_1 du premier plan projetant mené par cette distance. Ce plan projetant contient le point a, coupe le plan T suivant une droite, laquelle est à la distance donnée de a et, par suite, tangente à la circonférence de cercle décrite, dans ce plan projetant, de a comme centre avec la distance donnée pour rayon.

Solution graphique. (**Ep. 145.**) On mène par a' une perpendiculaire à T_1 et l'on rabat le point a en (a) sur P_1, en prenant cette perpendiculaire pour axe de rabattement. La tangente menée par b' à la circonférence de cercle décrite de (a) comme centre avec la distance donnée pour rayon, coupe la normale $c'(c)$ en (c). $b'(c)$ sera le rabattement d'une droite de T, droite qui se relève en $b''c''$. xc'' sera la seconde trace T_2 du plan T.

Remarques. I. Le problème admet deux solutions, si la distance donnée d est plus petite que $b'(a)$.

Le plan T devient le plan P_1, si d est égale à $a'(a)$, égale à la première hauteur du point a.

Le problème est impossible, si d surpasse $b'(a)$.

II. Après avoir construit le pied e de la perpendiculaire abaissée de a sur ce plan, il faut que (e) soit le rabattement de ce point et que $(e)e'$ soit égale à la distance de e'' à l'axe. Cette dernière remarque renferme les vérifications du problème.

229. Problème XXVII. *Déterminer la seconde trace d'un plan dont on connaît la première trace et la distance d'un point de l'axe à ce plan.*

Ce problème est un cas particulier du problème précédent.

230. Problème XXVIII. *Déterminer les traces d'une droite qui passe par deux points donnés situés dans un plan* T *perpendiculaire à l'axe, un plan de profil.*

Solution dans l'espace. On rabat sur P_2 le plan T avec les deux points et la droite y situés. Les points de rencontre de la droite rabattue avec T_2 et avec l'axe sont les rabattements des traces de la droite respectivement sur P_2 et P_1. Ces traces sont ensuite relevées.

Solution graphique. (Ep. 146.) La droite rabattue s'obtient en construisant (**182**) le rabattement des deux points donnés a et b. Les traces demandées sont les points d et e'.

231. Problème XXIX. *Construire le point de rencontre d'un plan avec une droite située dans un plan perpendiculaire à l'axe, la droite étant déterminée par deux de ses points.*

Solution dans l'espace. Le plan S normal à l'axe qui contient la droite coupe le plan donné T suivant une droite. Le point de rencontre de cette droite avec la droite donnée est le point où celle-ci coupe le plan T.

Solution graphique. (Ep. 147.) Le plan S coupe le plan T suivant une droite qui a pour traces les points de rencontre m et n des traces de même nom des deux plans. On rabat S sur P_2 avec les points m et n, a et b y situés. On aura $(a)(b)$ pour rabattement de la droite donnée et $m(n)$ pour celui de la droite d'intersection des deux plans S et T. $m(n)$ coupe $(a)(b)$ en (c), rabattement du point demandé, lequel se relève en c' et c''.

232. Problème XXX. *Par un point donné, mener une droite qui rencontre l'axe de projection sous un angle donné.*

Solution dans l'espace. Le point donné a et l'axe déterminent un plan qui contient la droite demandée. On rabat ce plan sur P_1, en se servant de l'axe de projection comme axe de rotation. Par le rabattement (a) du point ainsi obtenu, on mène une droite qui fait avec l'axe l'angle voulu et l'on a le rabattement de la droite demandée. Cette droite est ensuite relevée.

Solution graphique. (**Ep. 148**.) Pour avoir le rabattement (a) du point a sur P_1, appliquons la règle pratique (**191**). De a', on abaisse une normale sur l'axe de rotation (ici l'axe de projection). A partir de cet axe, on porte, sur cette normale, une longueur égale à la distance du point a à l'axe, distance qui est l'hypothénuse d'un triangle rectangle $m(a)n$, dont les deux côtés de l'angle droit sont les distances des projections a' et a'' de a aux projections de même nom de l'axe (ici l'axe de projection). On a donc ainsi (a) et, par suite, (d), droite demandée rabattue. Cette droite se relèvera en xa' et xa''.

233. **Problème XXXI**. *Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec les plans de projection, des angles donnés.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 149**.) Supposons le point b sur P_2. Soit ab la droite demandée qui fait un angle α avec P_1 et un angle β avec P_2.

Rabattons la droite ba sur P_2, en nous servant de la seconde trace bb' de son premier plan projetant comme axe. Le rabattement $b(a)$ sera l'hypothénuse du triangle rectangle $bb'(a)$ et fait, en (a), avec l'axe, un angle égal à α.

Sur $b(a)$ comme hypothénuse, construisons un triangle rectangle, ayant en b un angle aigu égal à β. Le sommet de l'angle droit (a'') est à la même distance du point b que l'est le point a'', seconde projection de la trace a sur P_1 de la droite proposée ab.

Les longueurs $b(a'')$ et $b'(a)$ seront respectivement les longueurs des projections de ab sur P_2 et P_1.

Solution graphique. (**Ep. 150**.) D'un point quelconque b'' pris sur P_2, on abaisse une perpendiculaire sur l'axe. On construit un triangle rectangle, ayant $b''b'$ et l'axe pour côtés de l'angle droit, et en (a) un angle aigu égal à α.

Sur $b''(a)$ comme hypothénuse, on construit un nouveau triangle rectangle, ayant en b'' un angle aigu égal à β.

De b'' comme centre, avec $b''(a'')$ comme rayon, on décrit un arc de cercle, qui coupera l'axe de projection en a'', projection, sur P_2, de la trace a de ab sur P_1.

Cette trace a se trouvera sur la perpendiculaire élevée en a'' à l'axe, et sur l'arc décrit de b' comme centre avec $b'(a)$ comme rayon.

La droite d ainsi construite fait un angle donné α avec P_1 et un autre angle donné β avec P_1.

Parallèlement à d, on mène une droite par le point donné f. La droite ainsi construite répond aux conditions du problème.

Remarque. Le problème est possible, si la somme des angles $\alpha + \beta$ est égale à 90° ou plus petite que 90°.

En effet, pour que la construction précédente soit possible, il faut que la longueur $b''(a'')$ soit égale à $b''b'$ ou plus grande que $b''b'$.

Or $b''(a'') = b''(a)\ cos\ \beta$ et $b''b' = b''(a)\ sin\ \alpha$; il faut donc, pour que le problème soit possible, que $cos\ \beta$ soit égal à $sin\ \alpha$ ou plus grand que $sin\ \alpha$, ce qui arrive si $\alpha + \beta > 90°$.

234. Problème XXXII. *Par une droite donnée d, faire passer un plan qui fasse, avec* P_1, *un angle donné* α.

Solution dans l'espace (**Fig. 151**.) Les traces du plan passeront par les traces de même nom de la droite. La trace sur P_1 passe donc par b', première trace de d.

Par a'', seconde trace de d, menons une ligne de plus grande pente du plan sur P_1; elle se projette sur P_1 suivant $a'c'$, perpendiculaire à la première trace du plan demandé, et fera, avec sa projection $a'c'$, l'angle donné α. On peut construire le triangle $a''a'c'$ et par suite, on a $a'c'$, rayon d'une circonférence de cercle de centre a' à laquelle la première trace du plan demandé doit être tangente.

Solution graphique. (**Ep. 152**.) On construira, sur P_2, un triangle rectangle $a''a'(c')$, ayant $a''a'$ pour côté de l'angle droit et pour angle aigu adjacent $\beta = 90° - \alpha$. $a'(c')$ sera la longueur de la première projection de la ligne de plus grande pente du plan, laquelle projection est, comme on sait, normale à la première trace du plan.

De a' comme centre avec $a'(c')$ pour rayon, on décrira un arc de cercle; de b', on mènera une tangente à cet arc. Cette tangente sera la première trace T_1 du plan. La seconde trace sera T_2.

Remarque. Suivant que le point b', première trace de d, est à l'intérieur de la circonférence de rayon $a'(c')$, sur cette circonférence, ou en dehors de cette ligne, le problème est impossible, admet une solution ou en admet deux.

Or, ces conditions arrivent si l'angle de la droite d avec P_1 est plus grand que α, égal à α ou plus petit que cet angle.

235. Problème XXXIII. *Par un point donné, mener un plan qui fasse des angles donnés avec les deux plans de projection.*

Solution dans l'espace. (**Fig. 153.**) Construisons d'abord un plan faisant des angles donnés α avec P_1, β avec P_2, puis, par le point donné, menons un plan parallèle à ce plan ainsi construit.

Soit s ce plan. Du point m situé sur l'axe, menons un plan perpendiculaire à s_1 et un autre plan perpendiculaire à s_2. Le premier coupe s suivant la droite $d'e''$ qui fait avec $d'm$ un angle α, et le second coupe s suivant $b''c'$ qui coupe $b''m$ sous un angle égal à β. Les deux triangles $md'e''$ et $mb''c'$ sont rectangles en m et ont même hauteur mr, ligne d'intersection des plans de ces deux triangles. Ces plans sont tous les deux perpendiculaires au plan s, comme étant perpendiculaires respectivement à s_1 et à s_2, arêtes de deux dièdres comprenant, comme face commune, le plan s.

Solution graphique. (**Ep. 154.**) Sur l'axe, au point m et dans P_2, on construira le triangle rectangle $e''m(d)$, rectangle en m et ayant l'angle en (d') égal à α. Le triangle $e''m(d')$ peut être considéré comme étant le rabattement, autour de $e''m$ et sur P_2, du triangle $e''md'$ de l'espace, triangle, dont le sommet d' est sur s_1 et dont le côté md' est perpendiculaire à s_1. Par conséquent la trace s_1 cherchée passera par c' et sera une tangente à l'arc décrit de m comme centre avec $m(d')$ pour rayon.

Sur l'axe, en m et dans P_1, construisons un autre triangle $mc'(b'')$, rectangle en m et ayant l'angle en $(b'')=\beta$ et pour hauteur r. Ce triangle peut être considéré comme celui de l'espace de même nom et rabattu sur P_1 autour de mc' pris pour axe. Donc, la trace s_2

du plan passera par c' et sera tangente à l'arc décrit de m comme centre avec $m(b'')$ pour rayon.

Remarque. Le problème n'est possible que pour autant que les tangentes aux deux arcs se coupent en un même point x de l'axe.

Le plan s une fois trouvé, le plan T mené par a parallèlement à s sera le plan qui satisfait aux conditions du problème.

236. **Problème XXXIV**. *Connaissant les traces de deux plans sur* P_1 *et le rabattement de leur intersection commune autour de chacune de ces traces, construire les traces de ces plans sur* P_2.

Solution graphique. (**Ep. 155**.) Soient S_1 et T_1 les deux traces données des deux plans S et T, soient $a'x$ et $a'y$ les rabattements sur P_1 de l'intersection commune autour de S_1 et T_1. Ces deux rabattements passent par le point de rencontre a' de S_1 et T_1, point qui est la première trace de l'intersection commune et qui se projette sur P_1 au point a'' de l'axe.

Prenons, sur chacun de ces deux rabattements, un point (b) également écarté de a'. Ces deux points (b) sont les deux rabattements d'un point b de l'intersection commune, lequel point, devant avoir sa projection b' sur la perpendiculaire abaissée de (b) sur T_1, et sur la perpendiculaire abaissée de (b) sur S_1, se projette en b', point de rencontre de ces perpendiculaires.

En joignant $a'b'$, on a la première projection de l'intersection des deux plans, et le point de rencontre c' de cette projection avec l'axe sera la première projection du point de rencontre c des secondes traces des deux plans. Ce point c aura son rabattement sur P_1, autour de S_1, au point de rencontre (c) de $a'x$ avec la perpendiculaire $c'(c)$ à S_1. Le rabattement du même point sur P_1, autour de T_1, sera en (c) sur $a'y$. Le point c est donc écarté de m d'une longueur égale à $m(c)$ et de n d'une longueur égale à $n(c)$; il se trouvera par suite au point de rencontre des deux arcs de cercle décrits de m et n comme centres, respectivement avec $m(c)$ et $n(c)$ pour rayons.

Vérifications. Les données du problème sont bien choisies, si les deux arcs de cercle se coupent en un point de la normale $c''c'$ à l'axe.

237. **Problème XXXV**. *Trois points étant donnés, construire* *le triangle dont ces trois points seraient les sommets, ainsi que les projections du centre du cercle inscrit.*

Solution dans l'espace. Par les trois points donnés on fait passer un plan T. On rabat ce plan avec les trois points sur P_1 en prenant la trace T_1 pour axe.

Le triangle qui a les trois points rabattus pour sommets sera le triangle demandé.

On construira le centre du cercle inscrit de ce triangle, point qui sera ensuite relevé.

Solution graphique. (Ep. 156.) Soient les trois points a, b et c, par lesquels on fera passer le plan T (**111**). Pour rabattre le point b sur P_1, on se sert de la règle pratique du § 191. On abaissera de b' une perpendiculaire sur T_1 et l'on portera sur cette perpendiculaire, et à partir de m, une longueur égale à l'hypothénuse du triangle rectangle qui a $b'm$ et $b''n$ pour côtés de l'angle droit.

Le rabattement (c) du point c se trouvera sur $v(b)$ et sur la perpendiculaire $c'(c)$ abaissée de c' sur T_1.

Le rabattement (a) du point a est, à son tour, déterminé par le point de rencontre de $r(c)$ avec $a'(a)$ normale à T_1 (**191**).

On aura ainsi $(a)(b)(c)$, rabattement du triangle de l'espace. On construira le centre du cercle inscrit (d) de ce triangle, point que l'on relève en d' et d'', en se servant des droites $(d)(a)s$ et $(c)(d)u$. Ces droites se projettent sur P_1 en $sa'd'$ et $ud'c'$ et se coupent en d' ; elles se projettent sur P_2 en $s''a''$ et $u''\ c''$ et se coupent en d''.

Vérifications. La droite $(d)d'$ doit être perpendiculaire à T_1 et la droite $d'd''$ doit être normale à l'axe de projection.

238. Problème XXXVI. *Par un point donné a mener une droite qui coupe une autre droite donnée sous un angle donné.*

Solution dans l'espace. La droite donnée d et le point a déterminent un plan T que l'on rabat avec d et a sur P_1. Par le point a rabattu on mène une droite qui coupe la droite rabattue sous l'angle donné. Cette droite relevée donnera les projections de la droite demandée.

Solution graphique. (Ep. 157.) Par le point donné a on mène une droite parallèle à la droite donnée d et l'on détermine ainsi le plan T, dont on construira les deux traces T_1 et T_2. Pour rabattre la droite d, remarquons qu'elle coupe l'axe de rotation T_1 en v' et la trace T_2 en m''. Le point m'' se rabat en (m), point de rencontre de la perpendiculaire $m'(m)$ à T_1 avec l'arc décrit de x comme centre avec xm'' pour rayon (**191**). La droite rabattue passera donc par (m) et par v'. Pour avoir le rabattement (a) du point a, rabattons aw, parallèle à d, en $w'(a)$ parallèle à (d), nous aurons (a) au point de rencontre de $w'(a)$ avec la perpendiculaire $a'(a)$ abaissée de a' sur l'axe.

Par le rabattement (a) obtenu on mènera la droite $(a)(b)$ qui coupe la droite $v'(m)$ en (b) sous un angle égal à l'angle donné.

Cette droite $(a)(b)$ sera ensuite relevée en $a'b'$ et $a''b''$. Dans cette opération on se servira du point $r'r''$.

Vérifications. 1° b' et b'' sont unis par une normale à l'axe de projection.

2° Les trois points r', b' et a' sont en ligne droite. Il en est de même des points r'' b'' et a''.

3° La droite ab est dans le plan T ; ses traces sont sur les traces de mêmes noms du plan.

239. Problème XXXVII. *Etant donnés le rabattement d'une circonférence de cercle et les projections d'un point de cette courbe, construire les projections d'autant de points de cette circonférence que l'on voudra.*

Solution graphique. (**Ep. 158.**) Ce problème est une application du problème du § 195.

Soit (b) un point de la circonférence rabattue, point qui a ses projections données en b' et b''.

On unira (b) à un point quelconque (c) de la circonférence rabattue. Les droites parallèles à $(b)(c)m'$ formeront une première série de droites parallèles, lesquelles droites se relèvent sur P_1 suivant des parallèles à $m'b'$, et sur P_2 suivant des parallèles à $m''b''$.

Des droites parallèles à $(d)(c)r'$ formeront une deuxième série de droites parallèles. Une troisième série de droites parallèles est celle des normales à l'axe de rotation.

240. Problème XXXVIII. *Par un point donné mener une droite* *qui rencontre une autre droite donnée et qui fasse, avec un plan donné, un angle donné.*

Solution dans l'espace. (Fig. 159.) La droite demandée doit passer par le point donné a et s'appuyer sur la droite d. Elle est donc située dans le plan déterminé par d et par a et ne peut rencontrer le plan donné s qu'en un point situé sur l'intersection de s avec le plan auxiliaire déterminé par d et par a.

Comme l'angle que la droite demandée doit faire avec s est donné, nous connaissons aussi son complément β, angle que la droite fera avec la perpendiculaire ai abaissée du point a sur le plan s. Cette perpendiculaire ai, qui mesure la distance du point a au plan s, nous donnera aussi, dans un triangle rectangle aim, la distance du pied i de cette perpendiculaire au point m où la droite demandée perce le plan s.

Solution graphique. (Ep. 160.) Par le point a et la droite d on fait passer un plan, dont on construit l'intersection fg avec le plan s.

Du point a on abaisse une perpendiculaire sur le plan s et l'on en détermine le pied i ainsi que la véritable longueur du segment ai.

On construira, en dehors de l'épure, un triangle rectangle ayant ai pour un des côtés de l'angle droit et dont l'angle aigu adjacent à ce côté est égal à β, complément de l'angle que d doit faire avec s. On déterminera im, distance qui sépare le point où la droite perce le plan s du pied i de la perpendiculaire.

Dans le plan s et sur fg on détermine un point t, distant de i de la longueur im, ce qui se fait en rabattant le plan s avec i et fg dans le plan P_1 en prenant s_1 pour axe de rotation.

241. Problème XXXIX. *Réduire un angle à l'horizon.*

Solution dans l'espace. (Fig. 161.) Réduire un angle à l'horizon veut dire, trouver la projection sur P_1 (P_1 étant un plan horizontal) d'un angle donné m, connaissant la hauteur du sommet s au-dessus de P_1, et les angles α et β que les côtés sc et sb font avec la verticale sa.

La solution du problème consiste à construire le triangle bac, le sommet a étant donné et les trois côtés ab, ac et bc pouvant se construire par rabattement.

Solution graphique. (**Ep. 162.**) Plaçons le sommet s dans P_2 en s'', à une distance $s''a'$ de l'axe égale à sa. Rabattons autour de sa et sur P_2 le triangle sca formé dans l'espace par sa, sc et sa projection ac. Ce rabattement nous est connu, vu que l'on donne l'angle α. $a'(c)$ sera la longueur de la projection sur P_1 de l'un des côtés de l'angle.

Rabattons de même sur P_2 et autour de $s''a'$ le triangle sab de l'espace ; nous aurons en rabattement le triangle $s''a'b'$ qui nous donne $a'b'$, projection du côté sb sur P_1. Pour avoir bc, remarquons que l'angle m étant connu, et les côtés sb et sc du triangle sbc de l'espace construits par rabattement en $s''b'$ et $s''(c)$, le triangle construit sur $s''b'$ avec l'angle m et le côté $s''(c)$ peut être considéré comme le rabattement sur P_2, autour de $s''b'$, du triangle bsc de l'espace. Ce rabattement nous donne $b'c$, troisième côté du triangle abc de l'espace à construire.

Soit donc $a'b'$ un des côtés de ce triangle. De a' comme centre avec $a'(c)$ pour rayon, et de b' comme centre avec $b'c$ pour rayon on décrit des arcs de cercle qui se coupent en c' ; le triangle $b'a'c'$ contient l'angle $b'a'c'$, projection sur P_1 de l'angle m de l'espace.

Mist.