



Georg Eberharter

Mathematischer Zugang zum Papierfalten

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Magister rerum naturalium

Lehramtsstudium Unterrichtsfach Darstellende Geometrie und
Unterrichtsfach Mathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Wallner

Institut für Geometrie

Graz, Mai 2017

Danksagung

Zu Beginn dieser Diplomarbeit möchte ich mich bei meinem Betreuer Univ.-Prof. Johannes Wallner bedanken, besonders dafür, dass es immer möglich war einen schnellen Termin für eine Beratung zu finden.

Ein herzliches *Vergelt's Gott* auch an meine Eltern Katharina und Friedrich Eberharter, die mich schon von klein auf in all meinen Ausbildungen unterstützt haben.

Bedanken muss ich mich ebenso bei meinen Mitstudierenden und Freunden für zahlreiche anregende und interessante Gespräche während meiner gesamten Studienzeit.

Besonders möchte ich mich bei meiner Partnerin Conny bedanken. Oft hat sie mich ertragen müssen, wenn ich in meine Arbeit vertieft war und das Zwischenmenschliche darunter gelitten hat. Ebenfalls bin ich meinem Cousin Mag. Alexander Eberharter für das Korrekturlesen zum Dank verpflichtet.

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZ-online hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Diplomarbeit identisch.

Datum

Unterschrift

Kurzfassung

Mathematische Zugänge zum Papierfalten lassen sich in zwei Bereiche einteilen. Der erste Bereich beinhaltet das Falten entlang von geraden Strecken, der zweite das Falten entlang von Kurven. Diese Einteilung ist auch in dieser Abschlussarbeit zu finden.

Im ersten Teil werden ausgewählte Kapitel zum Thema Papierfalten entlang gerader Kanten vorgestellt. Es wird gezeigt, wie ein axiomatischer Zugang mit Hilfe der Axiome von Huzita–Hatori aussieht und dass diese Liste von Axiomen gewissermaßen vollständig ist. Ebenso wird darauf eingegangen, unter welchen Umständen ein Faltmuster so faltbar ist, dass dieses nach dem Falten wieder in einer Ebene liegt. Für Faltmuster mit nur einem Knoten ist dies leicht zu entscheiden, für Faltmuster mit mehreren Knoten nicht.

Eine weitere Fragestellung im Zusammenhang mit einem geraden Faltmuster ist das Fold-and-Cut-Problem. Dabei wird der Frage nachgegangen, welche Muster auf ein Blatt Papier gezeichnet werden können, das so gefaltet wird, dass das Muster mit nur einem Schnitt vom Papier getrennt wird. Das erstaunliche Resultat ist, dass dies mit fast jedem Muster möglich ist.

Im zweiten Teil dieser Diplomarbeit wird ein mathematischer Zugang zum Papierfalten entlang gekrümmter Kanten gegeben. Die Schwierigkeit besteht darin, dass das Papier zwischen zwei gefalteten Kanten keine Ebene ist, sondern einer abwickelbaren Fläche folgt. Aus diesem Grund werden differentialgeometrische Eigenschaften solcher Flächen hergeleitet. Besonders wird darauf geachtet, wie sich abwickelbare Flächen entlang von Kurven verhalten, in denen die Flächen nur noch der Differenzierbarkeitsklasse C^1 oder C^0 angehören.

Zum Abschluss wird noch gezeigt, dass gewisse aus Papier herstellbare Faltmuster im Sinne der entwickelten Theorie nicht mathematisch exakt gefaltet werden können. Für manche Faltmuster ist dies noch eine offene Frage.

Abstract

The mathematics of paper folding can be divided into two parts: One part addresses paper folding along a straight line while the other part deals with folding along a curve. This classification can also be found in this thesis.

In the first part selected topics about folding along a straight line are presented. Using the axioms of Huzita-Hatori, I show an axiomatic approach and I prove that the list of axioms is complete in a certain sense. Then I point out necessary conditions for foldable crease patterns such that the folded state lies within a plane. For a crease pattern with just one vertex this is easy to decide. As soon as the crease pattern has more than just one vertex this is a hard question.

Another section of the thesis presents the fold-and-cut problem, which deals with the following question: What kind of shapes can be drawn on a piece of paper so that after folding the paper the shape can be cut out with only one slice? Remarkable, it turns out that this is possible for almost every shape.

In the second part of this thesis a mathematical approach to folding along curves is presented. The complexity of this step lies in the fact that the surface between two creases is not a plane but rather a developable surface. Therefore some differential geometric properties of the latter are shown. Special care is taken along curves where the surface is only in differentiability class C^1 or C^0 .

The last part of the thesis shows that some crease patterns are not foldable in the previously developed theory. For some crease patterns this is still an open problem.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	6
1 Origami mit geraden Kanten	8
1.1 Axiomatischer Zugang zu Origami	8
1.1.1 Falten eines Quadrates und $\sqrt{2}$	13
1.1.2 Falten eines Gleichseitiges Dreiecks	13
1.1.3 Der Satz von Haga	14
1.1.4 Dreiteilung eines Winkels mittels Papierfalten	15
1.1.5 Verdoppelung des Würfels mittels Papierfalten	16
1.2 Flache Faltung	16
1.3 Das Fold-and-Cut Theorem	20
1.3.1 Straight-Skeleton-Methode	21
1.3.2 Kreispackungs-Methode	27
2 Origami mit gekrümmten Kanten	31
2.1 Eigenschaften von abwickelbaren Flächen	31
2.1.1 Nichtlineare Bedingungen an eine Regelfläche	37
2.1.2 Abwickelbare Flächen als Einhüllende einer Ebenenschar	38
2.2 Eigenschaften von Kurvenfalten	40
2.2.1 Winkelhalbierungs-Eigenschaft	44
2.3 Beispiele	51
2.3.1 Das Hypar	51
2.3.2 Faltmuster aus konzentrischen Kreisen	56

Einleitung

Im Laufe einer mathematischen und geometrischen Ausbildung wird man mit sehr vielen Definitionen und abstrakten Begriffen konfrontiert. Es ist die Rede von topologischen Räumen, schwachen Ableitungen, projektiven Räumen und Möbiustransformationen um nur einige zu nennen. All das sind Konzepte, mit denen ein Laie nicht viel anfangen kann. Für meine abschließende Arbeit des Lehramtsstudium wollte ich ein Thema finden, dessen Kerninhalte und grundlegenden Problematiken für jeden verständlich sind.

Die Wahl fiel auf *Mathematischer Zugang zum Papierfalten*. Jeder Mensch hat schon einmal Papier gefaltet, etwa um ein Geschenk zu verpacken oder um eine Figur herzustellen. Viele haben sich vermutlich schon darüber geärgert, dass es so schwer ist, eine ausgebreitete Landkarte wieder in die ursprüngliche kompakte Form zu bringen. Kunstvolles Papierfalten wird auch Origami genannt. Der Terminologie der meisten wissenschaftlichen Artikeln zu diesem Thema folgend, werde ich Origami als Synonym für Papierfalten verwenden.

Zu meinem Glück ist die mathematische Forschung in diesem Bereich in den letzten 40 Jahren aufgeblüht und es wurden viele neue Resultate erzielt. Einer der wichtigsten Vertreter ist Robert Lang. Er entwickelte eine Vielzahl an Origamis, die Tiere erstaunlich anatomisch korrekt darstellen [29]. Auch andere Bereiche im Zusammenhang mit Origami sind von ihm geprägt.

In der vorliegenden Abschlussarbeit gehe ich nicht darauf ein, wie Robert Lang diese anatomische Präzision seiner Origamifiguren erreicht, sondern versuche einen Überblick darüber zu geben, wie viele mathematische und geometrische Fragestellungen mit Origami in Verbindung stehen.

Origami kann grob in zwei Arten eingeteilt werden und diese Einteilung spiegelt sich auch in dieser Diplomarbeit wider. Bei einer Sorte wird immer entlang von Geraden oder Strecken gefaltet, bei der anderen entlang von Kurven.

Im ersten Teil werden ausgewählte Themen im Bezug auf Origami mit geraden Kanten behandelt. Begonnen wird mit einem axiomatischen Zugang. Diese Sichtweise wurde von den Mathematikern Huzita und Hatori vorgeschlagen und beschreibt, auf welche Art und Weise Papier gefaltet werden kann.

Unabhängig von diesem Thema wird im Anschluss gezeigt, welche hinreichenden und notwendigen Bedingungen für ein Faltmuster mit nur einem Knoten gelten müssen, sodass dieses *flach faltbar* ist. Darunter wird verstanden, dass das gefaltete Origami zwischen zwei Bücher gelegt werden kann, ohne neue Kanten zu erzwingen. Dazu werden die Sätze von Maekawa und Kawasaki bewiesen.

Daran anknüpfend wird ein Zaubertrick von Harry Houdini erklärt. Dieser verblüffte damit, dass er mit nur einem Schnitt einen fünfeckigen Stern aus einem Stück Papier ausschneiden konnte. Es stellte sich anschließend die Frage, welche Formen noch mit nur

einem Schnitt ausgeschnitten werden können. Diese Fragestellung ist unter dem Namen *Fold-and-Cut Problem* bekannt und wurde unter anderem von Erik Demaine gelöst.

Auch wenn noch viel mehr zum Thema Origami mit geraden Kanten geschrieben werden könnte, widmet sich diese Arbeit im zweiten Teil Origami mit gekrümmten Kanten. Der größte Unterschied zum ersten Teil ist, dass das Papier zwischen zwei Kanten nicht mehr in einer Ebene liegt, sondern einer abwickelbaren Fläche folgt. Das Falten entlang einer Kante beeinflusst somit die anschließenden Flächen und diese beeinflussen wiederum angrenzende Kanten. Diese Abhängigkeit ist mathematisch schwer zu beschreiben.

Es wird daher damit begonnen, Eigenschaften von abwickelbaren Flächen herzuleiten, wofür Werkzeuge aus der Differentialgeometrie verwendet werden. Diese bereits gut entwickelte Theorie liefert sehr viele Resultate für C^2 -Flächen. Ein besonderes Augenmerk wird daher auf Flächen gelegt, welche nur noch stückweise C^2 sind und die Übergänge zwischen den Stücken C^1 oder C^0 . Dies entspricht einer mathematischen Beschreibung von Origami mit gekrümmten Kanten, die C^0 -Übergänge entsprechen den Kanten im gefalteten Papier.

Nachdem diese Theorie aufgebaut wurde, kann die Frage gestellt werden, ob reale Modelle aus Papier auch in diesem mathematischen Modell faltbar sind. Es wird sich herausstellen, dass dies für das bekannte *Hypar* nicht gilt.

1 Origami mit geraden Kanten

Der intuitive Weg Papier zu falten ist, dies entlang einer Geraden zu tun. Dabei werden zwei Arten unterschieden. Die *einfachen Faltungen* sind jene, bei denen das Papier entlang einer Geraden immer gleich gefaltet wird. Die andere Art, Papier entlang einer geraden Strecke zu falten ist, dies nur entlang einer beschränkten Linie zu tun. Für die Theorie ist die zweite Art Papier zu falten sehr wichtig, doch in der Praxis ist diese nicht so leicht umzusetzen. Mit etwas Übung sind solche Kanten aber auch händisch faltbar.

Für den folgenden axiomatischen Zugang werden nur einfache Faltungen betrachtet. Für die Abschnitte 1.2 und 1.3 ist es einfacher, sich nicht auf einfache Faltungen zu beschränken.

1.1 Axiomatischer Zugang zu Origami

Wenn ein Blatt Papier zur Erstellung eines Origami gefaltet wird, ist erkennbar, dass oft dieselben Faltungen durchgeführt werden. Im Laufe des Faltprozesses werden auf diese Weise immer mehr Faltlinien (Geraden) und Punkte konstruiert, mit denen weitere Faltlinien und Punkte erzeugt werden können. Dazu stellte der japanisch-italienische Mathematiker Humiaki Huzita im Jahr 1989 [23] sechs Operationen vor, mit denen aus bereits konstruierten Geraden und Punkten (z.B. Schnittpunkte von Geraden) neue Objekte durch Falten entstehen können. Nach jedem Falten wird das Blatt Papier wieder aufgeklappt und eine neue Gerade ist zu sehen. Ähnlich zur Euklidischen Geometrie ist es möglich, mit diesen Operationen eine *Origami-Geometrie* zu betreiben. Dabei wird versucht, ausgehend von zwei Punkten möglichst viele Konstruktionen zu bewältigen. Zum Beispiel wird die Frage gestellt, ob es möglich ist, ein gleichseitiges Dreieck zu falten.

In der Literatur werden diese Operationen als Axiome bezeichnet, obwohl sie eigentlich keine sind, denn manche dieser Operationen sind nicht immer anwendbar oder sind nicht eindeutig. Die Operationen sind ebenfalls nicht unabhängig voneinander. Trotz dieser Widersprüche sollen sie auch in dieser Arbeit als Axiome bezeichnet werden, siehe [4]. Das siebte Axiom wurde von Jacques Justin ebenfalls 1989 formuliert [24]. Es war aber in Vergessenheit geraten und wurde im Jahr 2001 von Koshiro Hatori [18] wiederentdeckt. Die Axiome sind auch unter dem Namen *Huzita-Hatori-Axiome* bekannt.

Alle Konstruktionen sollen auf einem endlichen Blatt Papier durchgeführt werden und das Blatt Papier soll einer mathematischen Ebene entsprechen, sodass beim Falten keine Dicke des Materials berücksichtigt werden muss. Die Axiome lauten wie folgt und sind in Abbildung 1.1 und in Abbildung 1.2 auf Seite 10 zu sehen:

- O1 Für zwei Punkte P_1 und P_2 kann eine Gerade gefaltet werden, die diese zwei Punkte verbindet.

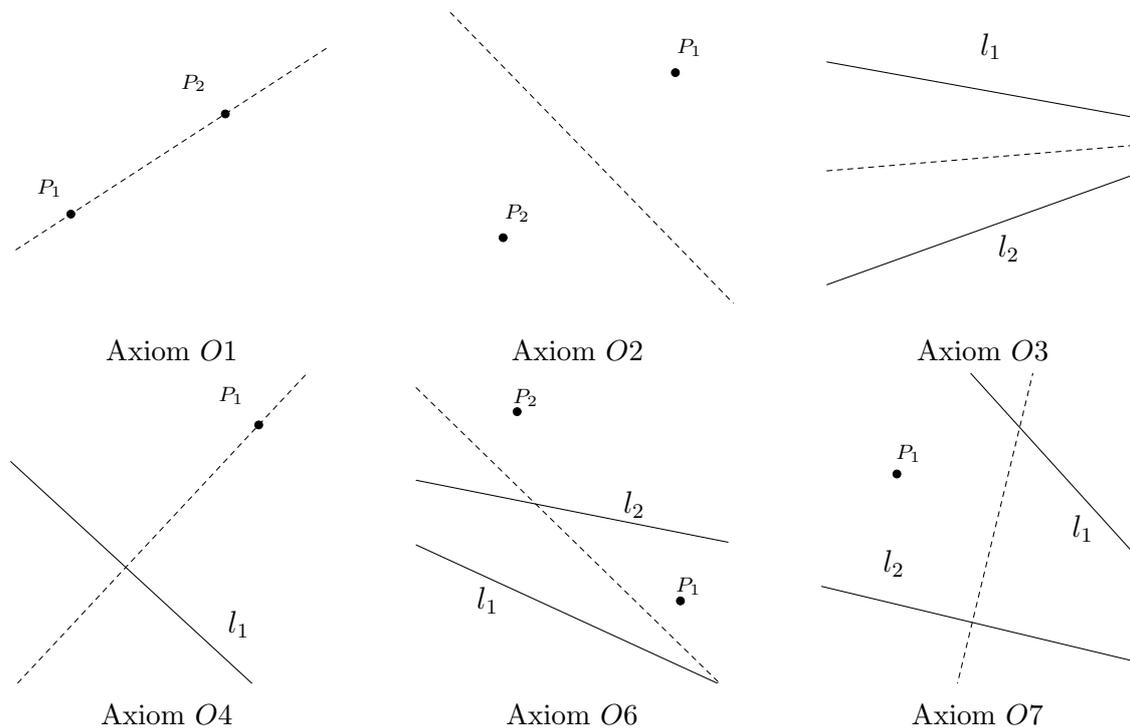


Abbildung 1.1: Die Axiome von Huzita-Hatori. Für $O5$ siehe Abbildung 1.2.

$O2$ Ein Punkt P_1 kann auf einen Punkt P_2 gefaltet werden.

$O3$ Eine Gerade l_1 kann auf eine Gerade l_2 gefaltet werden.

$O4$ Für einen Punkt P_1 und eine Gerade l_1 kann eine Gerade gefaltet werden, sodass diese orthogonal zu l_1 ist und den Punkt P_1 enthält.

$O5$ Für zwei Punkte P_1 und P_2 und eine Gerade l_1 kann eine Gerade gefaltet werden, sodass diese P_2 enthält und P_1 auf l_1 gefaltet wird.

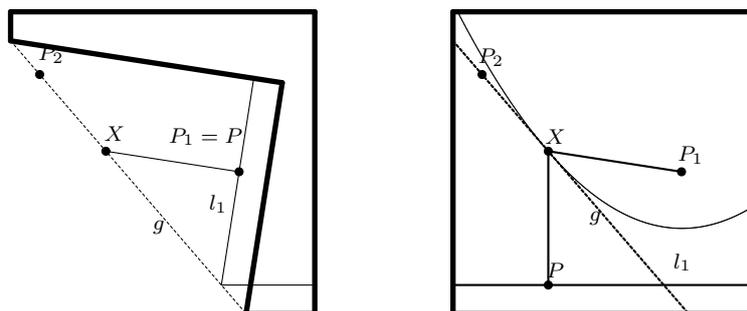
$O6$ Für zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 und zwei gegebene Geraden l_1 und l_2 kann eine Gerade gefaltet werden, sodass P_1 auf l_1 und P_2 auf l_2 gefaltet wird.

$O7$ Für einen gegebenen Punkt P_1 und zwei gegebenen Geraden l_1 und l_2 ist es möglich, eine Gerade zu falten, sodass diese orthogonal zu l_2 ist und P_1 auf l_1 gefaltet wird.

Manchmal wird außerdem noch ergänzt, dass ein *Punkt* der Schnittpunkt zweier Geraden ist.

Das Axiom $O1$ entspricht der Verbindungsgerade von zwei Punkten. Hinter dem Axiom $O2$ versteckt sich die Konstruktion der Streckensymmetrale der Punkte P_1 und P_2 . Axiom $O3$ besagt anschaulich, dass es möglich ist, einen Winkel zu halbieren. Axiom $O4$ legt fest, ein Lot auf eine Gerade konstruieren zu können, welche einen gegebenen Punkt enthält.

Nicht ganz offensichtlich ist, welche geometrische Deutung Axiom $O5$ hat, siehe [22]. Zur Verdeutlichung sei P jener Punkt auf der Geraden l_1 , welcher mit P_1 zur Deckung kommt, wenn entlang der postulierten Gerade g gefaltet wird. Sei X der Schnittpunkt von g mit



(a) Die Faltung des Axioms O5.

(b) Die Konstruktion des Axioms O5.

Abbildung 1.2: Axiom O5 liefert eine Tangente an eine Parabel.

einer Geraden orthogonal zu l_1 durch P (siehe Abbildung 1.2), dann gilt für die Längen der Strecken

$$|\overline{XP}| = |\overline{XP_1}|.$$

Somit liegt X auf einer Parabel mit Leitgerade l_1 und Brennpunkt P_1 . Axiom O5 kann daher als Bestimmung einer Tangente an eine Parabel von einem gegebenen Punkt aus interpretiert werden. Dies hat natürlich keine, eine oder zwei Lösungen, je nachdem wie der Punkt P_2 zur Parabel liegt.

Mit diesem Wissen kann Axiom O6 genauer analysiert werden. Das Falten von P_1 auf l_1 entspricht dem Finden einer Tangente an die Parabel mit Leitgerade l_1 und Brennpunkt P_1 . Wenn das Falten entlang der postulierten Gerade noch zusätzlich den Punkt P_2 auf l_2 falten soll, entspricht dies dem Finden einer gemeinsamen Tangente an zwei Parabeln. Dieser Vorgang hat offensichtlich keine, eine, zwei oder drei Lösungen.

Das Axiom O6 kann nicht mehr mit den Standardwerkzeugen der Euklidischen Geometrie gelöst werden. Dies legt die Vermutung nahe, dass es möglich ist, mehr Konstruktionen zu bewältigen als nur mit Zirkel und Lineal. Dies ist auch tatsächlich der Fall, da zum Beispiel ein Winkel gedrittelt werden kann.

Mit Hilfe dieses Axioms lässt sich beispielsweise auch Axiom O3 als Spezialfall von O6 sehen, wenn der Punkt P_1 auf der Gerade l_2 und Punkt P_2 auf der Gerade l_1 liegt. Axiomensysteme mit redundanten Axiomen widersprechen der mathematischen Tradition, auch wenn sie formal korrekt sind.

Das Axiom O7 ist wieder mit Zirkel und Lineal nachvollziehbar und es ist unabhängig zu den ersten sechs. Die Tatsache, dass dieses unabhängige Axiom erst 10 Jahre später aufgenommen wurde, führt zur Frage, ob es sein könnte, dass irgendwann wieder ein unabhängiges Axiom gefunden wird. Oder ist das System bereits vollständig? In dem Sinne, dass alle Möglichkeiten zur Festlegung einer Faltlinie erschöpft sind.

In [4] haben Roger Alberin und Robert Lang diese Frage beantwortet und bewiesen, dass das Axiomensystem vollständig ist. Dazu wird das Falten in eine formale Sprache übersetzt. Ein Punkt wird durch ein kartesisches Koordinatenpaar (x, y) beschrieben und

eine Gerade ist durch das Paar (X, Y) , als Menge aller Punkte, welche die Gleichung

$$Xx + Yy + 1 = 0$$

erfüllen, bestimmt. Geraden durch den Koordinatenursprung werden auf diese Weise nicht erfasst. Allerdings lässt sich das Koordinatensystem immer so verschieben, dass alle bereits konstruierten Geraden nicht den Koordinatenursprung enthalten. Das *gefaltete Bild* eines Punktes bzw. einer Geraden ist jener Punkt bzw. Gerade, welche durch Falten an der Faltkante entsteht. Ist die Faltkante \mathbf{L} durch das Paar $(X_{\mathbf{L}}, Y_{\mathbf{L}})$ gegeben, dann lässt sich für einen Punkt P mit den Koordinaten (x, y) das gefaltete Bild $F_{\mathbf{L}}(P)$ des Punktes durch Spiegeln an der Gerade \mathbf{L} bestimmen. Ebenso lässt sich eine Gerade G an der Faltkante spiegeln, sodass das gefaltete Bild $F_{\mathbf{L}}(G)$ der Gerade entsteht.

Da das gefaltete Bild einer Spiegelung entspricht, ist klar, dass $F_{\mathbf{L}}(F_{\mathbf{L}}(P)) = P$ und $F_{\mathbf{L}}(F_{\mathbf{L}}(G)) = G$ für Punkte P und Geraden G gilt. Ebenso ist leicht zu sehen, dass für Punkte bzw. Geraden A und B

$$F_{\mathbf{L}}(A) = B \Leftrightarrow F_{\mathbf{L}}(B) = A$$

gilt.

Die oben formulierten Axiome bestimmen eine oder mehrere Inzidenzen von Punkten und Geraden mit den gefalteten Bildern von Punkten und Geraden. Wenn zwei Objekte inzident sind, soll die Schreibweise $A \leftrightarrow B$ verwendet werden und es kann auch A *kommt mit B zur Deckung* oder A *wird auf B gefaltet* gesagt werden. Es gibt drei mögliche Fälle:

1. Für zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ gilt, $P_1 \leftrightarrow P_2$ dann und nur dann, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.
2. Für zwei Geraden $G_1 = (X_1, Y_1)$ und $G_2 = (X_2, Y_2)$ gilt, $G_1 \leftrightarrow G_2$ dann und nur dann, wenn $X_1 = X_2$ und $Y_1 = Y_2$.
3. Für einen Punkt $P = (x, y)$ und eine Gerade $G = (X, Y)$ gilt, $P_1 \leftrightarrow G_2$ dann und nur dann, wenn $Xx + Yy + 1 = 0$ gilt.

Nun werden *Ein-Falt-Axiome* definiert. Wieder ist das Wort Axiom etwas ungeschickt, vielleicht sollte besser *Ein-Falt-Operation* gesagt werden, aber der Schreibweise von [4] folgend wird ersteres verwendet.

Ein *Ein-Falt-Axiom* ist definiert als *minimale* Menge von Inzidenzen, welche eine Faltlinie auf einem beschränkten Bereich der Euklidischen Ebene festlegt. Dabei darf es nicht unendlich viele mögliche Faltlinien geben. Eine minimale Menge soll keine redundanten Inzidenzen enthalten. Auch sind endlich viele Lösungen zugelassen, da z.B. die Operation O_5 mehrere Lösungen haben kann. Es ist ebenso erlaubt, dass für gewisse Lagen von Punkten und Geraden keine Faltlinie bestimmt werden kann, so lang dies nicht für jede Position der Fall ist.

Offensichtlich ist jedes Axiom O_1 bis O_7 ein Ein-Falt-Axiom. Es muss noch untersucht werden, ob dies alle sind, die aus den Inzidenzen entstehen können. Um eine Faltlinie festzulegen, muss auf einer Seite der Inzidenzen ein gefaltetes Bild sein. Dafür gibt es fünf

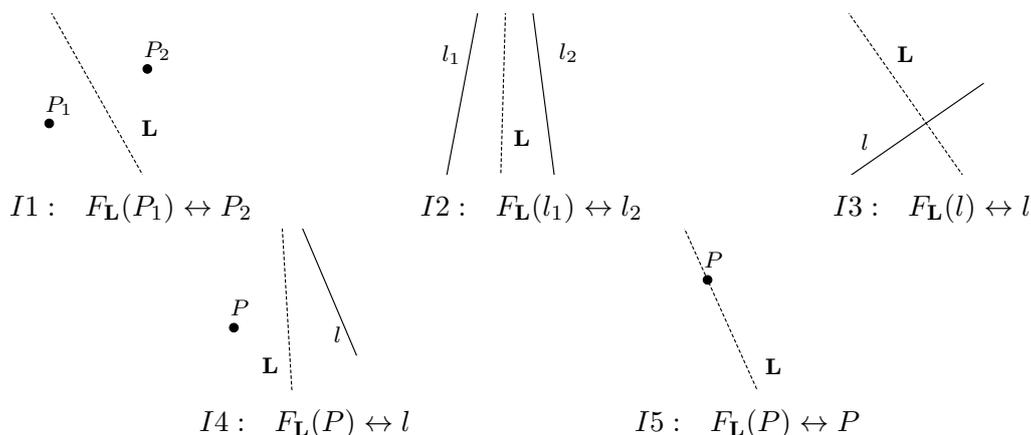


Abbildung 1.3: Fünf Arten von Inzidenzen.

	$F_{\mathbf{L}}(l_2) \leftrightarrow l_2$	$F_{\mathbf{L}}(P_2) \leftrightarrow l_2$	$F_{\mathbf{L}}(P_2) \leftrightarrow P_2$
$F_{\mathbf{L}}(l_1) \leftrightarrow l_1$	—	$O7$	$O4$
$F_{\mathbf{L}}(P_1) \leftrightarrow l_1$	$O7$	$O6$	$O5$
$F_{\mathbf{L}}(P_1) \leftrightarrow P_1$	$O4$	$O5$	$O1$

Tabelle 1.1: Jede Kombination der Inzidenzen $I3$, $I4$ und $I5$.

Möglichkeiten, wie aus den drei Inzidenzarten eine Faltlinie bestimmt werden kann. Die Arten $I1$ bis $I5$ sind in Abbildung 1.3 dargestellt.

Die Inzidenz $I1$ bestimmt die Faltlinie eindeutig und stimmt mit dem Axiom $O2$ überein. Auch die Inzidenz $I2$ legt die Faltlinie auf eindeutige Weise fest. Diese stimmt mit dem Axiom $O3$ überein.

Die restlichen Inzidenzen $I3$, $I4$ und $I5$ liefern eine einparametrische Schar von möglichen Faltlinien. Die Kombination dieser eliminiert den letzten freien Parameter, der für die Festlegung der Faltlinie benötigt wird. Es müssen daher alle Kombinationsmöglichkeiten von $I3$, $I4$ und $I5$ betrachtet werden. Dies ist in Tabelle 1.1 festgehalten.

Die Kombination von $I3$ mit sich selbst liefert kein zulässiges Ein-Falt-Axiom. Ist die Gerade l_1 parallel zur Geraden l_2 , dann gibt es unendlich viele Lösungen \mathbf{L} sodass $F_{\mathbf{L}}(l_2) \leftrightarrow l_2$ und $F_{\mathbf{L}}(l_1) \leftrightarrow l_1$ gilt. Ist l_1 nicht parallel zu l_2 so kann es keine Faltlinie \mathbf{L} geben, sodass l_1 auf l_1 und l_2 auf l_2 gefaltet werden.

Alle anderen Kombinationen liefern ein zulässiges Ein-Falt-Axiom. Tatsächlich kommt in Tabelle 1.1 jede der verbleibenden Operationen $O1$, $O4$, $O5$, $O6$ und $O7$ vor und somit kann kein weiteres Axiom gefunden werden.

Es wurde also gezeigt, dass die oben definierten Operationen ausreichen, um jedes Origami zu erzeugen, welches nur gerade Faltlinien enthält und zur Erstellung keine simultanen Faltungen nötig sind.

Im Weiteren wird beispielhaft gezeigt, welche Konstruktionen die Origami-Geometrie zulässt. Vorgegeben werden zwei Punkte, auf denen aufgebaut wird. Weitere Punkte entstehen als Schnittpunkte von konstruierten Geraden.

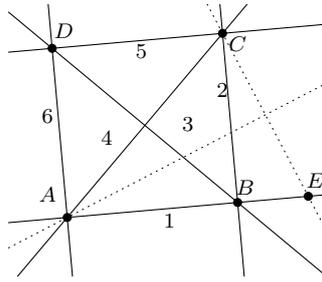


Abbildung 1.4: Konstruktion eines Quadrates mithilfe der Huzita-Hatori-Axiome.

1.1.1 Falten eines Quadrates und $\sqrt{2}$

Ausgehend von zwei Punkten A und B wird ein Quadrat konstruiert, welches die Strecke \overline{AB} als Seite besitzt. Mit Axiom $O1$ wird die Verbindungsgerade 1 von A und B gezeichnet. Axiom $O4$ liefert eine Gerade 2 orthogonal zu 1 durch den Punkt B . Anwenden von Axiom $O3$ auf die Geraden 1 und 2 erzeugt die Gerade 3, welche eine Diagonale des Quadrates ist. Das Axiom $O4$ bestimmt die zweite Diagonale, wenn es auf den Punkt A und die Gerade 3 losgelassen wird. Der Schnittpunkt von 4 und 2 liefert den dritten Eckpunkt C . Axiom $O4$ angewandt auf die Gerade 2 und Punkt C bestimmt die dritte Seite 5 und der Schnitt von 5 und 3 erzeugt den vierten Eckpunkt D . Die vierte Seite 6 des Quadrats ist eine Anwendung von Axiom $O1$ auf die Punkte A und D . Siehe Abbildung 1.4.

Es ist somit keine Einschränkung, wenn bei weiteren Konstruktionen ein Quadrat als gegeben angenommen wird. Ebenfalls kann mit Axiom $O3$ und $O4$ ein Punkt E auf der Geraden 1 konstruiert werden, sodass für die Längen der Strecken \overline{AB} und \overline{AE}

$$|\overline{AB}| : |\overline{AE}| = 1 : \sqrt{2}$$

gilt. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist also mit den Mitteln von Origami konstruierbar. Zahlen für die so eine Konstruktion möglich ist, werden *Origamizahlen* genannt.

1.1.2 Falten eines Gleichseitiges Dreiecks

Es soll nun die zuvor gestellte Frage beantwortet werden, ob ein gleichseitiges Dreieck mit den Methoden des Origami konstruierbar ist. Die Antwort lautet ja:

Ausgehend von einem Quadrat wie in Abbildung 1.5 kann eine Mittellinie f parallel zur Seite a konstruiert werden. Nun wird Axiom $O5$ zur Konstruktion einer Geraden g angewandt, sodass der Eckpunkt B auf dieser liegt und $F_g(C) \leftrightarrow f$ gilt. Das Dreieck $\triangle BCF_g(C)$ ist nach Konstruktion gleichseitig und somit ist der Winkel zwischen b und g 30° . Folglich beträgt der Winkel zwischen a und g 60° .

Axiom $O5$ wird nun auf analoge Weise für die Punkte A und C verwendet, um eine Gerade h zu bestimmen. Der Winkel zwischen den Seiten a und h hat ebenfalls einen Wert von 60° . Somit bestimmt das Dreieck agh ein gleichseitiges Dreieck.

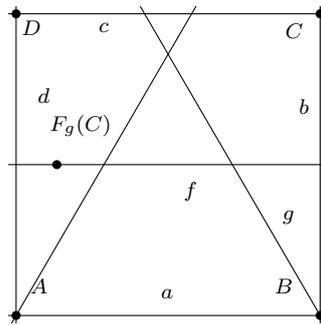


Abbildung 1.5: Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks.

1.1.3 Der Satz von Haga

Seien zwei Punkte A und B gegeben, sodass es möglich ist Origami Geometrie zu betreiben. Diese zwei Punkte sollen die Länge 1 definieren. Es wurde in Abschnitt 1.1.1 erwähnt, dass es sich bei der Zahl $\sqrt{2}$ um eine Origamizahl handelt. Es war möglich, eine Strecke mit den Huzita-Hatori-Axiomen zu konstruieren, welche genau diese Länge besitzt. Das Ergebnis, dass auch jeder Bruch $\frac{1}{N}$ mit $N \in \mathbb{N}$ eine Origamizahl ist, ist im folgenden Satz festgehalten, siehe auch [33].

Satz 1.1 (Satz von Haga). *Jeder Bruch $\frac{1}{N}$ mit $N \in \mathbb{N}$ ist eine Origamizahl.*

Dazu betrachte man das Einheitsquadrat mit den Ecken A, B, C, D und den Seiten a, b, c, d , siehe Abbildung 1.6a. Die Aussage wird mit vollständiger Induktion über $N \in \mathbb{N}$ bewiesen. Für $N = 2$ ist die Aussage trivial, denn Axiom $O2$ angewandt auf A und B liefert genau das gewünschte Ergebnis.

Für den Induktionsschritt $N \rightarrow N + 1$ sei ein Punkt E' auf der Seite a mit $|\overline{AE'}| = \frac{1}{N}$ gegeben. Axiom $O4$ liefert einen Punkt E auf der Seite c mit $|\overline{DE}| = \frac{1}{N}$. Der wichtigste Schritt ist nun Axiom $O2$ angewandt auf A und E . Diese Operation liefert eine Gerade g , einen Schnittpunkt G mit der Seite a und einen Schnittpunkt F mit der Seite d . Die Verbindungsgerade von G mit E liefert einen Schnittpunkt H mit der Seite b . Es gilt nun $|\overline{HC}| = \frac{2}{N+1}$.

Für die Begründung betrachte man Abbildung 1.6b. Offensichtlich gilt nach dem Satz von Pythagoras $x^2 + \frac{1}{N^2} = (1 - x)^2$. Umformen auf x ergibt

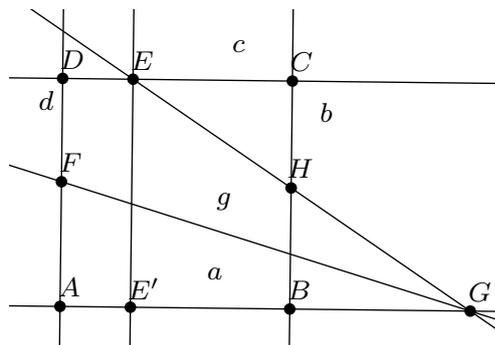
$$x = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N^2} \right). \quad (1.1)$$

Ebenfalls ist erkennbar, dass das Dreieck $\triangle FAD$ ähnlich ist zum Dreieck $\triangle AHC$. Dies führt zur Gleichung

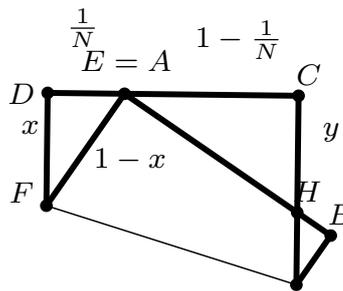
$$\frac{y}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{1}{x}. \quad (1.2)$$

Einsetzen von Gleichung (1.1) in Gleichung (1.2) liefert nach einer paar Umformungsschritten:

$$y = \frac{2}{N + 1} \quad (1.3)$$



(a) Konstruktion für den Induktionsschritt.



(b) Skizze eines gefalteten Blatt Papiers zum Satz von Haga.

Abbildung 1.6: Faltlinien und Faltung zur Konstruktion rationaler Zahlen.

Somit ist der Induktionsschritt abgeschlossen und der Satz von Haga ist bewiesen. Folglich ist jede rationale Zahl auch eine Origamizahl.

Da bei den bisherigen Konstruktionen das Axiom *O6* nicht verwendet wurde, waren alle Konstruktionen auch mit Zirkel und Lineal durchführbar.

1.1.4 Dreiteilung eines Winkels mittels Papierfalten

Lange Zeit war nicht bekannt, ob die Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal durchführbar ist. Im Jahr 1837 konnte Pierre Wantzel beweisen, dass dies nicht möglich ist, [36]. In die moderne Algebra übersetzt, verwendet dieser Beweis die Theorie der Körpererweiterungen. Auch die einige Jahre später veröffentlichte Galoistheorie ist ein wichtiges Hilfsmittel, um die Nichtexistenz von gewissen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu zeigen.

Da die Axiome der Origami-Geometrie eine Operation beinhalten, welche nicht mit Zirkel und Lineal durchführbar ist, könnte es möglich sein, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Dies ist tatsächlich der Fall, siehe zum Beispiel [3].

Gegeben sei wieder ein Einheitsquadrat mit Ecken A, B, C, D und den Seiten a, b, c, d . Zusätzlich sei eine Gerade g mit $A \leftrightarrow g$ vorgegeben, welche mit der Seite a einen spitzen Winkel einschließt. Dieser Winkel soll gedrittelt werden. Die Konstruktion ist auf spitze Winkel beschränkt.

Zuerst wird eine Streckensymmetrale von A und D gefaltet. Dies liefert einen Punkt $E \leftrightarrow d$. Danach wird eine Streckensymmetrale e von A und E konstruiert. Nun wird mit Axiom *O6* eine Gerade f wie in Abbildung 1.7a erstellt, sodass $F_f(A) \leftrightarrow e$ und $F_f(E) \leftrightarrow g$ gilt. Das Lot h auf f durch A schneidet e in einem Punkt G_1 und f schneidet e in einem Punkt G_2 . Es gilt für die Verbindungsgeraden g_1 und g_2 von A mit G_1 und G_2 , dass diese den Winkel zwischen g und a in drei gleiche Teile teilen.

Der Beweis ist sehr elementar und benötigt nur ähnliche Dreiecke, siehe dazu Abbildung 1.7b. Sei $\alpha = \angle(AH_1H_2)$ und $\beta = \angle(H_1H_2A)$. Das Dreieck ΔAH_1H_2 ist kongruent zum Dreieck $\Delta H_1H_2G_1$. Somit ist $\angle(H_2H_1G_1) = \alpha$ und $\angle(H_1H_2G_1) = \beta$. Das Dreieck ΔAG_1H_3

Schichten von Papier übereinander gelegt werden. Ein Beispiel für ein flach faltbares Origami sind die meisten gefalteten Landkarten. Ein sehr großes Blatt Papier wird so gefaltet, dass es nicht mehr so groß ist und gut transportierbar ist.

Es gibt auch Faltmuster, die sich nicht in eine Ebene falten lassen. Die *flache Faltbarkeit* ist somit eine Eigenschaft, die ein Origami besitzen kann oder nicht. Im folgenden soll dieses Problem genauer analysiert werden, wie es zum Beispiel in [21] gemacht wurde.

Ein Faltmuster ist ein Graph mit geraden Kanten, wobei jeder Kante ein Attribut *Talkante* oder *Bergkante* zugeordnet wird. Das Faltmuster bestimmt die Vorgehensweise, wie das Blatt Papier gefaltet werden soll. Talkanten werden nach unten gefaltet und Bergkanten nach oben. Durch das Vertauschen der Begriffe Tal- und Bergkante ändert sich nur die Orientierung des Objektes. Schnittpunkte von Kanten sind Knoten.

Zunächst soll eine lokale Variante der flachen Faltbarkeit betrachtet werden. Das heißt, es soll analysiert werden, wie sich eine flache Faltung in der Umgebung eines Knoten verhält. Zu diesem Zweck soll das Faltmuster aus nur einem Knoten bestehen. Ohne Einschränkung ist das Stück Papier eine Kreisscheibe und der Knoten ist ihr Mittelpunkt. Der folgende Satz wurde in [25] nach dem japanischen Mathematiker Jun Maekawa benannt und gibt Auskunft über die Anzahl der Berg- und Talkanten in diesem Knoten.

Satz 1.2 (Satz von Maekawa). *Sei ein Faltmuster mit nur einem Knoten flach faltbar und sei M die Anzahl der Bergkanten und V die Anzahl der Talkanten. Dann gilt:*

$$M - V = \pm 2 \tag{1.4}$$

Beweis. Nach dem Falten ist aus dem Knoten eine *Spitze* geworden. Wenn diese gerade *abgeschnitten* wird ist ein degeneriertes Polygon erkennbar, wobei jede Kante des Knoten eine Ecke des Polygons ist. Bergkanten liefern einen Winkel von 0 und Talkanten einen Winkel von 2π . Somit ergibt sich eine Innenwinkelsumme von $0M + 2\pi V$.

Sei n die Anzahl der Ecken des Polygons, somit ist auch die Anzahl der Kanten im Knoten n . Die Summe der Innenwinkel in einem Polygon mit n Ecken ist gegeben durch $(n - 2)\pi$. Da $n = M + V$ ist, ergibt sich durch Gleichsetzen

$$0M + 2\pi V = (M + V - 2)\pi \Rightarrow M - V = 2. \tag{1.5}$$

Vertauschen von Berg- und Talkanten liefert $V - M = 2$ und somit ist die Aussage bewiesen. \square

Eine einfache Konsequenz aus Satz 1.2 ist, dass die Anzahl der Kanten in einem Knoten gerade ist. Dieses Ergebnis wird in folgendem Korollar festgehalten.

Korollar 1.3. *In einem flach faltbaren Faltmuster gilt, dass die Anzahl der Kanten in einem Knoten gerade ist.*

Beweis. Sei M bzw. V die Anzahl der Bergkanten bzw. Talkanten die an den Knoten grenzen. Offensichtlich gilt für die Anzahl n der Kanten $n = M + V$ und die Rechnung

$$n = M + V = M - V + 2V = \pm 2 + 2V$$

zeigt, dass n durch zwei teilbar ist. \square

Ein weiterer wichtiger Satz im Zusammenhang mit flacher Faltbarkeit gibt Auskunft darüber, wie sich die Winkel zwischen den Kanten in einem Knoten verhalten. Der Satz geht auf den japanischen Mathematiker Toshikazu Kawasaki zurück [26].

Satz 1.4 (Satz von Kawasaki). *Sei ein flach faltbares Faltmuster mit einem Knoten und $2m$ Kanten gegeben. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$ der Reihe nach die Winkel zwischen den Kanten. Dann gilt:*

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots - \alpha_{2m} = 0 \quad (1.6)$$

Beweis. Sei γ ein Kreis mit Radius $r > 0$ um den Knoten. Im gefalteten Zustand wird aus γ ein Kreisbogen und bei jeder Kante ändert der Bogen die Durchlaufrichtung. Daraus ergibt sich

$$r\alpha_1 - r\alpha_2 + r\alpha_3 - \dots - r\alpha_{2m} = 0,$$

weil γ geschlossen ist. Kürzen von r liefert die geforderte Gleichung. \square

Der Beweis verwendet nicht, dass für die Winkel der Zusammenhang

$$\sum \alpha_i = 2\pi \quad (1.7)$$

gilt. Deswegen gilt das Resultat auch, falls der Knoten die Spitze einer Pyramide ist. Allerdings gilt für ein ebenes Blatt Papier durch Addition der Gleichungen (1.7) und (1.6)

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2m-1} = \pi.$$

Daher muss auch für die restlichen Winkel gelten

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2m} = \pi.$$

Der Satz von Maekawa ist eine notwendige Bedingung für die flache Faltbarkeit eines Faltmusters. Der Satz von Kawasaki ist ebenfalls notwendig und überraschenderweise auch hinreichend. Das Ergebnis ist erstaunlich, weil die flache Faltbarkeit nicht nur von der Beziehung Berg-/Talkante abhängt, sondern vollständig von den Winkeln zwischen den Faltlinien.

Satz 1.5. *Seien l_1, l_2, \dots, l_{2n} Faltlinien in einem Faltmuster mit nur einem Knoten¹. Für die zugehörigen Winkel $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ gelte, dass die alternierende Winkelsumme Null ist (Gleichung (1.6)). Dann gibt es eine Zuordnung von Berg- und Talkanten, sodass das Faltmuster flach faltbar ist.*

Beweis. Sei l_1 eine Talkante, dann l_2 und l_{2n} Bergkanten, dann l_3 und l_{2n-1} Talkanten, die nächsten zwei Faltlinien wieder Bergkanten. So fortfahrend bis man bei der Faltlinie l_{n+1} angekommen ist. Diese wird mit einer Schere aufgeschnitten. Die restlichen Faltlinien werden entsprechend der getroffenen Zuordnung gefaltet.

¹Die Beschriftung von l_1, l_2, \dots, l_{2n} sei der Reihe nach.

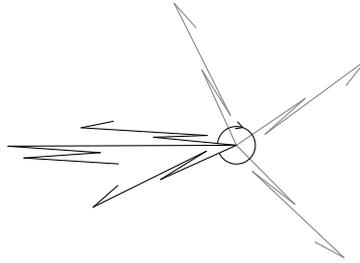


Abbildung 1.8: Bestimmung der Berg-/Talkanten Zuordnung bei gegebenen Faltnlinien, welche die Gleichung (1.6) erfüllen (vgl. Beweis von 1.5).

Da Gleichung (1.6) erfüllt ist, stimmen die beiden Enden, welche beide von der Faltnlinie l_{n+1} stammen, überein. Falls kein Papier zwischen den Enden ist, können diese einfach wieder zusammengeklebt werden und die Zuordnung von Berg- und Talkanten ist fertig.

Falls zwischen den Enden mehrere Schichten Papier sind, kann die Kante, welche am weitesten links oder rechts ist, von Berg-/Talkante auf Tal-/Bergkante geändert werden. Dieser Vorgang ist schematisch in Abbildung 1.8 dargestellt und legt die aufgeschnittenen Enden übereinander, sodass diese zusammengeklebt werden können. \square

Ein weiteres Resultat, welches Kawasaki zuzuschreiben ist, betrachtet die Bedingung, dass sich das Papier beim Falten nicht selbst schneiden darf. Gilt für einen Index i , dass $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ und $\alpha_i < \alpha_{i-1}$, dann müssen die Faltnlinien l_i und l_{i+1} verschiedene Berg/Tal Zuordnungen haben. Darauf aufbauend haben Marshall Bern und Barry Hayes in [7] einen rekursiven Algorithmus entworfen, welcher für ein Faltmuster mit nur einem Knoten eine Zuordnung von Berg- und Talkanten in linearer Laufzeit berechnet, sodass das Origami flach faltbar ist. Für den Input wird vorausgesetzt, dass das Faltmuster eine gerade Anzahl an Kanten hat und dass die Winkel Gleichung (1.6) erfüllen. Ansonsten wäre das Problem nicht lösbar.

Die bisher erarbeiteten Resultate gelten alle nur für Faltmuster mit einem Knoten. Das Problem für ein gegebenes Faltmuster die Berg/Tal-Zuordnung zu berechnen, wird sehr kompliziert, wenn im Faltmuster mehr als ein Knoten vorkommt. Die lokale flache Faltbarkeit in jedem Knoten ist eine notwendige Bedingung für die globale flache Faltbarkeit, aber keine hinreichende, wie Beispiele in [21] zeigen.

Ein weiterer interessanter Aspekt, welcher im Zusammenhang mit flacher Faltbarkeit betrachtet werden kann, ist eine *starre flache Faltbarkeit*. Dabei wird der Frage nachgegangen, ob es eine kontinuierliche Bewegung vom Faltmuster zum flach gefalteten Zustand gibt, sodass für jeden Zeitpunkt das Papier nicht verbogen oder gestaucht werden muss.

In der Arbeit [1] von Abel et al. werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Faltmuster mit nur einem Knoten gegeben, sodass dieses *starr faltbar* ist. Das Resultat ist ähnlich elegant wie der Satz von Kawasaki und lässt sich auch nicht einfach auf Faltmuster mit mehreren Knoten verallgemeinern.

In Arbeit [1] wird einen *Vogelfuß* als eine spezielle Anordnung von Faltnlinien definiert. Ein *Dreibein* besteht aus drei Faltnlinien c_1 , c_2 und c_3 , welche gegen den Uhrzeigersinn um

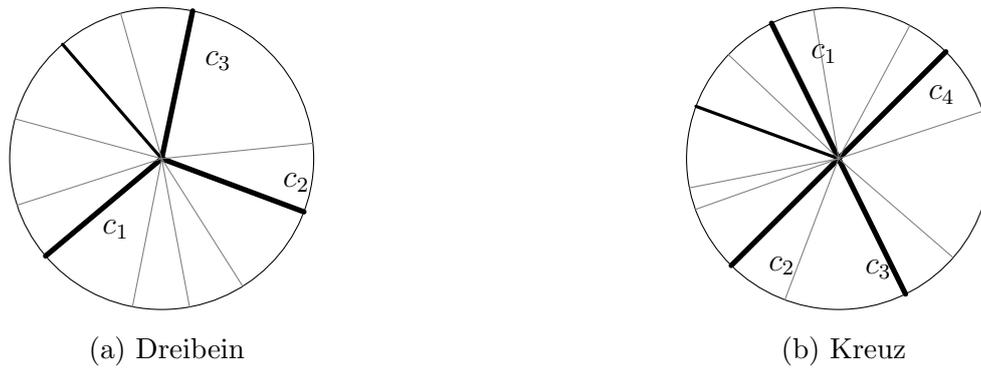


Abbildung 1.9: Zwei Arten von Vogelfüßen.

einen Knoten angeordnet sind. Diese müssen nicht zwingend benachbart sein, aber alle Linien sollen die selbe Berg/Tal-Zuordnung haben und es soll $0 < \angle(c_i, c_{i+1}) < \pi$ für $i = 1, 2, 3$ gelten, wobei Indizes Modulo 3 betrachtet werden.

Ein *Kreuz* besteht aus vier Faltschnitten c_1, c_2, c_3 und c_4 . Ebenfalls sind diese gegen den Uhrzeigersinn beschriftet und es soll gelten, dass die Kanten c_1, c_3 und c_2, c_4 auf einer Geraden liegen und alle vier die selbe Berg/Tal Zuordnung haben.

Ein Faltmuster beinhaltet einen *Vogelfuß* per Definition genau dann, wenn es ein Dreibein oder ein Kreuz und eine zusätzliche Faltschnittlinie, die eine andere Berg/Tal Zuordnung hat wie das Kreuz oder das Dreibein, besitzt. Dargestellt sind diese zwei Arten von Vogelfüßen in Abbildung 1.9. Das Hauptresultat von [1] ist folgendes:

Satz 1.6. *Ein Faltmuster mit einem Knoten ist genau dann starr faltbar, wenn es einen Vogelfuß enthält.*

Eine Möglichkeit, an dieses Problem heranzugehen ist, dass der Knoten als Mittelpunkt einer genügend kleinen Sphäre betrachtet wird. Somit bildet die starre Faltung eine sphärische geschlossene Gelenkkette, welche sich nicht überschneidet. Ein Beweis des Satzes findet sich in [1] und verwendet eben diese Betrachtungsweise und ein induktives Argument für eine der zwei zu zeigenden Richtungen.

1.3 Das Fold-and-Cut Theorem

Im Jahr 1922 veröffentlichte der Befreiungskünstler Harry Houdini ein Buch [20] mit Zauberkünsten, welche mit Papier ausgeführt werden. In diesem Buch befindet sich auch eine Anleitung, um mit nur einem Schnitt einen fünfeckigen Stern aus einem Stück Papier auszuschneiden. Dieses Kunststück führt zur Frage, ob es möglich ist auch andere Formen mit nur einem Schnitt auszuschneiden. Diese Fragestellung wird mit dem Begriff *Fold-and-Cut Problem* zusammengefasst.

Eine abstrakte Formulierung dieses Problems lautet: Ist es möglich, für jeden planaren Graphen G mit geraden Kanten ein Faltmuster zu finden, welches flach faltbar ist, sodass

im gefalteten Zustand der Graph G zu einer Linie zusammenfällt. Diese Fragestellung ist um einiges allgemeiner als der Zaubertrick von Houdini. Es ist nämlich zugelassen, dass der Graph lose Enden hat oder mehr als eine Zusammenhangskomponente besitzt.

Für die Lösung dieses Problems gibt es zwei unterschiedliche Vorgehensweisen. Die eine verwendet das Straight-Skeleton [12] und die andere benützt Kreispackungen [5].

Die Straight-Skeleton-Methode spiegelt die kanonische Herangehensweise an das Problem wieder. Sie ist relativ einfach zu konstruieren, doch leider nicht immer oder nur beschränkt anwendbar und die Anzahl der Faltlinien kann unbeschränkt sein. Im Gegensatz dazu liefert die Kreispackung-Methode eine Lösung, welche mit einer beschränkten Anzahl an Faltlinien auskommt. Doch diese ist im Allgemeinen nicht leicht zu bestimmen. Im folgendem sollen beide Algorithmen beschrieben werden.

1.3.1 Straight-Skeleton-Methode

Viele der kommenden Definitionen und Aussagen sind von [12] übernommen und auch dort zu finden.

In diesem Abschnitt soll angenommen werden, dass ein unendlich großes Blatt Papier gefaltet wird. Für planare Graphen sind gerade Kanten erlaubt, die null, einen oder zwei Knoten besitzen, somit sind Geraden, Halbgeraden (auch Strahlen genannt) und Stecken zulässig. Ein Faltmuster ist ein planarer Graph mit diesen Eigenschaften und die Kanten dieses Graphen werden Faltlinien genannt. Für das gefaltete Blatt Papier werden die Faltlinien zu gefalteten Kanten.

Der planare Graph, der ausgeschnitten werden soll, wird *Cut-Graph* genannt. Seine Ecken, Kanten und Facetten werden *Cut-Ecken*, *Cut-Kanten* und *Cut-Facetten* genannt. Jede Cut-Facette soll ein Attribut O oberhalb oder U unterhalb bekommen. Das Fold-and-Cut-Problem besteht darin, eine flache Faltung und eine Gerade l , genannt *Schnittlinie*, zu finden, sodass l mit dem gefalteten Cut-Graph übereinstimmt. Die Faltung muss Cut-Facetten über oder unter l platzieren, je nachdem welche Zuordnung sie haben. Das Hauptresultat von [12] ist im folgenden Satz festgehalten.

Satz 1.7 (Fold-and-Cut Theorem I). *Jeder Cut-Graph welcher eine konstante O/U-Zuordnung hat oder keinen kreisförmigen Korridoren (wird auf Seite 24 definiert), besitzt eine flache Faltung und eine Gerade l , sodass nur der Cut-Graph auf l gefaltet wird und die O/U-Zuordnung erfüllt ist.*

Das Ziel ist also, zu einem gegebenen Cut-Graph ein passendes Faltmuster zu finden. Dazu werden im folgenden Kanten definiert, die im Faltmuster enthalten sind.

Eine erste Menge an Faltlinien, die im Faltmuster vorkommen müssen, sind jene Cut-Kanten, deren angrenzenden Cut-Facetten die selbe O/U-Zuordnung haben, oder an nur eine Cut-Facette grenzen. Standardmäßig werden diese zu Bergkanten, wenn die beiden Facetten (oder die Facette) unterhalb der Geraden l sein sollen und zu Talkanten, wenn die Facetten oberhalb von l sein sollen.

Der natürliche Weg, um zwei Kanten aufeinander zu falten ist, die Winkelhalbierende als Faltlinie zu verwenden. Eine zweite Menge an Faltlinien, welche im Faltmuster enthalten



(a) Verkleinern bis die Facette in mehrere Bereiche zerfällt.

(b) Rekursives Fortfahren auf den neuen Facetten.

Abbildung 1.10: Konstruktion des Straight-Skeleton-Graphen.

sind, entstehen somit als Kanten des *Straight-Skeleton-Graph* (SSG), einer Verallgemeinerung der Winkelhalbierenden für beliebige Graphen mit geraden Kanten [2]. Die Kanten des SSG sind die Bahnen der Cut-Knoten bei gleichmäßiger Verkleinerung der Cut-Facetten. Dies heißt, das zu jedem Zeitpunkt die Kanten der verkleinerten Cut-Facette parallel zur ursprünglichen Cut-Kante sind und alle denselben Normalabstand haben. Falls im Laufe des Verkleinerungsprozesses die Facette in mehrere zerfällt, wird rekursiv mit diesen weitergemacht. Dies geschieht so lang, bis entweder die Facette zu einem Punkt degeneriert ist, oder zu einer Strecke. Diese Strecke wird zum SSG hinzugefügt. Siehe Abbildung 1.10.

Gesondert müssen Cut-Knoten vom Grad null oder eins betrachtet werden. Es gibt mehrere Möglichkeiten, für diese den SSG zu definieren und für das Fold-and-Cut Problem führen alle zum gewünschten Ziel. Eine Variante ist, sich die Cut-Kante, angrenzend an den Cut-Knoten vom Grad eins als Rechteck vorzustellen, bei welchem eine Kantenlänge null ist. Beim Verkleinern der angrenzenden Cut-Facette ist somit klar, wie der SSG aussehen muss. Für Cut-Knoten vom Grad null wird das Problem auf ähnliche Weise umgangen. Diese Knoten werden als Quadrate mit Seitenlänge null interpretiert. Die Orientierung der Quadrate ist beliebig. Cut-Knoten vom Grad null oder eins bestehen also aus Cut-Kanten der Länge null.

Der SSG kann auch als *Dachausmittlung* betrachtet werden, siehe [30]. Der Cut-Graph ist bei dieser Betrachtungsweise die Traufe auf derselben Höhe und der SSG bildet die Verschneidungen der Dachflächen. Diese Dachflächen haben alle einen selben konstanten Neigungswinkel.

Der SSG ist wieder ein planarer Graph und seine Knoten, Kanten und Facetten werden Skeleton-Knoten, Skeleton-Kanten und Skeleton-Facetten bezeichnet, damit es zu keiner Verwechslung mit dem Cut-Graphen kommt.

Eine sehr nützliche Eigenschaft des SSG ist, dass jede Cut-Kante in genau einer Skeleton-Facette enthalten ist. Es gilt auch, dass jede Skeleton-Facette genau eine Cut-Kante enthält, wenn die Cut-Kanten mit verschwindender Länge hinzugenommen werden, siehe [14].

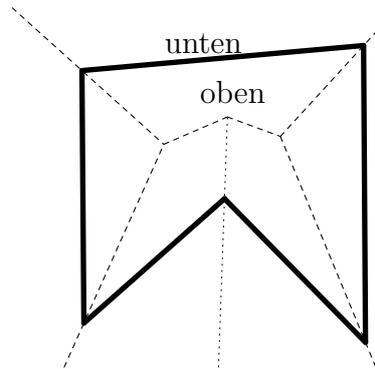


Abbildung 1.11: Der SSG zum Cut-Graph (fett). Bergkanten sind strichliert und Talkanten sind gepunktet.

Die Skeleton-Kanten sind tatsächlich Winkelhalbierende von Cut-Kanten, siehe [14]. Etwas genauer formuliert gilt, dass falls e eine Skeleton-Kante ist und f_1 und f_2 die zwei angrenzenden Skeleton-Facetten sind, welche die Cut-Kanten c_1 und c_2 enthalten, dann schneiden sich die Verlängerungen von e , c_1 und c_2 in einem Punkt (eventuell ein Fernpunkt, falls die Kanten c_1 und c_2 parallel sind) und e halbiert den Winkel zwischen c_1 und c_2 (im Fall das c_1 parallel zu c_2 ist, liegt e genau in der Mitte von c_1 und c_2).

Für die Skeleton-Kanten, diese sind alle im Faltmuster enthalten, soll eine Berg/Tal-Zuordnung getroffen werden. Mit der Notation des vorigen Absatzes werden nun zwei Arten von Skeleton-Kanten definiert. Jener Teil der Skeleton-Kante e , welcher im Winkelfeld zu den Winkeln aus dem Intervall $[0, \pi)$ von c_1 und c_2 liegt, wird als *spitze Skeleton-Kante* bezeichnet. Der restliche Teil der Skeleton-Kante, also jener im Winkelfeld $[\pi, 2\pi)$, wird als *überstumpfe Skeleton-Kante* bezeichnet. Zu beachten ist, dass der Winkel zwischen zwei parallelen Cut-Kanten als 0 definiert wird und somit die zugehörige Skeleton-Kante spitz ist. Falls die Verlängerungen von c_1 und c_2 zusammenfallen, dann ist der Winkel zwischen ihnen als π definiert.

Die standardmäßige Berg/Tal-Zuordnung der Skeleton-Kanten hängt nun davon ab, ob die zugehörige Cut-Facetten eine O- oder U-Zuordnung hat. Für *oben* werden spitze Skeleton-Kanten zu Bergkanten und überstumpfe zu Talkanten, für *unten* genau umgekehrt, also spitz wird zu Tal und überstumpf zu Berg. Ein Beispiel ist in Abbildung 1.11 zu sehen.

Offensichtlich reichen die Skeleton-Kanten noch nicht als Faltnlinien aus. Es lassen sich einfache Beispiele konstruieren (zum Beispiel Abbildung 1.11), bei denen in einem Skeleton-Knoten drei Skeleton-Kanten zusammen kommen. Nach dem Satz von Maekawa (Satz 1.2) ist es nicht möglich, einen Knoten mit einer ungeraden Anzahl an Faltnlinien flach zu falten.

Es muss also noch eine dritte Menge an Faltnlinien bestimmt werden. Anhand von einfachen Beispielen ist zu sehen, dass sich Faltnlinien eignen, welche orthogonal zu Cut-Kanten sind, da beim Falten entlang dieser die Cut-Kante auf sich selbst gefaltet wird. Für eine formale Definition dieses Konzeptes wird der Begriff des *orthogonalen Streckenzuges* eingeführt.

Der *orthogonale Streckenzug* für einen beliebigen Punkte \mathbf{p} besteht aus Strahlen und

Strecken, welche *Ortho-Kanten* genannt werden und mit einer Skeleton-Facette f in Verbindung stehen. Definiert wird der orthogonale Streckenzug rekursiv wie folgt: Für jede Skeleton-Facette f , in der \mathbf{p} enthalten ist, sei l jene Linie, die \mathbf{p} enthält und orthogonal zur Cut-Kante ist, welche in f liegt. Sei m das zusammenhängende Segment in $l \cap f$, welches \mathbf{p} beinhaltet. m kann eine Strecke, ein Strahl oder nur der Punkt \mathbf{p} selbst sein. Der *orthogonale Streckenzug* für den Punkt \mathbf{p} besteht aus m und den orthogonalen Streckenzügen für die Endpunkte von m .

Ein orthogonaler Streckenzug, welcher einen Skeleton-Knoten beinhaltet, heißt *real*, alle anderen sind *imaginär*. Die realen orthogonalen Streckenzüge werden im Faltmuster aufgenommen. In der Definition des orthogonalen Streckenzuges wurde darauf geachtet, dass jede Ortho-Kante mit einer Skeleton-Facette zusammenhängt. Dies ist insbesondere wichtig, falls Ortho-Kanten zu einem Punkt degenerieren. Diese werden *Länge-null* Ortho-Kanten genannt. Der Skeleton-Knoten in der Mitte von Abbildung 1.11 besitzt zwei Länge-null Ortho-Kanten.

Eine Eigenschaft von Ortho-Kanten ist, dass sie orthogonal zur Cut-Kante sind, welche in derselben Skeleton-Facette liegen. Folglich sind alle Ortho-Kanten in einer Skeleton-Facette parallel. Ebenfalls kann noch eine Aussage über den Abstand von zwei orthogonalen Streckenzügen gemacht werden.

Lemma 1.8. *Seien e_1 und e_2 Ortho-Kanten in einer Skeleton-Facette f . Seien v_1 und v_2 die Endpunkte von e_1 und e_2 auf der Skeleton-Kante s . Seien e'_1 und e'_2 Ortho-Kanten, inzident mit v_1 und v_2 , in der Skeleton-Facette f' , welche mit f die Skeleton-Kante s gemeinsam hat.*

Dann ist der Abstand von e_1 zu e_2 derselbe, wie der Abstand von e'_1 zu e'_2 .

Beweis. Die Ortho-Kanten e'_1 und e'_2 existieren aufgrund der Definition von orthogonalen Streckenzügen. Seien c und c' die Cut-Kanten in den Skeleton-Facetten f und f' . Die Skeleton-Kante s ist eine Winkelhalbierende von c und c' . Daher ist s eine Winkelhalbierende von e_1 und e'_1 sowie von e_2 und e'_2 . \square

Eine Frage, die sich bezüglich orthogonalen Streckenzüge aufdrängt, ist, ob diese immer aus endlich vielen Segmenten bestehen. Unglücklicherweise muss diese Frage mit einem Nein beantwortet werden. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 1.12 zu finden.

Alle Ortho-Kanten zusammen bilden den *Ortho-Graph*. Es kann nun der Begriff eines *Korridors* definiert werden. Ein *Korridor* ist eine Facette des Ortho-Graphen. Charakterisiert werden Korridore zuerst mit ihrer Topologie. Falls das Innere eines Korridors homöomorph zu einem unendlichen Band² ist, heißt der Korridor *linear*. Ist das Innere homöomorph zu einem Kreisring, so heißt der Korridor *kreisförmig*. Zusätzlich werden die Korridore noch über die Anzahl ihrer *Wände* charakterisiert. Eine *Wand* ist ein orthogonaler Streckenzug, welcher einen Korridor berandet. Ein Korridor kann eine Wand oder zwei Wände besitzen und es ist auch erlaubt, dass Länge-null Ortho-Kanten in einer Wand vorkommen, siehe auch [12].

²Das ist die Menge $(0, 1) \times \mathbb{R}$.

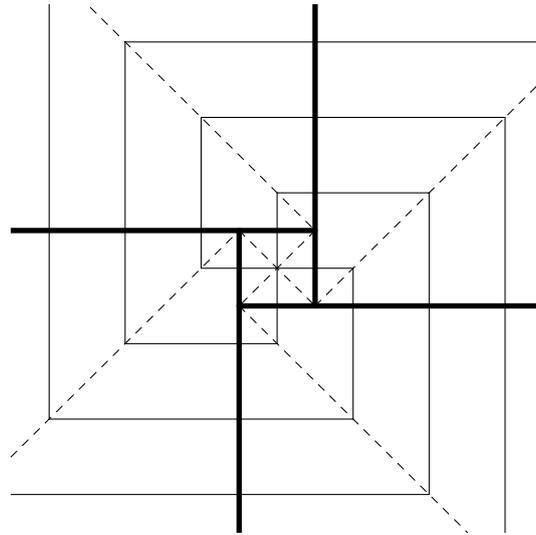


Abbildung 1.12: Ein Beispiel für orthogonale Streckenzüge mit unendlich vielen Segmenten (es ist nur ein endlicher Bereich abgebildet). Der Cut-Graph ist fett und der Skeleton-Graph geschrichelt dargestellt.

Sei C ein Korridor und C_f jener Teil des Korridors, welcher in der Skeleton-Facette f liegt. C_f muss nicht zusammenhängend sein, aber alle Zusammenhangskomponenten haben dieselbe Breite. Dies ist die Motivation für die Namensgebung.

Die wichtigsten Kanten, welche im Faltmuster vorkommen, sind nun bestimmt. Sie setzen sich aus drei Typen von Kanten zusammen:

1. Cut-Kanten, die gefaltet werden müssen, da sie die Grenze von zwei Cut-Facetten sind, die die selbe O/U Zuordnung haben,
2. Skeleton-Kanten und
3. Ortho-Kanten.

Das Faltmuster ist zumindest lokal flach faltbar. Aufgrund der Eigenschaft, dass Skeleton-Kanten Winkelhalbierende von Cut-Kanten sind, ist die alternierende Winkelsumme in Cut-Knoten gleich 0, was nach Satz 1.5 ausreichend für eine flache Faltbarkeit ist. Ebenso ist das Faltmuster in einer Umgebung von Skeleton-Knoten flach faltbar, da auch hier die Ortho-Kanten die Winkel zwischen Skeleton-Kanten halbieren.

Die globale flache Faltbarkeit ist noch nicht bewiesen und es wurde auch noch nicht gezeigt, dass das Faltmuster die gewünschte Eigenschaft, dass der Cut-Graph auf eine Linie gefaltet wird, hat. Um dies zu überprüfen, kann ein gefalteter Zustand berechnet werden und es wird gezeigt, dass dieser die gesuchte Eigenschaft erfüllt.

Für den Fall, dass es kreisförmige Korridore gibt, siehe [12]. Für kreisförmige Korridore können gewisse Eigenschaften von Korridoren nicht verwendet werden. Es müssen auch für gewisse Knoten die standardmäßige Berg/Tal-Zuordnung umgedreht werden. Ebenso müssen noch weitere Falmlinien in das Faltmuster aufgenommen werden.

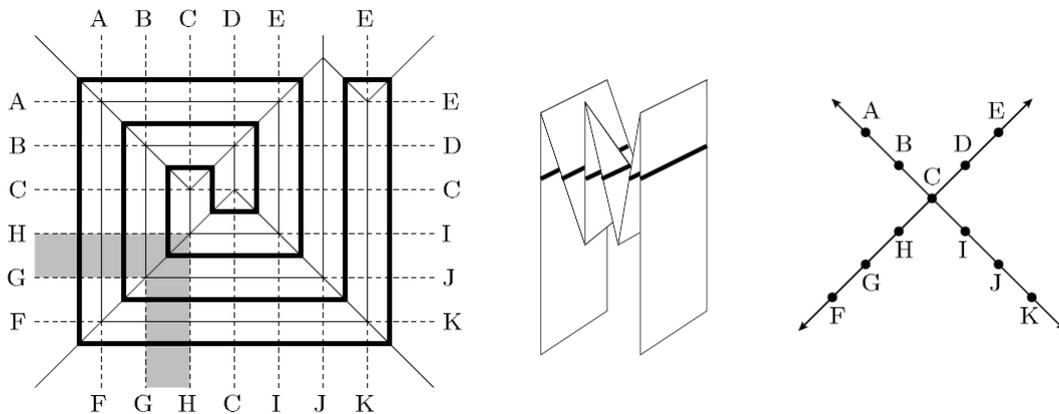


Abbildung 1.13: Der grau schattierte Korridor wird wie eine Ziehharmonika gefaltet. Die Cut-Kanten werden auf eine Linie gefaltet. Dabei entsteht ein Baum. Abbildung übernommen aus [12].

Für den Fall, dass es keine kreisförmigen Korridore gibt, ist die Berechnung des gefalteten Zustandes in [12] zu finden. Der erste Schritt in der Berechnung ist, dass nur die Korridore gefaltet werden. Salopp gesprochen wird jeder Korridor bei den Skeleton-Kanten, welche in ihm enthalten sind, abwechselnd Berg und Tal gefaltet. Es entsteht eine Art *Ziehharmonika*, wie schon im Beweis zu Satz 1.5 aufgetreten ist. Es ist nun möglich zu zeigen, dass bei diesem Vorgang die Cut-Kanten auf eine Strecke l gefaltet werden und jede Wand auf eine Strecke orthogonal zu l gefaltet wird, siehe Abbildung 1.13. Ebenfalls passen benachbarte Korridore an dieser Strecke zusammen. Diese Prozedur ist nicht anwendbar, falls der Korridor kreisförmig ist.

Nachdem alle Korridore gefaltet wurden, hängen benachbarte an Verbindungsstellen (das sind gefaltete Wände) zusammen. Es muss jetzt nur noch festgestellt werden, wie entlang dieser Verbindungsstellen gefaltet werden muss, um die flache Faltung zu finden. Die Struktur des Modells in dieser Phase gleicht einem Graphen. Kanten sind die Strecken l der gefalteten Cut-Kanten in den Korridoren und die Knoten sind die Verbindungen der Korridore. Dieser Graph ist offensichtlich ein Baum, Korridore mit einer Wand entsprechen Blättern und herauschneiden eines Korridors mit zwei Wänden zerteilt den Graph in zwei Teilgraphen, siehe Abbildung 1.13.

Einen Baum auf eine Gerade zu falten ist relativ einfach. Es ist nur nötig, den Baum bei einem Blatt *aufzuhängen* und die Schwerkraft erledigt den Rest. Eine mathematische Vorgehensweise dieser Veranschaulichung ist in [14] zu finden. Dieser Vorgang bestimmt, wie die Wände der orthogonalen Streckenzüge gefaltet werden müssen.

Somit wurde für den zu Beginn dieses Abschnitts formulierten Satz ein Beweis skizziert. An dieser Stelle sollen noch ein paar praktische Hinweise zur Bestimmung des Faltmusters gegeben werden.

Es werden im Faltmuster nicht alle Ortho-Kanten benötigt, die Skeleton-Kanten sind allerdings nicht verzichtbar. Für *kleine* Modelle ist es daher ratsam, sofort mit dem Falten

des SSG zu beginnen. Dieses soll entsprechend der getroffenen Berg/Tal-Zuordnung geschehen. Die meisten Ortho-Kanten, die zum flachen Falten benötigt werden, ergeben sich fast automatisch.

Ebenfalls ist es hilfreich, wenn man den Satz von Maekawa (Satz 1.2) im Hinterkopf hat. Knoten mit einer ungeraden Kantenanzahl brauchen nämlich unbedingt noch mindestens eine Kante. Auch ist es von Vorteil zu wissen, dass die Differenz von Berg und Talkanten ± 2 ist. Ein Beispiel für das Fold-and-Cut Theorem ist in Abbildung 1.14 zu sehen.

1.3.2 Kreispackungs-Methode

Im Vergleich zur Straight-Skeleton-Methode betrachtet diese Methode lokale Lösungen des Problems und verbindet diese zu einer globalen Lösung. Eine detaillierte Beschreibung der Kreispackungs-Methode ist in [5] zu finden. Die folgenden Betrachtungen sind aus diesem Artikel übernommen.

Der Cut-Graph soll in diesem Fall ein Polygon P mit Loch (konvex oder konkav) sein. Lose Enden oder mehrere Zusammenhangskomponenten sind nicht erlaubt. Es ist möglich, die Methode auf beliebige geradlinige planare Graphen zu verallgemeinern, doch dies ist mit einer deutlichen Zunahme an Faltlinien verbunden. Das Polygon P soll strikt in einem Rechteck R enthalten sein. Dieses Rechteck entspricht dem Stück Papier, auf welches das Polygon gezeichnet ist. Das Resultat kann mit folgenden Satz zusammengefasst werden.

Satz 1.9 (Fold-and-Cut Theorem II). *Jedes Polygon mit Loch lässt sich mit einem Schnitt von einem Stück Papier trennen.*

Der erste Schritt bei der Konstruktion der Faltlinien besteht darin, eine Kreispackung mit den folgenden Eigenschaften zu finden:

- Die Kreise berühren sich nur und überschneiden sich nicht.
- An jedem Knoten von P und R ist ein Kreis platziert.
- Die Kanten von P und R sind vollständig mit Kreisen überdeckt. Das heißt, dass die Länge der Kante eine Summe von Radien ist.
- Die Lücken zwischen den Kreisen bestehen nur aus Bereichen, die von drei oder vier Kreisbögen begrenzt sind.

Jede Kreispackung mit diesen Eigenschaften ist ausreichend. Eine solche zu finden, ist eventuell nicht einfach. Eine Möglichkeit wäre zum Beispiel, den Rand von P und R mit genügend kleinen Kreisen zu überdecken. Dabei entstehen Bereiche, welche von sehr vielen Kreisbögen berandet sind. In diese Bereiche kann nun der größte Berührkreis eingezeichnet werden. Im Allgemeinen zerteilt dieser den Bereich in drei kleinere. Dieses Platzieren des größtmöglichen Kreises kann nun rekursiv angewandt werden, bis die Bereiche nur von drei oder vier Kreisbögen berandet sind. Einen Beweis dafür, dass die Anzahl der Kreisbögen kleiner wird, ist in [6] nachzulesen.

Die eben skizzierte Kreispackung ist wahrscheinlich nicht ideal, da sie eventuell eine sehr große Zahl an Kreisen besitzt, doch sie besitzt die obigen Eigenschaften. Im Weiteren sei

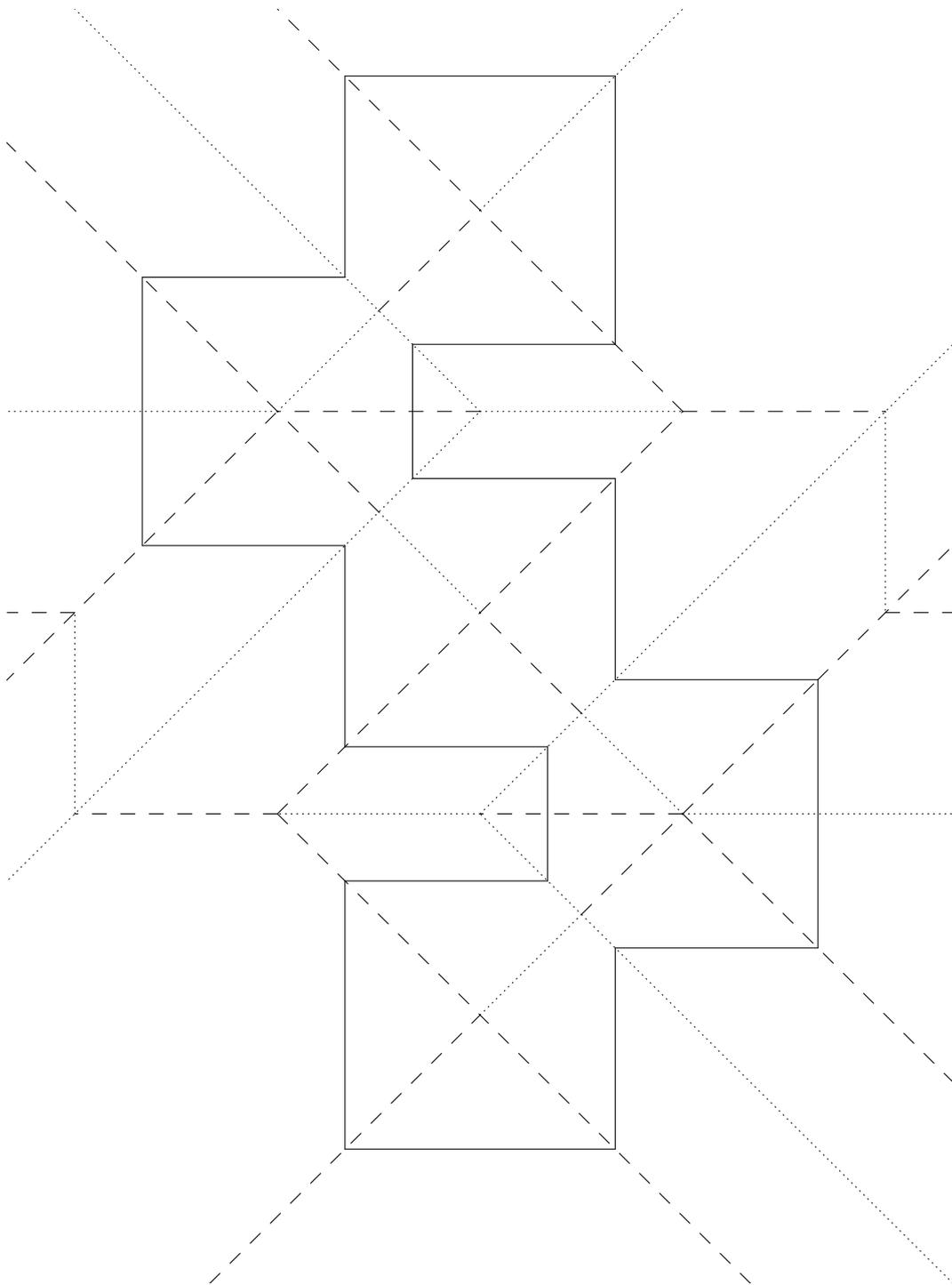
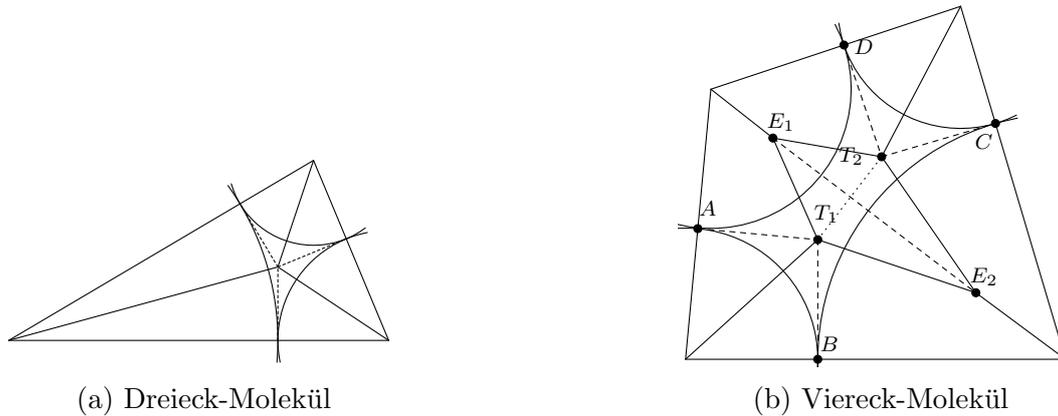


Abbildung 1.14: Ein Faltmuster, um das Logo der TU-Graz mit einem Schnitt auszuschneiden.



(a) Dreieck-Molekül

(b) Viereck-Molekül

Abbildung 1.15: Faltmuster für Moleküle.

angenommen, dass eine passende Kreispackung gefunden ist. Im nächsten Schritt werden Mittelpunkte von berührenden Kreisen verbunden. Dies führt zu einer Zerlegung von R in Drei- und Vierecke. Diese werden *Moleküle* genannt, da sie das Rechteck R aufbauen.

Die Kreispackungs-Methode faltet nun jedes dieser Moleküle flach und zeigt im Anschluss, dass es möglich ist, diese zu einer globalen flachen Faltung zu verbinden. Dreiecke werden wie in Abbildung 1.15a dargestellt, in die Form eines *dreiarmigen Sternes* gefaltet. Die Winkelhalbierenden sind Bergkanten und die Lote vom Inkreismittelpunkt auf die Seiten sind Talkanten. Die alternierende Winkelsumme um den Inkreismittelpunkt ist null, daher ist dieses Molekül nach dem Satz von Kawasaki 1.5 flach faltbar. Damit das Molekül so gefaltet werden kann, dass alle Arme in dieselbe Richtung zeigen, muss eine der Talkanten zu einer Bergkante werden. Die Orientierung der Faltlinien kann beim Zusammenfügen der Moleküle noch geändert werden.

Nicht so einfach ist es, das viereckige Molekül flach zu falten. Dies geschieht so wie in Abbildung 1.15b gezeigt. Talkanten sind tangential zu den Berührungspunkten der Kreise und Bergkanten sind Winkelhalbierende der angrenzenden Cut-Kanten. Innerhalb des Vierecks ist ein weiteres Viereck $T_1E_2T_2E_1$, dessen Rand Bergkanten werden, und eine der Diagonalen ist eine Talkante. Im gefalteten Zustand entsteht ein *vierarmiger Stern*. Wenn alle Arme in dieselbe Richtung zeigen, dann entsteht in der Mitte noch eine zusätzliche Faltlinie. In Abbildung 1.15b ist diese punktiert dargestellt.

Die Punkte T_1 und T_2 sind durch den Schnitt der Tangenten bestimmt. Der Punkt E_1 liegt einerseits auf der Winkelhalbierenden der Cut-Kanten und andererseits auf der Winkelhalbierenden von BT_1 und T_1T_2 . Auf analoge Weise lässt sich E_2 festlegen. Dass dieses Molekül mit den gegebenen Faltlinien tatsächlich flach faltbar ist, wurde in [28] gezeigt.

Der Vorteil gegenüber der Straight-Skeleton-Methode besteht darin, dass die Anzahl der Faltlinien der Kreispackungs-Methode beschränkt bleibt, wenn die Anzahl der Kreise beschränkt ist.

Im letzten Schritt der Kreispackungsmethode werden die Moleküle miteinander verbun-

den. Die Grundidee besteht darin, einen Baum zu finden, in welchem alle Moleküle enthalten sind und die dessen Knoten darstellen. Ähnlich wie bei der Straight-Skeleton-Methode wird dieser Baum bei einem Blatt *aufgehoben*, sodass alles *nach unten fällt* und dieses Blatt eine Wurzel geworden ist. Dazu muss das Blatt Papier aufgeschnitten werden. Nun wird bei den neuen Blättern des Baumes begonnen entlang der Faltnlinien zu falten. Jedes Molekül, welches näher bei der Wurzel ist, wird um alle anderen herum gelegt. Zwischen zwei Armen eines Moleküles liegt das gesamte bereits gefaltete Papier. Dazu war es wichtig, dass jedes Molekül eine flache Faltung besitzt, bei welcher alle Arme in die selbe Richtung zeigen.

Ein weiterer aufwändiger Schritt ist nun zu zeigen, dass das Aufschneiden des Papiers wieder rückgängig gemacht werden kann. Alle Details dieses Faltprozesses sind in [5] zu finden. Für praktische Zwecke ist diese Methode nicht zu empfehlen, es wird daher auf ein Beispiel verzichtet.

2 Origami mit gekrümmten Kanten

Wie schon eingangs erwähnt, ist es zum Verständnis von Origami mit gekrümmten Kanten unbedingt notwendig, abwickelbare Flächen besser zu verstehen. Aus diesem Grund beschäftigt sich der erste Teil dieses Abschnittes mit solchen Flächen. Das Hauptresultat ist ein Struktursatz, welcher die lokale Gestalt abwickelbarer Flächen als torsale Regelflächen identifiziert. Kurz wird darauf eingegangen, wie entscheidbar ist, ob eine allgemeine Regelfläche abwickelbar ist oder nicht. Es wird auch noch diskutiert, wie abwickelbare Flächen als Einhüllende einer einparametrischen Ebenenschar erzeugt werden können.

Im zweiten Teil werden Eigenschaften von gekrümmten Kanten hergeleitet. Diese Kanten entsprechen Übergängen von zwei benachbarten abwickelbaren C^2 -Flächen. Eines der wichtigsten Resultate ist, dass der Binormalenvektor dieser Kante, welche eine Raumkurve ist, eine Winkelhalbierende der beiden angrenzenden Normalvektoren ist. Ebenfalls ein schönes Resultat besagt, dass die angrenzende Fläche genau dann ein Kegel mit Spitze auf der Kante ist, wenn die Kante, aufgefasst als Raumkurve, nicht C^1 ist.

Am Schluss wird diskutiert, ob das wohlbekanntere *Hypar* faltbar ist. Es benötigt noch weitere Resultate, um diese Frage beantworten zu können.

Es gibt viel Literatur, welche die differentialgeometrischen Eigenschaften von abwickelbaren Flächen beschreiben. Diese Arbeit lehnt sich an die Herangehensweise von [32] an, um die Eigenschaften von abwickelbaren C^2 -Flächen zu beleuchten. Um Übergänge niedrigerer Differenzierbarkeitsklassen besser zu verstehen, werden Definitionen und Resultate von [10] und [11] übernommen und vorgestellt.

2.1 Eigenschaften von abwickelbaren Flächen

Intuitiv ist klar, was mit Abwickelbarkeit gemeint ist. Eine Fläche wird so lang verbogen (ohne sie zu stauchen oder zu dehnen), bis sie flach ist. Soll diese Prozedur auf einen Drehzylinder angewendet werden, geht dies nur, falls dieser aufgeschnitten wird. Es ist daher sinnvoll, Abwickelbarkeit als lokale Eigenschaft einer Fläche zu definieren, siehe auch [32] und [10].

Definition 2.1. *Eine Fläche heißt abwickelbar, wenn es zu jedem Punkt eine Umgebung gibt, welche mit einer Abbildung ϕ isometrisch in die Ebene abgebildet werden kann.*

Mit anderen Worten gesprochen ist die Länge einer Kurve auf der Fläche dieselbe, wie die Länge der unter ϕ abgebildeten Kurve in der Ebene.

Es soll nun eine Fläche S betrachtet werden, welche stückweise C^2 ist. Diese zerfällt in Flächen S_i mit C^2 -Rändern γ_i , welche *Halbkanten* genannt werden. Die Enden von

Halbkanten heißen *Halbecken*. Ebenso werden isolierte Punkte der Fläche, die nicht C^2 sind, *Halbecken* genannt. Falls S entlang einer Halbkante C^1 ist, dann wird die Halbkante *ordentliche Halbkante* genannt, ansonsten ist es eine *Kante*. Analog wird eine Halbecke, die nicht C^1 ist, *Ecke* genannt. Eine *Fläche mit Kanten* ist eine stückweise C^2 -Fläche, die nicht überall C^1 ist, also mindestens eine Kante oder Ecke hat. Eine *Fläche ohne Kanten* ist eine C^1 -Fläche, die stückweise C^2 ist.

Die Begriffe Halbkante und Halbecke mögen etwas holprig klingen, sie sind aber notwendig, um zu unterscheiden, ob der Übergang von S_i auf S_j C^1 ist oder nicht. Ein Knick in einem Blatt Papier ist eine Kante, da es auf der Kante keine Tangentialebene gibt. Der Übergang von einer Zylinderfläche auf eine andere entlang einer Erzeugenden mit gemeinsamer Tangentialebene ist im Allgemeinen eine Halbkante.

Da abwickelbare Flächen aus C^2 -Flächen bestehen, werden diese nun näher betrachtet und einige Resultate hergeleitet.

Seien zwei Flächen $\mathbf{x}(u, v)$ und $\bar{\mathbf{x}}(u, v)$ durch ihre Parameterdarstellungen gegeben und sei $\phi: \mathbf{x}(u, v) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(u, v)$ eine Abbildung von der ersten in die zweite Fläche. Die Forderung, dass ϕ eine Isometrie ist, ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass sich die Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Flächen nicht ändern. Es muss daher $I(u, v) = \bar{I}(u, v)$ gelten.

Karl Friedrich Gauß hat mit seinem *Theorema egregium* gezeigt, dass auch die Gaußsche Krümmung mit den Koeffizienten der ersten Fundamentalform bestimmt werden kann. Dies führt zu folgendem Satz:

Satz 2.2. *Eine C^2 -Fläche ist genau dann abwickelbar, wenn die Gaußkrümmung konstant null ist.*

Der Satz ist eine direkte Folgerung aus dem *Theorema egregium*. Die Voraussetzung an die Differenzierbarkeitsklasse hängt damit zusammen das *Theorema egregium* für C^2 -Flächen zu beweisen. Üblicherweise wird dafür C^3 gefordert, da im Beweis dritte Ableitungen gebraucht werden. Ein Beweis für C^2 ist in [35] zu finden.

Für Punkte \mathbf{p} im Inneren einer abwickelbaren C^2 -Fläche trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:

1. \mathbf{p} ist ein Flachpunkt mit einer Umgebung aus Flachpunkten.
2. \mathbf{p} ist ein Flachpunkt und der Grenzwert von parabolischen Punkten.
3. \mathbf{p} ist ein parabolischer Punkt mit einer Umgebung von parabolischen Punkten.

Zusätzlich sind für Flächen ohne Kanten zwei weitere Fälle möglich.

4. \mathbf{p} ist ein innerer Punkt einer Halbkante.
5. \mathbf{p} ist eine Halbecke.

Durch Integration lässt sich zeigen, dass die Tangentialebene für Punkte im Fall 1 in einer Umgebung konstant ist und auch die Fläche ganz in dieser Ebene liegt. Für Punkte aus Fall 3 gilt, dass die Fläche in einer Umgebung einer Regelfläche mit konstanter Tangentialebene entlang von Erzeugenden ist. Es gilt folgender Satz:

Satz 2.3. *Eine abwickelbare C^2 -Fläche ist in einer Umgebung eines parabolischen Punktes (Fall 3 von oben) eine Regelfläche, deren Tangentialebene entlang einer Erzeugenden konstant ist. Solche Regelflächen werden torsale Regelflächen genannt.*

Für Punkte aus Fall 2 gilt die Aussage ebenso, diese ist in [9] und [16] nachzulesen. Ein Beweis des angeführten Satzes für C^2 -Flächen ist in [17] zu finden. Für C^3 -Flächen kann der Beweis wie folgt geführt werden.

Beweis. Es ist möglich, eine lokale Parametrisierung $\mathbf{x}(u, v)$, $(u, v) \in (0, 1)^2$ zu finden, sodass die Kurven $\mathbf{x}(u = \text{const.}, v)$ und $\mathbf{x}(u, v = \text{const.})$ Hauptkrümmungslinien sind, siehe dazu [9]. Sei nun $\mathbf{n}(u, v)$ das Normalvektorfeld der Fläche. Wegen der Parametrisierung gilt $\mathbf{n}_{,u} = -\kappa_1 \mathbf{x}_{,u}$ und $\mathbf{n}_{,v} = -\kappa_2 \mathbf{x}_{,v}$ wobei κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen sind. Nach Voraussetzung ist $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_2 \neq 0$ und somit ist $\mathbf{n}_{,u} = 0$. Also ist die Tangentialebene entlang der v -Linien konstant.

Differenzieren der Gleichung $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{,u} = 0$ nach u liefert $\mathbf{n}_{,u} \cdot \mathbf{x}_{,u} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{,uu} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{,uu} = 0$. Des Weiteren gilt wegen der Orthogonalität der Hauptkrümmungslinien $\mathbf{x}_{,u} \cdot \mathbf{x}_{,v} = 0$ und somit auch $\mathbf{x}_{,u} \cdot \mathbf{n}_{,v} = 0$. Erneutes Differenzieren nach u ergibt $0 = \mathbf{x}_{,uu} \cdot \mathbf{n}_{,v} + \mathbf{x}_{,u} \cdot \mathbf{n}_{,vu} = \mathbf{x}_{,uu} \cdot \mathbf{n}_{,v}$ da $\mathbf{n}_{,vu} = 0$.

Wir erhalten also, dass $\mathbf{x}_{,uu}$ orthogonal auf $\mathbf{n}_{,v}$ und \mathbf{n} ist, also ist $\mathbf{x}_{,uu}$ parallel zu $\mathbf{x}_{,u}$. Daraus folgt, dass die $v = \text{const.}$ Linien Geraden sind. \square

Um besser zu verstehen, welche Eigenschaften Punkte im Fall 4 haben, werden zwei Lemmata benötigt. Siehe auch [10].

Lemma 2.4. *Sei \mathbf{q} ein Punkt im Inneren einer Halbkante γ (Fall 4) einer abwickelbaren Fläche M . Dann ist \mathbf{q} nicht der Endpunkt einer Erzeugenden $C_{\mathbf{p}}$ durch einen Punkt $\mathbf{p} \in M$ mit Eigenschaft 3 oder 2.*

Beweis. Es reicht die Aussage für \mathbf{p} aus Fall 3 zu zeigen, da Fall 2 als Grenzwert von Fall 3 betrachtet werden kann.

Sei $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \gamma(s)$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\gamma(0) = \mathbf{q}$. Es existiert zu jedem Punkt $\gamma(s)$ die Tangentialebene und sie stimmt mit den beiden Tangentialebenen der beiden zusammentreffenden C^2 -Flächen M_1 und M_2 überein. Sei $\mathbf{n}(s)$ der Einheitsnormalvektor dieser Ebenen und sei $\dot{\mathbf{n}}(s)$ die Ableitung nach dem Bogenlängenparameter.

M_1 und M_2 sind torsale Regelflächen und können mit der Kurve $\gamma(s)$ und einer Erzeugendenrichtung $\delta_1(s)$ und $\delta_2(s)$ parametrisiert werden. Es gilt:

$$\mathbf{n} \cdot \delta_i = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{n}} \cdot \delta_i + \mathbf{n} \cdot \dot{\delta}_i = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{n}} \cdot \delta_i = 0$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich aus der auf Seite 38 gezeigten Gleichung (2.4)¹. Allerdings sind $\dot{\mathbf{n}}$, δ_1 und δ_2 orthogonal zu \mathbf{n} und somit muss entweder $\dot{\mathbf{n}} = 0$ oder δ_1 und δ_2 kollinear gelten.

¹ $\mathbf{a} = \gamma$ und $\mathbf{b} = \delta_i + \gamma$

Sei A jene Teilmenge des Parameterintervalls J von γ , bei der $\dot{\mathbf{n}} = 0$ gilt. Aufgrund der Stetigkeit von $\dot{\mathbf{n}}$ ist A abgeschlossen. Die Menge B sei jene Teilmenge des Parameterintervalls J von γ , bei der δ_1 und δ_2 kollinear sind. Aufgrund der Stetigkeit ist B abgeschlossen und jedes $s \in J$ liegt in A oder B .

Falls ein offenes Intervall I von γ in A liegt, dann ist eine Umgebung in M in einer Ebene enthalten. Falls I in B liegt, dann kann jede Erzeugende von M_1 nach M_2 fortgesetzt werden. In keinem der Fälle ist ein innerer Punkt von γ ein Endpunkt einer Erzeugenden, insbesondere auch \mathbf{q} nicht. \square

Lemma 2.5. *Für jeden Punkt \mathbf{p} vom Typ 4 auf einer abwickelbaren Fläche M gibt es eine eindeutige Gerade $L_{\mathbf{p}}$ durch \mathbf{p} , sodass $L_{\mathbf{p}} \cap M$ offen bezüglich $L_{\mathbf{p}}$ in \mathbf{p} ist. Jener Teil $C_{\mathbf{p}}$ vom Schnitt $L_{\mathbf{p}} \cap \text{interior}(M)$ der \mathbf{p} enthält, ist der Grenzwert von Erzeugenden von Punkten in einer Umgebung von \mathbf{p} und jeder Punkt auf $C_{\mathbf{p}}$ ist wieder vom Typ 4.*

Der Beweis dieses Lemmas ist in [10] zu finden und verwendet Lemma 2.4 sowie ein Kompaktheitsargument. Die Ergebnisse dieser beiden Lemmata lassen sich nun zu schönen Charakterisierungen von Halbkanten zusammenfassen.

Korollar 2.6. *Jede Halbkante auf einer Fläche ohne Kanten ist ein Geradenstück, dessen Endpunkte am Rand der Fläche liegen.*

Beweis. Wegen Lemma 2.5 ist jede Halbkante ein Geradenstück und als Grenzwert von Erzeugenden bestimmt. Diese Erzeugenden haben Endpunkte am Rand der Fläche. \square

Korollar 2.7. *Eine Fläche ohne Kanten hat keine Halbecken im Inneren und jeder innere Punkt liegt in einem C^2 -Stück oder auf einer Halbkante.*

Beweis. Halbecken sind entweder Endpunkte von Halbkanten oder isolierte Stellen. Im ersten Fall ist die Halbkante eine Gerade und hat Endpunkte nur am Rand. Im zweiten Fall ist die Fläche in einer Umgebung C^2 , daher eine torsale Regelfläche, deren Erzeugende bis zum Rand der Fläche gehen und jeder Punkt auf den Erzeugenden ist vom Typ 3 oder 2. \square

Zusammenfassen lassen sich die eben gesammelten nützlichen Resultate in einem Korollar.

Korollar 2.8. *Jeder innere Punkt \mathbf{p} einer abwickelbaren Fläche ohne Kanten liegt auf einem eindeutig bestimmten Geradenstück $C_{\mathbf{p}}$. Dies gilt nicht für Punkte mit einer Umgebung aus Flachpunkten. Die Endpunkte dieser Erzeugenden sind am Rand der Fläche und jeder innere Punkt von $C_{\mathbf{p}}$ ist vom selben Typ 2, 3 oder 4.*

Es kann nun ein Struktursatz für abwickelbare Flächen ohne Kanten bewiesen werden. Dieser ist ähnlich zu Satz 2.3, welcher nur Punkte vom Typ 3 behandelt. Das gezeigte Ergebnis kann auf abwickelbare Flächen ohne Kanten angewandt werden. Siehe auch [10].

Satz 2.9. *Jeder innere Punkt einer abwickelbaren Fläche ohne Kanten hat eine Umgebung, die eine torsale Regelfläche ist. Jeder innere Punkt einer Erzeugenden ist vom selben Typ 1, 2, 3 oder 4 und die Fläche kann durch*

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{c}(s) + t\delta(s) \quad (2.1)$$

parametrisiert werden, mit einer C^1 -Funktion \mathbf{c} und einer C^0 -Funktion δ . Zusätzlich ist δ eine C^1 -Funktion, wann immer \mathbf{c} aus Fall 1, 2 oder 3 ist.

Beweisskizze. Für eine flache Umgebung eines Punktes \mathbf{p} ist die Aussage trivial. Ansonsten kann die Umgebung M des Punktes \mathbf{p} mit einer Abbildung Φ isometrisch in die Ebene abgebildet werden und die durch jeden Punkt der Umgebung eindeutig bestimmte Erzeugende wird auf eine Strecke abgebildet. Sei γ eine orthogonale Trajektorie von Bildern der Erzeugenden und sei γ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\gamma(0) = \Phi(\mathbf{p})$. Falls $\Phi^{-1}(\gamma(s))$ kein Flachpunkt ist, gibt es einen Einheitsvektor $\epsilon(s)$ welcher in Richtung des Bildes der Erzeugenden zeigt. Es ist möglich, die Richtung von ϵ konsistent zu wählen und die Funktion ϵ auf Flachpunkte so fortzusetzen, dass ϵ stetig ist. $\Phi(M)$ kann durch $g(s, t) = \gamma(s) + t\epsilon(s)$ parametrisiert werden.

Die Funktion $\mathbf{x}(s, t) = \Phi^{-1}(g(s, t))$ leistet das Geforderte. \square

Nun wird genauer betrachtet, welche Flächen in Satz 2.3 auftreten. Dazu wird folgendes Lemma benötigt:

Lemma 2.10. *Für eine Regelfläche $\mathbf{x}(u, v) = (1 - v)\mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{r}(u)$ trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:*

1. *Wenn die Tangentialebene zweier Punkte auf einer Erzeugenden verschieden ist, dann rotiert sie um 180° während sie diese Erzeugende durchläuft und es gibt keinen singulären Punkt auf der Erzeugenden.*
2. *Wenn die Tangentialebene in zwei Punkten einer Erzeugenden übereinstimmt, dann ist sie entlang dieser konstant und es kann höchstens einen singulären Punkt auf der Erzeugenden geben.*
3. *Wenn auf einer Erzeugenden zwei singuläre Punkte sind, dann ist die ganze Erzeugende singulär.*

Beweis. Für den Normalvektor ergibt sich:

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_{,u} \times \mathbf{x}_{,v} = (\dot{\mathbf{a}} + v\dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{r} + v\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} \quad (2.2)$$

Falls $\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = 0$, dann ist auch $\mathbf{n} = 0$ für jedes v und die komplette Erzeugende ist singulär.

Wenn die Vektoren $\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{r}$ und $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}$ parallel sind, dann ist die Richtung des Normalvektors konstant und verschwindet für einen Wert von v .

Wenn sie anderenfalls nicht parallel sind, dann ist der Normalvektor für jedes v nicht der Nullvektor und er rotiert beim Durchlauf von v um 180° . \square

Die im Fall 2 von Lemma 2.10 auftretenden Flächen sind nur Zylinder, Kegel und Tangentenflächen. Die genaue Formulierung liefert der folgende Satz.

Satz 2.11. *Sei $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{r}(u)$ eine C^2 -Regelfläche mit der Eigenschaft 2 aus Lemma 2.10. Jedes offene Intervall I auf den u -Linien enthält ein offenes Intervall J , sodass für jedes $u \in J$ eine der folgenden Aussagen zutrifft:*

- *Die Erzeugenden sind parallel (Zylinder).*
- *Die Erzeugenden gehen durch einen festen Punkt (Kegel).*
- *Die Erzeugenden sind Tangenten an eine Raumkurve (Tangentenfläche).*

Beweis. Ohne Einschränkung habe $\mathbf{r}(u)$ die Länge 1. Falls $\mathbf{r} \equiv \text{const.}$ in I , dann sind alle Erzeugenden parallel (Zylinder). Ansonsten gibt es ein offenes Intervall $J \subset I$ mit $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$ für alle $u \in J$.

Lemma 2.10 liefert nun, dass es auf jeder Erzeugenden genau einen singulären Punkt $\mathbf{c}(u) = \mathbf{x}(u, v^*(u))$ gibt, wobei die Funktion v^* jedem Parameterwert u denjenigen Parameterwert v zuordnet, bei welchem die Singularität auftritt². Es gilt auch, dass $\mathbf{x}_{,u}$ und $\mathbf{x}_{,v}$ parallel sind, da wir Eigenschaft 2 annehmen.

Falls $\mathbf{c} \equiv \text{const.}$ dann gehen alle Erzeugenden durch einen Punkt (Kegel). Ansonsten gibt es ein Intervall J mit $\dot{\mathbf{c}}(u) \neq 0$. Differenzieren von \mathbf{c} ergibt: $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{x}_{,u} + v^*\mathbf{x}_{,v}$, somit sind $\dot{\mathbf{c}}$ und $\mathbf{x}_{,v}$ parallel. Daraus folgt, dass $\mathbf{x}_{,v}$ eine Tangente an die Kurve $\mathbf{c}(u)$ ist. \square

Als nächstes wird gezeigt, dass Zylinder-, Kegel- und Tangentenflächen abwickelbar sind. Es genügt eine Parametrisierung der Fläche und eines Teilstückes der Ebene anzugeben und für diese durch Nachrechnen zu zeigen, dass sie dieselben Koeffizienten der ersten Fundamentalform haben.

Zylinderflächen

Der Zylinder kann als $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{l}(u) + v\mathbf{r}$ beschrieben werden, wobei \mathbf{l} in einer Ebene orthogonal zu \mathbf{r} liegt und nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Es sei auch $\|\mathbf{r}\| = 1$. Ein Teilstück der Ebene kann einfach als $\mathbf{e}(u, v) = (u, v)^T$ dargestellt werden.

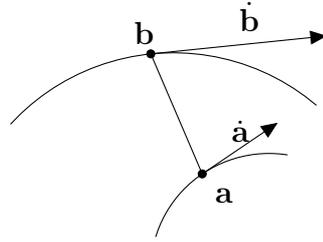
Durch Differenzieren erhalten wir als Koeffizientenmatrix $I_{\mathbf{s}}$ bzw. $I_{\mathbf{e}}$ der ersten Fundamentalform für die Fläche \mathbf{s} bzw. \mathbf{e}

$$I_{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{\mathbf{e}}.$$

Kegelfläche

Ohne Einschränkung ist die Spitze des Kegels der Koordinatenursprung. Somit ist die Kegelfläche gegeben durch $\mathbf{s}(u, v) = v\mathbf{r}(u)$, wobei \mathbf{r} nach Bogenlänge parametrisiert und

²Die Funktion v^* lässt sich leicht aus Gleichung (2.2) bestimmen. Sie ist C^1 da die Fläche C^2 ist.

Abbildung 2.1: Lineare Abhängigkeit von $\dot{\mathbf{a}}$, $\dot{\mathbf{b}}$ und $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

$\|\mathbf{r}\| \equiv 1$ ist, woraus durch Differenzieren folgt, dass $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} \equiv 0$. Als Ebenenstück betrachten wir $\mathbf{e}(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u))^T$.

Durch Ableiten ergibt sich:

$$I_{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{\mathbf{e}}$$

Tangentenfläche

Für eine C^2 -Kurve $\mathbf{c}(u)$ ist die Tangentenfläche gegeben durch $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\dot{\mathbf{c}}(u)$, wobei ohne Einschränkung \mathbf{c} nach der Bogenlänge parametrisiert wird und die Krümmung κ von $\mathbf{c}(u)$ gegeben ist durch $\|\ddot{\mathbf{c}}\| = \kappa$.

Für die ebene Kurve

$$\mathbf{a}(u) = \left(\int_{u_0}^u \cos(\phi(x)) dx, \int_{u_0}^u \sin(\phi(x)) dx \right)^T, \text{ mit } \phi(u) = \int_{u_0}^u \kappa(x) dx$$

gilt $\|\dot{\mathbf{a}}\| = 1$ und $\|\ddot{\mathbf{a}}\| = \kappa$. Für das Ebenenstück $\mathbf{e}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\dot{\mathbf{a}}(u)$ können wir nun die ersten Ableitungen bilden und es ergibt sich

$$I_{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} 1 + v^2\kappa & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I_{\mathbf{e}}.$$

2.1.1 Nichtlineare Bedingungen an eine Regelfläche

In diesem Abschnitt werden Bedingungen hergeleitet, welche notwendig und hinreichend sind, damit eine Regelfläche abwickelbar ist [34]. Im Grunde wird nur die Aussage, dass die Tangentialebene entlang einer Erzeugenden konstant ist, in Gleichungen verpackt, die entweder erfüllt sein können oder nicht.

Für die Regelfläche $\mathbf{x}(u, v) = (1 - v)\mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$ gilt, dass die Tangentialebene entlang der Erzeugenden $u = \text{const.}$ konstant ist, genau dann wenn $\dot{\mathbf{a}}$, $\dot{\mathbf{b}}$ und $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ linear abhängig sind, siehe Abbildung 2.1.

Ebenso ist die Tangentialebene konstant, wenn der Normalvektor \mathbf{n} der Fläche \mathbf{x} orthogonal auf die soeben genannten Vektoren ist. Es ergeben sich also die zwei äquivalenten Bedingungen

$$\det(\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0. \quad (2.4)$$

2.1.2 Abwickelbare Flächen als Einhüllende einer Ebenenschar

Torsale Regelflächen lassen sich als Einhüllende einer einparametrischen Ebenenschar erzeugen. Dies gilt folglich auch für abwickelbare Flächen und es lohnt sich, diese Ebenenschar genauer zu betrachten.

Ebenen im \mathbb{R}^3 sind bestimmt durch die Gleichung

$$u_1x + u_2y + u_3z = u_0. \quad (2.5)$$

Der Übergang vom Koeffizientenvektor (u_1, u_2, u_3, u_0) auf (ku_1, ku_2, ku_3, ku_0) mit einem Skalar $k \neq 0$ ändert die dargestellte Ebene nicht. Deswegen kann die Ebene auch als Punkt im projektiv erweiterten euklidischen Dreiraum mit den homogenen Koordinaten (u_0, u_1, u_2, u_3) aufgefasst werden.

Es soll nun die Darstellung einer in homogenen Koordinaten gegebenen Ebene $\delta : (u_0, \mathbf{u})$ genauer betrachtet werden, vergleiche dazu auch [8] und [31]. Auf den ersten Blick ist erkennbar, dass der Einheitsnormalvektor \mathbf{n} von δ bestimmt ist durch

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u}.$$

Der minimale Abstand d zum Koordinatenursprung ist bis auf ein Vorzeichen

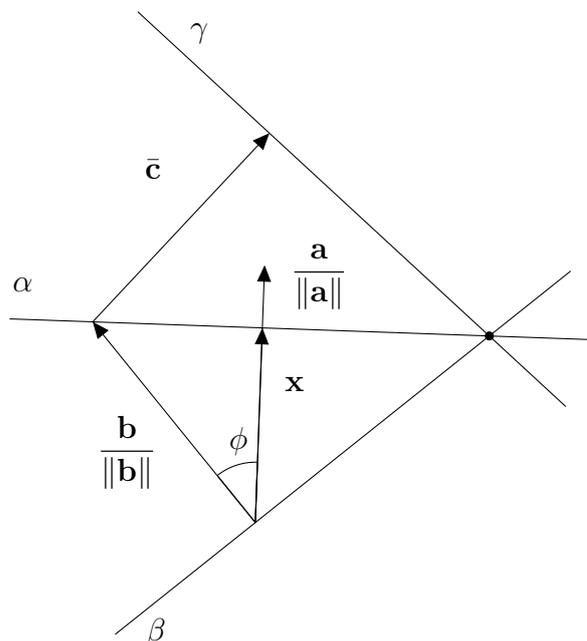
$$d = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} u_0,$$

denn der Punkt $C = C_\delta = d\mathbf{n}$ liegt in der Ebene δ . Denn Einsetzen ergibt $d\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = u_0 / \|\mathbf{u}\|^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_0$ und somit ist die Ebenengleichung erfüllt. Der Punkt C heißt Zentralpunkt der Ebene und ist eindeutig aus den homogenen Koordinaten bestimmbar.

Für einen vorgegeben Normalvektor \mathbf{n} und Abstand d zum Ursprung einer Ebene, deren homogene Koordinaten bestimmt werden sollen, gilt, dass der Punkt $\frac{d}{\|\mathbf{n}\|} \mathbf{n}$ der Zentralpunkt ist. Folglich sind $(d\|\mathbf{n}\|, \mathbf{n})$ die homogenen Koordinaten der Ebene. Auch durch Vorgabe des Zentralpunktes $\mathbf{C} \neq 0$ sind die homogenen Koordinaten bestimmt durch $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Zwei Ebenen $\alpha : (a_0, \mathbf{a})$ und $\beta : (b_0, \mathbf{b})$, mit $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ bestimmen im allgemeinen eine Schnittgerade S . Diese ist durch die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 2.2: Spiegelung der Ebene β an der Ebene α .

festgelegt. Falls $\mathbf{a} \neq \lambda \mathbf{b}$, dann ist die Lösung eine Gerade und ihre Richtung ist gegeben durch $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Für den Fall $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ und $a_0 = \lambda b_0$ haben die Ebenen α und β von Beginn an übereingestimmt und der Schnitt ist die Ebene selbst. Im letzten Fall ist $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ und $a_0 \neq \lambda b_0$. Folglich ist das Gleichungssystem nicht lösbar, da die Ebenen parallel sind und somit keinen Punkt gemeinsam haben.

Weiters soll auch noch hergeleitet werden, wie sich die homogenen Koordinaten der Ebene $\beta : (b_0, \mathbf{b})$ ändern, wenn sie an der Ebene $\alpha : (a_0, \mathbf{a})$ gespiegelt wird und zur Ebene $\gamma : (c_0, \mathbf{c})$ wird.

Aus Abbildung 2.2 lässt sich ablesen, dass sich ein Normalenvektor $\bar{\mathbf{c}}$ an die Ebene γ schreiben lässt als

$$\bar{\mathbf{c}} = 2\mathbf{x} - \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}. \quad (2.6)$$

Der Vektor \mathbf{x} hat die Gestalt

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \cos(\phi) = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \left(\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \right)$$

und einsetzen in Gleichung (2.6), sowie Multiplikation mit $\|\mathbf{b}\|$ liefert für den Normalenvektor \mathbf{c} der Ebene γ

$$\mathbf{c} = 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} - \mathbf{b}. \quad (2.7)$$

Zur Bestimmung von c_0 wähle man einen Punkt $\mathbf{u} \in \alpha \cap \beta$ und berechne:

$$c_0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{u} = 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} a_0 - b_0 \quad (2.8)$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = a_0$ und $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = b_0$, da \mathbf{u} die Ebenengleichungen von α und γ erfüllt. Die Gleichungen (2.7) und (2.8) haben dieselbe Gestalt und zusammengefasst entsteht die gespiegelte Ebene γ durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Eine abwickelbare Fläche hat die Darstellung $\mathbf{U}(t) = (u_0(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t))$. Diese Darstellung wird *duale Darstellung* genannt. Die Koeffizienten $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ werden als Vektor $\mathbf{u}(t)$ zusammengefasst. Eine Approximation der Richtung der Erzeugenden zum Parameterwert t ist

$$\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}(t+h)$$

und der Übergang zum Grenzwert $h \rightarrow 0$ liefert die exakte Richtung der Erzeugenden. Es gilt für $h \neq 0$

$$\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}(t+h) \cong \mathbf{u}(t) \times \left(\frac{\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t+h)}{h} \right)$$

da eine Multiplikation mit dem Skalar $\frac{1}{h}$ die Richtung nicht ändert. Für die Richtung der Erzeugenden gilt somit:

$$\mathbf{u}(t) \times \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (2.10)$$

2.2 Eigenschaften von Kurvenfalten

Im Kapitel 2.1 war großteils von glatten Flächen die Rede. Nun wird das Augenmerk auf abwickelbare Flächen mit Kanten gelegt und Eigenschaften der auftretenden Kanten hergeleitet. Es soll auch der Bezug zu Origami hergestellt werden, deswegen ist es notwendig, die folgenden Begriffe exakt zu definieren. Vergleiche dazu [15] und [11].

Ein *Stück Papier* ist eine offene, ebene (beschränkte) Fläche im \mathbb{R}^3 . Großteils werden lokale Eigenschaften der Kanten betrachtet, daher ist es nicht zwingend notwendig, beschränkte Papierstücke zu verlangen. Aber in Anlehnung an ein physikalisches Blatt Papier ist diese Definition durchaus gerechtfertigt. Das Stück Papier soll in der $[x, y]$ -Ebene liegen und *oben* wird auf kanonische Weise definiert. Es kann nun auch für eine Kurve im Stück Papier die linke und rechte Seite dieser Kurve bestimmt werden.

Eine *Faltlinie* Γ ist eine C^2 -Kurve, die in einem Stück Papier enthalten ist und keine Doppelpunkte besitzt. Endpunkte von Faltlinien heißen *Ecken*. Ein Punkt $\Gamma(s)$ im Inneren einer Faltlinie heißt *Faltpunkt*. Das *Faltmuster* ist die Vereinigung aller Faltlinien, die sich nur an den gemeinsamen Ecken treffen. Eine *Facette* ist ein maximales Gebiet in einem Stück Papier, welches keine Faltlinien und Ecken enthält.

Eine *ordentliche Faltung* des Faltmusters ist eine isometrische Einbettung des Stück Papiers in den Raum \mathbb{R}^3 . Das Bild dieser Einbettung soll eine *Fläche mit Kanten* sein, wobei das Faltmuster auf die Gesamtheit der Kanten und Ecken der Fläche abgebildet wird. Um die Ecken auf der Fläche mit den Ecken im Faltmuster unterscheiden zu können, heißen die Ecken auf der Fläche nun *gefaltete Ecken*. Aus demselben Grund werden aus den Facetten des Faltmusters *gefaltete Facetten*. Es wird auch der Begriff *gefaltete Kante* verwendet und verdeutlicht noch einmal, dass aus der Faltlinie eine Kante auf dem gefalteten Stück Papier geworden ist.

Um Missverständnissen vorzubeugen, werden 2D Objekte und ihre Eigenschaften mit Großbuchstaben bezeichnet (Γ, K , etc.) und 3D Objekte und ihre Eigenschaften mit Kleinbuchstaben (γ, k, \hat{k} , etc.).

Jede gefaltete Facette zerfällt in C^2 -Flächen, welche durch *gefaltete Halbkanten* und *gefaltete Halbecken* verbunden sind. Jede gefaltete Kante γ lässt sich in C^2 -Stücke zerlegen. C^1 -Übergänge heißen *Halbknicke* und C^0 -Übergänge sind *Knicke*.

In Korollar 2.7 wurde bereits gezeigt, dass gefaltete Facetten keine gefalteten Halbecken enthalten können. Später wird auch noch gezeigt, dass es keine Halbknicke geben kann.

Die gefalteten Facetten sind abwickelbare Flächen ohne Kanten, wie sie in Abschnitt 2.1 behandelt wurden. Jeder Punkt im Inneren, der kein Flachpunkt ist, liegt nach Satz 2.9 auf einer eindeutig bestimmten Erzeugenden. Die Endpunkte der Erzeugenden liegen am Rand der gefalteten Facette. Per Definition sollen flache Bereiche von gefalteten Facetten keine Erzeugenden enthalten, da diese nicht eindeutig wären.

Für jede Erzeugende des gefalteten Stück Papiers kann mit der Umkehrung der ordentlichen Faltung eine zugehörige *ebene Erzeugende* definiert werden. Diese sind Geradenstücke, deren Endpunkte auf dem Faltmuster liegen. Falls mehrere (mindestens 3) ebene Erzeugende einen gemeinsamen Endpunkt $\Gamma(s)$ auf dem Faltmuster haben, so nennt man diese Schar von Erzeugenden *Kegelerzeugende*.

Ein erstes zu beobachtendes Phänomen ist, dass der Winkel zwischen zwei Flächen, die beim Falten entlang einer Faltlinie Γ entstehen, nicht $\pm 180^\circ$ haben kann, es sei denn Γ hat keine Krümmung. Diese Aussage ist auch in [15] zu finden. Die Argumentation ist wie folgt: Das Falten entspricht einer isometrischen Transformation und lässt somit die Länge von Kurven unverändert. Für genügend kleine $\epsilon > 0$ können zwei Parallelkurven Γ^+ und Γ^- jeweils auf verschiedenen Seiten von Γ gefunden werden, siehe Abbildung 2.3. Wenn nun die Krümmung nicht 0 ist, dann gilt für die Länge L der Kurven:

$$L(\Gamma^+) > L(\Gamma) > L(\Gamma^-)$$

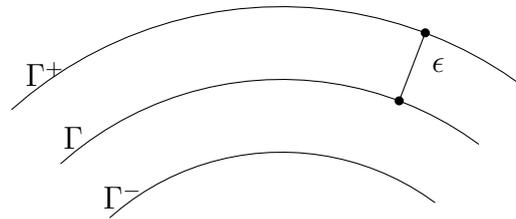
oder

$$L(\Gamma^-) > L(\Gamma) > L(\Gamma^+)$$

je nachdem ob Γ^+ auf der positiv gekrümmten Seite liegt oder nicht. Da bei einer Faltung von 180° Γ^+ und Γ^- zur Deckung kommen würden, ist dies nicht möglich.

Falls die Krümmung von Γ verschwindet, dann ist Γ ein Geradenstück³ und beim Falten

³Es gilt: $0 = \kappa = \|\ddot{\Gamma}\| \Rightarrow \ddot{\Gamma} = 0 \Rightarrow \dot{\Gamma} = \text{const.} = \mathbf{a}$ und somit muss Γ die Form $\mathbf{a}t + \mathbf{b}$ haben, welche eine Gerade beschreibt.

Abbildung 2.3: Parallelkurven zur Faltlinie Γ

entlang einer Geraden kann die Transformation durch eine geeignete Drehung beschrieben werden. Eine weitere elementare Eigenschaft ist im folgenden Lemma gegeben.

Lemma 2.12. *Eine gekrümmte Faltlinie $\Gamma(s)$ wird bei einer Faltung auf eine Raumkurve $\gamma(s)$ abgebildet, welche keine geraden Stücke enthält.*

Gefaltete Kanten, welche von gekrümmten Faltlinien kommen, haben daher eine Krümmung, abgesehen bei Knicken und Halbknicken.

Beweis. Angenommen $\gamma(s)$ ist im Intervall $[s_1, s_2]$ gerade. Dann ist der Abstand der Punkte $\gamma(s_1)$ und $\gamma(s_2)$ auf der Fläche genau die Bogenlänge entlang γ im Intervall $[s_1, s_2]$. Aufgrund der Isometrie ist auch der kürzeste Abstand von $\Gamma(s_1)$ und $\Gamma(s_2)$ entlang der Faltlinie zu finden. Kürzeste Abstände in einer Ebene sind aber gerade Stücke und haben keine Krümmung. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Faltlinie gekrümmt ist. \square

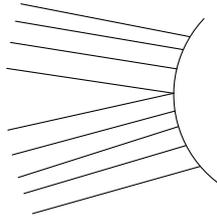
Ein Faltpunkt $\Gamma(s)$ heißt *eindeutig erzeugt von links*, falls es nur eine ebene Erzeugende auf der linken Seite gibt mit Endpunkt $\Gamma(s)$. Auf analoge Weise ist *eindeutig erzeugt von rechts* definiert und ein Faltpunkt heißt *eindeutig erzeugt*, falls er eindeutig erzeugt von links und rechts ist.

Für einen Faltpunkt $\Gamma(s)$ gibt es zwei Möglichkeiten, dass er nicht eindeutig erzeugt von links ist⁴. Es könnte eine oder mehrere Kegelerzeugende geben oder es gibt eine oder mehrere flache Bereiche im zugehörigen Punkt $\gamma(s)$. Siehe Abbildung 2.4.

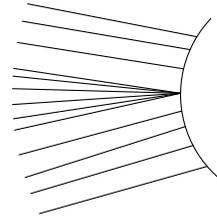
Ein Faltpunkt heißt *kegelfrei*, falls der Faltpunkt keine Kegelerzeugenden besitzt. Genauso gibt es die Begriffe *links* bzw. *rechts kegelfrei*, wenn der Faltpunkt auf der linken bzw. rechten Seite keine Kegelerzeugenden besitzt. Für kegelfreie, nicht eindeutig erzeugte Faltpunkte lässt sich eine Aussage über die Anzahl der angrenzenden flachen Facetten treffen.

Lemma 2.13. *Falls ein Faltpunkt kegelfrei ist, dann hat er auf jeder Seite höchstens ein flaches Gebiet.*

⁴Für den Fall rechts geht die Argumentation wortident.



(a) Ein flaches Stück zum Faltpunkt.



(b) Kegelerzeugende zum Faltpunkt.

Abbildung 2.4: Zwei Fälle von nicht eindeutig bestimmten Erzeugenden.

Beweis. Der Beweis wird nur für eine Seite geführt. Seien R_1 und R_2 zwei benachbarte ebene Gebiete. Falls sie eine gemeinsame Kante haben, ist diese mindestens eine Halbkante, da gefaltete Facetten Flächen ohne Kanten sind. Da der Übergang von R_1 auf R_2 C^1 ist, ist R_1 und R_2 dieselbe Fläche.

Sei anderenfalls die gefaltete Facette zwischen R_1 und R_2 eine abwickelbare Fläche M . Durch jeden Punkt im Inneren läuft eine eindeutig bestimmte Erzeugende. Da R_1 , R_2 und M Teile einer abwickelbaren Fläche ohne Kanten sind, sind die Endpunkte von Erzeugenden wegen Satz 2.9 am Rand der Fläche. Daher müssen alle Erzeugenden von M zum selben Faltpunkt laufen und dieser ist somit nicht kegelfrei. \square

Die Orientierung des Stück Papiere liefert für jeden C^1 -Punkt auf dem gefalteten Stück Papier einen Normalvektor, der nach oben zeigt. Für kegelfreie Punkte $\gamma(s)$ im Inneren von Kanten soll ein linker und rechter Normalvektor definiert werden. Der *linke Normalvektor* $\mathbf{n}_L(s)$ ist für den Fall, dass auf der linken Seite ein ebenes Flächenstück ist, definiert als der Normalvektor dieser Ebene. Wegen Lemma 2.13 ist dieser eindeutig bestimmt. Sonst gibt es genau eine Erzeugende auf der linken gefalteten Facette, die mit $\gamma(s)$ inzidiert. Falls diese Erzeugende nicht tangential an γ ist, ist $\mathbf{n}_L(s)$ eindeutig als Normalvektor der abwickelbaren Fläche bestimmt.

Für den Fall, dass die Erzeugende im Punkt $\gamma(s)$ tangential an γ ist, müssen zwei Fälle betrachtet werden. Siehe Abbildung 2.5. Im ersten Fall ist auf der linken Seite die konvexe Seite der Faltlinie. Diese Situation ist in 2.5a dargestellt. Die tangentielle Erzeugende teilt in diesem Fall die gefaltete Fläche lokal in zwei Hälften. Der Normalvektor $\mathbf{n}_L(s)$ kann nun eindeutig definiert werden als Grenzwert von Normalvektoren der abwickelbaren Fläche in jener Hälfte, welche die Kante nicht enthält. Für den konkaven Fall 2.5b ist $\mathbf{n}_L(s)$ als Grenzwert von Normalvektoren der gefalteten Fläche auf derselben Seite definiert.

Auf gleiche Weise kann für Punkte $\gamma(s)$ ein *rechter Normalvektor* $\mathbf{n}_R(s)$ definiert werden, falls $\gamma(s)$ kegelfrei ist.

Später wird sich herausstellen, dass es keine Erzeugenden geben kann, die tangential an die Faltlinie sind. Aber da auch in diesem Fall der linke und rechte Normalvektor wohldefiniert wäre, muss dieser in den weiteren Betrachtungen nicht extra behandelt werden.



Abbildung 2.5: Zwei Fälle einer Erzeugenden tangential an die Faltlinie.

2.2.1 Winkelhalbierungs-Eigenschaft

Es soll nun eine sehr nützliche Eigenschaft bewiesen werden, die einen Zusammenhang zur gefalteten Kante, der linken und der rechten gefalteten Facette gibt. Es gilt, dass die Schmiegeebene eine winkelhalbierende Ebene der linken und der rechten Tangentialebene ist. Das wird in [15] sowie in [11] gezeigt.

Für eine Raumkurve $\mathbf{x}(s)$ mit dem Bogenlängenparameter s und $d\mathbf{x}(s)/ds = \dot{\mathbf{x}}(s)$ ist die Krümmung k gegeben durch $k(s) = \|\ddot{\mathbf{x}}(s)\|$. Der Normalenvektor ist die normierte zweite Ableitung $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}(s) = \ddot{\mathbf{x}}(s)/k(s)$ und der Binormalenvektor ist $\mathbf{b}_{\mathbf{x}}(s) = \dot{\mathbf{x}}(s) \times \mathbf{n}_{\mathbf{x}}(s)$.

Satz 2.14. *Für einen kegelfreien C^2 -Punkt $\gamma(s)$ auf einer gekrümmten, gefalteten Kante gilt: Der Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ ist winkelhalbierend zum linken Normalenvektor $\mathbf{n}_L(s)$ und zum rechten Normalenvektor $\mathbf{n}_R(s)$*

Beweis. Bezeichne $\dot{\gamma}(s)$ die Ableitung nach der Bogenlänge. Die geodätische Krümmung der gefalteten Kante $\gamma(s)$ bezüglich der linken Facette ist gegeben durch

$$\ddot{\gamma}(s) \cdot (\mathbf{n}_L(s) \times \dot{\gamma}(s)),$$

wobei \mathbf{n}_L der linke Normalenvektor ist.

Da die geodätische Krümmung zur inneren Geometrie einer Fläche gehört, entspricht diese der Krümmung $K(s)$ der Faltlinie im Punkt $\Gamma(s)$. Somit gilt für die linke und rechte Facette mit dem rechten Normalenvektor \mathbf{n}_R :

$$\ddot{\gamma}(s) \cdot (\mathbf{n}_L(s) \times \dot{\gamma}(s)) = K(s) = \ddot{\gamma}(s) \cdot (\mathbf{n}_R(s) \times \dot{\gamma}(s)) \quad (2.11)$$

Die Rechenregel $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ liefert nun

$$\mathbf{n}_L(s) \cdot (\dot{\gamma}(s) \times \ddot{\gamma}(s)) = \mathbf{n}_R(s) \cdot (\dot{\gamma}(s) \times \ddot{\gamma}(s)). \quad (2.12)$$

Da der Binormalenvektor ein skalares Vielfaches von $\dot{\gamma}(s) \times \ddot{\gamma}(s)$ ist, ist die Behauptung gezeigt. \square

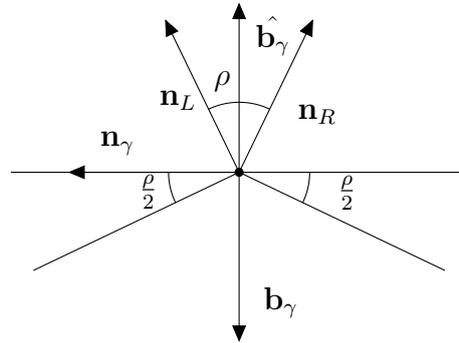


Abbildung 2.6: Blick in Richtung $\hat{\gamma}$. Der Faltwinkel ρ wird später definiert.

Aus Gleichung (2.11) ergibt sich, dass die Krümmung der Faltlinie durch $\mathbf{n}_L \cdot \mathbf{b}_\gamma$ berechnet werden kann. Da \mathbf{n}_L eine konsistente Orientierung besitzt und die Krümmung der Faltlinie das Vorzeichen ändert, abhängig davon ob sie links- oder rechtsgekrümmt ist, muss \mathbf{b}_γ nach oben oder unten zeigen, je nach Vorzeichen von κ .

Somit kann ein neuer Binormalenvektor $\hat{\mathbf{b}}_\gamma$ definiert werden als $\pm \mathbf{b}_\gamma$, sodass $\hat{\mathbf{b}}_\gamma \cdot \mathbf{n}_L = \hat{\mathbf{b}}_\gamma \cdot \mathbf{n}_R > 0$. $\hat{\mathbf{b}}_\gamma$ zeigt also immer nach oben. Es wird ein neuer Normalenvektor definiert durch $\hat{\mathbf{n}}_\gamma = \hat{\mathbf{b}}_\gamma \times \hat{\gamma}$. Die soeben definierten Vektoren sind bei kegelfreien Halbknicke stetig.

Mit der Hilfe von $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$ kann nun eine Krümmung \hat{k} von gefalteten Kanten definiert werden, welche ein Vorzeichen besitzt. Es soll gelten

$$\hat{k} \hat{\mathbf{n}}_\gamma = k \mathbf{n}_\gamma. \quad (2.13)$$

Die Krümmung der Faltlinie überträgt sich somit auf die Krümmung der zugehörigen gefalteten Kante.

Als Folgerung ist es möglich, eine stärkere Aussage als Satz 2.14 zu zeigen. Es gilt:

Satz 2.15. *Für eine kegelfreie, gekrümmte, gefaltete Kante $\gamma(s)$ gilt: $\hat{\mathbf{b}}_\gamma$ halbiert den Winkel zwischen $\mathbf{n}_L(s)$ und $\mathbf{n}_R(s)$.*

Mit Hilfe diesen Satzes ist es jetzt auch möglich, folgende Aufgabenstellung zu lösen. Sei \mathbf{s}_1 eine abwickelbare Fläche und sei \mathbf{c} eine Kurve in der Fläche. Gesucht ist eine abwickelbare Fläche \mathbf{s}_2 , welche \mathbf{s}_1 entlang von \mathbf{c} fortsetzt. Zur Lösung dieses Problems wird die duale Darstellung aus Abschnitt 2.1.2 verwendet.

Die Fläche \mathbf{s}_1 habe die duale Darstellung $(s_{0,1}(t), \mathbf{S}_1(t))$ und die Schmiegeebenen von \mathbf{c} seien durch $(u_0(t), \mathbf{U}(t))$ gegeben. Die duale Darstellung von \mathbf{s}_2 entsteht durch Anwenden von Gleichung (2.9) und lautet

$$\begin{pmatrix} s_{0,2} \\ \mathbf{S}_2 \end{pmatrix} = 2 \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{S}_1}{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}} \begin{pmatrix} u_0 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_{0,1} \\ \mathbf{S}_1 \end{pmatrix}$$

Aus dieser Darstellung lässt sich die Fläche \mathbf{s}_2 eindeutig bestimmen. Mit Hilfe von Satz 2.15 lassen sich noch weitere Resultate zeigen.

Lemma 2.16. *Für eine gefaltete Kante γ , welche an der Stelle s gekrümmt ist, gilt: Es gibt kein Intervall $I = (s - \epsilon, s + \epsilon)$, sodass die angrenzende Fläche, welche $\gamma(I)$ enthält, eben ist.*

Beweis. Angenommen $\gamma(I)$ liegt in einer Ebene. Dann ist die gefaltete Facette auf einer Seite ebenfalls eben und diese fällt mit der Schmiegeebene von γ an den Stellen $t \in I$ zusammen. Wegen Satz 2.15 muss auch die gefaltete Facette auf der anderen Seite mit der Schmiegeebene zusammenfallen. Somit ist der Übergang von der linken auf die rechte Seite C^1 , was einen Widerspruch zu der Voraussetzung darstellt, dass γ eine gefaltete Kante ist. \square

Das folgende Lemma wird zeigen, dass die Erzeugenden der gefalteten Facetten nicht tangential an die gefaltete Kante sein können und es macht die vorher benötigte Argumentation, dass in diesem Fall der linke und rechte Normalvektor wohldefiniert wären, obsolet.

Satz 2.17. *Für einen kegelfreien Punkt $\gamma(s)$ auf einer gefalteten Kante γ mit nicht verschwindender Krümmung an der Stelle s kann die Erzeugende der angrenzenden gefalteten Facette nicht tangential an γ sein.*

Beweis. Sei die Erzeugende tangential auf der linken Seite. Es müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Die gefaltete Facette auf der linken Seite ist eine Tangentenfläche, welche von der Kante γ erzeugt wird.
2. Die Kante ist eine Schnittkurve der Fläche und ist nur in diesem Punkt tangential an eine Erzeugende.

Im ersten Fall ist die Fläche entlang eines Kurvenstückes Tangentenfläche. Dann stimmt in diesem Bereich die Tangentialebene der Tangentenfläche mit der Schmiegeebene der gefalteten Kante überein. Wegen Satz 2.15 ist der Übergang von der linken auf die rechte Facette C^1 , dies ist ein Widerspruch und somit kann der Fall nicht eintreten.

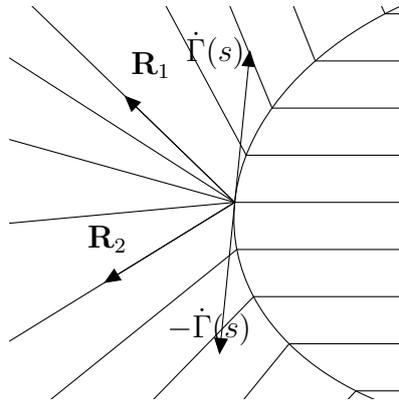
Im zweiten Fall sei nun $\mathbf{n}_L(s)$ der linke Normalvektor im Punkt $\gamma(s)$ und $\dot{\gamma}(s)$ zeige in die Richtung der Erzeugenden. Da die linke gefaltete Facette eine abwickelbare Fläche ist, gilt für die Ableitung in Richtung der Erzeugenden

$$\dot{\mathbf{n}}_L(s) = \frac{d\mathbf{n}_L}{ds} = 0.$$

Es gilt ebenfalls $\mathbf{n}_L(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0$, woraus sich durch Differenzieren in Richtung der Erzeugenden $\dot{\mathbf{n}}_L(s) \cdot \dot{\gamma}(s) + \mathbf{n}_L(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) = 0$ ergibt. Diese Gleichung vereinfacht sich zu

$$\mathbf{n}_L(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) = 0.$$

$\ddot{\gamma}(s)$ ist nicht 0, da nach Voraussetzung die Krümmung nicht verschwindet, also ist $\mathbf{n}_L(s)$ orthogonal auf $\dot{\gamma}(s)$ und $\ddot{\gamma}(s)$. Demnach stimmt die Tangentialebene mit der Schmiegeebene

Abbildung 2.7: Ebene Kegelerzeugende im Punkt $\Gamma(s)$.

überein und muss auch mit der Tangentialebene der rechten gefalteten Facette übereinstimmen. Somit ist der Übergang von links auf rechts C^1 , wodurch ein Widerspruch zur Definition von gefalteten Kanten entsteht.

Es kann daher weder Fall 1 noch Fall 2 eintreten und die Aussage des Lemmas ist bewiesen. \square

Das Verhalten der gefalteten Facette auf der linken und der rechten Seite von gekrümmten, kegelfreien Faltpunkten ist somit, zumindest lokal, geklärt. Die Facette kann nicht eben sein, da Lemma 2.16 dies nicht zulässt. Somit muss es auf der linken und rechten Seite eine Erzeugende geben. Diese können nicht tangential an die Kante sein und auch nicht Grenzwerte von nicht tangentialen Erzeugenden mit Länge Null im Grenzfall (Satz 2.17). Es muss also zu jedem Faltpunkt die Erzeugende auf der linken und der rechten Seite eine positive Länge haben.

Als nächstes wird untersucht, wie sich die gefaltete Kante in einem Faltpunkt verhält, der Kegelerzeugende besitzt. Es wird sich herausstellen, dass in diesem Fall die gefaltete Kante einen Knick haben muss. Ebenso gilt die Umkehrung dieser Aussage, dass ein Knick in der gefalteten Kante Kegelerzeugende besitzen muss.

Um dieses Resultat zu zeigen, wird der Begriff *glatt gefaltete Kante* definiert. Darunter ist eine Kante gemeint, die C^1 ist. Insbesondere können *glatt gefaltete Kanten* keine Knicke haben, Halbknicke sind jedoch noch erlaubt. Eine *glatte Faltung* eines Faltmusters ist eine ordentliche Faltung, bei welcher jede gefaltete Kante *glatt gefaltet* ist.

Es folgt nun ein Lemma, das die erste Richtung der oben gegebenen Behauptung beweist.

Lemma 2.18. *Wenn eine gefaltete Kante γ im Punkt $\gamma(s)$ Kegelerzeugende besitzt, dann hat γ im Punkt $\gamma(s)$ einen Knick, d. h. γ ist nicht C^1 an der Stelle s .*

Beweis. Es reicht, die Aussage für Kegelerzeugende auf der linken Seite zu beweisen. Die zur Kante γ gehörende Faltnie Γ ist eine C^2 -Kurve. Seien \mathbf{R}_1 und \mathbf{R}_2 die Richtung der ersten und letzten ebenen Kegelerzeugenden im Punkt $\Gamma(s)$, sodass $\dot{\Gamma}(s)$, \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 und $-\dot{\Gamma}(s)$ gegen den Uhrzeigersinn angeordnet sind, siehe Abbildung 2.7. Die Winkel zwischen diesen

Vektoren stehen im folgenden Zusammenhang:

$$180^\circ = \angle(\dot{\Gamma}(s), -\dot{\Gamma}(s)) = \angle(\dot{\Gamma}(s), \mathbf{R}_1) + \angle(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + \angle(\mathbf{R}_2, -\dot{\Gamma}(s))$$

Angenommen die gefaltete Kante ist an der Stelle s C^1 , dann gilt $180^\circ = \angle(\dot{\gamma}(s), -\dot{\gamma}(s))$. Des Weiteren gilt für die zugehörigen Richtungen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 von \mathbf{R}_1 und \mathbf{R}_2

$$180^\circ \leq \angle(\dot{\gamma}(s), \mathbf{r}_1) + \angle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \angle(\mathbf{r}_2, -\dot{\gamma}(s)).$$

Für den Winkel zwischen den Erzeugenden gilt $\angle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) < \angle(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$. Dieser kann aufgrund der Isometrie auf jeden Fall nicht kleiner werden und bei Gleichheit folgt, dass dieser Teil flach ist und keine Erzeugenden besitzt.

Zusammenfassend ergibt sich folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} 180^\circ &\leq \angle(\dot{\gamma}(s), \mathbf{r}_1) + \angle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \angle(\mathbf{r}_2, -\dot{\gamma}(s)) \\ &< \angle(\dot{\Gamma}(s), \mathbf{R}_1) + \angle(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + \angle(\mathbf{R}_2, -\dot{\Gamma}(s)) = 180^\circ \end{aligned}$$

Diese kann nicht richtig sein, somit ist die Annahme falsch und γ kann an der Stelle s nicht C^1 sein. \square

Nun wird die Umkehrung von Lemma 2.18 gezeigt und in einem Satz festgehalten.

Satz 2.19. *Für eine gefaltete gekrümmte Kante γ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. γ hat an der Stelle s einen Knick.
2. γ besitzt an der Stelle s Kegelerzeugende.

Beweis. Die Aussage $2 \Rightarrow 1$ ist genau jene von Lemma 2.18. Es muss also nur noch $1 \Rightarrow 2$ gezeigt werden und diese Aussage ist gleichbedeutend damit, dass eine kegelfreie Stelle s auch C^1 ist. Des Weiteren genügt es nur die linke Seite zu betrachten.

Sei $\gamma(s)$ ein kegelfreier Punkt auf der gefalteten Kante γ . Für die zugehörige Falllinie Γ gilt $180^\circ = \angle(\dot{\Gamma}(s), -\dot{\Gamma}(s))$.

Falls $\gamma(s)$ auf der linken Seite keine angrenzenden flachen Bereiche hat, dann ist die gefaltete Facette in einer Umgebung von $\gamma(s)$ eine eindeutig bestimmte C^1 -Regelfläche, wobei keine Erzeugende tangential an γ ist. Diese Fläche lässt sich etwas auf der Seite von γ verlängern, sodass sie immer noch abwickelbar ist und γ im Inneren liegt. Der Winkel zwischen dem linken und dem rechten Tangentialvektor an der Stelle $\gamma(s)$ ist derselbe wie der Winkel zwischen dem linken und dem rechten Ableitungsvektor der abgewickelten Kurve Γ . Somit ist γ an der Stelle s C^1 .

Falls ein flacher Bereich angrenzt, kann es höchstens einen solchen geben und es gibt zwei Regelflächen M_1 und M_2 , die die Ebene von der Kante trennen. Die Regelflächen und der flache Bereich haben einen gemeinsamen Normalvektor im Punkt $\gamma(s)$, da sie zusammen eine C^1 -Fläche bilden. Der Übergang vom flachen Bereich auf die Regelflächen ist entlang von Halbkanten, diese haben die Richtung \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 . Im ungefalteten Zustand seien die

Richtungen durch \mathbf{R}_1 und \mathbf{R}_2 gegeben. Die Bezeichnung \mathbf{R}_1 und \mathbf{R}_2 sei so gewählt, dass $180^\circ = \angle(\dot{\Gamma}(s), \mathbf{R}_1) + \angle(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + \angle(\mathbf{R}_2, -\dot{\Gamma}(s))$ gilt.

Es wurde im ersten Fall argumentiert, dass $\angle(\dot{\Gamma}(s), \mathbf{R}_i) = \angle(\dot{\gamma}(s^\pm), \mathbf{r}_i)$ für die Fläche M_i gilt, wobei $\dot{\gamma}(s^\pm)$ der linke bzw. rechte Tangentenvektor ist. Ebenfalls gilt $\angle(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \angle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, weil der Bereich nicht gefaltet wird. Da nun alle vier Vektoren in einer Ebene liegen, gilt $180^\circ = \angle(\dot{\gamma}(s^+), \dot{\gamma}(s^-))$. Somit ist γ an der Stelle s C^1 . \square

Glatte Kanten sind also genau jene, die keinen Punkt enthalten, der Kegelerzeugende auf der linken oder rechten Seite besitzt. Daher gibt es auf glatten Kanten immer eine eindeutig bestimmte linke und rechte Tangentialebene. Diese bestimmen den Faltwinkel $\rho(s)$ an der Stelle s der gefalteten Kante γ , siehe auch Abbildung 2.6 auf Seite 45. Die Funktion ρ ist wohldefiniert, da es auf der linken und rechten Seite immer eindeutig bestimmte Normalvektoren gibt. Die Normalvektoren wären nicht eindeutig, falls mehrere Erzeugende einen gemeinsamen Faltpunkt hätten, dies kann aber bei einer glatten Faltung nicht passieren. Der Winkel ist gegeben durch

$$\cos \rho = \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{n}_R,$$

wobei \mathbf{n}_L und \mathbf{n}_R der linke und der rechte Normalvektor sind. Glatte Kanten haben keine Knicke und sind daher durchwegs C^1 . Folglich sind die Funktionen $\mathbf{n}_L(s)$ und $\mathbf{n}_R(s)$ stetig und somit auch die Funktion $\rho(s)$.

Es wird nun gezeigt, dass die Krümmung bei einer glatten Faltung zunimmt. Insbesondere ist der Zusammenhang der Krümmung der Faltlinie und der Krümmung der gefalteten Kante durch den Faltwinkel bestimmt. Es gilt der Satz:

Satz 2.20. *Bei einer glatt gefalteten Kante $\gamma(s)$ gilt für ihre vorzeichenbehaftete Krümmung $\hat{k}(s)$, den Faltwinkel $\rho(s)$ und die Krümmung $K(s)$ der zugehörigen Faltlinie $\Gamma(s)$ der Zusammenhang*

$$\hat{k}(s) \cos\left(\frac{\rho(s)}{2}\right) = K(s). \quad (2.14)$$

Beweis. Die Krümmung $K(s)$ der Faltlinie entspricht der geodätischen Krümmung der gefalteten Kante bezüglich der linken Seite, es gilt daher

$$K(s) = k(s) \mathbf{n}_\gamma(s) \cdot (\mathbf{n}_L(s) \times \dot{\gamma}(s)).$$

Wobei \mathbf{n}_γ der Normalenvektor, \mathbf{n}_L der linke Normalvektor, k die Krümmung der gefalteten Kante und $\dot{\gamma}$ die Ableitung von γ nach der Bogenlänge ist. In diese Gleichung wird die Definition der vorzeichenbehafteten Krümmung von Seite 45 eingesetzt und es ergibt sich

$$k(s) \mathbf{n}_\gamma(s) \cdot (\mathbf{n}_L(s) \times \dot{\gamma}(s)) = \hat{k}(s) \hat{\mathbf{n}}_\gamma(s) \cdot (\mathbf{n}_L(s) \times \dot{\gamma}(s)).$$

$\hat{\mathbf{n}}_\gamma$ wurde mittels dem neuen Binormalenvektor $\hat{\mathbf{b}}_\gamma$ und dem Tangentenvektor $\dot{\gamma}$ definiert. Es kann also geschrieben werden

$$\hat{k}(s) \hat{\mathbf{n}}_\gamma(s) \cdot (\mathbf{n}_L(s) \times \dot{\gamma}(s)) = \hat{k}(s) (\hat{\mathbf{b}}_\gamma(s) \times \dot{\gamma}(s)) \cdot (\mathbf{n}_L(s) \times \dot{\gamma}(s)).$$

Das Skalarprodukt der Kreuzprodukte wird mit der Regel $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$ umgeschrieben und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{k}(s)(\hat{\mathbf{b}}_\gamma(s) \times \dot{\gamma}(s)) \cdot (\mathbf{n}_L(s) \times \dot{\gamma}(s)) = \\ \hat{k}(s) \left[(\hat{\mathbf{b}}_\gamma(s) \cdot \mathbf{n}_L(s))(\dot{\gamma}(s) \cdot \dot{\gamma}(s)) - (\hat{\mathbf{b}}_\gamma(s) \cdot \dot{\gamma}(s))(\dot{\gamma}(s) \cdot \mathbf{n}_L(s)) \right]. \end{aligned}$$

\mathbf{n}_L und $\dot{\gamma}$ sind orthogonal zueinander, deswegen ist deren Skalarprodukt 0. Ebenfalls ist $\dot{\gamma}$ ein Einheitsvektor und somit ist das Skalarprodukt mit sich selbst 1. Die linke Seite lässt sich vereinfachen zu

$$\hat{k}(s) \left[(\hat{\mathbf{b}}_\gamma(s) \cdot \mathbf{n}_L(s))(\dot{\gamma}(s) \cdot \dot{\gamma}(s)) - (\hat{\mathbf{b}}_\gamma(s) \cdot \dot{\gamma}(s))(\dot{\gamma}(s) \cdot \mathbf{n}_L(s)) \right] = \hat{k}(s) \hat{\mathbf{b}}_\gamma(s) \cdot \mathbf{n}_L(s).$$

Wegen Satz 2.15 ist $\hat{\mathbf{b}}_\gamma$ die Winkelsymmetrale vom linken und rechten Normalvektor \mathbf{n}_L und \mathbf{n}_R . Daher entspricht die rechte Seite dem Kosinus des halben Winkels

$$\hat{k}(s) \hat{\mathbf{b}}_\gamma(s) \cdot \mathbf{n}_L(s) = \hat{k}(s) \cos\left(\frac{\rho(s)}{2}\right). \quad \square$$

Aus Gleichung (2.14) folgt für die Krümmungen $k(s) \geq |K(s)|$ mit Gleichheit genau dann, wenn für den Faltwinkel $\rho = 0$ oder $\rho = \pi$ gilt.

Eine unmittelbare Folgerung aus dieser Tatsache ist, dass ebene, geschlossene und konvexe Faltlinien bei glatter Faltung gefaltete Kanten liefern, die nicht in einer Ebene liegen. Diese Aussage kann auch in [15] gefunden werden.

Sei Γ eine solche Faltlinie. Die Krümmung K dieser Kurve ist nach wählen einer geeigneten Durchlaufrihtung stets nicht negativ und mit Gleichung (2.14) folgt

$$k(t) \geq K(t) \geq 0 \quad \forall t. \quad (2.15)$$

Es ist wieder k die Krümmung der gefalteten Kante γ . Falls für den Faltwinkel $\rho \equiv 0$ gilt, dann wäre es keine ordentliche Faltung. Somit muss es ein Intervall geben, in dem die strikte Ungleichung von (2.15) gilt. Die Monotonie des Integrals liefert:

$$\oint k(t) dt > \oint K(t) dt \quad (2.16)$$

Angenommen die gefaltete Kante γ ist eine ebene, geschlossene Kurve, dann liefert der Umlaufsatz von Hopf [19], dass beide Integrale den Wert 2π annehmen. Also kann γ nicht in einer Ebene liegen und muss eine Raumkurve sein.

Der folgende Satz wird zeigen, dass eine glatt gefaltete Kante C^2 ist. Somit gibt es auf solchen Kanten auch keine Halbknicke, was von vornherein nicht offensichtlich ist, da bei der Definition von glatten Kanten nur C^1 gefordert wird.

Satz 2.21. *Eine glatte Kante $\gamma(s)$ besitzt keine Halbknicke.*

Beweis. Angenommen an der Stelle $s = s_0$ besitzt γ einen Halbknick. Dann gilt wegen Gleichung (2.14) für den linken und rechten Grenzwert der Krümmung \hat{k}

$$\lim_{s \nearrow s_0} \hat{k}(s) = \frac{K(s_0)}{\cos(\frac{\rho(s_0)}{2})} = \lim_{s \searrow s_0} \hat{k}(s).$$

Somit ist die Krümmung an der Stelle s_0 stetig. Ebenso ist $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$ an dieser Stelle stetig.

Aus der Beziehung

$$\hat{k}(s_0)\hat{\mathbf{n}}_\gamma(s_0) = k(s_0)\mathbf{n}_\gamma = \ddot{\gamma}(s_0)$$

folgt, dass die zweite Ableitung der gefalteten Kante γ an der Stelle s_0 stetig ist und somit ist $\gamma(s_0)$ kein Halbknick. \square

2.3 Beispiele

Physikalisches Papier verhält sich anders als das mathematische Modell, welches in Abschnitt 2.1 und 2.2 behandelt wurde. Im Modell wird das Papier als Ebene ohne Dicke betrachtet. Ein Stück Papier hat aber eine Dicke, die eigentlich nicht vernachlässigt werden kann. Allerdings ist die Theorie um einiges verständlicher wenn man Dicke 0 annimmt. Ebenfalls ist die Differentialgeometrie auf Flächen ohne Dicke ausgelegt und es war somit naheliegend, dass auch die mathematische Origami dieses idealisierte Modell verwendet. Es gibt Publikationen, die sich mit dem Falten von Materialien mit Dicke beschäftigen, zum Beispiel eine Arbeit von Ku und Demaine [27].

Auch das händische Falten von Papier ist nicht mit dem mathematischen Modell einer isometrischen Abbildung vergleichbar. Durch leichtes Schwitzen an den Händen wird das Papier feucht und dehnt sich etwas aus. Dies ist bei einer isometrischen Abbildung nicht erlaubt. Ebenso kann es sein, dass beim händischen Falten zusätzliche, sehr kleine Falten entstehen, die nicht zum Faltmuster gehört haben und sich dadurch das Aussehen des Objektes ändert. Beziehungsweise kann es passieren, dass es dadurch erst möglich ist, das Papier in die gewünschte Form zu bringen.

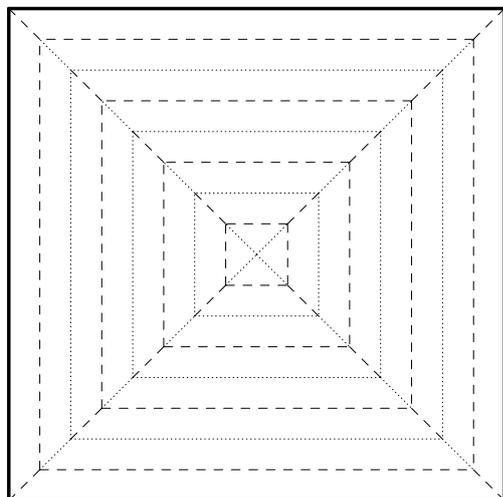
Es ist daher nicht immer gewährleistet, dass ein Objekt im mathematischen Sinn existiert nur weil es faltbar ist. Für viele Objekte sind das noch ungeklärte Fragen, mit denen sich viele Forschende beschäftigen. In manchen Fällen ist bereits eine Antwort gefunden.

2.3.1 Das Hypar

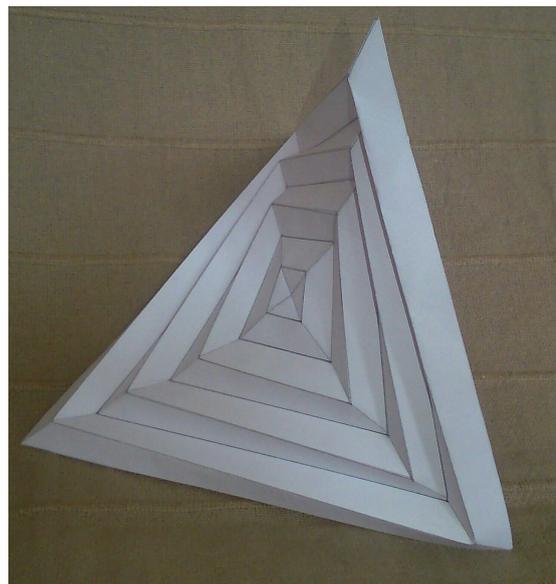
Das Hypar ist ein Origami mit geraden Faltlinien, welches auf einfache Weise durch Falten eines quadratischen Stückes Papier entsteht. Das Faltmuster ist in Abbildung 2.8 dargestellt.

Der Name Hypar kommt daher, dass es im gefalteten Zustand den Eindruck hat, als entstehe ein hyperbolisches Paraboloid. Der Name wird in [13] eingeführt.

Es stellt sich die Frage, ob das Hypar im mathematischen Sinn existiert, um genauer zu sein: Existiert das Hypar im Sinne der in Abschnitt 2.1 und 2.2 entwickelten Theorie und mit dem in Abbildung 2.8 angegebenen Faltmuster. Die überraschende Antwort ist *Nein*.



(a) Standardfaltmuster des Hypars. Kennzeichnung von Berg- und Talkanten.



(b) Physikalisches Modell aus Papier.

Abbildung 2.8: Faltmuster und Modell des Hypars.

Für die Herleitung dieses Resultats müssen noch ein paar Eigenschaften bewiesen werden. Diese sind in [10] zu finden.

Satz 2.22. *Falls der Rand einer abwickelbaren Fläche M ohne Kanten stückweise geradlinig ist, dann liegt M in einer Ebene.*

Beweis. Angenommen \mathbf{p} sei ein parabolischer Punkt im Inneren von M . Der Punkt \mathbf{p} hat eine Umgebung von parabolischen Punkten, welche eine torsale Regelfläche bilden. Die Erzeugenden dieser Umgebung können zum Rand von M verlängert werden. Sei U diese vergrößerte Umgebung.

Der Rand von U besteht aus Erzeugenden da und bc , sowie aus Bögen ab und cd . Mindestens einer der Bögen ist nicht trivial, sei dieser ab . Da ab am Rand von M liegt, ist dies ein Polygonzug. Sei $a'b'$ ein geradliniges Teilstück von ab .

Sei \mathbf{q} im Inneren von $a'b'$ und $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ ein Einheitsnormalvektor von M im Punkt \mathbf{q} . \mathbf{n} ist orthogonal auf $a'b'$ und der Erzeugenden $C_{\mathbf{q}}$ durch \mathbf{q} . Aus Gleichung (2.4) folgt, dass die Ableitung $\dot{\mathbf{n}}$ in Richtung $a'b'$ orthogonal auf $a'b'$ und $C_{\mathbf{q}}$ ist. Somit ist $\dot{\mathbf{n}}$ ein skalares Vielfaches von \mathbf{n} . Also muss $\dot{\mathbf{n}} = 0$ gelten⁵ und daher liegen auf $C_{\mathbf{q}}$ Flachpunkte. Dies ist ein Widerspruch zur Umgebung aus parabolischen Punkten.

Im Inneren sind also nur Flachpunkte, parabolische Punkte, die Grenzwerte von Flachpunkten sind, und Halbkanten. Die Flachpunkte liegen also dicht in M und Integration liefert das Resultat. \square

⁵ $0 = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}} = \lambda \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} \Rightarrow \dot{\mathbf{n}} = 0$

Unter einer geodätischen Kante ist eine gefaltete Kante gemeint, welche eine Geodäte ist. Das heißt, die geodätische Krümmung dieser Kante verschwindet.

Satz 2.23. *Sei γ eine geodätische Kante in einer abwickelbaren Fläche mit Kanten, deren Faltwinkel nicht $\pm 180^\circ$ beträgt. Dann ist γ geradlinig.*

Beweis. Per Definition zerfällt die Fläche mit Kanten in Flächen ohne Kanten, Kanten und Ecken. Ein Punkt \mathbf{p} im Inneren von γ ist daher am Rand von zwei Flächen ohne Kanten, seien diese S und T . Seien $S_{\mathbf{p}}$ und $T_{\mathbf{p}}$ die Tangentialebenen an S und T im Punkt \mathbf{p} . Laut den Voraussetzungen gibt es einen Punkt \mathbf{p} , sodass $S_{\mathbf{p}} \neq T_{\mathbf{p}}$ gilt. Aufgrund der Stetigkeit gibt es eine Umgebung von \mathbf{p} in γ , für die die Ungleichheit gilt. Sei U die maximale Umgebung mit dieser Eigenschaft.

Sei nun γ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\gamma(0) = \mathbf{p}$. Für jedes $\mathbf{q} = \gamma(t)$ ist der Tangentenvektor $\gamma'(t)$ durch den Schnitt von $S_{\mathbf{q}}$ und $T_{\mathbf{q}}$ bis auf das Vorzeichen bestimmt. Da S und T C^2 -Flächen sind, sind die Tangentialebenen C^1 , was auch für deren Schnitt gilt. Somit existiert die zweite Ableitung $\gamma''(t)$ und ist stetig.

Da γ eine geodätische Linie ist, ist die zweite Ableitung $\gamma''(t)$ orthogonal auf $S_{\mathbf{q}}$ und $T_{\mathbf{q}}$. Da die Länge von $\gamma'(t)$ konstant 1 ist, gilt $\gamma'(t) \perp \gamma''(t)$. Diese drei Orthogonalitäten können nur erfüllt sein, wenn $\gamma''(t) = 0$ gilt.

Somit ist γ in U ein Geradenstück. Es gilt auch, dass die Tangentialebenen $S_{\mathbf{q}}$ und $T_{\mathbf{q}}$ in U konstant sind. Also sind sie dies auch am Rand von U . Da aber U die maximale Umgebung ist, sind die Endpunkte von U die Endpunkte von γ . \square

Als Kombination der eben bewiesenen Sätze ergibt sich:

Korollar 2.24. *Sei M eine abwickelbare Fläche mit Kanten. Sei F eine gefaltete Facette mit stückweise geodätischem Rand und der Rand von F habe mit dem Rand von M keinen Punkt gemeinsam. Dann gilt, dass F in einer Ebene liegt.*

Beweis. Da der Rand stückweise geodätisch ist, ist der Rand stückweise linear. Somit muss der Bereich in einer Ebene liegen. \square

Ein *Stück Papier* soll in diesem Kontext eine kompakte ebene Fläche sein. Unter einer *starrten Faltung* versteht man in diesem Kontext eine ordentliche Faltung, welche Facetten des Faltmusters auf ebene Facetten der Fläche abbildet.

Eine ordentliche Faltung verlangt nicht, dass das Bild unter einer stetigen Bewegung entsteht. Es entspricht daher nicht exakt dem händischen Falten. Falls die Faltung durch eine stetige Bewegung entsteht, wird dies auch durch die Definition erfasst. Allerdings kann es sein, dass eine Faltung im obigen Sinn existiert, es aber keine stetige Bewegung gibt, die zu dieser führt und somit nicht händisch faltbar ist.

Auf alle Fälle gilt: Falls eine Faltung im Sinne der Definition nicht existiert, dann ist es auch nicht möglich, das Faltmuster händisch zu falten.

Bei ordentlichen Faltungen kann der Faltwinkel nicht 0° sein, da sonst aus den Faltkanten keine Kanten werden. Ebenfalls kann der Winkel nicht $\pm 180^\circ$ betragen, da es sonst keine

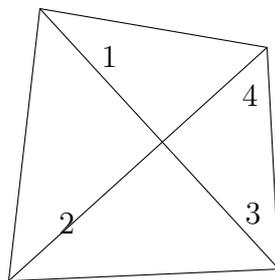


Abbildung 2.9: Im Zykel angeordnete rechtwinklige Dreiecke.

isometrische Einbettung wäre, vgl. Seite 41. Es treten also nur *nicht triviale* Faltwinkel auf.

Aus Korollar 2.24 folgt nun ein weiteres Korollar.

Korollar 2.25. *Für jedes Faltmuster das nur aus Geradenstücken besteht gilt, dass jede ordentliche Faltung die inneren Facetten starr faltet.*

Beweis. Die ordentliche Faltung ist eine Isometrie. Die Bilder der Facetten sind abwickelbare Flächen ohne Kanten. Für zwei Punkte auf einem Randstück, welches von einem Geradenstück stammt, ist die kürzeste Verbindung entlang des Randes. Also ist der Rand stückweise geodätisch und aus Korollar 2.24 folgt die Aussage. \square

Um die Nichtexistenz des Hypars zu zeigen, muss noch ein Lemma gezeigt werden, welches ein Standardresultat des mathematischen Origami ist.

Lemma 2.26. *Jedes Faltmuster mit vier rechtwinklige Dreiecken, welche zyklisch an den Katheten zusammenhängen (siehe Abbildung 2.9), hat keine nicht triviale starre Faltung.*

Beweis. Angenommen es gibt eine nicht triviale starre Faltung. Sei v_1, \dots, v_4 die Richtung der Kanten 1, \dots , 4 aus Abbildung 2.9. Da die Facetten starr gefaltet werden gilt $v_i \perp v_{i+1}$ und somit ist der Faltwinkel der Kante i der Winkel zwischen v_{i-1} und v_{i+1} , wobei Indizes Modulo 4 betrachtet werden. Falls der Faltwinkel bei Kante 2 nicht trivial ist, spannen v_1 und v_3 eine Ebene auf. Aufgrund der starren Faltung stehen v_2 und v_3 im rechten Winkel zu dieser und sind somit parallel. Dies impliziert allerdings, dass der Faltwinkel bei Kante 3 und Kante 1 trivial ist. \square

Unter einem *Ring* im Faltmuster des Hypars ist jenes Gebiet gemeint, welches von zwei aufeinanderfolgenden konzentrischen Quadraten berandet wird. Der innerste Ring besteht aus vier gleichschenkeligen rechtwinkligen Dreiecken und alle weiteren Ringe bestehen aus vier kongruenten Trapezen.

Satz 2.27. *Das Standardfaltmuster des Hypars mit $n \geq 2$ Ringen besitzt keine ordentliche Faltung.*

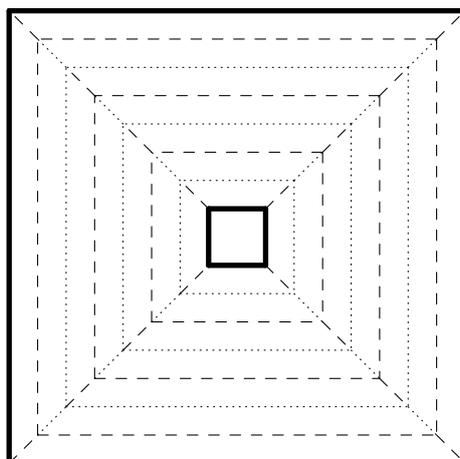


Abbildung 2.10: Faltmuster des gelochten Hypars.

Beweis. Mit $n \geq 2$ Ringen liegt der innerste Ring komplett im Inneren und wird wegen Korollar 2.25 starr gefaltet. Allerdings lässt Lemma 2.26 dies nicht zu. \square

Die ordentliche Faltung des Standardfaltmusters scheitert also am innersten Ring, welcher aus Dreiecken besteht und nicht so wie die anderen Ringe aus Trapezen. Es stellt sich daher die Frage, ob eine ordentliche Faltung existieren würde, falls man in das Stück Papier ein Loch schneidet und den innersten Ring entfernt. Das Faltmuster des *gelochten Hypars* ist in Abbildung 2.10 dargestellt.

Hat das Standardfaltmuster n Ringe, so besitzt das gelochte Faltmuster $n - 1$ Ringe. Die Frage nach der Existenz einer ordentlichen Faltung ist im folgenden Satz beantwortet.

Satz 2.28. *Das Faltmuster des gelochten Hypars mit $n - 1 \geq 3$ Ringen besitzt keine ordentliche Faltung.*

Beweis. Für einen Ring, welcher nicht am Rand liegt, werden die Trapeze nach Korollar 2.25 starr gefaltet und sind somit eben. Jede Faltung dieser Trapeze induziert aber auch eine Faltung derer Verlängerungen zu rechtwinkligen Dreiecken. Diese Verlängerungen können aber wegen Lemma 2.26 nicht starr gefaltet werden. \square

Die Nichtexistenz hängt nicht damit zusammen, dass die äußerste Kante des Hypar-Faltmuster ein Quadrat ist. Für konvexe Polygone lässt sich ebenfalls ein Faltmuster durch gleichmäßige, zentrische Verkleinerung aus einem inneren Punkt bestimmen. Das Faltmuster des *allgemeinen Hypars* ist in Abbildung 2.11 dargestellt.

In [10] wird gezeigt, dass weder das Faltmuster des allgemeinen noch des gelochten allgemeinen Hypars eine ordentliche Faltung besitzen. Der Beweis verwendet nicht Lemma 2.26 sondern betrachtet die Schnittpunkte der *Diagonalen* und der parallel verschobenen Seiten des Polygons. *Diagonalen* sind jene Strecken, die Eckpunkte mit dem Zentrum der Skalierung verbinden.

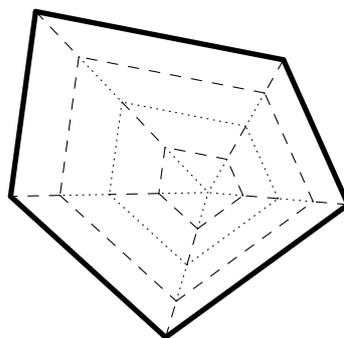


Abbildung 2.11: Faltmuster des allgemeinen Hypars.

Durch eine einfache Modifikation des Standardfaltmusters ist es möglich, ein Faltmuster zu erhalten, welches eine ordentliche Faltung besitzt. Aus den vier Dreiecken im innersten Ring müssen zwei Dreiecke gemacht werden und die Trapeze werden in je zwei Dreiecke zerlegt. Die dabei entstandenen Faltmuster sind in Abbildung 2.12 dargestellt.

Durch die Vorgabe eines Winkels θ , welcher der Faltwinkel des innersten Ringes ist, ist die Lage aller anderen Facetten bestimmt. In [10] wird gezeigt, dass für gewisse θ und für eine gewisse Anzahl von Ringen eine ordentliche Faltung existiert. Der Beweis dazu ist konstruktiv und verwendet die Aussage von Korollar 2.25, dass die inneren Facetten starr gefaltet werden. Somit können an den Ecken Kugeln mit dem Radius der Kante befestigt werden und der Schnittpunkt dieser Kugeln bestimmt die nächsten Ecken. Durch zusätzliche Überlegungen wird der Schnittpunkt der Kugeln eindeutig.

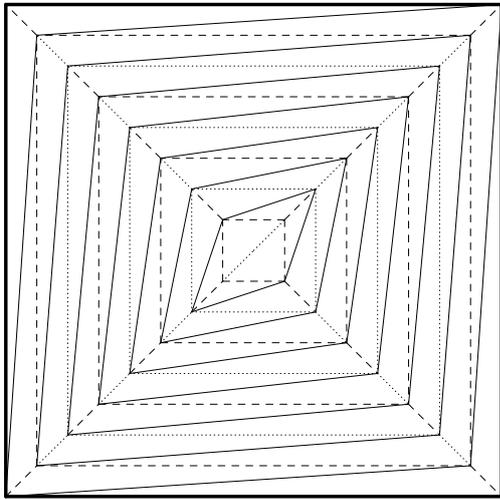
Ein Beweis für die Existenz einer ordentlichen Faltung aller Faltwinkel θ und jeder Anzahl an Ringen wird in [10] nicht gegeben. Es wird aber vermutet, dass die Aussage wahr ist, wobei für diesen Zweck der geführte konstruktive Beweis versagt. Des Weiteren wird vermutet, dass für eine immer größere Anzahl an Ringen, das gefaltete Objekt tatsächlich ein hyperbolisches Paraboloid annähert. Um dies zu beweisen, müsste allerdings zuerst bewiesen werden, dass es für jede Anzahl an Ringen eine ordentliche Faltung gibt.

2.3.2 Faltmuster aus konzentrischen Kreisen

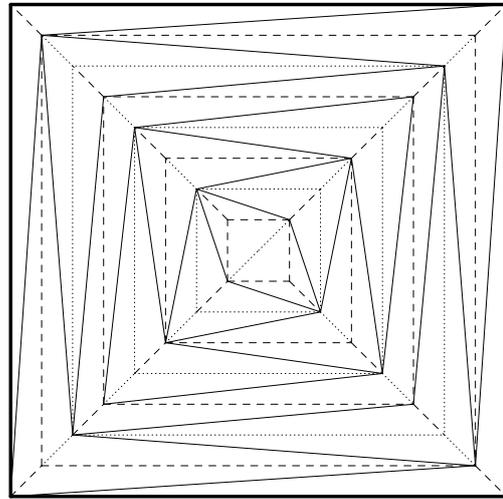
Noch ungeklärt ist, ob es eine ordentliche Faltung des von Josef Albers entwickelten Objektes gibt. Das Faltmuster besteht aus konzentrischen Kreisen, die auf ein Stück Papier in der Form eines Kreisringes eingebettet sind. Die konzentrischen Kreise werden alternierend zu Berg- und Talkanten gefaltet. Siehe Abbildung 2.13.

Falls es eine ordentliche Faltung gibt, ist wegen Abschnitt 2.2 klar, dass aus den konzentrischen Kreisen Raumkurven werden.

Die Autoren von [10] vermuten, dass es eine solche ordentliche Faltung gibt. Sie glauben auch, dass sich alle Faltmuster, die aus einer zentrischen Folge von hinreichend glatten konvexen Kurven entstehen, falten lassen.

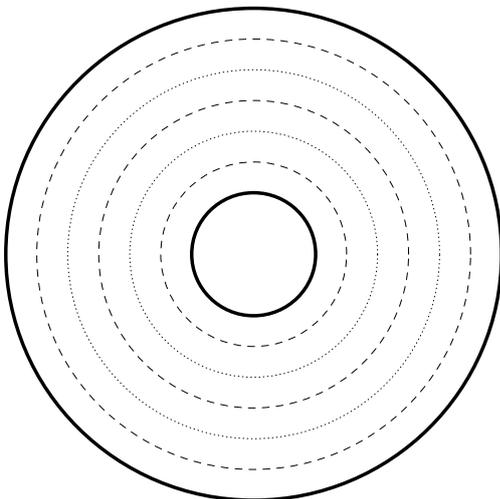


(a) Triangulierung



(b) Alternierende Triangulierung

Abbildung 2.12: Modifizierte Faltmuster des Hypars die eine ordentliche Faltung besitzen. Für durchgezogenen Linien muss noch entschieden werden, ob diese Berg- oder Talkanten sind.



(a) Faltmuster



(b) Modell aus Papier

Abbildung 2.13: Die von Josef Albers entwickelte Skulptur.

Literaturverzeichnis

- [1] Zachary Abel, Jason Cantarella, Erik Demaine, David Eppstein, Thomas Hull, Jason Ku, Robert Lang, and Tomohiro Tachi. Rigid origami vertices: Conditions and forcing sets. *Journal of Computational Geometry*, 7(1):171–184, 2016.
- [2] Oswin Aichholzer and Franz Aurenhammer. Straight skeletons for general polygonal figures. In *Proc. 2nd Ann. Int'l. Computing and Combinatorics Conf. COCOON'96, Lecture Notes in Computer Science*, volume 1090, pages 117–126, Hong Kong, 1996. Springer Verlag.
- [3] Roger Alperin. Trisections and totally real origami. *American Mathematical Monthly*, 112(3):200–211, 2005.
- [4] Roger Alperin and Robert Lang. One-, two-, and multi-fold origami axioms. In *Origami⁴: Proceedings of the 4th International Meeting of Origami Science, Math, and Education (OSME 2006)*, pages 371–393. A K Peters, 2006.
- [5] Marshall Bern, Erik Demaine, David Eppstein, and Barry Hayes. A disk-packing algorithm for an origami magic trick. In *Proceedings of the International Conference on Fun with Algorithms (FUN'98)*, pages 32–42, Isola d'Elba, Italy, June 18–20 1998.
- [6] Marshall Bern and David Eppstein. Quadrilateral meshing by circle packing. In *Proc. 6th Int. Meshing Roundtable*, pages 7–20. Sandia Nat. Lab., 1997.
- [7] Marshall Bern and Barry Hayes. The complexity of flat origami. In *Proceedings of the Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '96, pages 175–183. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.
- [8] Mohan Bodduluri and Bahram Ravani. Design of developable surfaces using duality between plane and point geometries. *Computer Aided Design*, 25(10):621–632, 1993.
- [9] Heinrich Brauner. *Differentialgeometrie*. Vieweg, 1981.
- [10] Erik Demaine, Martin Demaine, Vi Hart, Gregory Price, and Tomohiro Tachi. (Non)existence of Pleated Folds: How Paper Folds Between Creases. *Graphs and Combinatorics*, 27(3):377–397, 2011.
- [11] Erik Demaine, Martin Demaine, David Huffman, Duks Koschitz, and Tomohiro Tachi. Characterization of curved creases and rulings: Design and analysis of lens tessellations. In *Origami⁶: Proceedings of the 6th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education (OSME 2014)*, volume 1, pages 209–230. American Mathematical Society, 2014.
- [12] Erik Demaine, Martin Demaine, and Anna Lubiw. Folding and cutting paper. In *Revised Papers from the Japan Conference on Discrete and Computational Geometry*

- (JCDCG'98), volume 1763 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 104–117, 1998.
- [13] Erik Demaine, Martin Demaine, and Anna Lubiw. Polyhedral sculptures with hyperbolic paraboloids. In *Proceedings of the 2nd Annual Conference of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music, and Science (BRIDGES'99)*, pages 91–100, 1999.
- [14] Erik Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.
- [15] Dmitry Fuchs and Serge Tabachnikov. More on paperfolding. *The American Mathematical Monthly*, 106(1):27–35, 1999.
- [16] Philip Hartman and Louis Nirenberg. On spherical image maps whose Jacobians do not change sign. *American Journal of Mathematics*, 81(4):901–920, 1959.
- [17] Philip Hartman and Aurel Winter. On the fundamental equations of differential geometry. *American Journal of Mathematics*, 72(4):757–774, 1950.
- [18] Koshiro Hatori. <http://origami.ousaan.com/library/conste.html>, 2001.
- [19] Heinz Hopf. Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven. *Compositio Mathematica*, 2:50–62, 1935.
- [20] Harry Houdini. *Houdini's Paper Magic*. E. P. Dutton and Company, 1922.
- [21] Thomas Hull. On the mathematics of flat origamis. *Congressus Numerantium*, 100:215–224, 1994.
- [22] Thomas Hull. Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill. *The American Mathematical Monthly*, 118(4):307–315, 2011.
- [23] Humiaki Huzita. A possible example of system expansion in origami geometry. In Humiaki Huzita, editor, *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, pages 53–70, 1989.
- [24] Jacques Justin. Resolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques. In Humiaki Huzita, editor, *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, pages 251–261, 1989.
- [25] Kunihiko Kasahara and Toshie Takahama. *Origami for the Connoisseur*. Japan Publications, 1985.
- [26] Toshikazu Kawasaki. On the relation between mountain-creases and valley-creases of a flat origami. In Humiaki Huzita, editor, *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, pages 229–237, 1989.
- [27] Jason Ku and Erik Demaine. Folding flat crease patterns with thick materials. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 8(031003):1–6, 2016.
- [28] Robert Lang. A computational algorithm for origami design. In *Proceedings of the Twelfth Annual Symposium on Computational Geometry, SCG '96*, pages 98–105. ACM, 1996.

-
- [29] Robert Lang. *Origami Design Secrets*. CRC Press, 2011.
- [30] Gustav Peschka. *Kotirte Ebenen: Kotirte Projektionen und deren Anwendung*. Buschak & Irrgang, 1877.
- [31] Helmut Pottmann and Johannes Wallner. Approximation algorithms for developable surfaces. *Comput. Aided Geom. Design*, 16:539–556, 1999.
- [32] Helmut Pottmann and Johannes Wallner. *Computational Line Geometry*. Mathematics and Visualization. Springer, 2010.
- [33] Michael Schmitz. Eine Ergänzung zum Satz von Haga (I). *Wurzel*, Heft 6:124–132, 2016.
- [34] Chengcheng Tang, Pengbo Bo, Johannes Wallner, and Helmut Pottmann. Interactive design of developable surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 35(2):12, 2016.
- [35] Egbert Rudolf van Kampen. The Theorems of Gauss-Bonnet and Stokes. *American Journal of Mathematics*, 60(1):129–138, 1938.
- [36] Pierre Wantzel. Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1(2):366–372, 1837.