Sternzeit der Beobachtung und $\alpha$ die Rectascension des Sternes bedeutet, der Stundenwinkel $t = \Theta - \alpha$, somit $dt = -d\alpha$; man hat daher, zufolge der Gl. (202):

$$d\varphi = \cos\varphi \operatorname{tg} A\, d\alpha + \cos q \sec A\, d\delta.$$

Lässt man nun $d\alpha$ und $d\delta$ die tägliche Aberration in Rectascension und Declination bedeuten, so ist vermöge der Glgn. (112):

$$d\alpha = \lambda \cos\varphi \cos t \sec\delta, \quad d\delta = \lambda \cos\varphi \sin t \sin\delta,$$

wo $\lambda = 0''.31$; hiemit wird:

$$d\varphi = \frac{\lambda \cos\varphi}{\cos A} (\sin\varphi \sin A \cos t \sec\delta + \cos q \sin t \sin\delta),$$

oder, da $\cos\varphi \sin A = \sin q \cos\delta$:

$$d\varphi = \frac{\lambda \cos\varphi}{\cos A} (\sin q \cos t + \cos q \sin\delta \sin t);$$

es ist aber der eingeklammerte Factor $= \sin A \cos z$, somit:

$$d\varphi = 0''.31 \cos\varphi \cos z \operatorname{tg} A.$$

Hieraus erhellt, dass, da bei Beobachtungen des Polarsternes, so wie von Circummeridian-Zenithdistanzen anderer Sterne, das Azimuth $A$ immer sehr klein ist, der aus der Vernachlässigung der täglichen Aberration entspringende Fehler verschwindend klein, und überdies bei symmetrischer Vertheilung der Beobachtungen zu beiden Seiten des Meridians, in Folge des hiebei eintretenden Zeichenwechsels von $\operatorname{tg} A$, vollständig eliminirt wird.

### 2. Bestimmung der Polhöhe aus beobachteten Differenzen der Meridian-Zenithdistanzen zweier auf entgegengesetzten Seiten des Zeniths culminirender Sterne. (Talcott's Methode.)

**196.** Bezeichnet man mit $\delta$, $\delta'$ die Declinationen zweier Sterne, von welchen der eine südlich, der andere nördlich vom Zenith culminirt, mit $\zeta$, $\zeta'$ deren Meridian-Zenithdistanzen, so bestehen bekanntlich für die Polhöhe $\varphi$ die Gleichungen: $\varphi = \delta + \zeta$ und $\varphi = \delta' - \zeta'$, aus deren Addition die folgende hervorgeht:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta'). \tag{215}$$

Bei Anwendung dieser Gleichung wird daher nicht die Bestimmung der absoluten Zenithdistanzen $\zeta$ und $\zeta'$, sondern nur die Differenz derselben erfordert und das Wesen der Talcott'schen Methode besteht darin, diese Differenz mikrometrisch, also ohne Zuhilfenahme von Kreistheilungen zu messen. Zu diesem Zwecke muss das Fernrohr des Instrumentes mit einem Schraubenmikrometer mit im Sinne der Zenithdistanz beweglichem Horizontalfaden versehen sein, und sind die beiden Sterne so zu wählen, dass sie in nahe gleichen Zenithdistanzen, der eine südlich, der andere nördlich vom Zenith culminiren, damit dieselben ohne Aenderung der Stellung des Fernrohres gegen das Zenith, durch blosse Drehung desselben aus dem südlichen in den nördlichen Meridian, oder umgekehrt, in das Gesichtsfeld gebracht werden können.

Zur Ausführung dieser Methode wird namentlich in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika, wo dieselbe, von Talcott eingeführt, bei der Küstenvermessung ausgedehnte Anwendung fand, ein besonders construirtes Instrument (Zenithteleskop) benützt. Dasselbe besteht im Wesentlichen aus einem um eine horizontale und verticale Axe drehbaren, geraden, mit prismatischem Oculare und Schraubenmikrometer versehenem Fernrohr, welches an dem einen Ende der Horizontalaxe angebracht ist und durch ein am andern Ende der Axe befindliches Gegengewicht balancirt wird. Die Horizontalaxe liegt, wie bei dem Universal-Instrumente, in zwei Vförmigen Lagern eines horizontalen Trägers, welcher mit dem oberen Ende einer um eine verticale, von einem auf Stellschrauben ruhenden Dreifusse getragenen Axe drehbaren Säule fest verbunden ist; ein auf dem Dreifusse befestigter Horizontalkreis, welcher mittelst eines mit dem unteren Ende der Säule verbundenen Nonius abgelesen wird, gestattet die Einstellung des Instrumentes in ein bestimmtes Azimuth. Eine auf die Horizontalaxe aufzusetzende Libelle dient zur gegenseitigen Senkrechtstellung beider Axen und Verticalstellung der Verticalaxe mittelst der Fussschrauben. Endlich ist unmittelbar mit dem Fernrohre, in einer zur Horizontalaxe senkrechten Ebene, eine empfindliche Libelle, um einen zu dieser Axe parallelen Zapfen drehbar, verbunden, so dass dieselbe in jeden beliebigen Winkel zur Absehenlinie des Fernrohres gebracht und mittelst einer Klemmschraube festgestellt werden kann, zu welchem Zwecke mit dem Fernrohre ein getheilter Kreis, mit dem Träger der Libelle aber, senkrecht auf letztere, eine Alhidade mit Nonius fest verbunden sind. Die Einrichtung ist so getroffen, dass nach gehöriger Justirung die Lesung am Kreise $= 0$ ist, wenn die Libelle senkrecht steht auf der durch den festen horizontalen Mittelfaden gebildeten Absehenlinie des Fernrohres, und ist die Theilung von Null aus nach beiden Seiten bis $90^0$ beziffert. Die Ablesung des Kreises bei einspielender Libelle gibt daher, bei jeder Stellung des Fernrohres, die Zenithdistanz desselben und es dient somit der Kreis zur Einstellung des Fernrohres auf eine gegebene Zenithdistanz $z$; man bringt zu diesem Zwecke zunächst den Nonius durch Drehung der Libelle auf die Lesung $z$, und sodann durch Drehung des Fernrohres um die Horizontalaxe die Libelle nahe zum Einspielen. Das Fernrohr kann nun durch eine Klemmschraube festgestellt und demselben durch eine Einstellschraube noch eine feine Bewegung in Zenithdistanz ertheilt werden, lediglich zu dem Zwecke, um die Blase der Libelle nahe in die Mitte der Röhre zu bringen. — Für die Berichtigung des Instrumentes in Betreff der Stellung der Axen, der

Fäden und der Collimation des verticalen Mittelfadens finden die für das Universal-Instrument gegebenen Vorschriften entsprechende Anwendung. Der Winkelwerth einer Schraubenumdrehung des Mikrometers beträgt 40 bis 50 Bogensecunden, so dass, wenn die Trommel in hundert Theile getheilt ist, die Einstellung des Fadens auf 0″.04 bis 0″.05 genau abgelesen werden kann.

Aus dieser Einrichtung des Zenithteleskops ist übrigens ersichtlich, dass zur Ausführung der in Rede stehenden Beobachtungen auch ein Universal-Instrument verwendet werden kann, wenn das Fernrohr mit einem Schraubenmikrometer mit beweglichem Horizontalfaden versehen wird; die bei dem Zenithteleskop mit dem Fernrohre unmittelbar verbundene Libelle wird bei dem Universal-Instrumente durch die auf dem Mikroskopträger des Höhenkreises ruhende Alhidadenlibelle ersetzt. Dieser Umstand begründet einen Vorzug des Zenithteleskops insoferne, als bei unmittelbarer Verbindung der Libelle mit dem Fernrohre die wesentlichste Bedingung, d. i. die Unveränderlichkeit der Stellung der Libelle gegen das Fernrohr während der Dauer der Beobachtung beider Sterne in höherem Masse gesichert ist, als dies bei dem Universal-Instrumente der Fall sein wird, wo die Libelle getrennt von dem Fernrohre mit dem Mikroskopträger verbunden ist.

Selbstverständlich darf, wenn, wie bei dem in Fig. 51 und 52 (S. 246 und 247) dargestellten Universal-Instrumente, der Mikroskopträger auf die Horizontalaxe aufgebüchst ist, während der Dauer der Beobachtungen beider Sterne die Schraube $\mu$ (Fig. 52) nicht berührt werden, weil durch Drehung derselben die Neigung des Mikroskopträgers und somit auch der Libelle gegen das Fernrohr geändert wird.

Auch ein mit Umlegevorrichtung versehenes Passage-Instrument, ähnlich dem in Fig. 65 und 66 (S. 272 und 273) dargestellten, kann hiezu benützt werden, wenn, nebst dem Schraubenmikrometer mit beweglichem Horizontalfaden eine Libelle, in gleicher Weise wie bei dem Zenithteleskop, mit dem Fernrohre verbunden wird. Da bei diesen Instrumenten eine Drehung des Fernrohres um eine verticale Axe nicht vorgesehen ist, so besteht das Verfahren darin, dass man, nach Beobachtung des zuerst culminirenden Sternes, die Horizontalaxe sammt Fernrohr mittelst der Umlegevorrichtung aus den Lagern hebt, um 180° dreht und, ohne Aenderung der Stellung des Fernrohres, wieder in die Lager niederlässt, endlich mittelst der Schraube $w$ (Fig. 66), durch welche dem Fernrohre sammt der Libelle eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt, die gegenseitige Lage derselben also nicht geändert wird, die Blase wieder nahe in die Mitte der Röhre zurückführt.

Die Talcott'sche Methode besitzt den Vortheil, dass sie die Polhöhe frei von Fehlern der Kreistheilung und von dem Einflusse der Biegung des Fernrohres und der Unsicherheit der Refraction gibt; ihre erfolgreiche Anwendung erfordert nur die möglichste Sicherung der Unveränderlichkeit der Beziehung zwischen Libelle und Fernrohr während der Dauer der Beobachtung beider

Sterne und ein sorgfältig construirtes Mikrometer. Ein Nachtheil der Methode liegt in dem Umstande, dass man in Folge der Bedingung der nahe gleichen Meridian-Zenithdistanzen beider Sterne bei der Auswahl derselben auf kleinere Sterne bis zur 6ten und 7ten Grösse herabzugehen genöthigt ist, deren aus den Sternkatalogen zu entnehmende Declinationen im Allgemeinen erheblich weniger genau sind, als jene der helleren Sterne, auf welche man sich bei anderen Methoden beschränken kann. Man muss daher eine grössere Anzahl von Sternpaaren beobachten, um den aus sämmtlichen Beobachtungen abzuleitenden Mittelwerth der Polhöhe von dem Einflusse der Declinationsfehler thunlichst befreit zu erhalten. Bei der Auswahl der Sternpaare ist es räthlich, darauf zu achten, dass die grössere Zenithdistanz sich möglichst gleichförmig auf die südlichen und nördlichen Sterne vertheilt, weil hiedurch der Einfluss eines Fehlers in dem angenommenen Winkelwerthe einer Schraubenumdrehung des Mikrometers vermindert wird. Dieser Einfluss wird umsomehr eliminirt, je näher die Bedingung $\Sigma\zeta = \Sigma\zeta'$ erfüllt ist.

**197.** Die Ausführung der Beobachtungen selbst, sowie deren Reduction ist sehr einfach. Wie bereits bemerkt, sind die zwei Sterne so zu wählen, dass sie in nahe gleichen Meridian-Zenithdistanzen, der eine nördlich, der andere südlich vom Zenith culminiren; es ist zweckmässig, die Differenz derselben das halbe Gesichtsfeld nicht erheblich überschreiten zu lassen, um Beobachtungen zu nahe am Rande zu vermeiden, und rücksichtlich der absoluten Zenithdistanzen nicht über $30^0$ zu gehen. Ist $g$ die Grenze, welche die Differenz der Meridian-Zenithdistanzen nicht überschreiten soll, und $\delta'$ die Declination des nördlichen Sternes, so muss jene des südlichen Sternes zwischen den Grenzen $\delta = 2\varphi - \delta' \mp g$ liegen. Die Differenz der Rectascensionen soll nicht zu gross sein, damit beide Beobachtungen bald aufeinander folgen, um für die Dauer derselben des unveränderten Zustandes des Instrumentes sicher zu sein; anderseits darf dieselbe nicht erheblich unter $3^m$ sinken, damit der Beobachter zur Ablesung des Mikrometers und der Libelle, sowie zur Drehung des Instrumentes um $180^0$ die nöthige Zeit finde. Nachdem das Fernrohr auf die mittlere Zenithdistanz beider Sterne

$$z = \tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') = \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)$$

gestellt und das Instrument nach der Seite des zuerst culminirenden Sternes in den Meridian orientirt ist, wird das Eintreten des Sternes in das Gesichtsfeld abgewartet, und im Momente der Culmination der bewegliche Mikrometerfaden auf den Stern scharf eingestellt. Dieser Moment wird, wenn das Instrument in den Meridian gut orientirt und der Collimationsfehler sehr klein ist, hinreichend nahe mit dem Durchgange des Sternes durch den verticalen Mittelfaden zusammenfallen; man kann ihn jedoch auch der Uhr entnehmen, indem man mittelst der scheinbaren Rectascension des Sternes und des Standes der Uhr die Uhrzeit der Culmination im Voraus berechnet. Hierauf wird das Mikrometer und die Libelle abgelesen, das Instrument um $180^0$ gedreht und in gleicher Weise der zweite Stern beobachtet.

Es sei nun $m_0$ die einer bestimmten, übrigens willkürlichen Stellung des beweglichen Fadens entsprechende Lesung des Mikrometers; $\zeta_0$ die dieser Stellung bei einspielender Libelle entsprechende scheinbare Zenithdistanz; $m$ die Lesung des Mikrometers bei Einstellung auf den südlichen Stern: so wird, wenn wir mit $R$ den Winkelwerth einer Schraubenumdrehung in Bogensecunden bezeichnen, und annehmen, dass die Mikrometer-Lesungen bei zunehmender Zenithdistanz abnehmen, $\zeta_0 + R(m_0 - m)$ die scheinbare Zenithdistanz des Sternes sein, wenn die Libelle einspielt. Ist dies aber nicht der Fall, und $l$ die Ausweichung der Blase von der Mitte in Bogensecunden, positiv, wenn die Blase gegen Nord ausweicht, so wird die scheinbare Zenithdistanz $= \zeta_0 + R(m_0 - m) + l$, somit, wenn $r$ die Refraction bedeutet, die wahre Zenithdistanz $\zeta$ des südlichen Sternes:

$$\zeta = \zeta_0 + Rm_0 - Rm + l + r.$$

Für den nördlichen Stern sei $m'$ die Lesung des Mikrometers; $l'$ die Ausweichung der Libelle, wieder positiv, wenn die Blase gegen Nord ausweicht; $r'$ die Refraction, so wird, da die Grösse $\zeta_0 + Rm_0$ constant bleibt, so lange die Beziehung zwischen Fernrohr und Libelle sich nicht ändert, die wahre Zenithdistanz $\zeta'$ des nördlichen Sternes:

$$\zeta' = \zeta_0 + Rm_0 - Rm' - l' + r'.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\zeta - \zeta' = R(m' - m) + (l + l') + (r - r'), \qquad (a)$$

und durch Substitution dieses Werthes von $\zeta - \zeta'$ in Gl. (215) erhalten wir:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2} R(m' - m) + \tfrac{1}{2}(l + l') + \tfrac{1}{2}(r - r'). \qquad (216)$$

Bezeichnen wir die Lesungen des nördlichen und südlichen Blasenendes der Libelle für den südlichen Stern mit $n$, $s$, für den nördlichen mit $n'$, $s'$, mit $\mu$ den Winkelwerth eines Scalentheiles in Bogensecunden, so ist:

$$l = \frac{\mu}{2}(n - s), \quad l' = \frac{\mu}{2}(n' - s'),$$

somit:

$$\tfrac{1}{2}(l + l') = \frac{\mu}{4}[(n + n') - (s + s')]. \qquad (217)$$

Da ferner die Differenz der Zenithdistanzen $\zeta$ und $\zeta'$ klein ist, und diese selbst $30^0$ meist nicht überschreiten werden, so wird die Differenz $r - r'$ der Refractionen stets so klein sein, dass wir die vom Barometer- und Thermometerstande abhängigen Veränderungen vernachlässigen und

$$r - r' = (\zeta - \zeta')\frac{dr}{dz}$$

setzen können, wo $\frac{dr}{dz}$ die Aenderung der mittleren Refraction bedeutet, welche, wenn wir $\zeta - \zeta'$ in Minuten ausdrücken, einer Aenderung der Zenithdistanz um eine Minute entspricht. Aus dem Bessel'schen Ausdrucke für die mittlere Refraction: $r = \alpha \operatorname{tg} z$ [§. 52] folgt nun: $\frac{dr}{dz} = \frac{\alpha}{\cos z^2}$, womit

$$r - r' = (\zeta - \zeta') \frac{\alpha}{\cos z^2}$$

wird, wo $\zeta - \zeta'$ in Bogenmaass zu verstehen ist; drückt man aber $\zeta - \zeta'$ in Minuten aus, so wird $r - r' = (\zeta - \zeta') \frac{\alpha \sin 1'}{\cos z^2}$. Setzt man nun nach Taf. I, Seite 141, für Zenithdistanzen zwischen $0^0$ und $30^0$ $\log \alpha = 1.7615$, und berücksichtiget, dass sehr nahe $\zeta - \zeta' = R\,(m' - m)$ ist, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}(r - r') = \tfrac{1}{2} R\,(m' - m) \frac{0''.01680}{\cos z^2}, \tag{218}$$

wo $\frac{1}{2} R\,(m' - m)$ das in Gl. (216) erscheinende zweite Glied, in Minuten ausgedrückt, bedeutet und für $z$ das Mittel der Zenithdistanzen beider Sterne zu nehmen ist.*)

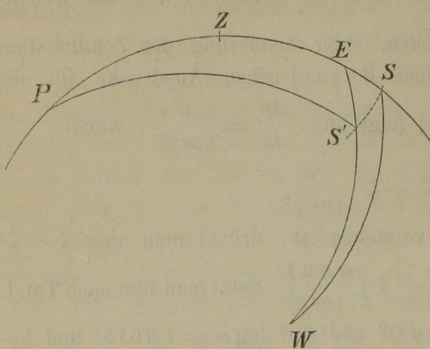
**198.** Es kann vorkommen, dass die Einstellung des Mikrometers auf den Stern zur Zeit der Culmination aus irgend einem Grunde misslingt; man kann dann die Einstellung ausserhalb des Meridians bei einem Stundenwinkel $\tau$ des Sternes vornehmen, welcher sich aus der beobachteten Uhrzeit der Einstellung und der Uhrzeit der Culmination ergibt, und hat dann an die nach Gl. (216) berechnete Polhöhe noch eine Correction anzubringen. Hiebei können zwei Fälle eintreten.

1. Das Instrument steht und bleibt im Meridiane und der Stern wird seitwärts vom verticalen Mittelfaden im Stundenwinkel $\tau$ beobachtet. Hiebei wird vorausgesetzt, dass bei Berichtigung der Fäden der bewegliche Mikrometerfaden mit aller Sorgfalt horizontal gestellt worden sei.

Sei (Fig. 91) $PS$ der Meridian, $P$ der Nordpol, $SS'$ der Parallel des Sternes und dieser in $S'$ beobachtet. Nimmt man, was hier zulässig ist, das Instrument und dessen Aufstellung als fehlerfrei an, so trifft die Horizontalaxe, gegen West verlängert, die scheinbare Himmelskugel im Westpuncte $W$, und die durch den Mikrometerfaden gebildete Visirebene schneidet die Himmelskugel in dem grössten Kreise $WS'E$, würde aber, wenn der Stern im Meridiane beobachtet worden wäre, die Kugel im grössten Kreise $WS$ schneiden. Es ist daher

*) Bei der obigen Ableitung wurde angenommen, dass die Mikrometer-Lesungen bei zunehmender Zenithdistanz abnehmen; im Gegenfalle hat man nur die Lesungen $m$, $m'$ mit negativem Zeichen in den Formeln (216) und (218) einzuführen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in diesen Formeln $m - m'$ an die Stelle von $m' - m$ treten zu lassen.

Fig. 91.




der Winkel $SWE = arc\, SE = x$ die Reduction der beobachteten Zenithdistanz auf den Meridian, welche, da der Punct $E$ für Sterne von nördlicher Declination stets nördlich vom Puncte $S$ liegt, der Stern mag südlich oder nördlich vom Zenith culminiren, bei einem südlichen Sterne zur beobachteten Zenithdistanz zu addiren, bei einem nördlichen von derselben zu subtrahiren ist, um die Meridian-Zenithdistanz zu erhalten.

Aus dem bei $E$ rechtwinkeligen Dreiecke $PES'$, in welchem $PS' = 90^0 - \delta$, $PE = 90^0 - \delta - x$ ist, folgt:

$$\operatorname{cotg}(\delta + x) = \operatorname{cotg}\delta \cos\tau.$$

Man hat aber nach dem Taylor'schen Satze, mit Vernachlässigung der im vorliegenden Falle stets unmerklichen höheren Potenzen von $x$:

$$\operatorname{cotg}(\delta + x) = \operatorname{cotg}\delta - \frac{x}{\sin\delta^2},$$

folglich, wenn man im zweiten Theile $\cos\tau = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\tau^2$ setzt, und $x$ in Bogensecunden ausdrückt:

$$x = \sin 2\delta\, \frac{\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''},$$

oder:

$$x = \tfrac{1}{4}(15\,\tau)^2 \sin 1'' \sin 2\delta,$$

wo $\tau$ in Zeitsecunden auszudrücken ist.

In der Gl. ($a$) des vorhergehenden §. gibt nun der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, den wir kurz mit $M$ bezeichnen wollen, die Differenz $\zeta - \zeta'$ der Meridian-Zenithdistanzen unter der dort gemachten Voraussetzung, dass beide Sterne im Meridiane beobachtet seien. Ist aber einer derselben ausserhalb des Meridians, der südliche in der Zenithdistanz $z$, oder der nördliche in der Zenithdistanz $z'$ beobachtet, so stellt der Ausdruck $M$ die Differenz $z - \zeta'$, beziehungsweise $\zeta - z'$ dar, und da $\zeta = z + x$, $\zeta' = z' - x$ ist, so hat man im ersten Falle: $M = z - \zeta' = \zeta - x - \zeta'$, im zweiten $M = \zeta - z' = \zeta - \zeta' - x$, folglich in beiden Fällen: $\zeta - \zeta' = M + x$, und vermöge der Gl. (215): $\varphi = \frac{1}{2}(\delta + \delta') + \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}x$. Es ist daher die Correction $\varDelta\varphi$ der nach Gl. (216) berechneten Polhöhe:

$$\varDelta\varphi = + \tfrac{1}{8}(15\,\tau)^2 \sin 1'' \sin 2\delta = + (6.1347 - 10)\,\tau^2 \sin 2\delta, \quad (219)$$

wo die eingeklammerte Zahl einen Logarithmus bedeutet, $\tau$ in Zeitsecunden auszudrücken ist und $\varDelta\varphi$ in Bogensecunden erhalten wird.

Sind beide Sterne ausserhalb des Meridians beobachtet, so ist für jeden Stern die Correction $\Delta\varphi$ nach (219) zu berechnen und die Summe beider Correctionen zu der nach Gl. (216) berechneten Polhöhe zu addiren.

2. Man folgt dem Sterne ausserhalb des Meridians durch Drehung des Fernrohres um die Verticalaxe des Instrumentes (welches Verfahren selbstverständlich nur bei Benützung eines Zenithteleskops oder eines Universal-Instrumentes eintreten kann) und beobachtet den Stern nahe am verticalen Mittelfaden. In diesem Falle ist die Reduction $x$ der beobachteten Zenithdistanz auf die Meridian-Zenithdistanz offenbar identisch mit der in §. 191 entwickelten Reduction auf den Meridian und daher nach Gl. (209) und (210), mit Vernachlässigung des von der 4ten Potenz des Stundenwinkels abhängigen Gliedes:

$$x = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta} \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''},$$

welcher Betrag sowol bei südlichen als bei nördlichen Sternen von der beobachteten Zenithdistanz zu subtrahiren ist, um die Meridian-Zenithdistanz zu erhalten. Man hat daher, je nachdem der südliche oder nördliche Stern ausserhalb des Meridians beobachtet ist: $M = z - \zeta' = \zeta + x - \zeta'$, oder $M = \zeta - z' = \zeta - \zeta' - x$, somit $\zeta - \zeta' = \mp x$, und die Correction $\Delta\varphi$ der nach Gl. (216) berechneten Polhöhe $\Delta\varphi = \mp x$, d. i.:

$$\Delta\varphi = \mp \tfrac{1}{2}\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta} \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''}, \tag{220}$$

wo das obere Zeichen für südliche, das untere für nördliche Sterne zu nehmen ist.*)

---

*) Bei etwas grösserem Werthe von $\tau$ wird, wenn die Rechnung bis auf 0''.01 genau geführt werden soll, das Glied 4ter Ordnung noch zu berücksichtigen sein, und umsomehr, je kleiner $\zeta$ ist; man hat dann:

$$\Delta\varphi = \mp \tfrac{1}{2}\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta} \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''} \pm \tfrac{1}{2}\left(\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta}\right)^2 \operatorname{cotg}\zeta \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^4}{\sin 1''}.$$

Z. B. für $\varphi = 48^0\,12'$, $\delta = 63^0\,3'$, $\zeta = \delta - \varphi = 14^0\,51'$, $\tau = 6^m$ findet man:

$$\Delta\varphi = 41''.655 - 0''.032 = 41''.62.$$

Der durch einen Fehler $= d\tau^s$ im Stundenwinkel erzeugte Fehler in $\Delta\varphi$ ist:

$$d\,.\,\Delta\varphi = \tfrac{1}{2}(15\,d\tau)\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta}\sin\tau = (15\,d\tau)\frac{\Delta\varphi\sin 1''}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\tau};$$

in vorstehendem Beispiel wird $d\,.\,\Delta\varphi = 0.0154\,(15\,d\tau)$, also für $d\tau = 1^s$, $d\,.\,\Delta\varphi = 0''.23$, welcher Betrag der wahrscheinlichen Unsicherheit der mikrometrischen Bestimmung der Differenz der Zenithdistanzen schon nahe kommt. Es ist daher räthlich, sich bei diesem Verfahren auf sehr kleine Stundenwinkel zu beschränken.

**199.** Beispiel.*) Zur Bestimmung der Polhöhe der Station Roslyn, eines Punctes der Küstenvermessung in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika (Virginia), wurden 21 Sternpaare beobachtet, von welchen sechs Paare in der folgenden Tabelle verzeichnet sind, nebst den zur Anstellung der Beobachtungen erforderlichen Daten, wobei als genäherte Polhöhe $\varphi = 37^0\ 14'$ angenommen ist. Die Nummern der Sterne beziehen sich auf den Stern-Katalog der British Association for the advancement of science.

| Stern | Grösse | AR | $\delta$ | Meridian-Zenithdistanz | Einstellung |
|---|---|---|---|---|---|
| B. A. C. 4843 | 6 | $14^h\ 33^m\ 21^s$ | $+ 45^0\ 3'$ | $7^0\ 49'$ N. | $7^0\ 55'$. |
| „ 4902 | 6 | 14 43 37 | 29 14 | 8 0 S. | |
| „ 4902 | 6 | 14 43 37 | 29 14 | 8 0 S. | 8 0 |
| „ 4965 | $5\frac{1}{2}$ | 14 57 55 | 45 14 | 8 0 N. | |
| „ 4991 | 6 | 15 2 2 | 26 52 | 10 22 S. | 10 21 |
| „ 5092 | 7 | 15 20 21 | 47 35 | 10 21 N. | |
| „ 5092 | 7 | 15 20 21 | 47 35 | 10 21 N. | 10 24 |
| „ 5192 | 5 | 15 36 33 | 26 46 | 10 28 S. | |
| „ 5911 | $5\frac{1}{2}$ | 17 22 49 | 48 23 | 11 9 N. | 11 4 |
| „ 5922 | $4\frac{1}{2}$ | 17 24 45 | 26 14 | 11 0 S. | |
| „ 6453 | 5 | 18 48 30 | 22 28 | 14 46 S. | 14 47 |
| „ 6530 | 6 | 18 58 38 | 52 3 | 14 49 N. | |

Folgende Tabelle enthält je eine Beobachtung jedes Sternpaares:

| Datum 1852 | Stern No. B.A.C. | Stern N. S. | Mikrometer Lesung $m$ u. $m'$ | Mikrometer $m' - m$ | Libelle $n$ $n'$ | Libelle $s$ $s'$ | Libelle $(n+n') - (s+s')$ | $\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juli 9 | 4843 | N. | $29^R.590$ | $+ 17^R.250$ | 32.4 | 35.0 | — 3.9 | |
| | 4902 | S. | 12 .340 | | 34.0 | 35.3 | | |
| „ 9 | 4902 | S. | 12 .340 | + 1 .650 | 34.0 | 35.3 | — 4.5 | |
| | 4965 | N. | 13 .990 | | 33.8 | 37.0 | | |
| „ 9 | 4991 | S. | 23 .810 | + 1 .715 | 31.2 | 39.5 | — 2.1 | |
| | 5092 | N. | 25 .525 | | 39.2 | 33.0 | | |
| „ 9 | 5092 | N. | 25 .525 | + 10 .725 | 39.2 | 33.0 | — 2.0 | |
| | 5192 | S. | 14 .800 | | 32.8 | 41.0 | | |
| „ 19 | 5911 | N. | 14 .805 | — 11 .870 | 48.5 | 43.6 | — 1.1 | $10^s.9$ |
| | 5922 | S. | 26 .675 | | 43.0 | 49.0 | | |
| „ 20 | 6453 | S. | 8 .225 | — 2 .865 | 44.4 | 49.4 | + 1.7 | 20 .5 |
| | 6530 | N. | 5 .360 | | 50.2 | 43.5 | | |

*) Obiges Beispiel, sowie die folgenden auf diese Methode Bezug habenden, sind W. Chauvenet's Spherical and practical Astronomy, 2. Ed., 1864, Vol. II, p. 349 u. ff. entnommen.

Die Sterne No. 5911 und 6453 sind in den Stundenwinkeln $10^s.9$, beziehungsweise $20^s.5$ beobachtet, während das Instrument im Meridiane verblieb.

Der nächste Schritt ist die Ableitung der scheinbaren Declinationen der Sterne für die Zeit der Beobachtung aus den mittleren Declinationen, wobei in Betreff der letzteren nicht nur der B. A. C., sondern auch andere Kataloge, in welchen dieselben zu finden sind, zu Hilfe genommen werden.

Der Winkelwerth einer Schraubenumdrehung des Mikrometers war $R = 41''.40$, jener eines Scalentheils der Libelle $\mu = 1''.65$. Hiemit steht die Berechnung der Polhöhe wie folgt:

| Stern | $\delta$ und $\delta'$ | $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$ | Correctionen | | | | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Mikrom. $\frac{1}{2}R(m'-m)$ | Lib. $\frac{1}{2}(l+l')$ | Refr. | Red. a. d. Mer. | |
| 4843<br>4902 | $+45^\circ\ 2'\ 56''.66$<br>29 14 1.85 | $37^\circ\ 8'\ 29''.21$ | $+5'\ 57''.08$ | $-1''.61$ | $+0''.10$ | | $37^\circ\ 14'\ 24''.78$ |
| 4902<br>4965 | 29 14 1.85<br>45 13 43.64 | 37 13 52.75 | +0 34.15 | −1.86 | +0.01 | | 25.05 |
| 4991<br>5092 | 26 52 24.73<br>47 35 16.37 | 37 13 50.55 | +0 35.50 | −0.87 | +0.01 | | 25.19 |
| 5092<br>5192 | 47 35 16.37<br>26 46 13.52 | 37 10 44.95 | +3 42.01 | −0.83 | +0.06 | | 26.19 |
| 5911<br>5922 | 48 23 22.47<br>26 13 41.36 | 37 18 31.92 | −4 5.71 | −0.45 | −0.07 | $+0''.02$ | 25.71 |
| 6453<br>6530 | 22 27 47.31<br>52 3 0.31 | 37 15 23.81 | −0 59.31 | +0.70 | −0.02 | +0.04 | 25.22 |
| | | | | | | Mittel: | $\varphi = 37^\circ\ 14'\ 25''.36$ |

**200.** Wie schon früher bemerkt wurde, muss, um den Einfluss der Fehler in den angenommenen Declinationen der Sterne thunlichst zu eliminiren, eine grössere Anzahl von Sternpaaren beobachtet werden, wobei im Allgemeinen auch jedes einzelne Sternpaar mehrmals beobachtet sein wird. Es handelt sich dann darum, aus der Gesammtheit der Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth der Polhöhe abzuleiten. Sind $m$ Sternpaare beobachtet, und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ die Mittel der aus den Beobachtungen jedes Sternpaares berechneten Werthe der Polhöhe, ferner $p_1, p_2 \ldots, p_m$ die Gewichte derselben, so ist der wahrscheinlichste Werth $\varphi_0$ der Polhöhe nach Gl. (19):

$$\varphi_0 = \frac{p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 + \cdots + p_m\varphi_m}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m} = \frac{[p\varphi]}{[p]},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieses Werthes zufolge der Glgn. (22), (23) und (24):

$$r_{\varphi_0} = \pm\, 0.6745 \sqrt{\frac{[pvv]}{(m-1)\,[p]}},$$

wenn mit $v$ die Abweichungen der einzelnen Werthe $\varphi_1$, $\varphi_2$, ... von $\varphi_0$ bezeichnet werden.

Die einfachste Annahme für die Gewichte $p$ ist, dieselben der Anzahl der Beobachtungen eines jeden Sternpaares gleich zu setzen. Diese Annahme beruht auf der Voraussetzung, dass nicht nur der zufällige Beobachtungsfehler für alle berechneten Werthe von $\varphi$ derselbe sei, was jedenfalls sehr nahe der Fall sein wird, sondern auch der wahrscheinliche Fehler der angenommenen Declinationen für alle beobachteten Sterne der gleiche sei. Letzteres wird im Allgemeinen nicht stattfinden. Bei der Schwierigkeit einer zuverlässigen Schätzung dieser Fehler wird jedoch durch eine Berücksichtigung derselben die Genauigkeit des Endresultates nicht merklich gewinnen.

Soll übrigens auf die wahrscheinlichen Fehler der Declinationen Rücksicht genommen werden, so bestimmen sich die Gewichte $p$ auf folgende Weise:

Bezeichnet man mit $e$ den aus dem Zusammenwirken aller zufälligen Fehlerquellen (Fehler in der Einstellung des Mikrometerfadens auf den Stern, in der Auffassung des Momentes der Culmination, in den Lesungen des Mikrometers und der Libelle, Aenderung in der Beziehung zwischen Libelle und Fernrohr zwischen den Beobachtungen beider Sterne) entspringenden wahrscheinlichen Beobachtungsfehler, mit welchem der aus einer Beobachtung eines Sternpaares abgeleitete Werth der Polhöhe behaftet ist, welcher Fehler offenbar den Gesammtfehler des auf das 1^te^ Glied $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$ folgenden Aggregates von Gliedern in Gl. (216) darstellt, so ist nach Gl. (26) $\frac{e}{\sqrt{n}}$ der hieraus entstehende Fehler des Mittels aus $n$ Beobachtungen desselben Sternpaares. Hiezu tritt nach der für alle $n$ Beobachtungen constante Fehler des Gliedes $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$. Bezeichnet man daher mit $\varepsilon_\delta$, $\varepsilon_{\delta'}$, die w. Fehler der Declinationen, mit $\varepsilon_\varphi$ den w. Fehler des Mittels aus $n$ Beobachtungen desselben Sternpaares, so ist zufolge Gl. (39):

$$\varepsilon_\varphi^2 = \tfrac{1}{4}(\varepsilon_\delta^2 + \varepsilon_{\delta'}^2) + \frac{e^2}{n}.$$

Da nun das Gewicht dem Quadrate des w. Fehlers umgekehrt proportional ist, so hat man:

$$p = \frac{1}{\frac{1}{4}(\varepsilon_\delta^2 + \varepsilon_{\delta'}^2) + \frac{e^2}{n}},$$

oder, da die Wahl der Gewichtseinheit willkürlich ist:

$$p = \frac{1}{\varepsilon_\delta^2 + \varepsilon_{\delta'}^2 + \frac{4e^2}{n}}.$$

Zu einer genäherten Kenntniss der Declinationsfehler $\varepsilon_\delta$ wird man gelangen können, wenn ein umfänglicheres Beobachtungsmaterial zur Schätzung des Grades der Genauigkeit der Sternpositionen in den verschiedenen benützten Sternkatalogen vorliegt.

Der Fehler $e$ aber ergibt sich aus den an einer Station angestellten Beobachtungen auf folgende Art: Seien $m$ Sternpaare beobachtet, und $n_1$, $n_2$, ..., $n_m$ die Anzahl der Beobachtungen des $1^{\text{ten}}$, $2^{\text{ten}}$, ..., $m^{\text{ten}}$ Paares; ferner $v_1$, $v_2$, ..., $v_m$ die Abweichungen der einzelnen Werthe von $\varphi$ von den für jedes Sternpaar sich ergebenden Mitteln $\varphi_1$, $\varphi_2$, ..., $\varphi_m$, so hat man, zufolge der Gl. (25):

$$(n_1 - 1)\, e^2 = q^2\, [v_1 v_1],$$
$$(n_2 - 1)\, e^2 = q^2\, [v_2 v_2],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n_m - 1)\, e^2 = q^2\, [v_m v_m],$$

wo $q = 0.6745$ den Factor zur Verwandlung der mittleren Fehler in wahrscheinliche bedeutet; durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$(n - m)\, e^2 = q^2\, [vv],$$

wo $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ die Gesammtzahl aller Beobachtungen, und $[vv] = [v_1 v_1] + [v_2 v_2] + \ldots + [v_m v_m]$ die Summe der Quadrate aller übrigbleibenden Fehler ist. Man hat daher:

$$e = 0.6745 \sqrt{\frac{[vv]}{n - m}}.$$

**201.** Zur Reduction der Beobachtungen wird, nebst dem Winkelwerthe $\mu$ eines Scalentheiles der Libelle, die Kenntniss des Winkelwerthes $R$ einer Umdrehung der Schraube des Mikrometers erfordert. Man bestimmt denselben am sichersten durch Beobachtung von Durchgängen eines dem Pole nahe stehenden Sternes, am zweckmässigsten des Polarsternes, zur Zeit der grössten Digression, wo bekanntlich die Bewegung des Sternes nahe in verticaler Richtung erfolgt.

Bezeichnet man Zenithdistanz und Stundenwinkel des Sternes zur Zeit der grössten Digression mit $z_0$ und $t_0$, so hat man [Glgn. (51) und (52)]:

$$\cos z_0 = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}, \quad \cos t_0 = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta},$$

ferner, wenn $u_0$ die Uhrzeit der grössten Digression:

$$u_0 = \alpha \pm t_0 - \Delta u,$$

wo das obere Zeichen für die westliche, das untere für die östliche Digression gilt und $\Delta u$ den Stand der Uhr gegen Sternzeit bedeutet.

Man stellt das Fernrohr auf die Zenithdistanz $z_0$, richtet dasselbe etwa $30^m$ vor der Zeit $u_0$ auf den Stern, indem man denselben nahe an den verticalen Mittelfaden bringt, klemmt das Instrument in dieser Stellung fest und bringt, im Falle grösserer Ausweichung der Blase, die Libelle nahe zum Einspielen. Hierauf stellt man den Mikrometer-Faden, ein wenig von dem Sterne in der Richtung seiner Bewegung, auf eine bestimmte Lesung, beobachtet die Uhrzeit $u$ des Durchganges des Sternes und notirt den Stand der Libelle. Auf gleiche Weise wird nun eine Reihe von Durchgängen beobachtet, indem man nach jedem derselben den Faden verstellt, am zweckmässigsten um denselben Betrag, z. B. eine halbe Umdrehung der Schraube, bis derselbe auf der anderen Seite des festen horizontalen Mittelfadens ungefähr in den gleichen Abstand von letzterem gelangt ist, welchen er bei dem ersten Durchgange hatte.

Es sei nun $m_0$ die unbekannte, der obigen Zenithdistanz $z_0$ zur Uhrzeit $u_0$ entsprechende Lesung des Mikrometers bei einspielender Libelle; $m$ die Lesung desselben bei irgend einem zur Uhrzeit $u$ beobachteten Durchgange, $z$ die correspondirende Zenithdistanz, $l$ die Ausweichung der Blase von der Mitte in Scalentheilen der Libelle, positiv, wenn die Blase gegen Nord ausweicht, $r$ die Refraction, so hat man, wenn die Mikrometer-Lesungen mit zunehmender Zenithdistanz abnehmen:

$$z = z_0 + (m_0 - m) R - \mu l + r; \tag{a}$$

für einen anderen Durchgang wird:

$$z' = z_0 + (m_0 - m') R - \mu l' + r', \tag{b}$$

und durch Subtraction beider Gleichungen kommt:

$$(m' - m) R = (z - z_0 + \mu l) - (z' - z_0 + \mu l') + (r' - r).$$

Bezeichnet man mit $\Delta r$ die Aenderung der Refraction bei der Zenithdistanz $z_0$ für 1′ Aenderung der Zenithdistanz, so ist $r' - r = (z' - z) \Delta r$, d. i. sehr nahe $= - (m' - m) R . \Delta r$, wo $R$ in Bogenminuten auszudrücken ist. Führt man diesen Werth von $r' - r$ in obige Gleichung ein und setzt, der Kürze wegen:

$$\Delta z = (z - z_0) + \mu l,$$
$$\Delta z' = (z' - z_0) + \mu l',$$

so erhält man:

$$R = \frac{\Delta z - \Delta z'}{m' - m} - R . \Delta r. \tag{221}$$

Das stets sehr kleine Glied $- R . \Delta r$, in welchem $R$ in Bogenminuten auszudrücken ist, gibt die Correction des ohne Berücksichtigung der Refraction berechneten Werthes von $R$, und da dasselbe von der Differenz der Zenithdistanzen $z$, $z'$ unabhängig ist, so genügt es, diese Correction an dem aus sämmtlichen Beobachtungen folgenden Mittelwerthe von $R$ anzubringen.

Es erübrigt noch die Berechnung der Differenzen $z - z_0$. Bezeichnet man den zur Zenithdistanz $z$ gehörigen Stundenwinkel mit $t$, das Azimuth, von Nord gezählt, mit $A$, so hat man [Gl. (26)]:

$$\cos\delta \cos t = \cos\varphi \cos z - \sin\varphi \sin z \cos A,$$
$$\cos\delta \sin t = \sin z \sin A.$$

Zur Zeit der grössten Digression geht das Dreieck zwischen Zenith, Pol und Stern in ein am Sterne rechtwinkeliges über und gibt, unter Anwendung der 6ten, dann der 3ten und 4ten der Formeln (18):

$$\cos t_0 = \cos z_0 \sin A_0$$
$$\sin t_0 = \frac{\sin z_0}{\cos\varphi} = \frac{\cos z_0 \cos A_0}{\sin\varphi}.$$

Durch Multiplication je zweier dieser Gleichungen erhält man nun:

$$\cos\delta \sin t_0 \cos t = \sin z_0 \cos z - \cos z_0 \sin z \cos A \cos A_0,$$
$$\cos\delta \cos t_0 \sin t = \cos z_0 \sin z \sin A \sin A_0,$$

und hieraus durch Subtraction:

$$\begin{aligned}\cos\delta \sin(t - t_0) &= -\sin z_0 \cos z + \cos z_0 \sin z \cos(A - A_0), \\ &= \sin(z - z_0) - 2\cos z_0 \sin z \sin\tfrac{1}{2}(A - A_0)^2.\end{aligned}$$

Für den Polarstern und für $z - z_0 = 15'$ erreicht das letzte Glied noch nicht eine Einheit der 7ten Decimalstelle und kann daher stets vernachlässiget werden, wodurch

$$\sin(z - z_0) = \sin(t - t_0)\cos\delta$$

wird. Es ist aber $(t - t_0) =$ der Differenz der Uhrzeiten $(u - u_0)$ in Sternzeit ausgedrückt; man hat daher, $z - z_0$ in Bogensecunden ausdrückend:

$$z - z_0 = \pm \sin(u - u_0)\frac{\cos\delta}{\sin 1''}, \tag{222}$$

wo das obere Zeichen für westliche, das untere für östliche Digression gilt.

Beispiel. Zur Bestimmung des Mikrometerwerthes des zu den im vorhergehenden §. angeführten Beobachtungen auf der Station Roslyn benützten Zenithteleskops wurden an demselben Orte am 30. Juni 1852 bei einer Temperatur von $76^0.5$ Fahr. Durchgänge des Polarsternes in der östlichen Digression beobachtet. Der Stand der Uhr war $\Delta u = -24^m\ 46^s.8$; der Werth eines Niveautheiles $\mu = 1''.65$.

Mit den Werthen:

$\varphi = 37^0\ 14'\ 25''$, $\delta = 88^0\ 30'\ 56''$, $\alpha = 1^h\ 5^m\ 36^s.8$

findet man zunächst:

$$z_0 = 52^0\ 44'\ 42'',\quad t_0 = 5\ \ 55\ \ 29.1$$
$$\alpha - t_0 = 19\ \ 10\ \ \ 7.7$$
$$\Delta u = -\ \ 24\ \ 46.8$$
$$u_0 = 19\ \ 34\ \ 54.5$$

Der Mikrometerfaden wurde nach jedem Durchgange um eine halbe Schraubenumdrehung verstellt und wurden 59 Durchgänge beobachtet, von welchen im Folgenden 14 nach je zwei Umdrehungen beobachtete beispielsweise ausgezogen sind.

| No. der Beob. | Mikr. $m$ | Libelle N | Libelle S | $l$ | $u$ | $u-u_0$ | $z-z_0$ | $\mu l$ | $z-z_0+\mu l$ $=\Delta z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | R | | | | h m s | m s | ″ | ″ | ″ |
| 1 | 6 | 42.2 | 44.8 | — 1.30 | 19 11 39.0 | —23 15.5 | + 541.33 | — 2.15 | + 539.18 |
| 2 | 8 | „ | „ | „ | 15 14.2 | 19 40.3 | 458.10 | — 2.15 | 455.95 |
| 3 | 10 | „ | „ | „ | 18 46.8 | 16 7.7 | 375.73 | — 2.15 | 373.58 |
| 4 | 12 | „ | „ | „ | 22 23.4 | 12 31.1 | 291.71 | — 2.15 | 289.56 |
| 5 | 14 | 42.5 | 44.2 | — 0.85 | 25 58.8 | 8 55.7 | 208.12 | — 1.40 | 206.72 |
| 6 | 16 | „ | „ | „ | 29 29.4 | 5 25.1 | 126.30 | — 1.40 | 124.90 |
| 7 | 18 | „ | „ | „ | 33 4.4 | — 1 50.1 | + 42.77 | — 1.40 | + 41.37 |
| 8 | 20 | 42.6 | 44.2 | — 0.80 | 36 36.4 | + 1 41.9 | — 39.61 | — 1.32 | — 40.93 |
| 9 | 22 | „ | „ | „ | 40 11.6 | 5 17.1 | 123.20 | — 1.32 | 124.52 |
| 10 | 24 | 42.7 | 44.2 | — 0.75 | 43 43.3 | 8 48.8 | 205.43 | — 1.24 | 206.67 |
| 11 | 26 | „ | „ | „ | 47 15.0 | 12 20.5 | 287.62 | — 1.24 | 288.86 |
| 12 | 28 | 41.9 | 45.1 | — 1.60 | 50 46.7 | 15 52.2 | 369.72 | — 2.64 | 372.36 |
| 13 | 30 | „ | „ | „ | 54 19.3 | 19 24.8 | 452.08 | — 2.64 | 454.72 |
| 14 | 32 | „ | „ | „ | 57 52.8 | +22 58.3 | — 534.70 | — 2.64 | — 537.34 |

Verbindet man nun durch Subtraction die Werthe von $\Delta z$ und $m$, welche der 1ten und 8ten, der 2ten und 9ten etc. Beobachtung entsprechen, so erhält man:

| Beob. | $\Delta z - \Delta z'$ | $m' - m$ | $R$ | $v$ | $v^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 und 8 | 580″.11 | 14 | 41″.436 | + 0.042 | 0.0018 |
| 2 „ 9 | 580 .47 | „ | 462 | + 0.068 | 0046 |
| 3 „ 10 | 580 .25 | „ | 446 | + 0.052 | 0027 |
| 4 „ 11 | 578 .42 | „ | 316 | — 0.078 | 0060 |
| 5 „ 12 | 579 .08 | „ | 363 | — 0.031 | 0010 |
| 6 „ 13 | 579 .62 | „ | 401 | + 0.007 | 0000 |
| 7 „ 14 | 578 .71 | „ | 336 | — 0.058 | 0.0034 |
| | | | Mittel = 41″.394 | | $[vv]$ = 0.0195 |

$$\text{Wahrsch. Fehler des Mittels} = 0.6745 \sqrt{\frac{0.0195}{6 \times 7}} = \pm\, 0''.014.$$

Die Aenderung der Refraction für 1′ Aenderung Zenithdistanz bei $z_0 = 52^0\ 45'$ ist $\Delta r = 0''.046$, daher die Correction des obigen Mittels $= -\,0''.046 \,.\, \frac{41.4}{60} = -\,0''.032$; das Resultat dieser Beobachtungen ist daher:

$$R = 41''.362 \pm 0''.014.$$

Strenger ist die Behandlung der Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Es besteht, mit Weglassung der Refraction, für jede Beobachtung die Gleichung:

$$z = z_0 + (m_0 - m)\, R - \mu l,$$

in welcher $m_0$ die unbekannte, der Zenithdistanz $z_0$ entsprechende Lesung bedeutet. Setzt man nun, unter $M_0$ und $R_0$ genäherte Werthe von $m_0$ und $R$ verstanden:

$$m_0 = M_0 + x, \quad R = R_0 + y,$$

so erhält man:

$$z = z_0 + (M_0 + x - m)(R_0 + y) - \mu l,$$

oder, mit Vernachlässigung des bei geeigneter Wahl von $M_0$ und $R_0$ unmerklichen Productes $xy$:

$$R_0 x + (M_0 - m) y = n, \tag{223}$$

wo

$$n = z - z_0 + \mu l - (M_0 - m) R_0 \tag{224}$$

eine bekannte Grösse ist. Jede Beobachtung liefert eine solche Gleichung, aus deren Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von $x$ und $y$ hervorgehen.

In obigem Beispiele erkennt man sofort aus der nahen Gleichheit der den Lesungen $m = 18$ und 20 entsprechenden Werthe von $\Delta z$, dass $M_0 = 19$ ein sehr genäherter Werth von $m_0$ ist, und findet durch Combination zweier beliebigen Beobachtungen nach (221) leicht $R_0 = 41''.4$ als genäherten Werth von $R$. Hiemit erhält man die Bedingungsgleichungen (223):

$$\begin{array}{ll}
41.4x + 13y = +0''.98 & 41.4x - \phantom{1}y = +0''.47 \\
41.4x + 11y = +0\ .55 & 41.4x - \phantom{1}3y = -0\ .32 \\
41.4x + \phantom{1}9y = +0\ .98 & 41.4x - \phantom{1}5y = +0\ .33 \\
41.4x + \phantom{1}7y = -0\ .24 & 41.4x - \phantom{1}7y = +0\ .94 \\
41.4x + \phantom{1}5y = -0\ .28 & 41.4x - \phantom{1}9y = +0\ .24 \\
41.4x + \phantom{1}3y = +0\ .70 & 41.4x - 11y = +0\ .68 \\
41.4x + \phantom{1}y = -0\ .03 & 41.4x - 13y = +0\ .86
\end{array}$$

und aus diesen die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 23995.44x &= +242.60, \\ 910y &= -\phantom{24}1.96, \end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$\begin{array}{ll} x = +0.010, & y = -0.002, \\ m_0 = \phantom{+}19.010. & R = \phantom{-}41.398. \end{array}$$

Durch Substitution der Werthe von $x$ und $y$ in die Bedingungsgleichungen erhalten wir die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler $= 2.891$; hiemit wird der mittlere Fehler einer Gleichung

$$= \sqrt{\frac{2.891}{14-2}} = \pm 0''.485,$$

folglich, da nach Gl. (88) 910 das Gewicht von $y$ ist, der wahrscheinliche Fehler von $y$ oder $R$:

$$= 0.6745 \frac{0.485}{\sqrt{910}} = \pm\ 0.''011.$$

Bringt man endlich an obigem Werthe von $R$ noch die Correction wegen Refraction, $= -\ 0''.032$ an, so hat man:

$$R = 41''.366 \pm 0''.011.$$

Der kleinere wahrscheinliche Fehler zeigt, dass, wie vorauszusehen, dieser nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete Werth von $R$ die Beobachtungen besser darstellt, als der oben durch Combination je zweier Beobachtungen gefundene.

**202.** Auch der Winkelwerth $\mu$ eines Scalentheiles der Libelle kann mit Hilfe des Schraubenmikrometers bestimmt werden, mit Vortheil namentlich dann, wenn, wie bei dem Zenithteleskope oder einem zur Ausführung der Talcott'schen Methode eingerichteten Passagen-Instrumente, die Libelle mit dem Fernrohre verbunden ist. Man erhält dadurch zunächst den Winkelwerth der Libelle ausgedrückt in Theilen einer Schraubenumdrehung $R$, in der Form:

$$\mu = \lambda R; \tag{225}$$

dies ist genügend, um $R$ nach der im vorhergehenden §. dargestellten Methode, in Bogensecunden ausgedrückt, zu bestimmen, wornach, sobald $\lambda$ bekannt, auch $\mu$ in Bogensecunden erhalten wird.

Behufs Bestimmung von $\lambda$ richte man das Fernrohr auf ein scharf begrenztes irdisches Object, am besten das Fadenkreuz eines Collimator-Fernrohres, bringe die Blase in die Nähe des einen Endes der Röhre, und stelle hierauf den Mikrometerfaden scharf auf das Object ein: die Lesung des Mikrometers sei $m$, die Ausweichung der Blase von der Mitte $= l$. Hierauf bringe man die Blase mittelst der Schraube, durch welche dem Fernrohre sammt der Libelle eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt wird, in die Nähe des anderen Endes der Röhre und stelle wieder den Faden auf das Object ein; die Lesung des Mikrometers sei $m'$, die Ausweichung der Blase $= l'$. Dann ist $\mu\,(l - l') = \lambda R\,(l - l')$ die Winkelbewegung der Libelle, $R\,(m' - m)$ jene des Fernrohres, folglich, da diese beiden Bewegungen gleich sein müssen, wenn die Stellung der Libelle gegen das Fernrohr unverändert geblieben ist:

$$\lambda = \frac{m' - m}{l - l'}. \tag{226}$$

B e i s p i e l. Mit demselben Zenithteleskop, auf welches sich die im vorhergehenden §. angeführten Beobachtungen beziehen, wurden 1852, Juni 30, auf der Station Roslyn, zur Bestimmung des Werthes eines Niveautheiles, 21 Beobachtungen bei einer Temperatur von 90° Fahr. gemacht, von welchen die folgenden einen Theil bilden.

| No. der Beob. | Lesungen d. Mikr. $m$ $m'$ | d. Libelle N | S | $2l$ $2l'$ | Differenzen $m'-m$ | $l-l'$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | R | | | | | | |
| 1 | 19.41 | 54.0 | 11.4 | + 42.6 | | | |
| | 21.06 | 11.2 | 53.9 | — 42.7 | 1.65 | 42.65 | 0.03869 |
| 2 | 21.11 | 56.1 | 8.2 | + 47.9 | | | |
| | 22.96 | 10.5 | 54.0 | — 43.5 | 1.85 | 45.70 | 0.04048 |
| 3 | 23.05 | 55.5 | 8.8 | + 46.7 | | | |
| | 25.06 | 5.2 | 59.0 | — 53.8 | 2.01 | 50.25 | 0.04000 |
| 4 | 25.17 | 55.0 | 9.1 | + 45.9 | | | |
| | 27.04 | 8.8 | 55.2 | — 46.4 | 1.87 | 46.15 | 0.04052 |
| 5 | 27.09 | 59.0 | 4.8 | + 54.2 | | | |
| | 29.15 | 9.0 | 54.7 | — 45.7 | 2.06 | 49.95 | 0.04124 |
| 6 | 29.19 | 56.0 | 7.8 | + 48.2 | | | |
| | 31.15 | 9.2 | 54 4 | — 45.2 | 1,96 | 46.70 | 0.04197 |
| 7 | 11.76 | 58.2 | 5.8 | + 52.4 | | | |
| | 13.90 | 5.5 | 58.5 | — 53.0 | 2.14 | 52.70 | 0.04061 |
| 8 | 13.96 | 59.6 | 5.0 | + 54.6 | | | |
| | 16.17 | 4.5 | 60.1 | — 55.6 | 2.21 | 55.10 | 0.04011 |
| | | | | | | Mittel: | $\lambda = 0.04045$ |

Durch Vergleichung der Einzelwerthe von $\lambda$ mit dem Mittel findet man die übrigbleibenden Fehler, aus deren Quadratsumme $= 0.00000638$ sich der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung von $\lambda$ mit $\pm$ 0.00023 ergibt. Es folgt daher aus diesen Beobachtungen:

$$\lambda = 0.04045 \pm 0.00023$$

und
$$\mu = 0.04045\, R \pm 0.00023\, R. \tag{c}$$

Ist auf diese Art der Winkelwerth eines Niveautheiles, in Theilen von $R$ ausgedrückt, bekannt geworden, so kann die Bestimmung von $R$ nach dem in §. 201 dargestellten Verfahren vorgenommen werden, wobei nur an die Stelle der Gl. (221) die folgende:

$$R = \frac{(z - z_0) - (z' - z_0)}{m' - m + \lambda(l' - l)} \tag{227}$$

tritt, welche sich durch Subtraction der Glgn. ($a$) und ($b$) ergibt, wenn man $\mu = \lambda R$ setzt, und vorläufig die Refraction weglässt, deren Einfluss wieder, wie dort, erst an dem aus sämmtlichen Beobachtungen folgenden Mittelwerthe von $R$ angebracht wird. Will man aber die Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen, so bleiben die Glgn. (223) und (224) unverändert, nur ist in letzteren $\lambda R_0$ an die Stelle von $\mu$ zu setzen. Die auf diese Art mit dem Werthe $\lambda = 0.04045$ durchgeführte Berechnung von $R$ führt selbstverständlich wieder zu dem bereits oben erhaltenen Werthe von $R = 41''.366$, und mit diesem ergibt sich dann nach Gl. ($c$) der Werth eines Niveautheiles $\mu = \lambda R = 1''.673$. Die sämmtlichen zur Bestimmung von $\lambda$ und $R$ auf Station Roslyn gemachten Beobachtungen ergaben:

$$\lambda = 0.03985 \pm 0.00013, \quad R = 41''.400 \pm 0''.011,$$

aus welchen der an früherer Stelle angewendete Werth $\mu = 1''.650$ folgt.

### 3. Bestimmung der Polhöhe aus beobachteten Durchgängen von Sternen durch den ersten Vertical.

**203.** Beobachtet man die Zeit des Durchganges eines Sternes, dessen Rectascension $\alpha$ und Declination $\delta$ bekannt sind, durch einen bestimmten Vertical, dessen Azimuth $A$ bekannt ist, so kann die Polhöhe $\varphi$ mittelst der Gl. (22):

$$\sin\varphi \cos t - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta = \operatorname{cotg} A \sin t \tag{$a$}$$

berechnet werden, wenn man noch den Stand der Uhr $\Delta u$ gegen Sternzeit kennt, womit sich der Stundenwinkel $t$ aus der beobachteten Uhrzeit $u$ mittelst der Gleichung $t = u + \Delta u - \alpha$ ergibt.

Durch Differenziation der obigen Gleichung erhält man:

$$d\varphi = \frac{\cos\delta \cos q}{\sin A \cos z}\, dt - \frac{\operatorname{tg} z}{\sin A}\, dA + \frac{\sin q}{\sin A \cos z}\, d\delta,$$

wo $z$ die Zenithdistanz und $q$ den parallaktischen Winkel des Sternes zur Zeit der Beobachtung bedeuten.

Wie man sieht, werden die Coefficienten von $dt$ und $dA$ um so kleiner, je näher $A$ an $\pm 90^0$ liegt und je kleiner die Zenithdistanz $z$ ist, weil, für $A = \pm 90^0$, $\sin A$ im Nenner seinen grössten Zahlenwerth $= 1$ erreicht, und in diesem Falle auch der Zähler des Coefficienten von $dt$, welcher (s. §. 17) in der Form:

$$\cos\delta \cos q = \sin\varphi \sin z + \cos\varphi \cos z \cos A$$

geschrieben werden kann, klein wird.

Es ist also am vortheilhaftesten, den Stern im ersten Vertical zu beobachten, daher $\delta < \varphi$ sein muss, und, damit die Zenithdistanz klein werde, Sterne zu wählen, für welche $\varphi - \delta$, d. i. die Meridian-Zenithdistanz klein ist.

Der Coefficient von $d\delta$ kann, da allgemein $\cos\delta \sin q = \cos\varphi \sin A$, auch in der Form: $\dfrac{\cos\varphi}{\cos\delta \cos z}$ geschrieben werden und wird im ersten Vertical, wo nach Gl. (46) $\cos z = \dfrac{\sin\delta}{\sin\varphi}$ ist, gleich $\dfrac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta}$; derselbe bleibt daher, wenn $\varphi - \delta$ klein ist, stets nahe $= 1$ und ein Fehler in $\delta$ geht, so wie bei den in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Methoden zur Be-