Wir erhalten somit aus den Beobachtungen

$$\text{bei K. W.: } x = +\,40^s.42 - 2^s.073\, c,$$
$$\text{„ K. O.: } x = +\,41\,.68 + 2\,.082\, c,$$

und durch Subtraction beider Gleichungen: $0 = 1^s.26 + 4.155\, c$, woraus $c = -\,0^s.303$ folgt, welcher Werth, in obige Gleichungen substituirt, den Uhrstand:

$$x = +\,41^s.05 \text{ um } 18^h.0 \text{ Uhrzeit}$$

ergibt.

Sind die Declinationen, also auch die Zenithdistanzen beider Zeitsterne nahe gleich, wie im vorliegenden Beispiele, so erhalten auch die Coefficienten von c nahe denselben Werth, und es ist dann, wenn c klein, das einfache Mittel aus den für beide Kreislagen gefundenen Uhrständen der vom Collimationsfehler befreite Werth des Uhrstandes.

6. Zeitbestimmung mit dem Universal-Instrumente aus beobachteten Azimuthal-Differenzen zweier Sterne.

182. Beobachtet man die Uhrzeit, zu welcher sich ein Stern in einem bekannten Azimuthe befindet, so kann aus dem Dreiecke zwischen Zenith, Pol und Stern mit der Polhöhe, der Declination und dem Azimuthe des Sternes der Stundenwinkel desselben berechnet werden, welcher sodann mit Zuziehung der Rectascension des Sternes und der beobachteten Uhrzeit auf bekannte Weise den Uhrstand gibt.

Zur Berechnung des Stundenwinkels kann man sich der Gleichung (22):

$$\sin\varphi \cos t - \operatorname{cotg} A \sin t = \operatorname{tg}\delta \cos\varphi$$

bedienen, welche sich durch Einführung der mittelst der Gleichungen:

$$g \sin G = \sin\varphi, \quad g \cos G = \operatorname{cotg} A$$

bestimmten Hilfsgrössen g und G in folgende:

$$\sin(G - t) = \frac{\cos\varphi \operatorname{tg}\delta}{g}$$

verwandelt. Auch kann man statt diesen Gleichungen die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} G &= \sin\varphi \operatorname{tg} A, \\ \sin(G - t) &= \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} A \cos G = \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{tg}\delta \sin G \end{aligned}\right\} \quad (197)$$

anwenden. Der Uhrstand x ergibt sich dann mittelst der Gleichung:

$$x = \alpha + t - u,$$

wo α die Rectascension des Sternes, u die beobachtete Uhrzeit bedeutet.

Durch Differenziation der Gl. (22) erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$dt = \frac{dA}{\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{tg} h \cos A} + \frac{\sin h \operatorname{tg} q}{\cos\varphi}\, d\varphi - \frac{\operatorname{tg} q}{\cos\delta}\, d\delta,$$

wo h die Höhe des Sternes, q den parallaktischen Winkel bedeutet. Man erkennt hieraus, dass ein Fehler dA im angenommenen Azimuth A einen um so kleineren Einfluss auf den berechneten Stundenwinkel hat, je kleiner das Azimuth und je grösser die Höhe des beobachteten Sternes ist; auch der Einfluss eines Fehlers in der Polhöhe und der Declination wird um so geringer, je näher am Meridiane der Stern beobachtet wird.

183. Am einfachsten würde sich das Azimuth A des beobachteten Sternes ergeben, wenn jenes eines irdischen Objectes genau bekannt wäre. Stellt man den verticalen Mittelfaden des Fernrohres des Universal-Instrumentes auf das Object ein, und bezeichnet mit M' die Ablesung des Horizontalkreises, mit A' das bekannte Azimuth des Objectes, von Süd über West gezählt, mit M_0 aber die Ablesung des Kreises, wenn die Absehenlinie des Fernrohres nach dem Südpuncte gerichtet ist (den sogenannten Meridianpunct oder Ort des Meridians am Kreise), so ist, in der Voraussetzung, dass die Lesung am Kreise zunimmt, wenn das Fernrohr in der Richtung von Süd gegen West gedreht wird:

$$M_0 = M' - A', \tag{198}$$

wo M' um 360^0 zu vermehren ist, wenn $M' < A'$.

Ist nun A das Azimuth des beobachteten Sternes im Augenblicke seines Durchganges durch den Mittelfaden, M die Ablesung des Kreises, so hat man wieder: $M_0 = M - A$, somit

$$A = M - M_0, \tag{199}$$

oder, durch Verbindung beider Gleichungen:

$$A = A' + (M - M').$$

In Ermangelung eines irdischen Objectes von genau bekanntem Azimuth beobachtet man statt dessen in gleicher Weise einen Polstern, am zweckmässigsten den Polarstern, und berechnet dessen Azimuth A', von Süd über West gezählt, aus der Formel:

$$\operatorname{tg} A' = \frac{\sin t'}{\sin\varphi \cos t' - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta'}, \tag{200}$$

wobei der Stundenwinkel t' aus der beobachteten Uhrzeit des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden mit Zuziehung der Rectascension desselben und eines angenommenen genäherten Uhrstandes x_0 abgeleitet wird. Da der Polarstern sein Azimuth nur sehr langsam ändert, so wird auch ein erheblicherer Fehler in dem angenommenen Uhrstande x_0 einen nur geringen Einfluss auf das berechnete Azimuth A' und die daraus abgeleiteten Grössen: M_0, A und x haben. Im Falle einer grösseren Abweichung des berechneten Uhrstandes x von dem angenommenen x_0 wird man entweder die Rechnung wiederholen, nunmehr von x, als genähertem Werthe ausgehend, oder man kann auch, wenn die Differenz $x - x_0$ nicht zu gross ist, die correspondirende Verbesserung von x auf folgende Weise finden. Durch die Aenderung $= x - x_0$ des angenommenen Uhrstandes wird der Stundenwinkel t' des Polsternes um den gleichen Betrag, somit das berechnete Azimuth A' desselben um $dA' = \frac{dA'}{dt'}(x - x_0)$ geändert, wodurch auch das Azimuth A des Zeitsternes eine gleiche Aenderung $dA = dA'$ erfährt, welcher wieder die Aenderung $dt = \frac{dt}{dA} \cdot dA'$ des Stundenwinkels des Zeitsternes, und endlich dieser die Aenderung $dx = dt$ des Uhrstandes x entspricht. Hiernach wird:

$$dx = \frac{dt}{dA} \cdot \frac{dA'}{dt'}(x - x_0),$$

oder, mit Rücksicht auf Gl. (50):

$$dx = \frac{\sin z \ \cos\delta' \ \cos q'}{\sin z' \ \cos\delta \ \cos q}(x - x_0), \tag{201}$$

und der verbesserte Uhrstand $= x + dx$. In diesem Ausdrucke beziehen sich die accentuirten Buchstaben auf den Polstern und bedeuten q, q' die parallaktischen Winkel, welche mittelst der Formel:

$$\sin q = \frac{\cos\varphi \ \sin A}{\cos\delta} = \frac{\cos\varphi \ \sin t}{\sin z}$$

leicht erhalten werden. Hiebei ist $\cos q$ stets positiv, das Zeichen von $\cos q'$ jedoch nach der in der Anmerkung, Seite 401, gegebenen Regel zu bestimmen. Für den nahe am Meridian beobachteten Zeitstern kann übrigens $\cos q = 1$ gesetzt werden.

Die Beobachtungen beider Sterne sind, mit jener des Zeitsternes beginnend, symmetrisch in beiden Kreislagen anzustellen und die Ablesungen M, M' des Horizontalkreises wegen der Neigung der horizontalen Drehungsaxe des Fernrohrs zu verbessern. Nimmt man die Neigung $= i$ positiv, wenn das linke Axenende das höhere, so ist diese Verbesserung der Lesung $= + i \operatorname{cotg} z$ (§. 121), wenn bei einer Drehung des Fernrohrs von links nach rechts die Lesung am Kreise zunimmt. Von dem Einflusse des Collimationsfehlers wird das Mittel aus den für beide Kreislagen abgeleiteten Uhrständen frei sein, wenn dieser Fehler klein ist, die Beobachtungen des Polsternes rasch aufeinanderfolgen und jene des Zeitsternes in der Nähe des Meridians stattfinden, weil in diesem Falle die Aenderungen der Zenithdistanzen der Sterne so klein sein werden, dass das Product $c \operatorname{cosec} z$ [§. 121, a] in beiden Kreislagen denselben Zahlenwerth erhält.

184. Beispiel. Auf der astronomisch-trigonometrischen Station Wetrnik des Dreiecksnetzes in Böhmen wurden 1865, August 10, mit einem Universal-Instrumente mit zwölfzölligem Horizontalkreise folgende Beobachtungen gemacht:

Kreislage	Stern	Uhr	Mikroskop I	Mikroskop II	Libelle links	Libelle rechts
K. R.	α *Herculis*	$16^h\ 44^m\ 59^s.9$	169° 40′ 59″.3	40′ 56″.9	20.6	20.9
	"	47 48 .2	170 51 58 .7	51 53 .9	19.9	21.8
	"	50 11 .7	171 52 31 .4	52 25 .9		
	Polaris	16 53 43 .0	1 44 51 .8	44 52 .3	21.7	20.3
	"	56 15 .0	1 45 40 .9	45 41 .2	22.0	20.1
K. L.	*Polaris*	17 0 1 .0	181 47 5 .7	47 0 .3	22.4	19.8
	"	2 26 .0	181 47 47 .4	47 42 .6	23.2	18.9
	α *Herculis*	17 6 55 .9	359 0 21 .7	0 21 .9		
	"	9 26 .6	0 4 42 .0	4 43 .0	21.4	20.8
	"	17 12 11 .9	1 15 27 .4	15 29 .0	21.1	21.0

Polhöhe $\varphi = 49^\circ\ 1'\ 16''.5$. Die scheinbaren Oerter der Sterne waren:

α *Herculis*: $\alpha = 17^h\ 8^m\ 32^s.41, \quad \delta = 14^\circ\ 33'\ 3''.59$

Polaris: $\alpha' = 1\ 10\ 39.26, \quad \delta' = 88\ 35\ 18.05.$

Der Werth eines Niveautheiles $= 1''.89$; hiemit ergeben sich aus den vier Nivellements die folgenden Neigungen der Axe, welchen die Zenithdistanzen der Sterne, für das genäherte Mittel der Zeiten den zur Einstellung dienenden Ephemeriden entnommen, so wie die Correctionen $+\, i \operatorname{cotg} z$ der Lesungen des Horizontalkreises beigefügt sind:

		i	z	$i \operatorname{cotg} z$
K. R.	α *Herculis*	$-\ 1''.04$	34° 45′	$-\ 1''.50$
"	*Polaris*	$+\ 1.56$	41 46	$+\ 1.75$
K. L.	"	$+\ 3.26$		$+\ 3.65$
"	α *Herculis*	$+\ 0.33$	34 28	$+\ 0.48$

Mit dem angenommenen Uhrstande $x_0 = -\ 32^s.74$ berechnen wir zunächst die den vier Einstellungen entsprechenden Azimuthe des Polarsternes nach Gl. (200), und mittelst dieser und der Ablesungen des Kreises den Ort des Meridians am Kreise in beiden Kreislagen:

	K. R.		K. L.	
t'	$15^h\ 42^m\ 31^s.0$	$15^h\ 45^m\ 3^s.0$	$15^h\ 48^m\ 49^s.0$	$15^h\ 51^m\ 14^s.0$
	235° 37′ 45″.0	236° 15′ 45″.0	237° 12′ 15″.0	237° 48′ 30″.0
$\log \cos t'$	$9.751700\,n$	$9.744597\,n$	$9.733717\,n$	$9.726526\,n$
$\log \sin\varphi \cos t'$	$9.629620\,n$	$9.622517\,n$	$9.611637\,n$	$9.604446\,n$
Num.	$-\ 0.426206$	$-\ 0.419292$	$-\ 0.408919$	$-\ 0.402204$
Nenner	$-\ 27.03739$	$-\ 27.03047$	$-\ 27.02010$	$-\ 27.01338$
log Nenner	$1.431966\,n$	$1.431854\,n$	$1.431687\,n$	$1.431579\,n$
$\log \sin t'$	$9.916665\,n$	$9.919910\,n$	$9.924592\,n$	$9.927509\,n$
$\log \operatorname{tg} A'$	8.484699	8.488056	8.492905	8.495930
A'	181° 44′ 54″.91	181° 45′ 43″.72	181° 46′ 54″.90	181° 47′ 39″.72
Kreis	1 44 52 .05	1 45 41 .05	181 47 3 .00	181 47 45 .00
$i \operatorname{cotg} z$	$+\ 1.75$	$+\ 1.75$	$+\ 3.65$	$+\ 3.65$
M'	1 44 53 .80	1 45 42 .80	181 47 6 .65	181 47 48 .65
$M' - A' = M_0$	179 59 58 .89	179 59 59 .08	0 0 11 .75	0 0 8 .93
Mittel M_0	179° 59′ 58″.98		0° 0′ 10″.34	

Durch Verbindung der Ablesungen des Kreises bei den sechs Beobachtungen des Zeitsternes mit dem Meridianpuncte M_0 ergeben sich nun die correspondirenden Azimuthe dieses Sternes, aus welchen man mittelst der Glgn. (197) die Stundenwinkel findet, deren jeder einen Werth des Uhrstandes gibt:

	K. R.			K. L.		
Kreis	169° 40′ 58″.10	170° 51′ 56″.30	171° 52′ 28″.65	359° 0′ 21″.80	0° 4′ 42″.50	1° 15′ 28″.20
i cotg z	— 1.50	— 1.50	— 1.50	+ 0.48	+ 0.48	+ 0.48
M	169 40 56.60	170 51 54.80	171 52 27.15	359 0 22.28	0 4 42.98	1 15 28.68
$M - M_0 = A$	-10 19 2.38	—9 8 4.18	—8 7 31.83	—0 59 48.06	+0 4 32.64	+1 15 18.34
log tg A	9.260175 n	9.206264 n	9.154654 n	8.240478 n	7.121165	8.340624
log tg G	9.138095 n	9.084184 n	9.032574 n	8.118398 n	6.999085	8.218544
G	—7° 49′ 31″.35	—6° 55′ 16″.65	—6° 9′ 7″.53	—0° 45′ 8″.93	+0° 3′ 25″.83	+0° 56′ 51″.38
log cos G	9.995937	9.996824	9.997491	9.999963	0.000000	9.999941
log sin $(G-t)$	8.487119 n	8.434095 n	8.383152 n	7.471448 n	6.352172	7.571572
$G-t$	—1° 45′ 33″.04	—1° 33′ 24″.96	—1° 23′ 4″.47	—0° 10′ 10″.76	+0° 0′ 46″.41	+0° 12′ 49″.13
t	—6 3 58.31	—5 21 51.69	—4 46 3.06	—0 34 58.17	+0 2 39.42	+0 44 2.25
t	—0ʰ 24ᵐ 15ˢ.89	—0ʰ 21ᵐ 27ˢ.45	—0ʰ 19ᵐ 4ˢ.20	—0ʰ 2ᵐ 19ˢ.88	+0ʰ 0ᵐ 10ˢ.63	+0ʰ 2ᵐ 56ˢ.15
$\alpha + t$	16 44 16.52	16 47 4.96	16 49 28.21	17 6 12,53	17 8 43.04	17 11 28.56
x	— 43.38	— 43.24	— 43.49	— 43.37	—43.56	— 43.34

Hiernach folgt der Uhrstand, im Mittel aus den drei Beobachtungen in jeder Kreislage:

$$\begin{aligned} \text{bei K. R. } x &= -\ 43^s.37 \\ \text{„ K. L. } x &= -\ 43\ .42 \\ \hline \text{Mittel: } x &= -\ 43\ .40. \end{aligned}$$

Der Unterschied gegen den angenommenen Uhrstand ist: $x - x_0 =$ — $10^s.67$. Um die Correction dx zu finden, genügt es, den parallaktischen Winkel q' des Polarsternes mit dem Mittelwerthe $A' = 181^0\ 46'\ 20''$ zu berechnen und für den Zeitstern im Mittel $z = 34^0\ 36'$ und $q = 0$ anzunehmen. Man findet:

$\log \sin A' = 8.4903$	$\log \sin z = 9.7542$	$\log \sin z' = 9.8235$
$\log \cos \varphi = 9.8167$	$\log \cos \delta' = 8.3916$	$\log \cos \delta = 9.9858$
$\log \sec \delta' = 1.6084$	$\log \cos q' = 9.7544$	9.8093
$\log \sin q' = 9.9154$	7.9002	
$q' = 55^0\ 23'$	9.8093	
	8.0909	
	$\log (x - x_0) = 1.0282$	
	$\log dx = 9.1191$	$dx = -\ 0^s.13$.

Es ist somit der verbesserte Uhrstand $= x + dx =$ — $43^s.53$, giltig für $16^h\ 58^m$ Uhrzeit. Eine Wiederholung der Rechnung, indem man von letzterem Werthe als genähertem Uhrstande ausgeht, würde wieder zu demselben Werthe führen.

Diese Methode der Zeitbestimmung wird bei geodätischen Operationen auf Dreieckspunkten, wo Polhöhe und Azimuth einer Richtung zu bestimmen sind, mit Vortheil angewendet, weil sie wenig Zeit erfordert, mit Ausnahme der Mittagsstunden zu gelegenen, durch andere Beobachtungen nicht in Anspruch genommenen Zeit ausgeführt werden kann und dabei eine völlig genügende Schärfe gewährt. Auch kann die Zeitbestimmung nach diesem Verfahren mit Vortheil mit der Messung des Azimuthes eines irdischen Objectes verbunden werden.

ACHTES CAPITEL.

BESTIMMUNG DER POLHÖHE.

1. Aus beobachteten Zenithdistanzen.

185. Beobachtet man die Zenithdistanz z eines Gestirnes, dessen Rectascension α und Declination δ bekannt sind, zur Uhrzeit u und kennt man den Stand Δu der Uhr gegen Sternzeit, so ist auch der Stundenwinkel $t = u + \Delta u - \alpha$ bekannt und man kann die Polhöhe des Beobachtungsortes aus der Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \qquad (a)$$

berechnen. Setzt man:

$$\sin\delta = m \sin M$$
$$\cos\delta \cos t = m \cos M,$$

so wird $\cos z = m \cos(\varphi - M)$ und:

$$\operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos t}, \quad \cos(\varphi - M) = \frac{\cos z \sin M}{\sin\delta}.$$

Da der dem $\cos(\varphi - M)$ entsprechende, 180^0 nicht überschreitende Winkel positiv oder negativ genommen werden kann, so erhält man aus letzter Gleichung zwei Werthe von φ, von welchen jener als der dem Beobachtungsorte entsprechende zu nehmen ist, welcher der stets näherungsweise bekannten Breite des Ortes zunächst liegt.

186. Um den Einfluss von Fehlern in den Rechnungselementen auf die berechnete Polhöhe kennen zu lernen, differenzire man die Gl. (a) nach allen darin vorkommenden Grössen; man erhält, behufs Reduction von den Glgn. (19) und (24) Gebrauch machend:

$$d\varphi = \sec A\, dz - \cos\varphi \operatorname{tg} A\, dt + \sec A \cos q\, d\delta, \qquad (202)$$

wo A das Azimuth und q den parallaktischen Winkel bedeutet.

Die Coefficienten von dz und dt werden ein Minimum für $A = 0$ oder $= 180^0$, d. i., wenn der Stern im Meridiane beobachtet wird. In diesem Falle wird $\operatorname{tang} A = 0$, es hat ein Fehler im Stundenwinkel, d. i. in der Rectascension des Gestirnes oder dem angenommenen Uhrstande keinen Ein-