3. Zeitbestimmung aus beobachteten gleichen Höhen zweier Sterne östlich und westlich vom Meridiane.

166. Bei der im Vorausgehenden behandelten Methode der Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen eines Sternes liegen die beiden Beobachtungen um mehrere Stunden auseinander, was, abgesehen davon, dass der Beobachter zweimal in Anspruch genommen wird, den Nachtheil hat, dass die zweite Beobachtung häufig in Folge bedeckten Himmels vereitelt wird, und dies um so leichter, als sie an eine bestimmte Zeit gebunden ist. Man kann diesen Uebelstand vermeiden, indem man die Methode in der Art abändert, dass man zwei Sterne östlich und westlich vom Meridian in derselben Höhe beobachtet, wo dann die Anordnung immer so getroffen werden kann, dass die beiden Beobachtungen unmittelbar aufeinanderfolgen.

Bezeichnet man mit h die wahre Höhe beider Sterne, mit δ, δ' die Declinationen derselben, mit t, t' ihre Stundenwinkel zur Zeit der Beobachtung, so hat man die Gleichungen:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos t',$$

aus welchen durch Subtraction:

$$0 = \sin\varphi (\sin\delta - \sin\delta') + \cos\varphi (\cos\delta \cos t - \cos\delta' \cos t'),$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varphi (\sin\delta - \sin\delta') = \cos\delta' \cos t' - \cos\delta \cos t$$

folgt. Diese Gleichung lässt sich, wenn man im zweiten Theile einmal $\cos t' \cos\delta$, dann $\cos t \cos\delta'$ addirt und subtrahirt, unter folgenden zwei Formen schreiben:

$$\operatorname{tg}\varphi (\sin\delta - \sin\delta') = \cos t' (\cos\delta + \cos\delta') - \cos\delta (\cos t + \cos t'),$$
$$\operatorname{tg}\varphi (\sin\delta - \sin\delta') = -\cos t (\cos\delta + \cos\delta') + \cos\delta' (\cos t + \cos t'),$$

aus welchen durch Addition die Gleichung:

$$2 \operatorname{tg}\varphi (\sin\delta - \sin\delta') = (\cos\delta + \cos\delta')(\cos t' - \cos t) + (\cos\delta' - \cos\delta)(\cos t + \cos t')$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varphi \sin\frac{\delta - \delta'}{2} \cos\frac{\delta + \delta'}{2} = \cos\frac{\delta + \delta'}{2} \cos\frac{\delta - \delta'}{2} \sin\frac{t + t'}{2} \sin\frac{t - t'}{2} + \sin\frac{\delta + \delta'}{2} \sin\frac{\delta - \delta'}{2} \cos\frac{t + t'}{2} \cos\frac{t - t'}{2}$$

entsteht.

Es seien nun u, u' die beobachteten Uhrzeiten der gleichen Höhe beider Sterne; α, α' ihre Rectascensionen; x der Stand der Uhr gegen

Sternzeit, wobei zu beachten, dass, wenn die Uhr nicht nach Sternzeit geht, x für eine bestimmte Uhrzeit U geltend zu betrachten ist, auf welche die beobachteten Uhrzeiten u, u' mit dem bekannten Gange der Uhr gegen Sternzeit reducirt werden müssen;*) für U kann man u, u' oder das Mittel aus beiden, oder eine sonst beliebige Zeit wählen.

Dann sind $u + x$, $u' + x$ die Sternzeiten der Beobachtung, somit die von Süd über West gezählten Stundenwinkel:

$$t = u + x - \alpha; \quad t' = u' + x - \alpha';$$
$$t + t' = (u + u') - (\alpha + \alpha') + 2x,$$
$$t - t' = (u - u') - (\alpha - \alpha').$$

Setzt man nun:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu &= (u + u') - (\alpha + \alpha'),\\ 2\lambda &= (u - u') - (\alpha - \alpha'), \end{aligned}\right\} \quad (159)$$

wo also μ und λ bekannte Grössen sind, so wird:

$$\tfrac{1}{2}(t + t') = \mu + x, \quad \tfrac{1}{2}(t - t') = \lambda,$$

und die obige Gleichung geht durch Division mit $\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\lambda$ über in:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta')}{\sin\lambda} = \sin(\mu + x) + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta + \delta')\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\operatorname{cotg}\lambda\cos(\mu + x).$$

Bestimmen wir nun den Hilfswinkel ζ mittelst der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta + \delta')\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\operatorname{cotg}\lambda, \quad (160)$$

so wird:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta')}{\sin\lambda} = \sin(\mu + x) + \operatorname{tg}\zeta\cos(\mu + x),$$

woraus

$$\sin(\mu + \zeta + x) = \frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta')\cos\zeta}{\sin\lambda} \quad (161)$$

folgt. Die Gleichungen (159), (160), (161), enthalten die Auflösung der Aufgabe. In der 1^{ten} der Glgn. (159) kann man die Summe $(u + u')$, wenn sie kleiner als $(\alpha + \alpha')$, um 48^h vermehren, wodurch μ stets positiv wird; der Gl. (161) genügen zwei Werthe von $\mu + \zeta + x$, von welchen jener dem Werthe von μ entsprechende zu nehmen ist.

Um über die zweckmässigste Wahl der Sterne Aufschluss zu erhalten, differenziren wir die Glgn. (m) und erhalten, auf dem in §. 156 betretenen Wege:

---

*) Ist eine beobachtete Uhrzeit u mit dem Uhrgange dx auf die Epoche U zu reduciren, so hat man zu u die Grösse $+ dx(u - U)$ hinzuzulegen, wobei dx positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Uhr retardirt oder voreilt.

$$dh = -\cos A\, d\varphi + \cos p\, d\delta - \cos\varphi \sin A\, dt$$
$$dh = -\cos A'\, d\varphi + \cos p'\, d\delta' - \cos\varphi \sin A'\, dt',$$

wo A, A' die Azimuthe beider Sterne zur Zeit der Beobachtung, p und p' die parallaktischen Winkel bedeuten. Subtrahiren wir beide Gleichungen und beachten, dass $dt = du + dx$, $dt' = du' + dx$ ist, wenn wir die Rectascensionen als fehlerfrei betrachten, oder ihre Fehler mit den Fehlern du, du' der beobachteten Uhrzeiten vereinigt annehmen, so kommt:

$$dx = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + A')}{\cos\varphi} d\varphi + \frac{\sin A}{\sin A' - \sin A} du - \frac{\sin A'}{\sin A' - \sin A} du'$$
$$- \frac{\cos p}{\cos\varphi(\sin A' - \sin A)} d\delta + \frac{\cos p'}{\cos\varphi(\sin A' - \sin A)} d\delta'. \quad (a)$$

Hieraus folgt, dass es am vortheilhaftesten ist, zwei Sterne zu wählen, welche zu beiden Seiten des Meridians in nahe gleichem Azimuth dieselbe Höhe erreichen, also Sterne von geringer Declinationsdifferenz, weil dann $\frac{1}{2}(A + A')$ klein wird, also ein Fehler in der Polhöhe einen geringen Einfluss auf den Uhrstand erhält, und auch die Nenner der anderen Coefficienten möglichst gross werden. Absolut genommen dürfen die Azimuthe, wie bei jeder Zeitbestimmung aus beobachteten Höhen, nicht zu klein sein, weil sonst die Beobachtungen selbst, wegen zu geringer Bewegung der Sterne in Höhe, an Genauigkeit verlieren, d. i. die Fehler du, du' zunehmen; es muss zu diesem Zwecke die Rectascensionsdifferenz der Sterne eine entsprechende Grösse haben. Beobachtungen in der Nähe des ersten Verticals sind daher auch hier am vortheilhaftesten: indessen sind die Bedingungen einer guten Zeitbestimmung nach genügend erfüllt, so lange die Declinationsdifferenz nicht erheblich über 10^0 steigt, und die Azimuthe nicht kleiner als etwa 30^0 werden. Die Sterne 1^{ter} und 2^{ter} Grösse allein bieten zu diesem Zwecke zahlreiche Combinationen.

167. Die Vorbereitung der Beobachtung erfordert zunächst die Kenntniss der Sternzeit T, zu welcher die beiden gewählten Sterne gleiche Höhe haben. Man findet sie aus den Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta + \delta')\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha),$$
$$\sin(\mu + \zeta) = \frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta')\cos\zeta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}, \quad (162)$$
$$T = \mu + \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha'),$$

welche aus jenen (159), (160), (161) hervorgehen, wenn man $x = 0$ und $u = u' = T$ setzt*)

*) In der 2^{ten} dieser Gleichungen kann $\sin(\mu + \zeta) > 1$, also μ unmöglich werden, was anzeigt, dass beide Sterne für den Beobachtungsort nicht in gleiche Höhe kommen können, ein Fall der übrigens bei zu vorliegendem Zwecke geeigneten Sternpaaren nicht eintreten kann. In allen anderen Fällen geben obige Gleichungen zwei Werthe von $\mu + \zeta$, also auch von T, weil zwei Sterne, wenn überhaupt, nothwendig zweimal in 24^h in eine Stellung kommen, wo sie gleiche Höhe haben.

Die zur Sternzeit T stattfindende Höhe H beider Sterne, so wie deren Azimuthe ergeben sich aus:

$$\sin H = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$
$$= \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos t',$$
$$\sin A = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos H}, \quad \sin A' = \frac{\cos\delta' \sin t'}{\cos H},$$

wo $t = T - \alpha$, $t' = T' - \alpha'$ ist.

Die Beobachtungen können natürlich nicht bei der Höhe H, welche beide Sterne gleichzeitig erreichen, gemacht werden, sondern in einer etwas grösseren oder kleineren, damit beide Beobachtungen um ein genügendes Zeitintervall auseinander fallen. Die zu diesem Zwecke an obigen Werthen von H und A, A' anzubringenden Aenderungen ergeben sich hinreichend genau mittelst der Formeln:

$$dH = -\cos\varphi \sin A\, dt, \quad dA = \frac{\cos\delta \cos p}{\cos H} dt = -\frac{\operatorname{cotg} p}{\cos H} dH,$$

wo

$$\sin p = \frac{\cos\varphi \sin t}{\cos H}.$$

Beispiel. Für die Polhöhe $\varphi = 48^0\ 12'$ und die beiden Sterne:

$$\alpha\ \textit{Cassiopeae}: \alpha = 0^h\ 32^m\ 58^s, \quad \delta = +55^0\ 48'.0,$$
$$\gamma\ \textit{Ursae maj.}: \alpha' = 11\ \ 46\ \ 42\ , \quad \delta' = +54\ \ 26.5.$$

Findet man, nach den Formeln (162) mit 4stelligen Logarithmen rechnend: $\zeta = 0^0\ 5'\ 55''$, $\sin(\mu + \zeta) = 8.1247$, also $\mu + \zeta = 0^0\ 45'.8$ oder $= 179^0\ 14'.2$, daher $\mu = 0^0\ 39'.9 = 2^m\ 40^s$, oder $= 179^0\ 8'.3 = 11^h\ 56^m\ 33^s$, folglich, da $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = 6^h\ 9^m\ 50^s$ ist, die zwei Sternzeiten gleicher Höhe: $T_1 = 6^h\ 12^m\ 30^s$ und $T_2 = 18^h\ 6^m\ 23^s$.

Führen wir nun beispielsweise die weitere Rechnung für die Beobachtung zur Sternzeit T_2 aus, so erhalten wir nach obigen Formeln, mit fünfstelligen Logarithmen rechnend, für die gemeinschaftliche Höhe H, und die von Nord (westlich positiv) gezählten Azimuthe die Werthe:

$$H = 34^0\ 58'.4; \quad \alpha\ \textit{Cass.}\ A = -42^0\ 56'.9; \quad \gamma\ \textit{Urs. maj.}\ A' = 44^0\ 59'.8.$$

Sollen ferner die beiden Beobachtungen um etwa 10^m auseinander liegen, so setze man in der Formel $dH = -\cos\varphi \sin A\, dt$, $dt = 5^m = 75'$, wodurch für α *Cass.* $dH = 34'$ wird, und man kann nun zur Beobachtung die Höhe $h = H \pm dH$ nehmen. Wählt man die grössere Höhe und setzt in runder Zahl:

$$h = 35^0\ 30'$$

so hat man $dH = +31'.6$ und findet hiemit:

	für γ *Urs.* (West)	für α *Cass.* (Ost)
$dt =$	$-4^m\ 28^s$	$+4^m\ 38^s$
$dA =$	$+27'.9$	$-28'.1$
hiemit Sternzeit der Beobachtung:	$18^h\ 1^m\ 55^s$	$18^h\ 11^m\ 1^s$
Azimuth von Nord:	$+45^0\ 27'.7$	$-43^0\ 25'.0$,

womit die zur Einstellung des Instrumentes auf die Sterne erforderlichen Daten gegeben sind.

168. Die Beobachtung selbst wird mit einem Universale oder ähnlich gebauten Instrumente ausgeführt. Da die Genauigkeit der Zeitbestimmung wesentlich auf der Gleichheit beider Höhen beruht, und nicht angenommen werden kann, dass, nachdem man den ersten Stern beobachtet und das Instrument in das Azimuth des zweiten gedreht hat, die Höhe unverändert geblieben ist, so muss der Unterschied der Höhe gemessen und in Rechnung gebracht werden, und zu diesem Zwecke das Instrument mit einer senkrecht auf die verticale Umdrehungsaxe und parallel zum Höhenkreise angebrachten Libelle versehen sein, wie dies bei Universal-Instrumenten ohnehin immer der Fall ist (Versicherungs- oder Alhidadenlibelle; vergl. §. 118 und 123). Es ist dann am einfachsten, jede der beiden Uhrzeiten auf jene Höhe zu reduciren, welche der Absehenlinie des Horizontalfadens bei einspielender Libelle zukommt.

Sind a, i die Lesungen der Libelle, und zwar a jene des gegen den Stern oder nach aussen liegenden Blasenendes, so ist $15 \,.\, \frac{1}{2} k(a - i)$ die Ausweichung der Blase von der Mitte in Bogensecunden, wenn k den Winkelwerth eines Scalentheils in Zeitsecunden bedeutet; man hat daher den Stern bei einer Höhe beobachtet, welche, im Vergleiche zu jener bei einspielender Libelle, um $15 \,.\, \frac{1}{2} k(a - i)$ zu gross ist, und in Folge dessen die beobachtete Uhrzeit, wenn der Stern in Westen, um $\frac{dt}{dh} \,.\, \frac{1}{2} k(a - i)$ Zeitsecunden zu klein erhalten. Setzt man daher:

$$m = \frac{1}{\cos\varphi \sin A},$$

so ist die Correction der beobachteten Uhrzeit in Zeitsecunden:

$$+ m \,.\, \tfrac{1}{2} k(a - i),$$

wo m positiv oder negativ, je nachdem der Stern im Westen oder Osten.

Um die Beobachtungen zu vervielfältigen, kann man jeden Stern mehrmals am Horizontalfaden beobachten, indem man successive die Höhe des Fernrohrs ändert, wobei der Index auf bestimmte Theilstriche des Höhenkreises, selbstverständlich dieselben bei beiden Sternen, scharf eingestellt wird.

Bequemer jedoch und weit genauer ist es, wenn man im Fernrohre zu beiden Seiten des mittleren Horizontalfadens zwei oder drei mit demselben parallele Seitenfäden anbringt und die Antritte des Sternes an diesen Fäden beobachtet, wobei dann das Fernrohr in Höhe nicht verstellt wird.

In beiden Fällen kann man dann aus je zwei correspondirenden, d. i. bei derselben Einstellung oder an demselben Faden gemachten Beobachtungen den Uhrstand ableiten und dann aus sämmtlichen Werthen das Mittel nehmen, dessen Sicherheit zugleich aus der Uebereinstimmung der einzelnen Werthe sich zu erkennen gibt. Oder man kann auch die Rechnung nur einmal mit den Mitteln der Uhrzeiten ausführen, bei deren Bildung selbstverständlich jede Beobachtung eines Sternes wegzulassen ist, für welche die correspondirende des anderen Sternes mangelt. Letzteres Verfahren ist bei Beobachtungen an Seitenfäden stets ohne merklichen Fehler zulässig, weil sie in diesem Falle in Folge des geringen Abstandes der Fäden sehr rasch aufeinander folgen; bei der anderen Beobachtungsmethode, wo die Einstellung geändert wird, jedoch nur dann, wenn die Declinationen beider Sterne sehr nahe gleich sind, widrigenfalls an den Mitteln der beobachteten Uhrzeiten eine ähnliche Correction, wie bei der Zeitbestimmung aus absoluten Höhen (§. 159) angebracht werden müsste.

Endlich kann man, im Falle die Beobachtungen an Seitenfäden gemacht sind, diese auf den Mittelfaden reduciren, wenn die Abstände der Seitenfäden vom Mittelfaden (§. 96) bekannt sind. Um diese Reduction zu finden, sei t der Stundenwinkel des Sternes zur Zeit des Antrittes am Mittelfaden, t' der Stundenwinkel an einem Seitenfaden, dessen Abstand vom Mittelfaden $= F$; h die wahre Höhe des Sternes am Mittelfaden, somit $h + F$ die wahre Höhe am Seitenfaden, wo F positiv genommen wird, wenn die Höhe des Seitenfadens grösser als jene des Mittelfadens. Setzt man nun $t = f(h)$, $t' = f(h + F)$, so hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$t' = f(h + F) = t + \frac{dt}{dh} F + \frac{d^2t}{dh^2} \frac{F^2}{2}.$$

Die Differenz der Stundenwinkel, $t - t' = l$, in Zeit ausgedrückt, ist aber offenbar die Zeit, welche der Stern braucht, um vom Seitenfaden zum Mittelfaden, oder umgekehrt, zu kommen, also die gesuchte Reduction vom Seitenfaden auf den Mittelfaden; man hat daher:

$$l = -\frac{dt}{dh} F - \frac{d^2t}{dh^2} \frac{F^2}{2},$$

oder, wenn F und l in Zeitsecunden ausgedrückt werden:

$$l = -\frac{dt}{dh} F - \frac{15 \sin 1''}{2} \frac{d^2t}{dh^2} \cdot F^2.$$

Aus der Gleichung:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

erhält man durch zweimalige Differenziation, dh als unabhängig Veränderliche betrachtend:

$$\frac{dt}{dh} = -\frac{\cos h}{\cos\varphi \cos\delta \sin t} = -\frac{1}{\cos\varphi \sin A},$$

$$\frac{d^2t}{dh^2} = \frac{\sin h}{\cos\varphi \cos\delta \sin t} - \operatorname{cotg} t \left(\frac{dt}{dh}\right)^2 = -\frac{dt}{dh}\left(\operatorname{tg} h + \frac{dt}{dh}\operatorname{cotg} t\right).$$

Setzt man daher:

$$m = \frac{1}{\cos\varphi \sin A}, \quad n = \frac{15 \sin 1''}{2}(\operatorname{tg} h - m \operatorname{cotg} t),$$

so wird:

$$l = mF - mnF^2,$$

wo m positiv auf der Westseite, negativ auf der Ostseite zu nehmen, und der Stundenwinkel t von Süd über West von 0 bis 360°, oder auch von Süd aus nach beiden Seiten, östlich negativ, zu zählen ist.

Hiebei ist nun noch zu beachten, dass in Folge der mit der Bewegung des Sternes von einem Seiten- zum Mittelfaden (oder umgekehrt) verbundenen Höhenänderung auch die Refraction sich ändert, und eine leichte Ueberlegung lehrt, dass, da die Refraction mit zunehmender Höhe abnimmt, der Stern, von irgend einem Faden aus, einen folgenden später erreichen wird, als dies ohne Refractionsänderung der Fall wäre, und zwar unter allen Umständen, die Höhe mag im Zu- oder Abnehmen begriffen sein, und der Stern von einem Seiten- zum Mittelfaden, oder umgekehrt gehen. Man hat daher in dem obigen Ausdrucke für F nicht den wahren, sondern den um die Refractionsdifferenz vergrösserten Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden zu nehmen, oder es ist, wenn man mit ϱ die Refraction für die Höhe des Mittelfadens, mit $\varrho \pm d\varrho$ jene für die Höhe des Seitenfadens, mit f endlich den wahren Abstand beider Fäden in Zeitsecunden bezeichnet, $F = f + \frac{1}{15} d\varrho$ zu setzen.

In Folge dieses Einflusses der Refraction erhalten die Fadenintervalle bei verschiedenen Höhen verschiedene Werthe. Um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, kann man die Wirkung der Refraction mit der für ein bestimmtes Sternpaar constanten Grösse m vereinigen. Bezeichnet man mit $\Delta\varrho$ die Aenderung der Refraction für 1° Höhenänderung in der Höhe des Mittelfadens, ausgedrückt in Bogensecunden, so wird $\frac{1}{15} d\varrho = f \frac{\Delta\varrho}{3600}$, somit:

$$F = f + f\frac{\Delta\varrho}{3600} = f\left(1 + \frac{\Delta\varrho}{3600}\right),$$

$$\log F = \log f + \log\left(1 + \frac{\Delta\varrho}{3600}\right) = \log f + \frac{M}{3600}\Delta\varrho,$$

wo $M = 0.4343$ der Modulus, also:

$$\log F = \log f + 0.0001206\, \Delta\varrho.$$

Setzt man also:

$$\log m' = \log m + 0.0001206\, \varDelta\varrho$$

und beachtet, dass in dem immer sehr kleinen zweiten Gliede ohne Fehler f^2 statt F^2 gesetzt werden kann, so wird

$$l = m'f - mnf^2,$$

wo nun f den wahren Werth des Fadenintervalles in Zeitsecunden bedeutet.

Hat man an einer nach mittlerer Zeit gehenden Uhr beobachtet, so sind die Fadenintervalle f durch Multiplication mit 0,99727 ($\log = 9.99881$) in mittlerer Zeit auszudrücken.

Beispiel. Das im vorigen §. angeführte Sternpaar wurde mit einem zwölfzölligen Theodoliten beobachtet, dessen gebrochenes Fernrohr mit 7 Horizontalfäden versehen war; die Abstände der sechs Seitenfäden vom Mittelfaden IV waren:

	I	II	III	V	VI	VII
$f =$	$+38^s.423$	$+25^s.613$	$+12\,476$	-12.844	-26.475	-40.305.

Für die Höhe $h = 35^0\ 30'$ ergab sich im vorigen §.:

für γ *Ursae maj.*: $A = +45^0\ 27.7,\quad t = 6^h\ 15^m\ 13^s = 93^0\ 48'.3$
„ α *Cassiopeae*: $A = -43\ \ 25.0,\quad t = 17\ \ 38\ \ 3 = 264\ \ 30.7$

Hiemit findet man:

für γ *Ursae maj.*: $\log m = 0.32322$, $\log n = 5.4917$, $\log mn = 5.815$
„ α *Cassiopeae*: $\log m = 0.33903\,n$, $\log n = 5.5258$, $\log mn = 5.865\,n$,

Aus der Tafel der mittleren Refraction (Seite 142) hat man für $h = 35^0\ 30'$: $\varDelta\varrho = 3''$, somit $0{,}0001206\ \varDelta\varrho = 0.00036$, folglich:

für γ *Ursae*: $\log m' = 0.32358$, für α *Cassiop.*: $\log m' = 0.33939\,n$

und die Rechnung steht nun, wie folgt:

	I	II	III	V	VI	VII
$\log f$	1.58459	1.40846	1.09608	1.10870 n	1.42284 n	1.60536 n
$\log f^2$	3.169	2.817	2.192	2.217	2.846	3.211
			Für γ *Ursae maj.*:			
$\log m'f$	1.90817	1.73204	1.41966	1.43228 n	1.74642 n	1.92894 n
$\log mnf^2$	8.984	8.632	8.007	8.032	8.661	9.026
$m'f$	$+80^s.941$	$+53^s.956$	$+26^s.282$	$-27^s.057$	$-55^s.772$	$-84^s.906$
$-mnf^2$	-0.096	-0.042	-0.010	-0.011	-0.047	-0.106
l	$+80.84$	$+53.91$	$+26.27$	-27.07	-55.82	-85.01
			Für α *Cassiopeae*:			
$\log m'f$	1.92398 n	1.74785 n	1.43547 n	1.44809	1.76223	1.94475
$\log mnf^2$	9.034 n	8.682 n	8.057 n	8.082 n	8.711 n	9.076 n
$m'f$	$-83^s.942$	$-55^s.956$	-27.256	$+28.060$	$+57^s.840$	$+88.054$
$-mnf^2$	$+0.108$	$+0.048$	$+0.011$	$+0.012$	$+0.051$	$+0.119$
l	-83.83	-55.91	-27.25	$+28.07$	$+57.89$	$+88.17$

169. Als Beispiel einer vollständigen Zeitbestimmung mag das folgende dienen.

1865, Sept. 20, wurde zu Wien das Sternpaar *γ Ursae maj.* und *α Cassiopeae* in der Höhe $35^0\ 30'$ an den 7 Fäden des oberwähnten Instrumentes beobachtet, wie folgt:

	γ Ursae maj. (West)			*α Cassiopeae* (Ost)		
Faden	Uhr	Libelle		Uhr	Libelle	
	u'	a	i	u	a	i
I	$17^h\ 59^m\ 38^s.0$	16.7	18.1	$18^h\ 11^m\ 15^s.7$	20.8	14.0
II	18 0 5 .0			10 47 .7		
III	0 32 .7			10 19 .1		
IV	0 58 .9			9 51 .8		
V	1 25 .9			9 23 .7		
VI	1 54 .7			8 54 .0		
VII	18 2 24 .0	16.9	18.0	8 23 .7	20.8	14.1

Polhöhe $\varphi = 48^0\ 11'\ 59''.0$. Die scheinbaren Oerter der Sterne waren:

$$\begin{array}{llll} \alpha\ \textit{Cassiopeae}: & \alpha = 0^h\ 32^m\ 57^s.73, & \delta\ = +\,55^\circ\ 48'\ \ 4''.9 \\ \gamma\ \textit{Urs. maj.}: & \alpha' = 11\ \ 46\ \ 42\,.80, & \delta' = +\,54\ \ 26\ \ 29\,.6. \end{array}$$

Die Uhr ging nach Sternzeit mit einem täglichen Gange $+\,0^s.543$; wollte man sämmtliche Uhrzeiten wegen dieses Ganges z. B. auf die Uhrzeit $U = 18^h$ reduciren, so betrüge die Reduction für die von dieser Epoche entfernteste Zeit $(18^h\ 11^m\ 15^s.7)$ $+\dfrac{0^s.543}{24.60} \times 11^m.26 = +\,0^s.0042$ und ist daher verschwindend.

Der Winkelwerth eines Scalentheils der Libelle war $k = 0^s.36$, und im vorigen §. fanden wir für *γ Ursae*: $m = +\,2.105$, für *α Cassiop.*: $m = -\,2.183$. Aus den obigen Ablesungen der Libelle folgt daher für:

$$\begin{array}{llll} \gamma\ \textit{Ursae}: & \tfrac{1}{2}k(a-i) = -\,0^s.225; & \text{Corr. d. Uhrzeiten} & = -\,0^s.474 \\ \alpha\ \textit{Cass.}: & \quad\ \ \text{„} \qquad = +\,1\,.215; & \qquad\quad \text{„} & = -\,2\,.652. \end{array}$$

Rechnen wir zunächst mit den Mitteln der Uhrzeiten, so haben wir:

	γ Ursae	*α Cassiop.*
Mittel der Uhrzeiten	$18^h\ 0^m\ 59^s.886$	$18^h\ 9^m\ 50^s.814$
Correction der Libelle	$-\ 0\,.474$	$-\ 2\,.652$
	$u' = 18\ \ 0\ \ 59\,.412$	$u = 18\ \ 9\ \ 48\,.162,$

und die Rechnung steht nach den Formeln (159), (160), (161) wie folgt:

$$\begin{array}{rl} u+u' = & 36^h\,10^m\,47.574 \\ \alpha+\alpha' = & 12\ \ 19\ \ 40.53 \\ \hline 2\mu = & 23\ \ 51\ \ \ 7.044 \\ \mu = & 11\ \ 55\ \ 33.522 \\ \hline u-u' = & +\ 0\ \ \ 8\ \ 48.750 \\ \alpha-\alpha' = & -11\ \ 13\ \ 45.07 \\ \hline 2\lambda = & +11\ \ 22\ \ 33.820 \\ \lambda = & +\ 5\ \ 41\ \ 16.91 \\ = & +85^\circ\ 19'\ 13''.6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \delta+\delta' = & 110^\circ\,14'\,34''.5 \\ \delta-\delta' = & 1\ \ 21\ \ 35\ .3 \\ \hline \tfrac{1}{2}(\delta+\delta') = & 55\ \ \ 7\ \ 17\ .25 \\ \tfrac{1}{2}(\delta-\delta') = & 0\ \ 40\ \ 47\ .65 \\ \hline \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta+\delta') = & 0.156735 \\ \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') = & 8.074345 \\ \log\operatorname{cotg}\lambda\ = & 8.913048 \\ \hline \log\operatorname{tg}\zeta = & 7.144128 \\ \zeta = & 0^\circ\ 4'\ 47''.44 \\ = & 0^h\,0^m\,19^s.163 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\operatorname{tg}\varphi = & 0.048608 \\ \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') = & 8.074345 \\ \log\cos\zeta = & 0.000000 \\ \hline & 8.122953 \\ \log\sin\lambda = & 9.998550 \\ \hline \log\sin(\mu+\zeta+x) = & 8.124403 \\ \mu+\zeta+x = & 179^\circ\ 14'\ 13''.11 \\ = & 11^h\ 56^m\ 56^s.874 \\ \mu+\zeta = & 11\ \ 55\ \ 52\,.685 \\ \hline x = & +\ \ 1^m\ \ 4^s.189 \end{array}$$

Führt man aber die Rechnung in derselben Weise für jeden einzelnen Faden aus, so erhält man:

μ	λ	ζ	$\mu+\zeta+x$	$\mu+\zeta$	x
$11^h\,55^m\,35^s.025$	$85^0\,40'\,1''.5$	$17^s.738$	$11^h\,56^m\,56^s.961$	$11^h\,55^m\,52^s.763$	$+\,1^m\,4^s.198$
34.525	33 12 .0	18.205	56.933	52.730	4.203
34.075	26 9 .7	18.687	56.904	52.762	4.142
33.525	19 28 .5	19.146	56.875	52.671	4.204
32.975	12 35 .2	19.618	56.845	52.593	4.252
32.525	85 5 16 .5	20.120	56.812	52.645	4.167
32.025	84 57 49 .5	20.631	56.777	52.656	4.121
				Mittel $x=$	$+\,1\;\;4.184$

Macht man endlich die Rechnung mit Anwendung der im vorhergehenden §. berechneten Reductionen der Seitenfäden auf den Mittelfaden, so kommt:

	γ *Ursae*		α *Cassiop.*
	$18^h\;0^m\;58^s.84$		$18^h\;9^m\;51^s.87$
	91		79
	97		85
	90		80
	83		77
	88		89
	99		87
Mittel	18 0 58.903		18 9 51.834
Corr. d Libelle	— 0.474		— 2.652
$u'=$	18 0 58.429	$u=$	18 9 49.182

Mit diesen Werthen findet man:

$$\mu=11^h\,55^m\,33^s.541,\ \lambda=85^0\,19'\,28''.6,\ \zeta=19^s.146,\ \mu+\zeta+x=11^h\,56^m\,56^s.875,$$
$$\mu+\zeta=11^h\,55^m\,52^s.687,\ x=+\,1^m\,4^s.188.$$

Berechnen wir noch, um den Einfluss der verschiedenen Fehler auf den Uhrstand kennen zu lernen, die Gl. (a) [§. 166], so erhalten wir:

$$dx=0.0018\,d\varphi-0.4909\,du-0.5091\,du'-0.0414\,d\delta+0.0412\,d\delta',$$

wo dx, du, du' in Zeit-, $d\varphi$, $d\delta$, $d\delta'$ in Bogensecunden zu verstehen sind und die accentuirten Grössen sich auf γ *Urs. maj.* beziehen.

Die Fehler du, du' setzen sich aus drei Theilen zusammen: dem Fehler ε_u in der beobachteten Durchgangszeit, dem Fehler ε_1 der Libellencorrection und dem Fehler $d\alpha$ der Rectascension; es ist daher

$$du^2=\varepsilon_u^2+\varepsilon_1^2+d\alpha^2$$

zu setzen. Hiemit wird der Ausdruck für das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers E der Zeitbestimmung, wenn wir die gleichartigen Fehlerquellen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}E^2 &= 0.0018^2\,d\varphi^2\\ &+ (0.4909^2\,\varepsilon_u^2+0.5091^2\,\varepsilon_u'^2)\\ &+ (0.4909^2\,\varepsilon_1^2+0.5091^2\,\varepsilon_1'^2)\\ &+ (0.4909^2\,d\alpha^2+0.5091^2\,d\alpha'^2+0.0414^2\,d\delta^2+0.0412^2\,d\delta'^2,\end{aligned}$$

wo der Reihe nach die 2te, 3te und 4te Zeile jene Theile des Gesammtfehlers enthalten, welche beziehungsweise von den Fehlern in den beobachteten Durchgangszeiten, der Libellencorrection, und der Position der Sterne herrühren.

Es ist nun nach Gl. (139), mit Rücksicht darauf, dass jeder Stern an 7 Fäden beobachtet wurde:

$$\varepsilon_u^2 = \frac{1}{7}\left[a^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2 \sec\delta^2 \operatorname{cosec} p^2\right],$$

und, wenn wir den wahrscheinlichen Fehler der Ablesung eines Blasenendes der Libelle, in Scalentheilen ausgedrückt, mit ε bezeichnen:

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,mk\,\varepsilon.$$

Bei dem benützten Instrumente war $v = 48$, $k = 0^s.36$. Setzen wir also:

$$a = 0^s.07,\quad b = 3^s.18,\quad \varepsilon = 0.1,\quad d\varphi = 1'';$$
$$d\alpha = 0^s.02 \sec\delta = 0^s.03528,\quad d\alpha' = 0^s.02 \sec\delta' = 0^s.03438,\quad d\delta = d\delta' = 0''.3,$$

so erhalten wir:

$$\varepsilon_u = 0^s.06033,\quad \varepsilon_u^1 = 0^s.05898,\quad \varepsilon_1 = 0^s.05556,\quad \varepsilon_1^1 = 0^s.05358,$$

und hiemit:

$$E^2 = 0.000003 + 0.001779 + 0.001488 + 0.000913,$$

d. i.:

$$E^2 = 0.004183,\quad E = \pm\, 0^s.065.$$

Dieser w. F. in x ist schon ziemlich klein, ungeachtet das Beispiel, absichtlich, ungünstig für eine genaue Zeitbestimmung gewählt ist, da die Declinationen der Sterne schon gross, die Azimuthe klein sind, und dadurch die beobachteten Durchgangszeiten an Genauigkeit verlieren, und überdies die benützte Libelle zu wenig empfindlich war, wodurch der von der Libellencorrection herrührende Theil des Gesammtfehlers auf den namhaften Betrag $\sqrt{0.001488} = 0^s.0386$ steigt.

Diese Methode der Zeitbestimmung ist daher einer grossen Schärfe fähig, da sie von Instrumentalfehlern und Refraction gänzlich unabhängig ist; es wird nur gefordert, dass die Libelle hinreichend empfindlich sei und die Neigung derselben gegen die Absehenlinie des Fernrohrs unverändert bleibe, was für die kurze Zwischenzeit der Beobachtungen wohl immer angenommen werden kann. Sie wird daher namentlich dann mit Nutzen angewendet werden können, wenn ein gutes Passage- oder Universal-Instrument nicht zur Verfügung steht.