Hieraus folgt:

$$x = -\frac{50''.7}{12} = -4''.22\,;\quad y = \frac{50''.26}{6} = +8''.38\,;\quad z = \frac{23''.33}{6} = +3''.89\,;$$

$$\frac{e}{r\sin 1''} = 4''.62\,,\quad u = -24^0\,54',$$

und es wäre daher, wenn nur das Mikroskop I abgelesen würde, die an jeder Lesung $= I$ desselben anzubringende Correction:

$$= 4''.62 \sin(I + 24^0\,54').$$

116. Hat ein Instrument nur einen Nonius, so muss, wenn auf die Excentricität Rücksicht genommen werden soll, jede Lesung nach Gl. (132) verbessert werden. Die hiezu erforderliche Kenntniss der Elemente e und u kann in diesem Falle nur durch Vergleichung mehrerer mit dem Instrumente gemessener Winkel mit den aus anderen Messungen bereits bekannten wahren Werthen derselben erlangt werden. Sind nämlich a, b die bei der Messung eines Winkels gemachten zwei Ablesungen des Nonius, also $b - a = \alpha$ der durch das Instrument gegebene Werth des Winkels, α' dessen wahrer Werth, und a', b' die vom Excentricitätsfehler befreiten Lesungen, so ist $\alpha' = b' - a'$ und man hat vermöge der Gl. (132):

$$b' - a' = b - a + \frac{e}{r\sin 1''}[\sin(b-u) - \sin(a-u)],$$

oder

$$\alpha' - \alpha = \frac{2e}{r\sin 1''}\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\cos\left(\frac{b+a}{2} - u\right)$$

$$= \frac{2e}{r\sin 1''}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos(\beta - u), \qquad (133)$$

wenn man der Kürze halber die bekannte Grösse $\frac{1}{2}(a+b) = \beta$ setzt, wo nun der Ausdruck rechter Hand die Correction des gemessenen Winkels α darstellt.

Um nun e und u zu bestimmen, bringt man diese Gleichung wieder durch Auflösung des $\cos(\beta - u)$ auf die Form:

$$\varDelta = y\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\beta - z\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\beta,$$

wo y und z dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen §. Solcher Gleichungen erhält man so viele, als Winkel, deren wahre Werthe man kennt, gemessen wurden; man findet daraus y und z, und aus diesen Grössen e und u.

Die Theilungsfehler der Kreise.

117. Die Theilungen der Kreise, so vollkommen dieselben sein mögen, sind immer mit kleinen Fehlern behaftet, welche man in *zufällige* und *periodische* unterscheidet. Die ersteren befolgen kein bestimmtes Gesetz, so dass die den aufeinanderfolgenden Theilstrichen anhaftenden zufälligen Fehler sowohl dem Betrage als dem Zeichen nach von einander völlig unabhängig sind. Die letzteren sind solche, welche nach bestimmten Intervallen nach demselben Gesetze wiederkehren und daher als Functionen der Lesung selbst betrachtet werden können.

Man sieht leicht ein, dass der Einfluss der zufälligen Theilungsfehler auf das Resultat einer Messung sich um so mehr vermindern wird, je mehr Ablesungen an verschiedenen Stellen des Kreises zum Resultate mitwirken; aber auch die periodischen Theilungsfehler werden dadurch zum grössten Theile vernichtet, wenn die Lesungen regelmässig auf die Peripherie vertheilt werden, wie aus folgender Betrachtung erhellt.

Wie immer das Gesetz beschaffen sein mag, welches die periodischen Theilungsfehler befolgen, so wird es sich durch eine periodische Reihe ausdrücken lassen, so dass der Fehler der Lesung A durch den Ausdruck:

$$\begin{aligned} &a + a_1 \cos A + a_2 \cos 2A + a_3 \cos 3A + \ldots \\ &\quad + b_1 \sin A + b_2 \sin 2A + b_3 \sin 3A + \ldots \end{aligned}$$

dargestellt werden kann. Es sei nun das Instrument mit n Nonien oder Mikroskopen in gleichen Abständen $= \frac{2\pi}{n}$ von einander versehen, so werden die Lesungen an denselben sein:

$$A_1, \quad A_2 + \frac{2\pi}{n}, \quad A_3 + 2\frac{2\pi}{n}, \quad A_4 + 3\frac{2\pi}{n}, \ldots A_n + (n-1)\frac{2\pi}{n},$$

wo die Werthe von $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ sehr nahe gleich sein müssen, weil die Unterschiede derselben nur durch den Excentricitäts- und die Theilungsfehler und die jedenfalls sehr kleinen Ungleichheiten in den Abständen der Mikroskope hervorgebracht werden können. Die um die Theilungsfehler corrigirten Lesungen werden daher sein:

$$\begin{aligned}
&A_1 + a + a_1 \cos A + a_2 \cos 2A + \ldots \\
&\qquad + b_1 \sin A + b_2 \sin 2A + \ldots, \\
&A_2 + \frac{2\pi}{n} + a + a_1 \cos\left(A + \frac{2\pi}{n}\right) + a_2 \cos 2\left(A + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots \\
&\qquad + b_1 \sin\left(A + \frac{2\pi}{n}\right) + b_2 \sin 2\left(A + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots, \\
&A_3 + 2\frac{2\pi}{n} + a + a_1 \cos\left(A + 2\frac{2\pi}{n}\right) + a_2 \cos 2\left(A + 2\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots \\
&\qquad + b_1 \sin\left(A + 2\frac{2\pi}{n}\right) + b_2 \sin 2\left(A + 2\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots, \\
&A_4 + 3\frac{2\pi}{n} + a + a_1 \cos\left(A + 3\frac{2\pi}{n}\right) + a_2 \cos 2\left(A + 3\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots \\
&\qquad + b_1 \sin\left(A + 3\frac{2\pi}{n}\right) + b_2 \sin 2\left(A + 3\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&A_n + (n-1)\frac{2\pi}{n} + a + a_1 \cos\left(A + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) + a_2 \cos 2\left(A + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots \\
&\qquad + b_1 \sin\left(A + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) + b_2 \sin 2\left(A + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots,
\end{aligned}$$

wobei in den kleinen Correctionsgliedern ohne merklichen Fehler $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots . A_n$ gesetzt und hiefür Kürze halber A geschrieben wurde. Nimmt man nun das arithmetische Mittel $= M$ dieser Lesungen, mit Weglassung der constanten Grösse:

$$\frac{1}{n}\left[na + \frac{2\pi}{n} + 2\frac{2\pi}{n} + 3\frac{2\pi}{n} + \ldots . + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right],$$

welche bei allen Stellungen der Alhidade denselben Werth hat, so erhält man:

$$M = \frac{1}{n}(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots .. + A_n) +$$

$$+ \frac{a_1}{n}\Sigma\cos\left(A + \mu\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{a_2}{n}\Sigma\cos 2\left(A + \mu\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{a_3}{n}\Sigma\cos 3\left(A + \mu\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{b_1}{n}\Sigma\sin\left(A + \mu\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{b_2}{n}\Sigma\sin 2\left(A + \mu\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{b_3}{n}\Sigma\sin 3\left(A + \mu\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots,$$

wo die Summen von $\mu = 0$ bis $\mu = n - 1$ zu nehmen sind.

Nun ist bekanntlich:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\cos r\left(A + \mu\frac{2\pi}{n}\right) = 0, \quad \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1}\sin r\left(A + \mu\frac{2\pi}{n}\right) = 0,$$

den Fall ausgenommen, wenn r ein Vielfaches von n ist, in welchem Falle diese beiden Summen beziehungsweise die Werthe: $n\cos rA$ und $n\sin rA$ annehmen.

Hieraus folgt also, dass bei Anwendung von n Nonien, indem man aus deren Lesungen das Mittel nimmt, alle Glieder der periodischen Reihe der Theilungsfehler sich aufheben, mit Ausnahme jener, welche von den Sinus und Cosinus der n, $2n$, $3n \ldots ..$fachen Lesung abhängen.

Bei zwei gegenüberliegenden Nonien, welche schon zur Elimination des Excentricitätsfehlers nothwendig sind, verschwinden also schon die Glieder mit den ungeraden Vielfachen der Lesung, d. i. die mit den Coefficienten a_1, a_3, $a_5, \ldots .. b_1$, b_3, $b_5, \ldots ..$ behafteten Glieder; bei 4 Nonien alle Glieder mit nicht durch 4 theilbaren Vielfachen der Lesung, u. s. w. Da der Natur der Sache nach die Coefficienten a, b eine abnehmende Reihe bilden, so wird also schon bei 4 Nonien der Einfluss der periodischen Theilungsfehler sehr erheblich vermindert sein.

Uebrigens pflegt man nur grosse, stabile Instrumente mit vier oder mehr Mikroskopen zu versehen; bei transportablen Instrumenten werden gewöhnlich nur zwei diametral gegenüberliegende angebracht und dafür die Kreise drehbar eingerichtet, so dass man bei wiederholten Messungen den Nullpunct beliebig ändern kann. Geschieht dies jedesmal um $i = \frac{180}{k}$ Grade, so ist mit k Messungen die halbe Peripherie, und somit durch beide Mikroskope die ganze Peripherie erschöpft und — soweit nur die Elimination der Theilungsfehler in Betracht kommt — derselbe Zweck erreicht, als durch eine Messung, wenn der Kreis mit $2k$ Mikroskopen versehen wäre. Sollen also z. B. im Ganzen 6 Messungen gemacht werden, so wird man nach jeder Messung den Kreis um 30^0, bei 10 Messungen um 18^0 drehen, u. s. w. Da hiebei die Ablesungen stets auf andere Stellen des Kreises fallen, so wird auch der Einfluss der zufälligen Beobachtungsfehler auf das Mittel aller Beobachtungen um so kleiner werden, je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist.

Eine Bestimmung der absoluten Theilungsfehler der einzelnen Striche kann dadurch ausgeführt werden, dass man mit Hilfe zweier Mikroskope, deren Abstand beliebig verändert werden kann, einzelne Bögen der Kreistheilung mit einander vergleicht und hiebei, mit den beiden halben Peripherien beginnend, durch successive Halbirung zu immer kleineren Bögen herabsteigt. Eine solche Untersuchung wird jedoch nur bei grossen Instrumenten mit Vortheil vorgenommen. Handelt es sich blos um die Kenntniss des mittleren oder wahrscheinlichen Werthes der Theilungsfehler, welche für ein gegebenes Instrument immerhin von Interesse ist, so gelangt man hiezu leicht durch die in §. 112 dargestellte Untersuchung behufs Bestimmung des Mikrometer-Werthes der Ablese-Mikroskope. In dem dort angeführten Beispiele ergab sich aus der Abmessung von 27 Intervallen als Mittel: 5 Minuten $= 5^R - 0^p.34$. Vergleicht man dieses Mittel mit den Abmessungen der einzelnen Intervalle, so findet man die Fehler δ derselben, nämlich: $-0''.16$, $+0''.44$, $-0''.46$, u. s. w. Auf diese Weise ergab sich aus sämmtlichen abgemessenen 108 Intervallen: $[\delta\delta] = 59''.48$, voraus der wahrscheinliche Fehler eines Intervalles:

$$= 0.6745 \sqrt{\frac{59.48}{107}} = \pm 0''.503,$$

und hieraus durch Division mit $\sqrt{2}$ der wahrscheinliche Fehler eines Theilstriches: $\alpha = \pm 0''.356$ folgt. Dieser Werth enthält übrigens noch den zufälligen Beobachtungsfehler bei der Einstellung des Mikrometerfadens auf den Theilstrich; ist dieser $= \mu$ und ε der reine Theilungsfehler, so wird $\alpha^2 = \varepsilon^2 + \mu^2$. Aus wiederholten Einstellungen fand sich der wahrscheinliche Fehler einer Einstellung $= 0''.25$, und da immer aus drei Einstellungen das Mittel genommen wurde, so ist $\mu = \frac{0.25}{\sqrt{3}} = 0''.144$ zu setzen; hiemit erhält man den wahrscheinlichen Fehler eines Striches: $\varepsilon = \pm 0''.325$.

Das Azimuthal- und Höhen-Instrument.

(Universal-Instrument.)

118. Das Azimuthal- und Höhen-Instrument, gewöhnlich auch Universal-Instrument genannt, dient zur genauen Messung von Horizontal- oder Azimuthal-Winkeln und von Zenithdistanzen und besteht daher aus zwei Kreisen, von