Grade der Länge gerichtet wird, so ist $\eta = \beta =$ der Breite und $\omega = \lambda =$ der Länge des Sternes und wir haben:

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos\beta \cos\lambda \\ y &= \Delta \cos\beta \sin\lambda \\ z &= \Delta \sin\beta. \end{aligned} \tag{5}$$

Transformation der sphärischen Coordinaten.

14. Sehr oft tritt die Nothwendigkeit ein, von einem der sphärischen Coordinatensysteme zu einem anderen überzugehen. Da die beiden Systeme des Aequators die eine Coordinate, nämlich die Declination gemeinschaftlich haben und die zwei anderen Coordinaten, der Stundenwinkel t in dem einen, die Rectascension α in dem andern Systeme durch die einfache Gleichung $t = \theta - \alpha$ zusammenhängen, wenn θ die Sternzeit bezeichnet, so haben wir uns nur mit folgenden Aufgaben zu beschäftigen: 1) Höhe und Azimuth in Stundenwinkel und Declinationen zu verwandeln und umgekehrt; 2) Rectascension und Declination in Länge und Breite zu verwandeln und umgekehrt. Zur Vollständigkeit würde zwar noch die Lösung der Aufgabe erfordert werden, aus Höhe und Azimuth Länge und Breite zu finden; aber abgesehen davon, dass diese Aufgabe in der Praxis nicht vorkommt, würde es bei der grösseren Complication der dieselbe lösenden Formeln immer vorzuziehen sein, sie durch successive Anwendung der Aufgaben 1) und 2) aufzulösen.

Die Auflösung dieser beiden Aufgaben geschieht durch die Auflösung eines sphärischen Dreieckes, welches durch die beiden Pole der Grundkreise der zwei in Betracht gezogenen Coordinatensysteme und durch den Stern gebildet wird. Da die Formeln der sphärischen Trigonometrie fortwährend zur Anwendung kommen, so wird es zweckmässig sein, die wichtigsten derselben kurz zusammen zu stellen.

15. Bezeichnet man mit a, b, c die drei Seiten, mit A, B, C die gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreieckes, so sind bekanntlich die Grundformeln desselben:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A\,, \end{aligned} \tag{6}$$

mittelst welcher sofort a und B berechnet werden können, wenn die zwei Seiten b und c nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben sind. Durch Vertauschung der Buchstaben B, b mit C, c verwandeln sich die zwei letzten Gleichungen in:

$$\begin{aligned} \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin a \sin C &= \sin c \sin A\,, \end{aligned} \tag{7}$$

welche zur Bestimmung des dritten Winkels C dienen. Durch Division der zwei letzten der Glgn. (6), so wie der Glgn. (7) folgt noch:

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A}, \tag{8}$$

$$\operatorname{cotg} C = \frac{\operatorname{cotg} c \sin b - \cos b \cos A}{\sin A}, \tag{9}$$

welche Gleichungen die Winkel B und C unmittelbar durch die gegebenen Stücke ausdrücken.

Werden übrigens in den beiden Fällen, wo zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder zwei Seiten und die eingeschlossene Seite gegeben sind, alle drei unbekannte Stücke verlangt, so gewähren die Gauss'schen Gleichungen eine bequeme Rechnung; sie sind folgende:

$$\left.\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} (B - C) &= \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} (b + c) \\
\cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} (B + C) &= \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} (b + c) \\
\sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} (B - C) &= \cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} (b - c) \\
\cos \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} (B + C) &= \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} (b - c).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Durch Division je zweier dieser Gleichungen ergeben sich die Neper'schen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (B + C) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (b - c)}{\cos \frac{1}{2} (b + c)} \operatorname{cotg} A \\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (B - C) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (b - c)}{\sin \frac{1}{2} (b + c)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b + c) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (B - C)}{\cos \frac{1}{2} (B + C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a \\
\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b - c) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (B - C)}{\sin \frac{1}{2} (B + C)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a,
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

von welchen die ersteren (11) zur Anwendung kommen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, die letzteren (12), wenn zwei Winkel und die eingeschlossene Seite gegeben sind.

Drei grösste Kreise der Kugel, deren Pole die Eckpuncte unseres Dreieckes ABC sind, erzeugen ein sphärisches Dreieck $A'B'C'$, dessen Eckpuncte wieder die Pole des Dreieckes ABC sind. Von diesen Dreiecken heisst das eine das Polar- oder Supplementardreieck des anderen und sie besitzen bekanntlich die Eigenschaft, dass die Seiten und Winkel des einen beziehungsweise die Winkel und Seiten des andern zu 180^0 ergänzen. Durch Anwendung dieses Satzes erhält man aus obigen Formeln (6) bis (9), indem man:

$$180^0 - a, \quad 180^0 - b, \quad 180^0 - c, \quad 180^0 - A, \quad 180^0 - B, \quad 180^0 - C$$

an die Stelle von

$$A, \quad B, \quad C, \quad a, \quad b, \quad c$$

treten lässt, die folgenden:

$$
\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\
\sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \sin C \cos a \qquad (13) \\
\sin A \sin b &= \sin B \sin a ,
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \\
\sin A \sin c &= \sin C \sin a ,
\end{aligned}\right\} \qquad (14)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sin a \operatorname{cotg} b &= \operatorname{cotg} B \sin C + \cos C \cos a \\
\sin a \operatorname{cotg} c &= \operatorname{cotg} C \sin B + \cos B \cos a ,
\end{aligned}\right\} \qquad (15)
$$

welche an Stelle der Seiten die Winkel und umgekehrt enthalten, und unmittelbar dem Falle entsprechen, wenn zwei Winkel und die eingeschlossene Seite gegeben sind.

Sind in einem Dreiecke die drei Seiten oder die drei Winkel gegeben, so findet man beziehungsweise die Winkel und Seiten mittelst der Formeln:

$$
\left.\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2} A^2 &= \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c} \\
\cos \tfrac{1}{2} A^2 &= \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}
\end{aligned}\right\} \text{ wo } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c) , \qquad (16)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2} a^2 &= \frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C} \\
\cos \tfrac{1}{2} a^2 &= \frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}
\end{aligned}\right\} \text{ wo } S = \tfrac{1}{2}(A+B+C). \qquad (17)
$$

Sind endlich in einem sphärischen Dreiecke zwei Seiten und ein opponirter Winkel, oder zwei Winkel und eine opponirte Seite gegeben, so suche man zunächst das andere opponirte Stück mit Hilfe der Sinusgleichung:

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A ,$$

und die beiden noch fehlenden Stücke ergeben sich dann mittelst der Neper'schen Analogien.

Für das rechtwinkelige sphärische Dreieck hat man, wenn die Hypotenuse mit h, die Katheten mit a, b, die gegenüberliegenden Winkel mit A, B bezeichnet werden:

$$
\left.\begin{aligned}
\cos h &= \cos a \cos b , \\
\cos h &= \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B , \\
\sin a &= \sin h \sin A , \\
\operatorname{tg} a &= \operatorname{tg} h \cos B , \\
\operatorname{tg} a &= \sin b \operatorname{tg} A , \\
\cos A &= \cos a \sin B .
\end{aligned}\right. \qquad (18)
$$

Mit Ausnahme der Gleichung: $\sin a \sin B = \sin b \sin A$ und der durch Vertauschung der Buchstaben daraus hervorgehenden analogen, enthalten die übrigen Grundformeln des sphärischen Dreieckes einen zweigliedrigen Ausdruck, welcher zur logarithmischen Berechnung nicht unmittelbar geeignet ist, aber immer die Eigenschaft besitzt, mindestens von einem Stücke in dem einem

Gliede den Sinus, im andern den Cosinus zu führen. In Folge dieser Eigenschaft erhalten diese Binome die logarithmische Form, indem man die zwei Factoren dieses Sinus und Cosinus dem Sinus und Cosinus (oder umgekehrt) eines Hülfswinkels proportional setzt, was immer möglich ist.

Ist nämlich

$$A = P \sin u + Q \cos u,$$

und man setzt:

$$P = m \sin M, \quad Q = m \cos M,$$

so wird:

$$A = m \cos(M - u),$$

und

$$\operatorname{tg} M = \frac{P}{Q}, \quad m = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

welche zwei Gleichungen offenbar jederzeit mögliche Werthe von M und m darbieten.

Bedient man sich jedoch der Gauss'schen Additions- und Subtractions-Logarithmen, so ist die Rechnung nach den ursprünglichen Formeln bequemer *).

Ein Blick in die trigonometrischen Tafeln zeigt, dass ein Winkel oder Bogen durch den Sinus oder durch den Cosinus genauer bestimmt wird, je nachdem derselbe, auf den ersten Quadranten reducirt, kleiner oder grösser ist als 45°. Am vortheilhaftesten ist aber immer die Bestimmung durch die Tangente, weil dieselbe, wie leicht einzusehen, den Winkel bei jeder Grösse so scharf gibt, als es die angewendeten Tafeln überhaupt gestatten.

In der sphärischen Astronomie werden die sphärischen Dreiecke ohne Einschränkung bezüglich der Grösse der Seiten und Winkel betrachtet, welche demnach jeden Werth von 0° bis 360° haben, oder in jedem der vier Quadranten liegen können. Wird demnach ein Stück nur durch eine trigonometrische Function bestimmt, so hat man die Wahl zwischen zwei Quadranten, in welchen dasselbe genommen werden kann. Diese Unbestimmtheit entfällt, wenn zwei Functionen, etwa der Sinus und Cosinus, berechnet werden, wodurch auch gleichzeitig der Werth der Tangente bekannt, und somit der Bogen auf die vortheilhafteste Weise bestimmt wird. In den in der Praxis vorkommenden Fällen weiss man übrigens gewöhnlich schon aus anderen Umständen, in welchem Quadranten der gesuchte Winkel liegt.

---

*) Sehr zu empfehlende Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen sind in neuerer Zeit von Prof. Wittstein herausgegeben worden:

Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln von Dr. Th. Wittstein. 2 Aufl. Hannover 1865.

Siebenstellige Gauss'sche Logarithmen von Dr. Th. Wittstein. Hannover 1866.

Die letzte Auflage (1869) von Dr. Bremiker's sechsstelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln enthält eine sechsstellige Tafel der Additions- und Subtractions-Logarithmen.

16. Aus dem Stundenwinkel $= t$ und der Declination $= \delta$ eines Gestirnes dessen Azimuth $= A$ und Höhe $= h$ zu finden.

In dem vom Nordpole, dem Zenith und Gestirne gebildeten Dreiecke PZS (Fig. 4) ist $PZ = 90^0 - \varphi$, wenn φ die Polhöhe bedeutet, welche die gegenseitige Lage der Grundebenen der beiden Coordinatensysteme bestimmt und daher bekannt sein muss; es sind demnach folgende Stücke gegeben:

$$PZ = 90^0 - \varphi, \quad PS = 90^0 - \delta, \quad \angle ZPS = t.$$

Die gesuchten Stücke sind: $SZ = 90^0 - h$ und $\angle PZS = 180^0 - A$; setzt man daher in den Formeln (6) [§. 15] an die Stelle von

$$\begin{array}{ccccc} a\;, & b\;, & c\;, & A, & B\;, \\ 90^0 - h, & 90^0 - \delta, & 90^0 - \varphi, & t\,, & 180^0 - A, \end{array}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \\ \cos h \cos A &= -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t \\ \cos h \sin A &= \cos\delta \sin t. \end{aligned} \tag{19}$$

Die erste dieser beiden Formeln gibt sofort h, die beiden andern geben $\log . \cos h \cos A$ und $\log . \cos h \sin A$. Die Zeichen dieser beiden Logarithmen bestimmen (da $\cos h$ immer positiv) den Quadranten, in welchem A zu nehmen, ihre Differenz gibt $\log \operatorname{tg} A$.

Um die Formeln für die logarithmische Rechnung einzurichten, setze man:

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= m \sin M \\ \cos\delta \cos t &= m \cos M, \\ \text{so wird durch Substitution:}& \\ \sin h &= m \cos(\varphi - M) \\ \cos h \cos A &= m \sin(\varphi - M) \\ \cos h \sin A &= \cos\delta \sin t. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Die beiden ersten dieser Formeln bestimmen die Grösse m (immer positiv zu nehmen) und den Hilfswinkel M.

Statt dieser Gleichungen kann man sich auch der folgenden bedienen:

$$\begin{gathered} \operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}, \\ \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} t \cos M}{\sin(\varphi - M)}, \quad \operatorname{tg} h = \frac{\cos A}{\operatorname{tg}(\varphi - M)}, \end{gathered} \tag{21}$$

von welchen die erste durch Division der zwei ersten, die zweite durch Division der zwei letzten der Glgn. (20) und Substitution des aus der 2ten folgenden Werthes von m, die dritte durch Division der 3ten und 4ten entsteht. Ein Zweifel über den Quadranten, in welchem A zu nehmen, kann bei dem Gebrauche der Glgn. (21) nicht entstehen, da das Azimuth A immer auf derselben Seite des Meridians liegt, wie der gegebene Stundenwinkel t. Den Hilfswinkel M kann man hiebei immer im 1ten Quadranten nehmen, positiv oder negativ, je nach dem Zeichen von $\operatorname{tg} M$.

Zur Prüfung der Rechnung kann die Gleichung

$$\frac{\sin(\varphi - M)}{\cos M} = \frac{\cos h \cos A}{\cos \delta \cos t}$$

dienen, welche aus der Division der 2^{ten} und 4^{ten} der Gleichungen (20) hervorgeht.

Beispiel. Es sei gegeben:

$\delta = +6^\circ 59' 47''.2$; $t = 20^h 29^m 8^s.22 = 307^\circ 17' 3''.3$; $\varphi = 51^\circ 28' 38''.0$.

Die Rechnung nach den Formeln (21) ist folgende:

$\log \operatorname{tg} \delta = 9.0889209$		
$\log \cos t = 9.7823075$		Prüfung:
$\log \operatorname{tg} M = 9.3066134$	$M = 11^\circ 27' \ 8''.75$	$\log \cos h = 9.9458549$
$\log \cos M = 9.9912659$	$\varphi - M = 40 \ \ 1 \ \ 29 \ .25$	$\log \sin A = 9.9516157_n$
$\log \operatorname{tg} t = 0.1184091_n$		9.8974706_n
$\log \sin(\varphi - M) = 9.8082913$		$\log \cos \delta = 9.9967540$
0.1096750		$\log \sin t = 9.9007166_n$
$\log \operatorname{tg} A = 0.3013837_n$	$A = -63^\circ 27' 13''.00$	9.8974706_n
$\log \cos A = 9.6502320$	$= 296 \ \ 32 \ \ 47 \ .00$	
$\log \operatorname{tg}(\varphi - M) = 9.9241951$		
$\log \operatorname{tg} h = 9.7260369$	$h = 28^\circ \ 1' 11''.40$	

Verlangt man bloss das Azimuth, so ergibt sich dasselbe mittelst der Formel:

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\sin \varphi \cos t - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi}{\sin t}. \tag{22}$$

Der dritte Winkel PSZ in unserem Dreiecke, der Winkel am Sterne, welcher von dem Declinations- und Höhenkreise gebildet wird, heisst der parallaktische Winkel. Wir werden ihn mit q bezeichnen; er ergibt sich mittelst der Formel:

$$\sin q = \frac{\cos \varphi \sin A}{\cos \delta} = \frac{\cos \varphi \sin t}{\cos h}, \tag{23}$$

sobald A oder h bekannt geworden. Unmittelbar aus den gegebenen Stücken findet man ihn aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos h \cos q &= \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t \\ \cos h \sin q &= \cos \varphi \sin t, \end{aligned} \tag{24}$$

welche durch Anwendung der Glgn. (7) [§. 15] auf unser Dreieck sich ergeben.

Werden übrigens alle drei Stücke, Höhe, Azimuth und parallaktischer Winkel gefordert, so rechnet man auch bequem nach den Gauss'schen Formeln, welche auf unser Dreieck angewendet, folgende Form annehmen, wenn wir für $90 - h$ die Zenithdistanz z einführen:

$$\begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2} z \sin \tfrac{1}{2}(A - q) &= \sin \tfrac{1}{2} t \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta) \\ \cos \tfrac{1}{2} z \cos \tfrac{1}{2}(A - q) &= \cos \tfrac{1}{2} t \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \delta) \\ \sin \tfrac{1}{2} z \sin \tfrac{1}{2}(A + q) &= \sin \tfrac{1}{2} t \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta) \\ \sin \tfrac{1}{2} z \cos \tfrac{1}{2}(A + q) &= \cos \tfrac{1}{2} t \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \delta). \end{aligned} \tag{25}$$

17. Aus Azimuth und Höhe, Stundenwinkel und Declination eines Gestirnes zu finden. Die Aufgabe wird wieder mittelst des vom Pole, dem Zenith und Sterne gebildeten sphärischen Dreieckes gelöst. Setzen wir in den Formeln (6) des §. 15 an die Stelle von:

$$\begin{array}{cccccc} a\ , & b\ , & c\ , & A\ , & B, & C, \\ 90^\circ - \delta, & 90^\circ - h, & 90^\circ - \varphi, & 180^\circ - A, & t\ , & q\ , \end{array}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \sin h\ \sin\varphi - \cos h\ \cos\varphi\ \cos A \\ \cos\delta\ \cos t &= \sin h\ \cos\varphi + \cos h\ \sin\varphi\ \cos A \\ \cos\delta\ \sin t &= \cos h\ \sin A. \end{aligned} \tag{26}$$

Um diese Formeln logarithmisch zu machen, setze man:

$$\begin{aligned} \sin h &= m\ \cos M \\ \cos h\ \cos A &= m\ \sin M, \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= m\ \sin(\varphi - M) \\ \cos\delta\ \cos t &= m\ \cos(\varphi - M) \\ \cos\delta\ \sin t &= \cos h\ \sin A\ , \end{aligned} \tag{27}$$

statt welcher Gleichungen man sich auch der folgenden bedienen kann:

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{cotg} h \cos A,$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{tg} A\ \sin M}{\cos(\varphi - M)},\quad \operatorname{tg}\delta = \cos t\ \operatorname{tg}(\varphi - M). \tag{28}$$

Für den parallaktischen Winkel hat man:

$$\sin q = \frac{\cos\varphi \sin A}{\cos\delta} = \frac{\cos\varphi \sin t}{\cos h}, \tag{29}$$

oder vermöge der Glgn. (7) [§. 15]:

$$\begin{aligned} \cos\delta \cos q &= \sin\varphi \cos h + \cos\varphi\ \sin h \cos A, \\ \cos\delta\ \sin q &= \cos\varphi\ \sin A, \end{aligned}$$

deren Quotient einen Ausdruck für $\operatorname{tg} q$ gibt.

Eben so kann man zur Auflösung dieser Aufgabe die Gauss'schen Formeln benützen. Da dieselbe jedoch in der Praxis selten vorkommt, so wollen wir dabei nicht länger verweilen.

18. Aus der Rectascension α und Declination δ eines Gestirnes seine Länge λ und Breite β zu finden. Die Auflösung dieser Aufgabe liefert das von den beiden Polen des Aequators und der Ekliptik und dem Sterne gebildete Dreieck. Es seien in Fig. 5 AQ der Aequator, EE' die Ekliptik, P und L die Pole dieser grössten Kreise, S das Gestirn, γ der Frühlingspunct. Dann ist: $\gamma B = \angle \gamma PB = \alpha$, $\gamma K = \angle \gamma LK = \lambda$; $BS = \delta$, $KS = \beta$. Der grösste Kreisbogen PL zwischen den Polen des Aequators und der Ekliptik ist gleich dem Neigungswinkel $A\gamma E$ dieser beiden grössten Kreise, d. i. der Schiefe der Ekliptik, welche wir mit ε bezeichnen. Da ferner der Punct γ, als Durchschnittspunct des Aequators und der Ekliptik, von den Polen P, L dieser grössten Kreise um 90^0 entfernt ist, so ist der Frühlingspunct γ der Pol des grössten Kreisbogens PL.

Grösste Kreise, durch γ gelegt, wie $P\gamma$ und $L\gamma$, werden daher auf PL senkrecht stehen, d. i. es ist $\angle LP\gamma = PL\gamma = 90^0$.

Somit ist im Dreiecke PLS:

$$PS = 90^0 - \delta, \qquad LS = 90^0 - \beta, \qquad PL = \varepsilon,$$
$$\angle LPS = 90^0 + \alpha, \qquad \angle PLS = 90^0 - \lambda.$$

Durch Anwendung der Formeln (6) [§. 15] auf das vorliegende Dreieck ($a = 90^0 - \beta$, $B = 90^0 - \lambda$ setzend), erhält man demnach:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon \sin\alpha, \\ \cos\beta \sin\lambda &= \sin\delta \sin\varepsilon + \cos\delta \cos\varepsilon \sin\alpha, \\ \cos\beta \cos\lambda &= \cos\delta \cos\alpha. \end{aligned} \tag{30}$$

Um dieselben zur logarithmischen Rechnung umzuformen, setze man:

$$\left.\begin{aligned} m \sin M &= \sin\delta \\ m \cos M &= \cos\delta \sin\alpha, \end{aligned}\right\}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= m \sin(M - \varepsilon) \\ \cos\beta \sin\lambda &= m \cos(M - \varepsilon) \\ \cos\beta \cos\lambda &= \cos\delta \cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

statt welcher Gleichungen man sich wieder der folgenden, leicht abzuleitenden bedienen kann:

$$\begin{gathered} \operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\alpha}, \\ \operatorname{tg}\lambda = \frac{\cos(M - \varepsilon)}{\cos M} \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(M - \varepsilon) \sin\lambda. \end{gathered} \tag{32}$$

Bei Anwendung der Formeln (31) bestimmt sich der Quadrant, in welchem λ zu nehmen ist, ohne Zweideutigkeit aus den Zeichen von $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$, da $\cos\beta$ immer positiv; beim Gebrauche der Formeln (32) behebt sich der Zweifel durch die Bemerkung, dass λ in jenem Quadranten liegen muss, welcher einerseits dem Zeichen von $\operatorname{tg}\lambda$ entspricht, anderseits dem $\cos\lambda$ das Zeichen von $\cos\alpha$ verleiht, letzteres vermöge der 3ten der Glgn. (30), da $\cos\delta$ und $\cos\beta$ immer positiv sind.

Zur Prüfung der Rechnung kann die Gleichung

$$\frac{\cos(M - \varepsilon)}{\cos M} = \frac{\cos\beta \sin\lambda}{\cos\delta \sin\alpha}$$

benützt werden, welche durch Division der 2ten und 4ten der Glgn. (31) erhalten wird.

B e i s p i e l. Es sei gegeben: $\alpha = 194^0\,12'\,23''.7$; $\delta = 62^0\,12'\,21''.0$; $\varepsilon = 23^0\,27'\,15''.06$

$$
\begin{array}{lll}
 & & \text{Prüfung:} \\
\lg \operatorname{tg} \delta = 0.2780987 & & \lg \cos \delta = 9.6686622 \\
\lg \sin \alpha = 9.3899078_n & & \lg \cos \beta = 9.7119516 \\
\lg \operatorname{tg} \alpha = 9.4033970 & & \lg \cos \beta \sin \lambda = 9.3928956 \\
\lg \operatorname{tg} M = 0.8881909_n & M = -\ 82^\circ 37' 44''.39 & \lg \cos \delta \sin \alpha = 9.0585700_n \\
\lg \cos M = 9.1082053 & M - \varepsilon = -\ 106 \quad 4 \quad 59\ .45 & 0.3343256_n \\
\lg \cos (M - \varepsilon) = 9.4425309_n & & \\
\lg \operatorname{tg} (M - \varepsilon) = 0.5401294 & & \\
\lg \dfrac{\cos (M - \varepsilon)}{\cos M} = 0.3343256_n & & \\
\lg \operatorname{tg} \lambda = 9.7377226_n & \lambda = 151^\circ 20' \ 9''.76 & \\
\lg \sin \lambda = 9.6809440 & & \\
\lg \operatorname{tg} \beta = 0.2210734 & \beta = \ 58 \quad 59 \quad 27\ .94 &
\end{array}
$$

Den Winkel $LSP = \eta$ am Sterne zwischen Declinations- und Breitenkreis findet man aus den Gleichungen:

$$\sin \eta = \frac{\cos \alpha \sin \varepsilon}{\cos \beta} = \frac{\cos \lambda \sin \varepsilon}{\cos \delta}, \tag{33}$$

oder:

$$
\begin{aligned}
\cos \beta \cos \eta &= \cos \varepsilon \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta \sin \alpha, \\
\cos \beta \sin \eta &= \sin \varepsilon \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Endlich kann man sich noch der Gauss'schen Formeln bedienen, namentlich in dem Falle, wenn nebst λ und β auch η verlangt wird. Setzt man $90^\circ - \eta = E$, so sind dieselben, auf unser Dreieck angewendet, folgende:

$$
\begin{aligned}
\sin (45 - \tfrac{1}{2} \beta) \sin \tfrac{1}{2} (E - \lambda) &= \cos (45 + \tfrac{1}{2} \alpha) \sin [45 - \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \delta)] \\
\sin (45 - \tfrac{1}{2} \beta) \cos \tfrac{1}{2} (E - \lambda) &= \sin (45 + \tfrac{1}{2} \alpha) \cos [45 - \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \delta)] \\
\cos (45 - \tfrac{1}{2} \beta) \sin \tfrac{1}{2} (E + \lambda) &= \sin (45 + \tfrac{1}{2} \alpha) \sin [45 - \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \delta)] \\
\cos (45 - \tfrac{1}{2} \beta) \cos \tfrac{1}{2} (E + \lambda) &= \cos (45 + \tfrac{1}{2} \alpha) \cos [45 - \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \delta)]
\end{aligned} \tag{35}
$$

19. Aus der Länge und Breite eines Gestirnes dessen Declination und Rectascension zu finden.

Aus demselben Dreiecke *LPS* (Fig. 5) erhalten wir auf dem in §. 18 betretenen Wege:

$$
\begin{aligned}
\sin \delta &= \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda \\
\cos \delta \sin \alpha &= -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda \\
\cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda,
\end{aligned} \tag{36}
$$

oder, für logarithmische Rechnung umgeformt:

$$
\begin{aligned}
m \sin M &= \sin \beta \\
m \cos M &= \cos \beta \sin \lambda \\
\sin \delta &= m \sin (M + \varepsilon) \\
\cos \delta \sin \alpha &= m \cos (M + \varepsilon) \\
\cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda,
\end{aligned} \tag{37}
$$

oder

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \lambda},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos (M + \varepsilon)}{\cos M} \operatorname{tg} \lambda, \quad \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} (M + \varepsilon) \sin \alpha, \tag{38}$$

und zur Prüfung der Rechnung:

$$\frac{\cos (M + \varepsilon)}{\cos M} = \frac{\cos \delta \sin \alpha}{\cos \beta \sin \lambda}.$$

Für den Winkel am Sterne η hat man wieder entweder die Ausdrücke (33) des vorhergehenden §., oder die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos \eta &= \cos \varepsilon \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \beta \sin \lambda, \\ \cos \delta \sin \eta &= \sin \varepsilon \cos \lambda. \end{aligned} \tag{39}$$

20. Die Sonne bewegt sich in der Ekliptik, und es ist daher, von einer kleinen 1″ nicht überschreitenden Störung abgesehen, ihre Breite $\beta = 0$. Handelt es sich also darum, aus der Rectascension und Declination der Sonne ihre Länge, oder umgekehrt aus letzterer die beiden erstgenannten Coordinaten zu finden, so hat man unmittelbar aus dem rechtwinkeligen Dreiecke γBG (Fig. 5), in welchem, wenn die Sonne in G sich befindet, $\gamma B = \alpha$, $BG = \delta$ und $\gamma G = \lambda$ ist:

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \lambda &= \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \varepsilon}, \end{aligned} \tag{40}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \lambda \cos \varepsilon \\ \sin \delta &= \sin \lambda \sin \varepsilon \\ \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} \varepsilon \sin \alpha. \end{aligned} \tag{41}$$

Diese Formeln folgen natürlich auch aus den Gleichungen der beiden vorhergehenden Paragraphe, wenn man $\beta = 0$ setzt.

Besondere Erscheinungen der täglichen Bewegung.

21. In dem sphärischen Dreiecke, welches irgend ein Gestirn mit dem Nordpole und dem Zenith des Beobachters bildet, besteht die Gleichung [§. 16]:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$

wo h die Höhe, δ die Declination, t den Stundenwinkel des Gestirnes, φ die Polhöhe bedeutet. Das Gestirn ist im Horizonte, wenn $h = 0$; bezeichnen wir den für diese Stellung stattfindenden Stundenwinkel mit t_0, so ist:

$$0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_0,$$

woraus folgt:

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta. \tag{42}$$