biegende Kraft P den Stab ebenso stark beansprucht, als eine in der Achsenrichtung ziehende von gleicher Grösse. Dies gilt allerdings strenggenommen nur unter Vernachlässigung der Schubspannungen bei Berechnung der Biegung. — Viele nützliche Anwendungen finden auch die Formeln der Fälle IV. und V. (s. bei den Achsen und Wellen).

§. 19.

Festigkeit der Gefässwände.

Zur Beurtheilung der Festigkeit runder Gefässe von verhältnissmässig geringer Wanddicke können die in folgender Tabelle zusammengestellten Werthe, welche sich auf einige der wichtigsten Fälle der Maschinenpraxis beziehen, gebraucht werden. Die Theorie der Gefässfestigkeit ist noch nicht als völlig abgeschlossen zu betrachten; ziemlich unsicher erscheint namentlich bis dahin noch die Theorie des von aussen gepressten dünnwandigen Cylinders, weshalb die bezüglichen Formeln weggelassen wurden. In den umstehenden Ausdrücken bezeichnet:

p den auf die Gefässwand wirkenden Flächendruck (nach Abzug des gegenseitigen),
$\mathfrak{S}$ die im Material der Wand eintretende Maximalspannung,
E den Elastizitätsmodul des Materials,
r und δ Gefässhalbmesser und -Wanddicke.

Die Formeln unter (I.) und (II.) haben eine bis zur Bruchgrenze gehende Gültigkeit, immerhin aber nur als Annäherungswerthe.

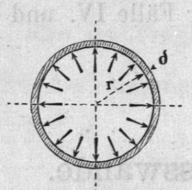
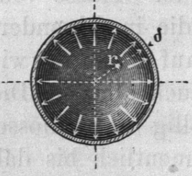
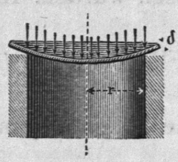
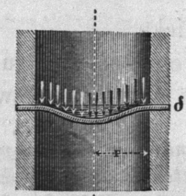
1. Beispiel. Für ein schmiedeisernes cylindrisches Gefäss von 1000^{mm} Durchmesser und 10^{mm} Wanddicke sei eine Materialspannung $\mathfrak{S} = 8$ gestattet. Dann kann dasselbe nach (I.) einer inneren Ueberdruckspannung

$$p = 8\left(\sqrt{\frac{520}{500}} - 1\right) = 8 \,.\, 0{,}0198 = 0{,}158^k \text{ pro } \square\text{Millimeter ausgesetzt}$$

werden. In Atmosphären ausgedrückt beträgt dies 100 . 0,158 = 15,8 Atm. Das Gefäss würde zerspringen (wegen $K = 40$), wenn die innere Spannung etwa das 5fache oder 79 Atmosphären betrüge.

2. Beispiel. Ein kugelförmiges Gefäss von den genannten Angaben würde nach (II.) für $\mathfrak{S} = 8$ einer Spannung $p = \frac{16 \,.\, 10}{500} = 0{,}32^k$ pro $\square^{mm}$, d. i. einem Drucke von 32 Atmosphären auszusetzen sein.

3. Beispiel. Ein dem ersten Gefässe angenieteter ebener schmiedeiserner Boden würde nach (IV.) bei $\mathfrak{S} = 8$ folgende grosse Dicke δ haben müssen: $\delta = 500 \,.\, \sqrt{2/_3} \,.\, \sqrt{\frac{0{,}158}{8}} = 500 \,.\, 0{,}816 \,.\, 0{,}14 = 57{,}12 \sim 57^{mm}$.

Nro.	Angriffweise.	Tragkraft p.	Wanddicke δ.
I. Cylinder.		$p=\mathfrak{S}\left(\sqrt{1+\frac{2\,\delta}{r}}-1\right)$	$\frac{\delta}{r}=\frac{p}{\mathfrak{S}}\left(1+\frac{p}{2\mathfrak{S}}\right)$
II. Kugel.		$p=2\,\mathfrak{S}\,\frac{\delta}{r}$	$\frac{\delta}{r}=\frac{p}{2\mathfrak{S}}$
III. Runde Platte.		$p=\mathfrak{S}\left(\frac{\delta}{r}\right)^2$	$\frac{\delta}{r}=\sqrt{\frac{p}{\mathfrak{S}}}$
IV. Runde Platte.		$p=\frac{3}{2}\,\mathfrak{S}\left(\frac{\delta}{r}\right)^2$	$\frac{\delta}{r}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{p}{\mathfrak{S}}}$

Die Einbiegung f, welche die ebene runde Platte erfährt, lässt sich nach Grashof für den Fall III. berechnen aus:

$$\frac{f}{\delta}=\frac{5}{6}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\frac{p}{E}\quad\ldots\ldots\quad(24)$$

und für den Fall IV.:

$$\frac{f}{\delta}=\frac{1}{6}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\frac{p}{E}\quad\ldots\ldots\quad(25)$$

4. Beispiel. Die in Beispiel 3. berechnete Platte würde sich hiernach wegen $E=20000$ einbiegen um $f=\frac{57}{6}\cdot\left(\frac{500}{57}\right)^4\cdot\frac{0{,}158}{20000}=0{,}44^{mm}$.

Für Gefässe, deren Wände wegen aussergewöhnlicher innerer Pressungen verhältnissmässig sehr dick gemacht werden müssen, wie die Cylinder und Pumpen hydraulischer Pressen, die Kanonen u. s. w., reichen die vorstehenden Formeln nicht aus. Bei solchen Gefässen sind die Faserspannungen an verschiedenen Punkten eines Radius unter Umständen sehr von einander verschieden; ihr Verhältniss ist aber von entscheidendem Einfluss auf die Tragkraft. Je nachdem dieses Verhältniss der Spannungen angenommen oder berechnet wird, gestalten sich die Formeln für die Wanddicke wesentlich anders. Brix berechnet die Spannungen an verschiedenen Punkten eines Radius unter der Annahme, dass die Dicke der Rohrwand durch die innere Pressung nicht geändert werde; Barlow nimmt eine Aenderung an, und zwar eine solche, bei der der ringförmige Querschnitt des (runden) Gefässes seine Grösse nicht ändere; Lamé macht keine vorgängige Annahme, sondern berechnet mit grosser Strenge die Spannungsänderung, welche an jeder Stelle in Folge der inneren Pressung stattfindet, und hat damit die zuverlässigste, das wahrscheinliche Verhalten der Stofftheilchen am genauesten ausdrückende Berechnungsmethode geliefert. Unter Beibehaltung der vorhin gebrauchten Bezeichnungen erhält man nach den drei Theorien*) die folgenden Formeln:

Werthe.		Brix.	Barlow.	Lamé.
Hohlcylinder	$p =$	$\mathfrak{S}\ log\ nat\ e^{\frac{p}{\mathfrak{S}}} - 1$	$\dfrac{\mathfrak{S}}{1 + \dfrac{r}{\delta}}$	$\mathfrak{S}\dfrac{(r+\delta)^2 - r^2}{(r+\delta)^2 + r^2}$
	$\dfrac{\delta}{r} =$	$e^{\frac{p}{\mathfrak{S}}} - 1$	$\dfrac{p}{\mathfrak{S} - p}$	$\sqrt{\dfrac{\mathfrak{S}+p}{\mathfrak{S}-p}} - 1$
Hohlkugel	$p =$	$2\,\mathfrak{S}\dfrac{\delta}{r}$	$\dfrac{2\,\mathfrak{S}}{1 + \dfrac{r}{\delta}}$	$2\,\mathfrak{S}\,\dfrac{(r+\delta)^3 - r^3}{(r+\delta)^3 + 2r^3}$
	$\dfrac{\delta}{r} =$	$\dfrac{1}{2}\,\dfrac{p}{\mathfrak{S}}$	$\dfrac{p}{2\,\mathfrak{S} - p}$	$\sqrt[3]{\dfrac{2(\mathfrak{S}+p)}{2\,\mathfrak{S}-p}} - 1$

*) Siehe Org. f. Eisenbahnwesen 1859, S. 59 ff. Baurath Dr. H. Scheffler: Die Elastizitätsverhältnisse der Röhren, in welchem lehrreichen Artikel der Gegenstand in eingehender Weise auch für die verwickelten Probleme von Röhren mit Böden und von verstärkten Röhren behandelt ist.

Für die Spannung $\mathfrak{S}'$ in einer Ringschicht, welche um r' statt um r vom Zentrum abliegt, ergibt die Lamé'sche Untersuchung den Werth:

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2}\left[1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2\right] - \frac{p}{2}\left[1-\left(\frac{r}{r'}\right)^2\right].$$

Entspricht r' der Schicht am Umfang des (cylindrischen) Gefässes, so dass $r' = r + \delta$, so folgt hieraus:

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2}\left[\frac{\left(1+\frac{r}{\delta}\right)^2+1}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2}\right] \frac{p}{2}\,\frac{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2-1}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2} \,. \quad . \quad (26)$$

oder abgekürzt, wenn $\left(1+\frac{\delta}{r}\right)$ mit μ bezeichnet wird:

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2}\,\frac{\mu^2+1}{\mu^2} - \frac{p}{2}\,\frac{\mu^2-1}{\mu^2}.$$

Beispiel. Für $\delta = r$, d. i. $\mu = 2$ kommt $\mathfrak{S}' = {}^5/_8\,\mathfrak{S} - {}^3/_8\,p$. In diesem Falle ist ausserdem nach der Anfangsformel $p = {}^3/_5\,\mathfrak{S}$, somit $\mathfrak{S}' = {}^5/_8\,\mathfrak{S} - {}^9/_{40}\,\mathfrak{S} = {}^2/_5\,\mathfrak{S}$. Das Material ist hiernach bei dickwandigen Gefässen mit innerem Druck aussen weit weniger als innen, also nicht besonders günstig verwendet.

Alle drei Theorien ergeben, dass an der inneren Wand die Materialspannung am stärksten wird; es gilt demnach $\mathfrak{S}$ für die innerste Ringschicht; die Lamé'sche Formel, und auch schon die Barlow'sche, zeigt dabei das bemerkenswerthe Resultat, dass das Steigern der Wanddicke über gewisse Grenzen hinaus die Tragkraft nicht mehr erhöht. Die Grenze für die Tragkraft zur Spannung $\mathfrak{S}$ wird erreicht, wenn $p = \mathfrak{S}$ wird; die theoretische Tragkraft überhaupt wird also erschöpft, wenn $p =$ dem Tragmodul des Materials wird. Der innere Druck fängt dann an, die innersten Fasern bleibend zu dehnen, und muss sie bei Steigerungen über den Bruchmodul hinaus zersprengen. Die theoretische Tragkraftgrenze liegt hiernach bei $p = T$, also für

	Gusseisen	Schmiedeisen	Gussstahl
bei p . . . . . =	7,5	15	25
in Atmosphären	750	1500	2500

Ungleichförmigkeiten des Materials können herbeiführen, dass ziemlich tief unter diesen Grenzen schon die Gefahr nicht nur des Dehnens, sondern des Bruches eintritt. Da in Geschützen von grossem Kaliber Spannungen über 2500 Atmosphären vorkommen, so ist es erklärlich, dass Geschütze aus gewöhnlicher Bronze den

Schusswirkungen nicht dauernd widerstehen können, ja wenn auch homogene Gussstahlgeschütze grossen Kalibers sich oft nicht haltbar zeigten.

Das Ausschiessen oder Ausbrennen der Kammer in den gewöhnlichen Bronzegeschützen erklärt sich hier schon als aus der übermässigen Beanspruchung der innersten Ringschicht hervorgehend, wenn auch chemische Wirkungen mitspielen mögen.

Um die Geschütze genügend fest zu erhalten, hat man mit Erfolg den Weg betreten, ihre Ringschichten unhomogen, die äusseren anders gespannt als die inneren, herzustellen, und dazu das Umreifen, das Abschrecken von innen und andere Methoden versucht*). Die Umreifung hat sich als die zweckmässigste Methode herausgestellt. Ihre wesentliche Wirkung besteht in einer Zusammenpressung der innersten Ringschichten. Diese werden nun durch die Pressung der Pulvergase vorerst zurück in den Normalzustand und dann erst in den gedehnten Zustand versetzt, dürfen demnach einer weit stärkeren Dehnung ausgesetzt werden, als wenn sie ihren natürlichen Molekularanziehungen allein überlassen wären.

Die Berechnung der Festigkeitszustände umreifter Geschütze ist nicht wenig weitläufig. Einigen Anhalt kann das Folgende geben. Zieht man nicht bloss die innere, sondern auch die äussere, die Gefässwände belastende Pressung p' in Betracht, so erhält man die folgende, ebenfalls von Lamé ermittelte Beziehung:

$$\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2 = \frac{\mathfrak{S}+p}{\mathfrak{S}-p+2p'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Hieraus ergibt sich, wenn, wie vorhin abkürzend, $1+\dfrac{\delta}{r}=\mu$ gesetzt wird:

$$p = \mathfrak{S}\,\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1} + 2p'\,\frac{\mu^2}{\mu^2+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

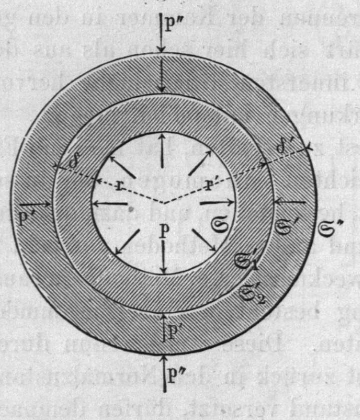
wonach $\mathfrak{S}$ um so kleiner gegen p, also in unserem Falle günstiger ausfällt, je grösser p' wird. Beim beringten Gefäss ist nun p' nicht unveränderlich und konstant, sondern hängt ab von dem durch die innere Pressung p hervorgerufenen Druck der Cylinderwand auf den Reifen. Unter Benutzung der in Fig. 6 (a. f. S.) eingetragenen Bezeichnungen nehmen wir vorerst an, dass im Normal-

---

*) Siehe Dingler's Journal 1865, Bd. 177. Ueber die künstlichen Metallkonstruktionen der Geschützrohre, von Hauptmann D . . . . y (Darapsky) in Kassel, von welchem Verfasser andere treffliche Mittheilungen über ähnliche Gegenstände den angeführten folgen; siehe ferner die Aufsätze im Pract. Mech. Journ. 1867: On some points of practice in iron founding.

zustand der Ring das Rohr mit der Spannung Null berühre, also dass bei $p = 0$ auch $\mathfrak{S}_1' = \mathfrak{S}_2' = 0$. Tritt alsdann der Druck p ein und ist ausserdem $p'' = 0$ oder vernachlässigbar, so dehnen sich die Schichten bei r' um gleichviel aus, haben also die gleiche Zugspannung $\mathfrak{S}_1' = \mathfrak{S}_2'$. Dann aber bewirkt zugleich die Spannung $\mathfrak{S}_2'$ der inneren Schicht des Reifens den nach innen gerichteten Druck p', und es besteht zwischen diesem und den Materialspannungen des Reifens die durch die erste Lamé'sche Formel*) angegebene Beziehung, nämlich, wenn $1 + \frac{\delta'}{r'} = \mu'$ gesetzt wird:

Fig. 6.



$$p' = \mathfrak{S}_2' \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Dies in (28) eingeführt, gibt wegen $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_2' = \mathfrak{S}_1'$:

$$p = \mathfrak{S} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2\,\mathfrak{S}' \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1}.$$

$\mathfrak{S}'$ ist aber gemäss (26) durch p und $\mathfrak{S}$ ausdrückbar. Man erhält nach einiger Umformung:

$$p = \mathfrak{S} \frac{\mu^2 \mu'^2 - 1}{\mu^2 \mu'^2 + 1} = \mathfrak{S} \frac{\left(1 + \frac{r}{\delta}\right)^2 \left(1 + \frac{r'}{\delta'}\right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{r}{\delta}\right)^2 \left(1 + \frac{r'}{\delta'}\right)^2 + 1} \quad . \quad (30)$$

Hier ist nach wie vor zwar die Spannung $\mathfrak{S}$ der innersten Ringschicht immer $> p$, allein ihr Verhältniss zu p nähert sich doch weit mehr der Einheit, als früher, wie folgende Zahlenreihe zeigt.

Wenn:		so ist:		und wird:			
$\frac{\delta}{r}$	$\frac{\delta'}{r'}$	μ	μ'	$\frac{p}{\mathfrak{S}}$	$\frac{\mathfrak{S}}{p}$	$\frac{\mathfrak{S}'}{p}$	$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}$
1	0	2	1	0,600	1,667	0,667	0,400
1	0,5	2	1,5	0,800	1,250	0,406	0,325
2	1	3	2	0,905	1,057	0,143	0,135

*) Diese wird aus (28) erhalten, wenn daselbst $p' =$ Null gemacht wird.

Man sieht hieraus, dass die blosse druckfreie Belegung eines Geschützes mit einem Reif, welcher aus demselben Material besteht, wie das Rohr, dieses letztere schon wesentlich verstärken kann. Wird aber der Reif auf das Rohr aufgezwängt, so übt derselbe von Anfang an einen radial nach innen gerichteten Druck p' auf die Rohrwand aus, welcher auf die durch p bedingte Grösse von $\mathfrak{S}$ einen bedeutenden und günstigen Einfluss ausüben kann.

Wir erhalten nämlich, indem wir den Werth für p' aus (29) in Formel (28) einführen:

$$p = \mathfrak{S}\,\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2\,\mathfrak{S}_2'\,\frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1}\,\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

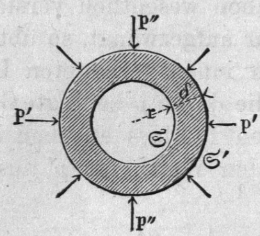
Hierin ist $\mathfrak{S}_2'$ einestheils eine Funktion von p, andserntheils aber auch eine solche der Herstellungsweise des Rohres. Wir werden weiter unten noch genauer sehen, wie ausserordentlich stark der letztere Einfluss ist und müssen uns deshalb hier mit Annahmen begnügen. Machen wir diejenige, dass der Reif gerade so fest aufgezogen sei, dass beim Maximalwerthe von p die Spannung $\mathfrak{S}_2' =$ der Spannung $\mathfrak{S}$ in der Rohrseele werde (was ohne Zweifel die günstigste Annahme sein wird), so erhalten wir aus (31):

$$\frac{p}{\mathfrak{S}} = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} + 2\,\frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 1}\,\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Beispiel. Es sei $\delta = r$, $\delta' = \delta = {}^1\!/_2 r'$, so ist $\mu = 2$, $\mu' = {}^3\!/_2$, und es kommt $\frac{p}{\mathfrak{S}} = {}^3\!/_5 + {}^{10}\!/_{13} \cdot {}^4\!/_5 = {}^{79}\!/_{65}$. Hier bleibt also $\mathfrak{S}$ hinter dem Werthe von p zurück oder mit anderen Worten p darf über den Tragmodul des Materials hinaus gesteigert werden, ohne dass die Spannung in letzterem denselben erreicht. Auch sehen wir hier, dass durch eine Umgürtung der Reifen mit weiteren Reifen, wie sie für die schwersten Geschütze benutzt wird, das Verhältniss zwischen p und $\mathfrak{S}$ noch günstiger gestaltet werden kann. Immerhin zeigt indessen unsere Rechnung, dass, wenn das Geschützmaterial gewöhnlicher Gussstahl wäre, also den Tragmodul 25 hätte, die Pulvergasspannung nicht über etwa $30^k = 3000$ Atmosphären hinaus gesteigert werden dürfte, ohne dem Rohr Gefahr zu drohen. Dem widersprechen aber die Messungen bei neueren Geschützproben. So soll die jüngste englische Riesenkanone Spannungen von 25,8 Tonnen pro Quadratzoll ausgehalten haben. Die Ingenieure sollen nun zwar solche Spannungen für zu hoch und für gefährlich halten, dagegen 25 Tonnen, d. i. rund 40^k auf den $\square^{mm}$ für zulässig erachten. Dies würde nothwendig voraussetzen, dass der Tragmodul des verwendeten Materials den des gewöhnlichen Gussstahls, d. i. 25^k, übertrifft; vielleicht hat man aber auch eine Härtung der Rohrseelenwand anzunehmen, die sich, wenn gut ausführbar, jedenfalls empfiehlt.

Die blosse Zusammenpressung eines cylindrischen Rohres von aussen, Fig. 7, ruft eine Beanspruchung der Rohrwand hervor, über welche Formel (27) Aufschluss zu geben vermag. Setzt man in derselben $p = 0$ oder nimmt p als vernachlässigbar an, so erhält man: $(\mathfrak{S} + 2p')\,\mu^2 = \mathfrak{S}$, woraus:

Fig. 7.



$$p' = \frac{\mathfrak{S}}{2}\,\frac{1-\mu^2}{\mu^2}$$

oder
$$\mathfrak{S} = -\,p'\,\frac{2\mu^2}{\mu^2-1} = -\,p'\,\frac{2\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2-1} \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass die Spannung in der Rohrseelenwand nunmehr aus einer Zugspannung in eine Druckspannung übergegangen ist. Für die Spannung $\mathfrak{S}'$ an der Mantelfläche kommt nach (26) wegen $p =$ Null: $\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2}\,\frac{\mu^2+1}{\mu^2}$; dies gibt:

$$\mathfrak{S}' = -\,p'\,\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1} = -\,p'\,\frac{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2+1}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2-1} \quad . \quad . \quad (34)$$

Dieser Werth ist kleiner als der vorige; denn, dividiren wir so erhalten wir das Verhältniss:

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}} = {}^1\!/_2\,\frac{\mu^2+1}{\mu^2} = {}^1\!/_2 \cdot \frac{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2+1}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

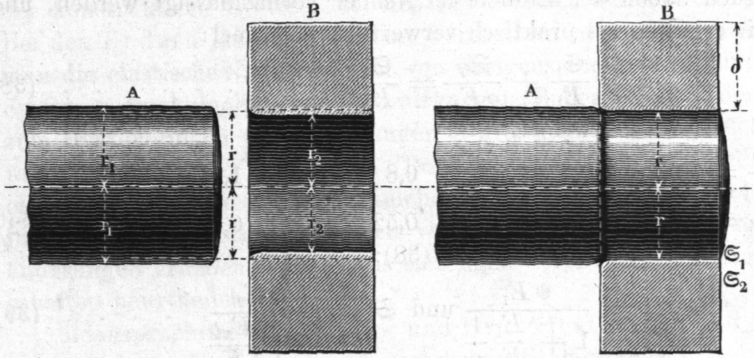
welches erst $= 1$ wird, wenn μ auf 1 herabgegangen, d. i. $\delta = 0$ geworden ist. Auch bei blosser äusserer Pressung ist somit die Spannung in der innersten Schicht der Rohrwand stärker als jede andere.

Beispiel. $\delta = r$, also $\mu = 2$. Dann ist die Spannung in der innersten Wandschicht $\mathfrak{S} = -\,{}^8\!/_3\,p'$ und $\mathfrak{S}' = -\,{}^5\!/_3\,p'$, somit $\mathfrak{S}' = {}^5\!/_8\,\mathfrak{S}$. Die entstehende Druckspannung an der Seelenwand ist somit grösser als die unter gleichen Verhältnissen bei der Pressung von innen entstehende Zugspannung in derselben Wandschicht; denn für diese fanden wir oben (bei Formel (30)) nur $\mathfrak{S} = {}^5\!/_3\,p$.

Im Maschinenbau wird das Aufziehen oder Aufzwängen von Reifen, von ringförmigen Radnaben, von Walzen u. s. w. vielfach ausgeführt, wodurch Verbindungen geschaffen werden, welche man Zwängungsverbindungen nennen kann. Das Verfahren hängt mit dem vorerwähnten eng zusammen. Die Theorie für den einfachsten Fall sei hier vorgeführt.

Ist, Fig. 8, B ein Ring oder eine Nabe von cylindrischer Bohrung, welche auf die cylindrische Achse A aufgezwängt werden soll, sei es in warmem, sei es in kaltem Zustande, so habe vor der Operation die Achse den Halbmesser r_1, die Ringhöhlung den Halbmesser r_2, nach geschehener Aufzwängung sei der den beiden Stücken gemeinsame Halbmesser $= r$. In A herrscht nach der

Fig. 8.



Aufzwängung eine gleichförmig vertheilte Druckspannung $\mathfrak{S}_1$, in B an der innersten Schicht eine solche auf Zug $\mathfrak{S}_2$. Für diese Spannungen gilt bei den Elastizitätsmodeln E_1 und E_2 gemäss Formel (2):

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{E_1} = \frac{r_1 - r}{r_1}, \qquad \frac{\mathfrak{S}_2}{E_2} = \frac{r - r_2}{r_2}.$$

Addirend erhält man: $r_1 \frac{\mathfrak{S}_1}{E_1} + r_2 \frac{\mathfrak{S}_2}{E_2} = r_1 - r_2$. Für den Konstrukteur ist wünschenswerth zu wissen, welches Verhältniss den Werthen r_1 und r_2 zu geben ist, um zu guten Resultaten zu gelangen. Bezeichnet man mit ψ den Quotienten $\frac{r_1 - r_2}{r_2}$, so erhält man aus dem Vorigen:

$$\psi = \frac{r_1}{r_2} \frac{\mathfrak{S}_1}{E_1} + \frac{\mathfrak{S}_2}{E_2} = \frac{\frac{\mathfrak{S}_1}{E_1} + \frac{\mathfrak{S}_2}{E_2}}{1 - \frac{\mathfrak{S}_1}{E_1}} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

$\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ sind aber von einander abhängig und zwar haben sie nach der Lamé'schen Formel folgende Beziehung:

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} = \mathfrak{S}_2 \frac{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 + 1},$$

wofür der Kürze halber gesetzt werde $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2\, \varrho$. Dies ergibt:

$$\psi = \frac{\frac{\mathfrak{S}_1}{E_1} + \frac{\mathfrak{S}_1}{\varrho E_2}}{1 - \frac{\mathfrak{S}_1}{E_1}} = \frac{\frac{\mathfrak{S}_2}{E_2} + \frac{\mathfrak{S}_2 \varrho}{E_1}}{1 - \frac{\mathfrak{S}_2 \varrho}{E_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Wenn A und B aus Metallen hergestellt sind, so kann der Bruch neben der Einheit im Nenner vernachlässigt werden, und wir erhalten als praktisch verwerthbare Formel:

$$\psi = \frac{\mathfrak{S}_1}{E_1} + \frac{\mathfrak{S}_1}{\varrho E_2} = \frac{\mathfrak{S}_2}{E_2} + \frac{\mathfrak{S}_2 \varrho}{E_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Hierin ist, wenn:

$\frac{\delta}{r} =$	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,5	2,0	3,0
$\varrho =$	0,385	0,438	0,468	0,528	0,600	0,724	0,800	0,882

Auch hat man noch aus (38):

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{\psi E_1}{1 + \frac{E_1}{E_2}\frac{1}{\varrho}} \text{ und } \mathfrak{S}_2 = \frac{\psi E_2}{1 + \frac{E_2 \varrho}{E_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Der Werth ψ fällt meistens so klein aus, dass die Herstellung des richtigen Verhältnisses zwischen r_1 und r_2 auf der Drehbank grosse Sorgfalt erheischt.

Beispiel. Schmiedeiserne Achse, gusseiserne Nabe, $E_1 = 20000$, $E_2 = 10000$; es sei $\delta = 2r$, also $\varrho = 0{,}8$, und werde gefordert, dass die durch die Zwängung entstehende Materialspannung $\mathfrak{S}_2$ in der inneren Nabenhöhlung nicht 5^k übersteige. Dann ist zu machen nach (38): $\psi = \frac{5}{10000} + \frac{5 \,.\, 0{,}8}{20000} = \frac{7}{10000} = \frac{1}{1429} \sim \frac{1}{1400}$. Machte man $\psi = 1:600$, so würde gemäss (39) in der Nabe eine Spannung von der Grösse $\mathfrak{S}_2 = \frac{1/_{600} \cdot 10000}{1 + \frac{10000 \,.\, 0{,}8}{20000}} = \frac{100}{6 \cdot 1{,}4}$, d. i. nahe $11{,}5^k$ entstehen; die Nabe würde also zerspringen. Die Kleinheit von ψ lässt schon die Tiefe der Drehstriche als beachtenswerth erscheinen.