VI. KAPITEL

Simultane Bestimmungen

a) Die simultane Bestimmung der Zeit und der Polhöhe mit Hilfe von Almukantaratdurchgängen

1. *Die Funktionaldeterminante.* Soll die Uhrkorrektion und die Polhöhe neben der Instrumentalzenitdistanz aus den Durchgängen dreier Sterne durch denselben Almukantarat berechnet werden können, so darf die Funktionaldeterminante der drei Funktionen

$$y_i = \cos z - \cos p_i \cos \Phi - \sin p_i \sin \Phi \cos (U_i - u - \alpha_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

in bezug auf die Unbekannten u, Φ und z nicht verschwinden. Setzt man

$$A_i = \frac{\partial y_i}{\partial u} = \quad \sin \Phi \sin z \sin a_i,$$

$$B_i = \frac{\partial y_i}{\partial \Phi} = - \sin z \cos a_i,$$

$$C_i = \frac{\partial y_i}{\partial z} = \sin z,$$

so wird die Funktionaldeterminante J gleich:

$$J = S\, A_1 (B_2\, C_3 - B_3\, C_2),$$

worin S die durch zyklische Vertauschung entstehende Summe bezeichnet. Es ist

$$J = \sin \Phi \sin^3 z\, S \sin a_1 (\cos a_2 - \cos a_3).$$

Da aber

$$\begin{aligned} S \sin a_1 (\cos a_2 - \cos a_3) &= \sin a_1 (\cos a_2 - \cos a_3) + \sin a_2 (\cos a_3 - \cos a_1) \\ &\qquad + \sin a_3 (\cos a_1 - \cos a_2) \\ &= \sin a_1 (\cos a_2 - \cos a_3) - \cos a_1 (\sin a_2 - \sin a_3) \\ &\qquad + \sin (a_2 - a_3) \end{aligned}$$

ist, verschwindet J nur, wenn von den 3 Azimuten 2 einander gleich werden.

Es sind zwei strenge Lösungen der Aufgabe, u und Φ aus den Gleichungen

$$y_2 - y_1 = 0$$
$$y_3 - y_2 = 0,$$

zu berechnen, bekannt; die eine geht auf CAGNOLI zurück, die andere stammt von GAUSS. Wir behandeln diese Lösungen nicht, sondern besprechen nur die Lösung, die von bekannten Näherungswerten ausgeht. Zur Berechnung der unbekannten Verbesserungen der Näherungswerte liegen dann lineare Beziehungen vor; diese vermitteln die Lösung auch dann, wenn die Durchgänge von mehr als 3 Sternen beobachtet worden sind.

2. *Allgemeine Bemerkungen; das Prismenastrolab.* Zur Beobachtung der Durchgänge durch einen bestimmten Almukantarat hat man besondere Instrumente konstruiert; das bekannteste ist das Prismenastrolab von CLAUDE und DRIENCOURT. Das Fernrohr dieses Instrumentes wird nur in horizontaler Stellung benützt und kann durch Drehung um eine vertikale Achse in jedes beliebige Azimut gebracht werden. Vor dem Objektiv ist ein gleichseitiges Prisma befestigt; eine Fläche desselben kann durch Autokollimation senkrecht zur optischen Achse des Fernrohres gestellt werden. Liegen die Kanten des Prismas horizontal, so dringen die Strahlen eines Sternes in 30⁰ Zenitdistanz senkrecht durch die obere Fläche in das Prisma ein und werden von der unteren in horizontaler Richtung in das Fernrohr geworfen. Vor dem Prisma wird ein Quecksilberhorizont aufgestellt; er wirft die vom Stern kommenden Strahlen auf die untere Fläche des Prismas, sie durchdringen diese in senkrechter Richtung und werden von der oberen Fläche ebenfalls in horizontaler Richtung in das Fernrohr geworfen. Im Gesichtsfeld bewegen sich die beiden Sternbilder in entgegengesetzter Richtung. Das Fernrohr wird durch Korrektionsschrauben so gestellt, daß die beiden Sternbilder in unmittelbarer Nähe der optischen Achse aneinander vorbeigehen. Im Moment der Koinzidenz befindet sich dann der Stern in einer bestimmten, durch die Prismenwinkel bestimmten scheinbaren Zenitdistanz; sie ist nur dann genau gleich 30^0, wenn die drei Prismenwinkel genau gleich 60^0 sind. Das Instrument gestattet also, die Durchgänge der Sterne durch einen Almukantarat von bestimmter Zenitdistanz zu beobachten, ohne daß die Hilfe eines Niveaus in Anspruch genommen werden muß. Es ist nur notwendig, die Änderungen, welche die wahren Zenitdistanzen infolge von Änderungen der meteorologischen Verhältnisse erleiden, in Rechnung zu stellen.

3. *Die Reduktionsformeln.* Die linearen Beziehungen, welche die Kenntnis der unbekannten Verbesserungen der Näherungswerte vermitteln, erhält man auf folgendem Weg. Es sei Z der konstante Wert der Instrumentalzenitdistanz, in der die Durchgänge beobachtet werden, und

$$dr_i = r_i - r_0$$

die Änderung, welche die Refraktion r_i gegenüber einem durchschnittlichen konstanten Wert r_0 während der Beobachtungsdauer erleidet. Die wahre Zenitdistanz ζ_{i0} ist dann gleich

$$\zeta_{i0} = Z + r_0 + dr_i$$

oder, wenn

$$Z + r_0 = z$$

gesetzt wird, gleich

$$\zeta_{i0} = z + dr_i.$$

Sind nun z_0, u_0 und Φ_0 Näherungswerte der Unbekannten z, u und Φ, und dz, du und $d\Phi$ deren Verbesserungen, so daß

$$\begin{aligned} \zeta_{i0} &= z_0 + dz + dr_i, \\ u &= u_0 + du, \\ \Phi &= \Phi_0 + d\Phi \end{aligned}$$

wird, so erhält man durch Entwicklung der Gleichung

$$\begin{aligned} \cos(z_0 + dz + dr_i) - \cos(\Phi_0 + d\Phi)\cos p_i \\ - \sin(\Phi_0 + d\Phi)\sin p_i \cos(U_i + u_0 + du - \alpha_i) = 0 \end{aligned}$$

unter Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung die Beziehung

$$\begin{aligned} \cos z_0 - \cos\Phi_0 \cos p_i - \sin\Phi_0 \sin p_i \cos(U_i + u_0 - \alpha_i) \\ + du \sin\Phi_0 \sin z_0 \sin a_i - d\Phi \sin z_0 \cos a_i - (dz + dr_i)\sin z_0 = 0. \end{aligned}$$

Definiert man nun den Winkel ζ_i durch die Gleichung

$$\cos\zeta_i = \cos\Phi_0 \cos p_i + \sin\Phi_0 \sin p_i \cos(U_i + u_0 - \alpha_i), \tag{75a}$$

und setzt

$$\begin{aligned} \cos z_0 - \cos\zeta_i &= -2 \sin\frac{z_0 + \zeta_i}{2} \sin\frac{z_0 - \zeta_i}{2} \\ &= \sin z_0 \cdot (\zeta_i - z_0) + \cdots, \end{aligned}$$

so erhält man die Beziehung

$$(dz + dr_i) - du \sin\Phi_0 \sin a_i + d\Phi \cos a_i = \zeta_i - z_0$$

oder, wenn man als fingierte Beobachtungsgrößen einführt

$$l_i = \zeta_i - z_0 - dr_i: \tag{75b}$$

$$dz - du \sin\Phi_0 \sin a_i + d\Phi \cos a_i = l_i + \lambda_i, \tag{75c}$$

worin λ_i die scheinbaren Fehler sind, deren Quadratsumme zu einem Minimum zu machen ist, wenn überschüssige Beobachtungen vorhanden sind.

4. *Die Berücksichtigung der täglichen Aberration.* Der Einfluß der täglichen Aberration kann leicht nachträglich in Rechnung gestellt werden.

Die Korrektion δl_i, die an den fingierten Beobachtungsgrößen l_i anzubringen ist, wenn zu deren Berechnung die scheinbaren Örter nicht wegen der täglichen Aberration verbessert worden sind, wird durch den Ausdruck

$$\delta l_i = -(\sin q_i \, d\alpha_i \sin p_i - \cos q_i \, dp_i)$$

gegeben, in welchem zu setzen ist

$$d\alpha_i \sin p_i = +0\overset{''}{,}322 \sin \Phi \cos t_i ,$$
$$dp_i = -0\overset{''}{,}322 \sin \Phi \sin t_i \cos p_i .$$

Da aber

$$\cos t_i \sin q_i + \sin t_i \cos q_i \cos p_i = \sin a_i \cos z$$

ist, wird

$$\delta l_i = -0\overset{''}{,}322 \sin \Phi \cos z \sin a_i .$$

Verbessert man um diesen Betrag die Werte von l_i in den Fehlergleichungen, so lassen sie sich, wenn

$$du' = du - 0\overset{''}{,}322 \cos z$$

gesetzt wird, in der alten Form schreiben:

$$dz - du' \sin \Phi_0 \sin a_i + d\Phi \cos a_i = l_i + \lambda_i .$$

Daraus ist ersichtlich, daß man an dem Wert du, der ohne Rücksicht auf den Einfluß der täglichen Aberration ermittelt wird, die Korrektion

$$\delta u = +0\overset{''}{,}322 \cos z = +0\overset{s}{,}021 \cos z$$

anzubringen hat. Die andern Unbekannten, dz und $d\Phi$, bedürfen keiner Verbesserung.

5. *Die mittleren Fehler der Unbekannten.* Im Differentialausdruck des Cosinussatzes:

$$dz + d\Phi \cos a_i - du \sin \Phi \sin a_i$$
$$= dU_i \sin p_i \sin q_i - (d\alpha_i \sin p_i \sin q_i - dp_i \cos q_i)$$

identifizieren wir dU_i, $d\alpha_i$, dp_i mit den wahren Fehlern der Größen U_i, α_i, p_i und setzen

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{U_i} \sin p_i \sin q_i - (\varepsilon_{\alpha_i} \sin p_i \sin q_i - \varepsilon_{p_i} \cos q_i) ;$$

mittels der Beziehungen

$$\varepsilon_z + \varepsilon_\Phi \cos a_1 - \varepsilon_u \sin \Phi \sin a_1 = \varepsilon_1 ,$$
$$\varepsilon_z + \varepsilon_\Phi \cos a_2 - \varepsilon_u \sin \Phi \sin a_2 = \varepsilon_2 ,$$
$$\varepsilon_z + \varepsilon_\Phi \cos a_3 - \varepsilon_u \sin \Phi \sin a_3 = \varepsilon_3$$

führen wir die wahren Fehler ε_Φ und ε_u auf die wahren Fehler ε_{U_i}, ε_{α_i} und

ε_{p_i} zurück, indem wir diese Beziehungen nach den Unbekannten ε_Φ und ε_u auflösen. Setzt man zur Abkürzung

$$c_{ik} = \cos a_i - \cos a_k,$$
$$s_{ik} = \sin a_i - \sin a_k,$$

so führt die Elimination von dz zunächst zu den beiden Gleichungen

$$c_{21}\,\varepsilon_\Phi - s_{21}\,\varepsilon_u \sin\Phi = \varepsilon_2 - \varepsilon_1,$$
$$c_{32}\,\varepsilon_\Phi - s_{32}\,\varepsilon_u \sin\Phi = \varepsilon_3 - \varepsilon_2;$$

somit wird

$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})\;\varepsilon_u \sin\Phi = \varepsilon_1\,c_{32} - \varepsilon_2(c_{32} + c_{21}) + \varepsilon_3\,c_{21},$$
$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})\;\varepsilon_\Phi = \varepsilon_1\,s_{32} - \varepsilon_2(s_{32} + s_{21}) + \varepsilon_3\,s_{21}.$$

Geht man von den wahren Fehlern ε zu den mittleren Fehlern m über, so erhält man:

$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})^2\,m_u^2 \sin^2\Phi = m_1^2\,c_{32}^2 + m_2^2\,(c_{32} + c_{21})^2 + m_3^2\,c_{21}^2,$$
$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})^2\,m_\Phi^2 = m_1^2\,s_{32}^2 + m_2^2\,(s_{32} + s_{21})^2 + m_3^2\,s_{21}^2.$$

Die rechter Hand auftretenden mittleren Fehler m_i führen wir auf ihre Komponenten zurück; es ist

$$m_i^2 = m_{U_i}^2 \sin^2 p_i \sin^2 q_i + m^{*2},$$

worin m^* die aus der Unsicherheit des Sternortes entspringende Fehlerkomponente bezeichnet. Führt man m_{U_i} auf die beiden Komponenten a_0 und b_0 zurück (vergleiche Seite 46) und auf den Winkel (q), den die Bewegungsrichtung des Sternes mit der Normalen zum Almukantarat bildet: $(q) = 90^0 - q$, so erhält man, wenn n Fadendurchgänge oder Kontaktbeobachtungen vorliegen:

$$m_i^2 = \frac{1}{n}\sin^2 p_i \sin^2 q_i \left(a_0^2 + \frac{b_0^2 \operatorname{cosec}^2 p_i}{V^2 \sin^2 q_i}\right) + m^{*2}. \tag{76a}$$

Wir nehmen wieder an, die Zahl n der Durchgänge werde so gewählt, daß m_i^2 gleich dem konstanten Wert m^2 wird. Die Ausdrücke für die Quadrate der mittleren Fehler von u und Φ nehmen dann die Form an:

$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})^2\,m_u^2 \sin^2\Phi = 2\,m^2\,(c_{32}^2 + c_{32}\,c_{21} + c_{21}^2),$$
$$(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})^2\,m_\Phi^2 = 2\,m^2\,(s_{32}^2 + s_{32}\,s_{21} + s_{21}^2).$$

Nimmt man nun an, die drei Sterne seien in drei um je 120^0 verschiedenen Azimuten beobachtet worden, so daß

$$s_{21} = -\frac{3}{2}\sin a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a_1; \quad s_{32} = -\sqrt{3}\cos a_1$$

$$c_{21} = -\frac{3}{2}\cos a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_1; \quad c_{32} = -\sqrt{3}\sin a_1$$

wird, so findet man leicht, daß

$$2\,(c_{32}^2 + c_{32}\,c_{21} + c_{21}^2) = 2\,(s_{32}^2 + s_{32}\,s_{21} + s_{21}^2) = \frac{2}{3}\,(s_{21}\,c_{32} - s_{32}\,c_{21})^2 = \frac{9}{2}$$

ist. Somit erhält man die Beziehung

$$m_u^2 \sin^2 \Phi = m_\Phi^2 = \frac{2}{3}\,m^2. \tag{76b}$$

Ist nicht nur *eine* Gruppe von drei Sternen in Azimutunterschieden von 120^0 beobachtet worden, sondern liegen N' solcher Gruppen vor, so daß das arithmetische Mittel der Gruppenwerte von u und von Φ als Endresultat aller Beobachtungen anzunehmen ist, so sind diesen Mittelwerten mittlere Fehler M_u und M_Φ beizulegen, die durch die Beziehung

$$M_u^2 \sin^2 \Phi = M_\Phi^2 = \frac{2\,m^2}{3\,N'}$$

gegeben werden. Da aber die Gesamtzahl aller einzelnen Beobachtungen gleich $3\,N'$ ist, so erhält man, wenn

$$3\,N' = N$$

gesetzt wird:

$$M_u \sin \Phi = M_\Phi = \pm \sqrt{\frac{2}{N}}\; m.$$

75c

6. *Das Gewicht der Fehlergleichung* (74c). In den vorangehenden Ausführungen haben wir angenommen, daß Fadendurchgänge oder Kontaktbeobachtungen gemacht worden seien. Die Reduktion auf die Zeit des Durchganges durch den Almukantarat des Mittelfadens ist nach der Beziehung (4) respektive (5b), Seite 33, zu berechnen. Das Prismenastrolab enthält in der vom Hersteller gelieferten Form kein Fadennetz, so daß nur der Moment der Koinzidenz der beiden Bilder beobachtet werden kann. Es besteht dann nicht die Möglichkeit, die mittleren Fehler in verschiedenen Azimuten durch die Zahl der beobachteten Fadendurchgänge — wenigstens angenähert — gleich groß zu machen.

Bei der Ableitung des Gewichtes, das der Fehlergleichung (75c) beizulegen ist, behalten wir die Annahme, daß die Zahl der Faden- oder Kontaktbeobachtungen gleich n sei, bei; die resultierende Gewichtsformel ist leicht auf den Fall, daß als Beobachtungszeiten nur Koinzidenzmomente vorliegen, zu spezialisieren; man hat nur $n = 1$ zu setzen und an Stelle der Vergrößerungszahl V den doppelten Betrag $2\,V$ einzuführen, weil die Relativgeschwindigkeit der beiden Sternbilder gegeneinander doppelt so groß ist als die Geschwindigkeit der Bewegung des einzelnen Bildes gegenüber einem festen Faden.

Es sei ε_l der wahre Fehler der fingierten Beobachtungsgrößen in den Fehlergleichungen (75c). Da l_i durch die Beziehung

$$l_i = \zeta_i - z_0 - dr_i$$

definiert ist, wird ε_l gleich dem wahren ε_ζ von ζ_i minus dem wahren Fehler von dr_i. Diesen dürfen wir vernachlässigen, da die Änderungen dr_i der Refraktion sehr klein sind. Dagegen führen wir einen Fehler ein, der anomale Refraktionsverhältnisse als Folge einer Zenitablenkung erfaßt, und bezeichnen diesen Fehler mit ε_r, so daß

$$\varepsilon_l = \varepsilon_\zeta + \varepsilon_r$$

wird.

Führt man den wahren Fehler ε_ζ auf die wahren Fehler ε_{U_i}, ε_{α_i}, ε_{p_i} zurück, so erhält man

$$\varepsilon_l = \varepsilon_{U_i} \sin p_i \sin q_i - (\varepsilon_{\alpha_i} \sin p_i \sin q_i - \varepsilon_{p_i} \cos q_i) + \varepsilon_r.$$

Der ε_l entsprechende mittlere Fehler wird also gleich

$$m_l^2 = m_{U_i}^2 \sin^2 p_i \sin^2 q_i + m^{*2} + m_r^2.$$

Führt man hierin m_{U_i} auf die Komponenten a_0 und b_0 sowie auf die Zahl n zurück, so wird

$$m_l^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{b_0^2}{V^2} + a_0^2 \sin^2 p_i \sin^2 q_i\right) + m^{*2} + m_r^2. \tag{77a}$$

Faßt man die vom Sternort unabhängigen Glieder zusammen und setzt

$$m_0^2 = \frac{b_0^2}{n V^2} + m^{*2} + m_r^2$$

und führt für den Faktor von a_0^2 das gleichwertige Produkt $\sin^2 a_i \sin^2 \Phi_0$ ein, so erhält man als Gewicht g_i von l_i den Ausdruck:

$$g_i = \frac{\text{constans}}{m_0^2 + \frac{1}{n} a_0^2 \sin^2 \Phi_0 \sin^2 a_i}. \tag{77b}$$

Wird nur die Koinzidenz des reflektierten Bildes mit dem direkten beobachtet, so ist zu setzen

$$m_0^2 = \frac{b_0^2}{(2V)^2} + m^{*2} + m_r^2 \tag{78a}$$

und

$$g_i = \frac{\text{constans}}{m_0^2 + a_0^2 \sin^2 \Phi_0 \sin^2 a_i}. \tag{78b}$$

Für die Konstanten der Formel (78b) hat Dr. E. Hunziker*) aus seinen nach der Aug- und Ohrmethode angestellten Beobachtungen die folgenden Zahlenwerte abgeleitet:

$$m_0^2 = (0''\!,867)^2 = 0{,}75,$$
$$a_0^2 = (1''\!,421)^2 = 2{,}02.$$

Der Wert von $a_0 = 1''\!,412 = 0^s\!,094$ stimmt mit dem für diese Fehlerkomponente aus Meridianbeobachtungen abgeleiteten Wert $0^s\!,10$ gut überein. Über-

*) Band 19 der «Astronomisch-geodätischen Arbeiten in der Schweiz», Seite 45.

nimmt man aus Meridianbeobachtungen den Wert von $b_0 = 4^s\!,7$, so wird mit $2V = 140$

$$\left(\frac{b_0}{2V}\right)^2 = (0^s\!,0336)^2 = (0'',50)^2.$$

Setzt man den Wert von m^{*2} zu $(0'',30)^2$ an, so läßt sich der Wert von m_r^2 abschätzen; die Beziehung (78a) gibt

$$m_r^2 = 0{,}75 - 0{,}25 - 0{,}09 = 0{,}41,$$

also

$$m_r = \pm\, 0'',64.$$

Dieser große Betrag ist nicht sehr wahrscheinlich, wenn er ausschließlich der anomalen Refraktion zur Last gelegt werden müßte. Doch erfaßt die Beziehung (78a) sicher nicht alle systematischen Einflüsse, wie zum Beispiel Änderungen des Prismenwinkels infolge von Temperaturänderungen. Nimmt man m^* und m_r gleich groß an, nämlich zu $\pm 0'',30$, so folgt aus der Beziehung (78a) der Wert

$$b_0 = 7^s\!,05.$$

Da man die Koinzidenz zweier Sternbilder nicht so genau auffassen kann wie den Moment der Bisektion beim Durchgang des Sternbildes durch einen festen Faden, so ist zu erwarten, daß man aus Astrolabbeobachtungen einen größeren Wert der Komponente b_0 erhält als aus Meridiandurchgängen; doch wird man die Vergrößerung vom Wert $4^s\!,7$ auf $7^s\!,05$ nicht ausschließlich diesem Umstand zur Last legen dürfen; man wird bei der Verteilung des Wertes 0,75 von m_0^2 auf einzelne Komponenten neben b_0, m^* und m_r noch nach weiteren Fehlerquellen suchen müssen.

ZAHLENBEISPIEL

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel, Bernoullianum.
Instrument: Prismenastrolab.
Beobachter: Th. Niethammer.
Zeit: 17. Juli 1919.

Das verwendete Prismenastrolab besitzt kein Fadennetz, so daß die einzelne Durchgangszeit nur auf der Beobachtung des Koinzidenzmomentes beruht. Die beobachteten Uhrzeiten, die Azimute der Sterne und die scheinbaren Sternörter sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Die Uhrzeiten sind nach der Aug- und Ohrmethode beobachtet und angenähert auf Sternzeit reduziert worden.

Tabelle 1

	τ Drac	δ Boot	110 Herc
Beobachtete Uhrzeit U_i . .	$16^h56^m37^s\!,78$	$17^h34^m22^s\!,36$	$17^h38^m25^s\!,51$
Rektaszension α_i	19 17 11,17	15 12 16,88	18 42 14,17
Poldistanz p_i	$16^0\,47'\,27'',87$	$56^0\,22'\,56'',63$	$69^0\,31'\,43'',51$
Azimut a	$199^0\!,5$	$75^0\!,4$	$329^0\!,0$

Die Berechnung der fingierten Beobachtungsgrößen nach der Beziehung (75a) ist in der zweiten Tabelle gegeben; es sind folgende Näherungswerte verwendet worden:

$$u_0 = 0,$$
$$\Phi_0 = 42^0 26' 22'',00,$$
$$z_0 = 30\ 00\ 32,00.$$

Die Korrektion dr_i wegen der Änderung der Refraktion ist nicht angebracht worden.

Tabelle 2

	τ Drac	δ Boot	110 Herc
$U + u_0 - \alpha_i =$	$-2^h20^m33^s,39$	$+2^h22^m05^s,48$	$-1^h03^m48^s,66$
$\cos p_i$	9,9810773	9,7432333	9,5437419
$\sin p_i$	9,4607215	9,9205153	9,9716690
$\cos p_i \cos \Phi$	9,8491283	9,6112843	9,4117929
$\cos (U_i + u_0 - \alpha_i)$	9,9126242	9,9105626	9,9829442
$\sin p_i \sin \Phi$	9,2899034	9,7496972	9,8008509
$\sin p_i \sin \Phi \cos (U + u_0 - \alpha)$.	9,2025276	9,6602598	9,7837951
$\log (a) - \log (b) =$	0,6466007	0,0489755	0,3720022
Add.-log.	0,0883599	0,2772323	0,1536983
$\cos \zeta_i$	9,9374882	9,9374921	9,9374934
$\zeta_i =$	$30^0 00' 34'',92$	$30^0 00' 31'',73$	$30^0 00' 30'',66$

Die unbekannten Verbesserungen folgen aus den Gleichungen:

$$dz - 0,943\, d\Phi + 0,334\, du \sin \Phi = +\, 2'',92,$$
$$dz + 0,252\, d\Phi - 0,968\, du \sin \Phi = -\, 0,27,$$
$$dz + 0,857\, d\Phi + 0,515\, du \sin \Phi = -\, 1,34;$$

die Auflösung führt zu folgenden Werten der Unbekannten z, Φ und u:

$$z = 30^0 00' 32'',00 + dz \; = 30^0 00' 32'',58$$
$$\Phi = 42\ 26\ 22,00 + d\Phi = 42\ 26\ 19,61$$
$$u = \quad 0 + du \; = \quad +\, 0^s,026.$$

Der Wert von u ist wegen der täglichen Aberration noch um

$$\delta u = +\, 0^s,021 \cos z = +\, 0^s,018$$

zu verbessern.

Die mittleren Fehler von u und von Φ können wir mit Hilfe der Beziehung (76b) abschätzen, da die drei Sterne sehr nahe in Azimutunterschieden von 120° beobachtet sind. Die Formel (77a) gibt mit $n = 1$ und mit $2\,V$ an Stelle von V

$$m_l^2 = \left(\frac{b_0}{2V}\right)^2 + a_0^2 \sin^2 p_i \sin^2 q_i + m^{*2} + m_r^2.$$

Als Faktor von a_0^2 führen wir den Mittelwert der drei Sterne, das ist 0,41, ein; es wird dann

$$m_l^2 = \left(\frac{b_0}{2V}\right)^2 + 0,41\, a_0^2 + m^{*2} + m_r^2.$$

Übernehmen wir die Zahlenwerte

$$\left(\frac{b_0}{2V}\right)^2 + m^{*2} + m_r^2 = 0{,}75,$$
$$a_0^2 = 2{,}02,$$

so erhält man

$$m_l^2 = 0{,}75 + 0{,}41 \cdot 2{,}02 = 1{,}58 = (1''{,}26)^2;$$

es wird also ($\sin \Phi = 0{,}675$):

$$m_u \sin \Phi = m_\Phi = \sqrt{\frac{2}{3}}\; 1''{,}26 = \pm\, 1''{,}03,$$
$$m_u = \pm\, 0^s{,}10.$$

b) Die simultane Bestimmung der Zeit, der Polhöhe und des Azimutes zweier Richtungen mit Hilfe von Vertikaldurchgängen [9a)]

1. *Die Funktionaldeterminante.* Es seien A_i, B_i, C_i die partiellen Ableitungen der Funktion

$$y_i = \operatorname{cotg} a \sin(U_i + u - \alpha_i) + \operatorname{cotg} p_i \sin \Phi - \cos \Phi \cos(U_i + u - \alpha_i) \qquad (79)$$

nach u, a und Φ:

$$A_i = \frac{\partial y_i}{\partial u} = \frac{\cos \Phi \sin z_i + \sin \Phi \cos z_i \cos a}{\sin a \sin p_i},$$
$$B_i = \frac{\partial y_i}{\partial a} = -\frac{\sin z_i}{\sin a \sin p_i},$$
$$C_i = \frac{\partial y_i}{\partial \Phi} = \frac{\cos z_i}{\sin a}.$$

Die Funktionaldeterminante J der drei Funktionen y_i ($i = 1, 2, 3$) in bezug auf u, a und Φ als Unbekannte kann dann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$J = S A_1 (B_2 C_3 - B_3 C_2),$$

worin S die durch zyklische Vertauschung entstehende Summe bezeichnet. Da

$$B_2 C_3 - B_3 C_2 = -\frac{\sin(z_2 - z_3)}{\sin^2 a \sin p_2 \sin p_3}$$

ist, wird

$$J \cdot \sin^3 a \sin p_1 \sin p_2 \sin p_3 = -S(\cos \Phi \sin z_1 + \sin \Phi \cos z_1) \sin(z_2 - z_3).$$

Da aber

$$S \sin z_1 \sin(z_2 - z_3) = 0,$$
$$S \cos z_1 \sin(z_2 - z_3) = 0$$

ist, wird J identisch gleich null; es besteht also eine Abhängigkeit zwischen den drei Unbekannten u, a und Φ.

Es sei Z' ein beliebig gewählter Punkt des Instrumentenvertikales und $\Phi' = PZ'$ seine Poldistanz. Ist a' das Azimut, unter welchem der Meridian