Der bewegliche Faden ist auf den Polarstern je zweimal in beiden Lagen eingestellt worden; es ist

$$\text{zur Uhrzeit } U' = 21^{h}21^{m}00^{s}, \qquad \bar{f} = -0{,}^{s}826, \; z' = 42^{0}08{,}'1.$$

Ferner ist

$$U_0 = 21^{h}21^{m}34{,}^{s}732, \; i = +0{,}^{s}009, \; z = 27^{0}54{,}'9$$

Das genäherte Azimut des Instrumentes ist

$$k_0 = -1^{0}27'.$$

Hiernach ist

$$\Delta t = -\left(+0{,}^{s}009 - 0{,}^{s}826 \frac{0{,}468}{0{,}940}\right) \cdot 1{,}0003 \cdot 1{,}477 = +0{,}^{s}594.$$

Die Berechnung der Uhrkorrektion ist in der folgenden Tabelle dargestellt. Die Koordinaten des Polarsternes enthalten die Korrektion wegen der täglichen Aberration nicht.

$U' =$	$21^{h}21^{m}00^{s}$	$\operatorname{cotg}\delta' \operatorname{tg}\delta \cos(t'-t) = a$	7,46218
$\alpha' =$	$1\;36\;05{,}^{s}92$	$1:(1-a)$	$+1261$
		$\operatorname{cotg}\delta' \operatorname{tg}\delta \sin(t'-t)$	$7{,}783345_n$
$U_0 =$	$21\;21\;34{,}^{s}732$	$\operatorname{tg} x$	$7{,}784606_n$
$\alpha =$	$21\;18\;44{,}802$	$\cos x$	-8
$U' - \alpha' =$	$19\;44\;54{,}^{s}08$	$\operatorname{cotg}\delta \operatorname{tg}\varphi$	0,487056
$U_0 - \alpha =$	$+\;02\;49{,}930$	$\sin m$	$8{,}271654_n$
$t' - t =$	$19\;42\;04{,}150$	$x = -0^{0}20'56{,}''10$	
		$m = -1\;04\;15{,}71$	
$\delta' =$	$88^{0}54'40{,}''18$	$x - m = +0\;43\;19{,}61$	
$\delta =$	$19\;29\;41{,}70$	$x - m = +$	$2^{m}53{,}^{s}307$
$\operatorname{cotg}\delta'$.	8,278893	$\Delta t = +$	$0\;\;00{,}594$
$\operatorname{tg}\delta$	9,549026	$\alpha - U_0 = -$	$2\;\;49{,}930$
$\sin(t'-t)$.	$9{,}955426_n$	Korrektion wegen täglicher Aberration	
$\operatorname{cotg}\delta' \operatorname{tg}\delta$.	7,827919	$= +$	$0\;\;00{,}011$
$\cos(t'-t)$.	9,63426	$u = +$	$0^{m}03{,}^{s}982$

c) Die Bestimmung der Polhöhe mit Hilfe der Durchgänge zweier Sterne durch den ersten Vertikal [6])

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Es seien U_w und U_e die Uhrzeiten des Durchganges zweier Sterne durch den mittleren Achsenäquator, von denen der eine im Westen, der andere im Osten beobachtet worden ist. Wir nehmen die Absolutwerte der Stundenwinkel und setzen

$$t_w = (U_w + u) - \alpha_w,$$
$$t_e = \alpha_e - (U_e + u).$$

Der nördliche Pol Q des mittleren Achsenäquators habe den Stundenwinkel $180^0 + \mu_N$ und die Poldistanz ν. Der größte Kreis, der Q mit dem Pol des Äquators verbindet, schneide den mittleren Achsenäquator im Punkte Z'; es sei $PZ' = \Phi'$; der Meridian schneide den mittleren Achsenäquator im Punkte Z_0; es sei $PZ_0 = \Phi_0$.

Befindet sich der Weststern zur Uhrzeit U_w im Punkte S_w, der Oststern zur Uhrzeit U_e im Punkte S_e, so sind $PS_w Z'$ und $PS_e Z'$ rechtwinklige Dreiecke, so daß die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} \cos(t_w - \mu_N) &= \operatorname{cotg} p_w \operatorname{tg} \Phi', \\ \cos(t_e + \mu_N) &= \operatorname{cotg} p_e \operatorname{tg} \Phi'. \end{aligned} \tag{49}$$

Setzt man hierin

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= \frac{t_w + t_e}{2}; \quad t_w = t_0 + \Delta t, \\ \Delta t &= \frac{t_w - t_e}{2}; \quad t_e = t_0 - \Delta t, \end{aligned}\right\} \tag{49a}$$

so erhält man durch Elimination von tg Φ' die Gleichung

$$\operatorname{tg}(\Delta t - \mu_N) = \operatorname{cotg} t_0 \frac{\sin(p_w - p_e)}{\sin(p_w + p_e)}; \tag{49b}$$

sie liefert den Wert von $(\Delta t - \mu_N)$, so daß

$$\mu_N = \Delta t - (\Delta t - \mu_N)$$

wird. Da Φ' und Φ_0 durch die Beziehung

$$\cos \mu_N \operatorname{tg} \Phi_0 = \operatorname{tg} \Phi'$$

miteinander verbunden werden, erhält man, wenn hierin der Wert von tg Φ' nach den Beziehungen (49) eingeführt wird:

$$\cos \mu_N \operatorname{tg} \Phi_0 = \operatorname{tg} p_w \cos(t_w - \mu_N) \equiv \operatorname{tg} p_e \cos(t_e + \mu_N).$$

Schließlich erhält man $\Phi = PZ$ mit Hilfe der Beziehung

$$\operatorname{tg}(\Phi_0 - \Phi) = \operatorname{tg} i \sec a_N, \tag{50a}$$

in welcher i die Erhebung des Punktes Q über den Horizont, das ist die Neigung des mittleren Achsenäquators, und a_N das von N nach E positiv genommene Azimut des Punktes Q bedeutet. Da man die Neigung und das Azimut so klein als möglich hält, genügt es, zu setzen:

$$\Phi = \Phi_0 - i. \tag{50b}$$

Die Reduktion der Stundenwinkel

auf den Durchgang durch den mittleren Achsenäquator

In der Beziehung (6a) setzen wir bei der Beobachtung des

$$\left.\begin{aligned} &\text{Weststernes: } t = t_{iw};\ \mu = 180^0 + \mu_N;\ \bar{t} = \bar{t}_{iw},\ t_{iw} - \bar{t}_{iw} = dt_{iw}, \\ &\text{Oststernes: } t = -t_{ie};\ \mu = \mu_N;\ \bar{t} = -\bar{t}_{ie},\ t_{ie} - \bar{t}_{ie} = dt_{ie}; \end{aligned}\right\} e = +1;$$

es wird dann

$$\left.\begin{aligned}
2\sin\frac{dt_{iw}}{2} &= \operatorname{cosec}\left(\frac{\bar{t}_{iw}+t_{iw}}{2}-\mu_N\right)\\
&\quad\times\left\{\cos(\bar{t}_{iw}-\mu_N)\,2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}+\frac{\sin k}{\sin p\,\sin\nu}\right\}, \text{*W},\\
2\sin\frac{dt_{ie}}{2} &= \operatorname{cosec}\left(\frac{\bar{t}_{ie}+t_{ie}}{2}+\mu_N\right)\\
&\quad\times\left\{\cos(\bar{t}_{ie}+\mu_N)\,2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}-\frac{\sin k}{\sin p\,\sin\nu}\right\}, \text{*E},
\end{aligned}\right\}\quad (51\,\text{a})$$

worin k die halbe Summe der Kontaktbreite und des toten Ganges bezeichnet.

Am arithmetischen Mittel $\bar{t}_{w,e}=\frac{1}{n}\,[\bar{t}_i]_{w,e}$ der Stundenwinkel ist dann die Korrektion

$$dt_{w,e}=\frac{1}{n}\,[dt_i]_{w,e}, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

anzubringen.

Werden die Sterne nicht in sehr kleinen Zenitdistanzen beobachtet, so genügt die Näherungsformel

$$\left.\begin{matrix}\text{*W}\\ \text{*E}\end{matrix}\right\}\ \underset{(\text{in sec})}{dt_i}=\operatorname{cosec}(\bar{t}\mp\mu_N)\left\{\cos(\bar{t}\mp\mu_N)\,\frac{m''}{15}\pm k\operatorname{cosec}p\operatorname{cosec}\nu\right\}, \qquad (51\,\text{b})$$

worin k in Zeitsekunden auszudrücken ist.

Die Benützung eines Niveaus zur Bestimmung der Achsenneigung wird überflüssig, wenn vor dem Umlegen das direkte Bild und nach dem Umlegen das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild des Sternes beobachtet wird. Im Moment des Durchganges durch den mittleren Achsenäquator befindet sich dann der Stern im Abstand $\varkappa_0 \cos z$ vom Instrumentenvertikal; bei der Benützung eines gebrochenen Fernrohres ist $\varkappa_0$ gleich der Differenz «Zapfenungleichheit $\varkappa$ minus Biegungskollimation c» (vergleiche Seite 92/93). In der Beziehung (50b) hat man an Stelle von i entweder $+\varkappa_0$ oder $-\varkappa_0$ einzuführen, je nachdem der West- *und* der Oststern bei der Okularfolge Nord–Süd oder Süd–Nord beobachtet wird. Der Einfluß der Neigung auf die Polhöhe kann somit dadurch eliminiert werden, daß man die beobachteten Sternpaare gleichmäßig auf die Okularfolgen N–S und S–N verteilt.

Beobachtet man die beiden Sterne eines Paares nicht in der gleichen Okularfolge, sondern den Weststern zum Beispiel in der Folge N–S und den Oststern in der Folge S–N (oder beide in der umgekehrten Folge), so wird, wenn die Zenitdistanzen der beiden Sterne gleich groß sind, der Einfluß von $\varkappa_0$ schon im Resultat des einzelnen Paares eliminiert; sind die Zenitdistanzen nur angenähert gleich, so kann der verbleibende Rest dieses Einflusses dadurch unschädlich gemacht werden, daß an einem zweiten Abend die umgekehrte Okularfolge eingehalten wird. Leitet man aus solchen Beobachtungen den Zahlenwert von $\varkappa_0$ ab, so können die Einzelwerte von Φ wegen des Einflusses von $\varkappa_0$ korrigiert werden; diese Korrektion beträgt

$$d\Phi = \Phi - \Phi_0 = \mp \varkappa_0 \frac{\sin(z_e - z_w)}{\sin(z_e + z_w)}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{*W, N–S; *E, S–N,} \\ \text{*W, S–N; *E, N–S,} \end{array} \right. \tag{51c}$$

wie sich aus dem Differentialausdruck des Kotangentensatzes ergibt. Setzt man darin

$$df = \sin p \cos q \, dt,$$

so bedeutet $90^0 - df$ den Abstand des in den Ort $(t + dt, dp)$ verschobenen Sternes von demjenigen Pol des Instrumentalvertikales, dessen Azimut um 90^0 größer ist als das Azimut des Sternes. Es lauten also, da df gleich $\pm \varkappa_0 \cos z$ zu setzen ist, die beiden Differentialausdrücke

$$\text{*W: } \sin z_w \, da = \cos z_w \, d\Phi \sin a_w \pm \varkappa_0 \cos z_w, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ok N–S,} \\ \text{Ok S–N,} \end{array} \right.$$

$$\text{*E: } \sin z_e \, da = \cos z_e \, d\Phi \sin a_e \pm \varkappa_0 \cos z_e, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ok S–N,} \\ \text{Ok N–S.} \end{array} \right.$$

Setzt man hierin $\sin a_w = - \sin a_e = + 1$ und eliminiert aus je zweien dieser Beziehungen die Azimutverbesserung da, indem man die Okularfolge «*W, N–S» mit der Okularfolge «*E, S–N» oder «*W, S–N» mit «*E, N–S» kombiniert, so erhält man die Beziehung (51c).

2. *Der Einfluß der täglichen Aberration.* Setzt man im Differentialausdruck des Kotangentensatzes $dU = du = 0$ und

$$d\alpha \sin p = + 0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos t,$$
$$dp = - 0,322 \sin \Phi \sin t \cos p,$$

so erhält man

$$\sin z \, da^* - \cos z \, d\Phi \sin a^* = - (\cos q \, d\alpha \sin p + \sin q \, dp)$$
$$= + 0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos a^*,$$

da

$$\cos a^* = \cos t \cos q - \sin t \sin q \cos p$$

ist. Im ersten Vertikal ist aber $\cos a^* = 0$; es bedarf also weder $d\Phi$ noch da^* einer Verbesserung wegen der täglichen Aberration, wenn in die Rechnung die Ephemeridenörter eingeführt worden sind.

3. *Der mittlere Fehler der Polhöhe und die günstigsten Umstände der Beobachtung.* Wir setzen die Differentialbeziehung des Kotangentensatzes für den im Westen und im Osten beobachteten Stern an:

$$\sin z_w \, da^* - \cos z_w \, d\Phi \sin a^* = \cos q_w \, d(U + u - \alpha)_w \sin p_w + \sin q_w \, dp_w,$$
$$\sin z_e \, da^* + \cos z_e \, d\Phi \sin a^* = \cos q_e \, d(U + u - \alpha)_e \sin p_e + \sin q_e \, dp_e$$

und eliminieren die Verbesserung da^*, indem wir $\sin a^* = 1$ setzen; die an Φ

anzubringende Verbesserung wird dann unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\cos q \sin p = \cos \Phi \sin z$$

gegeben durch den Ausdruck:

$$\begin{aligned}\sin(z_w + z_e)\, d\Phi = &- \sin z_w \sin z_e (dU_w - dU_e) \cos \Phi \\ &- \sin z_w \sin z_e (du_w - du_e) \cos \Phi \\ &+ (\cos q\, d\alpha \sin p + \sin q\, dp)_w \sin z_e \\ &- (\cos q\, d\alpha \sin p + \sin q\, dp)_e \sin z_w .\end{aligned} \tag{52}$$

Das von den Uhrkorrektionen abhängige Glied verschwindet, wenn $du_w = du_e$ ist, das heißt, wenn die Uhr keinen Gang hat; es ist aber, auch wenn ein Gang vorhanden ist, dafür kaum ein Fehlerbetrag in Rechnung zu stellen, wenn nur die Sterne so ausgewählt werden, daß sie kurz hintereinander zur Beobachtung kommen; es ist leicht, den Gang der Uhr so genau zu ermitteln, daß seine Unsicherheit keinen merklichen Fehler zur Folge hat.

Sehen wir die Verbesserungen als wahre Fehler an und gehen wir zu den mittleren Fehlern über, so erhalten wir die Beziehung:

$$\begin{aligned}\sin^2(z_w + z_e)\, m_\Phi^2 = &\sin^2 z_w \sin^2 z_e (m_{U_w}^2 + m_{U_e}^2) \cos^2 \Phi \\ &+ (\sin^2 z_w + \sin^2 z_e)\, m^{*2},\end{aligned} \tag{53a}$$

in welcher m_{U_w} und m_{U_e} die mittleren Fehler bezeichnen, die den wahren Fehlern dU_w und dU_e entsprechen; ferner ist der mittlere Fehler $m_\alpha \sin p$ und m_p gleich m^* gesetzt.

Ist der Weststern an n_w und der Oststern an n_e Fäden oder Kontakten beobachtet, so wird

$$m_{U_w}^2 \sin^2 z_w \cos^2 \Phi = \frac{1}{n_w}\left(a_0^2 \sin^2 z_w \cos^2 \Phi + \frac{b_0^2}{V^2}\right),$$

$$m_{U_e}^2 \sin^2 z_e \cos^2 \Phi = \frac{1}{n_e}\left(a_0^2 \sin^2 z_e \cos^2 \Phi + \frac{b_0^2}{V^2}\right).$$

Sind die beiden Sterne in gleichen Zenitdistanzen und an gleich viel Fäden oder Kontakten beobachtet worden, so sind die rechten Seiten dieser Ausdrücke gleich groß. Sind die Zenitdistanzen nicht gleich groß, so nehmen wir an, es seien die Zahlen n_w und n_e so gewählt worden, daß die rechten Seiten einander gleich werden; ihr gemeinsamer Betrag sei m_0^2. Es wird dann, wenn $m_0^2 + m^{*2} = m^2$ gesetzt wird:

$$m_\Phi^2 = \frac{\sin^2 z_w + \sin^2 z_e}{\sin^2 (z_w + z_e)}\, m^2. \tag{53b}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck für den mittleren Fehler m_Φ mit dem mittleren Fehler m_u der Uhrkorrektion, die aus den Durchgängen zweier Sterne durch denselben meridiannahen Vertikal ermittelt wird (vergleiche Seite 83), so ist ersichtlich, daß diese beiden mittleren Fehler in der gleichen Weise von den Zenitdistanzen der beiden Sterne abhängig sind. Den kleinsten Wert nimmt die Funktion

$$F(z_w, z_e) = \frac{\sin^2 z_w + \sin^2 z_e}{\sin^2(z_w + z_e)}$$

an, wenn man $z_w = z_e = 0$ werden läßt, nämlich den Wert

$$F(0, 0) = \frac{1}{2} ;$$

es ist also am günstigsten, die Sterne so nahe als möglich beim Zenit zu beobachten. Beobachtet man einen Stern, zum Beispiel den Oststern, in der Zenitdistanz z_e, so erhält man eine größere Genauigkeit, wenn man den Weststern nicht in der Zenitdistanz $z_w = z_e$ beobachtet, sondern in der Zenitdistanz $z_w = z_0$, die so bestimmt wird, daß $F(z_0, z_e)$ einen Minimalwert annimmt; das ist dann der Fall, wenn z_0 auf Grund der Bedingung

$$\operatorname{tg}(z_0 + z_e) = 2 \operatorname{tg} z_e$$

gewählt wird. Zusammengehörige Werte von z_0 und z_e können der kleinen Tabelle auf Seite 85 entnommen werden, in welcher $-z'$ mit z_e zu identifizieren ist. Die Funktion F nimmt dann den Wert

$$F(z_0, z_e) = \frac{1 + \sin^2 z_e}{2}$$

an. Wenn man zum Beispiel zu einem gegebenen Oststern unter zwei verschiedenen Weststernen den zugehörigen Stern wählen kann, so wird man sich für den Stern entscheiden, dessen Zenitdistanz z_w der durch die Bedingung $\operatorname{tg}(z_w + z_e) = 2 \operatorname{tg} z_e$ bestimmten näher liegt.

4. *Vergleichung mit der Horrebow-Talcott-Methode.* Läßt man in der Beziehung (53b) z_e und z_w gegen Null gehen, so nimmt der mittlere Fehler m_Φ denselben Wert an, wie in der Horrebow-Talcott-Methode; sein Quadrat ist gleich

$$m_\Phi^2 = \frac{1}{2}\, m^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b_0^2}{n\, V^2} + m^{*2}\right).$$

Das Analogon zur Horrebow-Talcott-Methode würde ein Verfahren bilden, das so nahe Zenitsterne benützt, daß an Stelle von Durchgangsbeobachtungen Pointierungen eines beweglichen Vertikalfadens auf den Stern zur Messung seines Abstandes vom Achsenäquator treten. In der Praxis wird dieses Verfahren dadurch unmöglich gemacht, daß man nicht genügend viel helle Sterne zur Verfügung hat, die bei lotrechter Stellung des Fernrohres durch das Gesichtsfeld gehen. Man muß also bei Durchgangsbeobachtungen in größerer Zenitdistanz bleiben. Der Nachteil, daß man damit einen größeren mittleren Fehler gegenüber der Horrebow-Talcott-Methode in Kauf nehmen muß, wird dadurch behoben, daß man während des Durchganges mehr Einzelbeobachtungen anstellen kann. Während man bei der HORREBOW-TALCOTT-Methode nur drei bis höchstens fünf Pointierungen auf den Stern machen kann, ist es im ersten Vertikal möglich, den Stern vor und nach dem Umlegen an 10 Kontakten mit dem Registriermikrometer zu beobachten. Übrigens besteht hier wieder die Möglichkeit, nach dem Umlegen das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild des Sternes zu beobachten und dadurch die Verwendung des Niveaus überflüssig zu machen. Die HORREBOW-TALCOTT-Methode wird immer darauf angewiesen sein, die Ungleichheit der Zenitdistanz bei der Beobachtung der beiden Sterne mit Hilfe des Niveaus festzustellen.

5. *Die Beobachtung des gleichen Sternes im Osten und Westen* (Struvesche Methode). Man hat bisher empfohlen, die Polhöhe nicht aus den Durchgängen verschiedener Sterne, sondern aus den Durchgängen des gleichen Sternes durch den Ost- und Westvertikal abzuleiten. Zwischen der Beobachtung des Sternes im Osten und im Westen liegt dann ein großes Zeitintervall; es erreicht in mittleren Breiten, wenn $p - \Phi = 2^0$ ist, schon nahe 3^h. Die Methode der Polhöhenbestimmung mit Hilfe von Vertikaldurchgängen beruht nun aber auf der Voraussetzung, daß sich das Azimut des Instrumentes zwischen der Ost- und Westbeobachtung nicht ändere. Es liegt auf der Hand, daß man um so mehr Grund hat, Azimutänderungen zu befürchten, je größer das Intervall zwischen dem Ost- und Westdurchgang ist. Beobachtet man verschiedene Sterne und wählt sie so aus, daß sie kurz hintereinander beobachtet werden, so besteht weniger Grund, an der Konstanz des Azimutes zu zweifeln. Das ist aber nicht der einzige Vorteil, der mit der Beobachtung verschiedener Sterne verbunden ist. Es ist schon darauf hingewiesen worden, daß man bei verschiedenen Sternen unbedenklich $du_w = du_e$ setzen darf. Wenn man diese Annahme auch im Fall der Beobachtung des gleichen Sternes machen will, so muß der Gang der Uhr sehr genau bekannt sein.

Um allgemein die mittleren Fehler, die in der einen oder andern Methode der Polhöhenbestimmung zu erwarten sind, miteinander zu vergleichen, spezialisieren wir den Ausdruck für den mittleren Fehler m_Φ im Fall der Beobachtung verschiedener Sterne auf die Annahme $z_w = z_e = z$; es wird dann

$$m_\Phi^2 = \frac{1}{2} \sec^2 z \, (m_0^2 + m^{*2}). \qquad (54)$$

Um den Ausdruck für m_Φ im Fall der Beobachtung des gleichen Sternes im Osten und im Westen aufzustellen, greifen wir auf den Differentialausdruck (52) zurück und setzen darin

$$d\alpha_w = d\alpha_e = d\alpha; \quad dp_w = dp_e = dp; \quad q_e = -q_w = -q;$$

ferner nehmen wir $du_w = du_e$ an, um diese Methode nicht von vorneherein zu benachteiligen. Es wird dann

$$2 \cos z \, d\Phi = \sin z \cos \Phi \, (dU_w - dU_e) + 2 \sin q \, dp. \qquad (55a)$$

Gehen wir zu den mittleren Fehlern über und nehmen wir für die mittleren Fehler von $\overline{U}_w$ und $\overline{U}_e$ die gleichen Werte an wie im Fall der Beobachtung verschiedener Sterne, so erhält man, da

$$\sin \Phi = \sin p \sin q$$

ist, den Ausdruck:

$$m_\Phi^2 = \frac{1}{2} \sec^2 z \left(m_0^2 + 2 \frac{\sin^2 \Phi}{\sin^2 p} m^{*2} \right). \tag{55b}$$

Die Ausdrücke (54) und (55b) unterscheiden sich nur durch die Komponente, welche von der Unsicherheit m^* des Sternortes herrührt. Der Koeffizient von m^{*2} in (55b) nimmt im allgemeinen wegen $\sin p \sim \sin \Phi$ Werte an, die zwischen 1 und 2 liegen. Der Koeffizient von m^{*2} wird gleich 1, wenn $\Phi = 45^0$ und $p = 90^0$ ist, das heißt, der Stern müßte in der Zenitdistanz $z = 90^0$ beobachtet werden, was – ganz abgesehen vom ungünstigen Einfluß der Refraktion – schon wegen des großen Zeitintervalles zwischen der Ost- und Westbeobachtung nicht in Frage kommt.

Die Beobachtung verschiedener Sterne an Stelle der Beobachtung des gleichen Sternes im Osten und Westen bietet somit folgende Vorteile:

1. Die Grundvoraussetzung der Methode, das ist die Konstanz des Azimutes während der Beobachtungen, kann leichter erfüllt werden.
2. Die Unsicherheit des Sternortes beeinflußt die Polhöhe weniger stark.
3. Der Uhrgang muß weniger genau bestimmt werden.
4. Da die Durchgänge in größeren Zenitdistanzen beobachtet werden dürfen, wird die Aufstellung eines gedrängten Beobachtungsprogrammes erleichtert.
5. Da sich die Beobachtungen der beiden Sterne unmittelbar folgen, können auch kurzdauernde Aufhellungen des Himmels ausgenützt werden.

Zusammenstellung der Reduktionsformeln

α_w, p_w und α_e, p_e scheinbarer Ort des im Westen respektive im Osten beobachteten Sternes,

i Erhebung des nördlichen Achsenendes über dem Horizont,

a_N Azimut des nördlichen Achsenendes, positiv von N nach E,

$\varkappa$ halbe Summe der Kontaktbreite und des toten Ganges in Zeitsekunden,

u Uhrkorrektion,

U_i', U_i'' $(i = 1, 2, \ldots n)$ die am gleichen Kontakt oder Faden vor und nach dem Umlegen beobachtete Durchgangszeit,

$$\overline{U}_i = \frac{1}{2}(U_i' + U_i''), \quad \overline{U} = \frac{1}{n}[\overline{U}_i], \quad \overline{t}_i = \left| \overline{U}_i + u - \alpha \right|,$$

$$m_i'' = 2 \sin^2 \frac{U_i'' - U_i'}{2} \Big/ \sin 1'',$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_N + 12^h & \text{Stundenwinkel} \\ \nu & \text{Poldistanz} \end{array}\right\}\ \text{des nördlichen Poles des Achsenäquators.}$$

Bei kleinen Werten von i und a_N ist

$$\mu_N = a_N \sec \Phi, \quad \nu = 90^0 - \Phi.$$

$$dt_i^{\sec} = \operatorname{cosec}(\bar{t}_i \mp \mu_N) \cdot \left(\cos(\bar{t}_i \mp \mu_N) \cdot \frac{m_i''}{15} \pm \varkappa \operatorname{cosec} p \operatorname{cosec} \nu\right) \begin{cases} * \text{ West} \\ * \text{ Ost} \end{cases}$$

$$dt = \frac{1}{n}\,[dt_i].$$

Meist genügt es mit

$$\left.\begin{array}{l} \bar{t} = \dfrac{1}{n}\,[t_i] \\ \overline{m}'' = \dfrac{1}{n}\,[m_i''] \end{array}\right\}\ \text{zu setzen:}$$

$$dt^{\sec} = \operatorname{cosec}(\bar{t} \mp \mu_N) \cdot \left(\cos\ (\bar{t} \mp \mu_N) \cdot \frac{\overline{m}''}{15} \pm \varkappa \operatorname{cosec} p \operatorname{cosec} \nu\right) \begin{cases} * \text{ West} \\ * \text{ Ost} \end{cases}$$

$$t_w = \frac{1}{n}\,[t_i]_w + dt_w; \quad t_e = \frac{1}{n}\,[t_i]_e + dt_e;$$

$$t_0 = \frac{1}{2}\,(t_w + t_e); \quad \Delta t = \frac{1}{2}\,(t_w - t_e);$$

$$\operatorname{tg}(\Delta t - \mu_N) = \operatorname{cotg} t_0 \frac{\sin(p_w - p_e)}{\sin(p_w + p_e)},$$

$$\mu_N = \Delta t - (\Delta t - \mu_N),$$

$$\cos \mu_N \operatorname{tg} \Phi_0 = \operatorname{tg} p_w \cos(t_w - \mu_N) \equiv \operatorname{tg} p_e \cos(t_e + \mu_N),$$

$$\Phi = \Phi_0 - i.$$

Bleibt die Neigung nicht völlig konstant, so kann die Durchgangszeit des einen Sternes auf die beim Durchgang des anderen Sternes vorhandene Neigung mittels der Beziehung (9b) Seite 40, reduziert werden.

ERSTES ZAHLENBEISPIEL

Ort:	Astronomische Anstalt der Universität Basel in Binningen.
Instrument:	Bambergsches Passageninstrument mit unpersönlichem Mikrometer und mit automatischer Nachführung des Fernrohres in Zenitdistanz; Vergrößerung 86fach.
Beobachter:	Dr. J. O. Fleckenstein.
Zeit:	26. November 1940.

Im Westen ist α Cyg, im Osten λ Andr an je 11 Kontakten vor und nach dem Umlegen beobachtet worden. Die folgende Tabelle 1 enthält die Werte von $\overline{U}_i$ und von $\vartheta_i = \frac{1}{2}\,(U_i'' - U_i')$.

Tabelle 1

α Cyg W			λ Andr E		
$\overline{U}_i$	ϑ_i	m''_i	$\overline{U}_i$	ϑ_i	m_i
$22^h13^m43^s,11$	$1^m39^s,81$	$5'',33$	$22^h24^m09^s,34$	$1^m56^s,64$	$7'',42$
43,29	34,91	4,91	08,87	50,27	6,03
43,48	29,58	4,38	08,76	43,42	5,83
43,50	24,82	3,92	08,81	37,01	5,13
43,40	18,96	3,40	08,54	30,16	4,42
43,83	14,75	3,05	08,31	23,01	3,77
44,00	09,82	2,65	08,32	16,50	3,19
43,92	04,53	2,27	07,98	10,35	2,70
43,90	0 59,62	1,93	07,94	04,04	2,23
44,20	54,03	1,59	08,36	0 56,06	1,71
44,59	48,21	1,27	08,09	49,68	1,34
Mittel $43^s,747$		$3'',15$	Mittel $08^s,484$		$3'',98$

Es beträgt die genäherte Uhrkorrektion $u = -30^s,36$
die Neigung der Achse $i = +0'',82$
(Kontaktbreite + toter Gang) : 2 $\varkappa = +0^s,047$
das Azimut des Nordendes der Achse $a_N = +1^s,0$

Ferner ist $\Phi = 42^0 27' 33''$

und genähert: $\mu_N = a_N \sec \Phi = +1^s,4$

$\nu = 47^0 32' 27''$.

Die Berechnung der Reduktion der Durchgangszeiten auf den Achsenäquator und die Berechnung der Polhöhe ist in den beiden folgenden Tabellen 2 und 3 dargestellt.

Tabelle 2

	α Cyg W	λ Andr E
$\overline{U} =$	$22^h13^m43^s,747$	$22^h24^m08^s,484$
$u =$	$-30,36$	$-30,36$
$\overline{U} + u =$	22 13 13,387	22 23 38,124
$\alpha =$	20 39 24,57	23 34 41,10
$\bar{t} =$	1 33 48,817	1 11 02,976
$p =$	$44^0 55' 30'',90$	$43^0 51' 25'',67$
$\mp \mu_N =$	$-1^s,4$	$+1^s,4$
$\bar{t} \mp \mu_N =$	$1^h33^m47,4$	$1^h11^m04,4$
$\operatorname{cosec} p =$	1,416	1,443
$\operatorname{cosec} \nu =$	1,356	1,356
$\operatorname{cosec}(\bar{t} \mp \mu_N) =$	2,513	3,277
$\operatorname{cosec} p \operatorname{cosec} \nu \operatorname{cosec}(\bar{t} \mp \mu_N) =$	4,824	6,411
$\operatorname{cotg}(\bar{t} \mp \mu_N) =$	2,306	3,120
$\frac{1}{15}\overline{m}'' =$	$0^s,210$	$0^s,265$
$\operatorname{cotg}(\bar{t} \mp \mu_N)\frac{\overline{m}''}{15} =$	$+0^s,484$	$+0^s,826$
$\pm \varkappa \operatorname{cosec} p \operatorname{cosec} \nu \operatorname{cosec}(\bar{t} \mp \mu_N) =$	$+0,227$	$-0,301$
$dt =$	$+0^s,711$	$+0^s,525$
$t_w,\ t_e =$	$1^h33^m49,53$	$1^h11^m03,50$

Tabelle 3

$t_0 = \frac{1}{2}(t_w + t_e) =$	$1^h 22^m 26^s{,}515;$	$p_w + p_e =$	$88^0 46' 56'',57$
$\Delta t = \frac{1}{2}(t_w - t_e) =$	$0\ 11\ \ 23{,}015;$	$p_w - p_e =$	$+\ 1\ 04\ 05{,}23$
$\operatorname{cotg} t_0$	0,4247151	$\Delta t - \mu_N =$	$0^h 11^m 21^s{,}183$
$\sin(p_w - p_e)$	8,2704721	$\mu_N =$	$+\ 1{,}832$
$\operatorname{cosec}(p_w + p_e)$	0,0000981	$t_w - \mu_N =$	$1^h 33^m 47^s{,}70$
$\operatorname{tg}(\Delta t - \mu_N)$	8,6952853	$t_e + \mu_N =$	$1\ 11\ \ 05{,}33$
$\cos(t_w - \mu_N)$	9,9625665	$\cos(t_e + \mu_N)$	9,9787636
$\operatorname{tg} p_w$	9,9988668	$\operatorname{tg} p_e$	9,9826699
$\cos \mu_N \operatorname{tg} \Phi_0$	9,9614333	$\cos \mu_N \operatorname{tg} \Phi_0$ . . .	9,9614335
	$\cos \mu_N = 1;$	$\Phi_0 =$	$42^0 27' 33'',54$
		$-i =$	$-\ 0'',82$
		$\Phi =$	$42\ 27\ 32'',72$

ZWEITES ZAHLENBEISPIEL (STRUVESCHE METHODE)

Wird der gleiche Stern nach der Struveschen Methode im Osten und Westen beobachtet, so ergibt sich die Poldistanz Φ nach den folgenden Beziehungen.

Nach der Beziehung (49b) ist wegen $p_e = p_w = p$

$$\Delta t - \mu_N = 0,$$

also

$$\mu_N = \tfrac{1}{2}(t_w - t_e).$$

Es wird dann

$$\operatorname{tg} \Phi_0 = \operatorname{tg} p \cos t_0 \sec \mu_N$$

mit

$$t_0 = \tfrac{1}{2}(t_w + t_e),$$

und

$$\Phi = \Phi_0 - i \sec \mu_N.$$

Wir entnehmen dem Band 10 der Astronomisch-geodätischen Arbeiten in der Schweiz, Seite 157, die folgenden Daten:

Station: Suchet (Triangulationspunkt erster Ordnung des schweizerischen Dreiecknetzes); $\Phi = 43^0 13' 44''$.

Instrument: Repsoldsches Universalinstrument; 72fache Vergrößerung.

Beobachter: TH. NIETHAMMER.

Am 25. Juli 1900 ist der Stern o' sq. Cyg vor und nach dem Umlegen an je 4 Fäden des festen Netzes nach der Aug- und Ohrmethode beobachtet worden. Der scheinbare Ort des Sternes ist:

$$\alpha = 20^h 10^m 32^s{,}79; \quad p = 43^0 33' 28'',07.$$

In der folgenden Tabelle sind die auf *Sternzeit* reduzierten Durchgangszeiten

$$\overline{U} = \frac{1}{2}(U' + U'')$$

und die halben Differenzen

$$\vartheta = \frac{1}{2}(U'' - U')$$

zusammengestellt; ferner sind die vor und nach dem Umlegen bestimmten Neigungen i' und i'' angegeben.

Tabelle 1

Faden	Ostdurchgang Okular N–S $\bar{U}$	ϑ	Westdurchgang Okular S–N $\bar{U}$	ϑ
6	$19^{\mathrm{h}}36^{\mathrm{m}}04^{\mathrm{s}},85$	$4^{\mathrm{m}}43^{\mathrm{s}},04$	$20^{\mathrm{h}}44^{\mathrm{m}}57^{\mathrm{s}},87$	$4^{\mathrm{m}}43^{\mathrm{s}},44$
5	35 56,59	3 31,30	45 06,77	3 31,34
4	35 50,85	2 22,74	45 11,77	2 23,14
3	35 46,89	1 12,00	45 15,52	1 11,89
	$i' = -3'',76$	$i'' = -6'',90$	$i' = -7'',36$	$i'' = -3'',72$

Tabelle 2

Ostdurchgang

Faden		6	5	4	3
$\bar{t}_{ie} =$	$0^{\mathrm{h}}34^{\mathrm{m}}$ +	$27^{\mathrm{s}},94$	$36^{\mathrm{s}},20$	$41^{\mathrm{s}},94$	$45^{\mathrm{s}},90$
$\frac{1}{2}(\bar{t}_{ie} + t_e) =$	0 34 +	37,5	41,6	44,5	46,5
$\frac{1}{2}(\bar{t}_{ie} + t_e) + \mu_N =$ . . .	0 34 +	36,0	40,1	43,0	45,0
$\bar{t}_{ie} + \mu_N =$	0 34 +	26,4	34,7	40,4	44,4
$\lg\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}(\bar{t}_{ie} + t_e) + \mu_N\right) =$		0,8228	0,8219	0,8213	0,8209
$\lg\cos(\bar{t}_{ie} + \mu_N) =$		9,9951	9,9950	9,9950	9,9950
$\lg 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} / \sin 1'' =$		1,6404	1,3866	1,0458	0,4514
$C\lg 15 =$		8,8239			
$\lg dt_{ie} =$		1,2822	1,0274	0,6860	0,0912

Westdurchgang

		6	5	4	3
$\bar{t}_{iw} =$	$0^{\mathrm{h}}34^{\mathrm{m}}$ +	$25^{\mathrm{s}},08$	$33^{\mathrm{s}},98$	$38^{\mathrm{s}},98$	$42^{\mathrm{s}},73$
$\frac{1}{2}(\bar{t}_{iw} + t_w) =$	0 34 +	34,5	39,0	41,5	43,4
$\frac{1}{2}(\bar{t}_{iw} + t_w) - \mu_N =$ . . .	0 34 +	36,0	40,5	43,0	44,9
$\bar{t}_{iw} - \mu_N =$	0 34 +	26,6	35,5	40,5	44,2
$\lg\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}(\bar{t}_{iw} + t_w) - \mu_N\right) =$ . . .		0,8230	0,8218	0,8213	0,8209
$\lg\cos(\bar{t}_{iw} - \mu_N) =$		9,9951	9,9950	9,9950	9,9950
$\lg 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} / \sin 1'' =$		1,6416	1,3867	1,0482	0,4502
$C\lg 15 =$		8,8239			
$\lg dt_{iw} =$		1,2836	1,0274	0,6884	0,0900
$dt_{ie} =$		$19^{\mathrm{s}},15$	$10^{\mathrm{s}},65$	$4^{\mathrm{s}},85$	$1^{\mathrm{s}},23$
$dt_{iw} =$		19,21	10,65	4,88	1,23
$t_{ie} =$	$0^{\mathrm{h}}34^{\mathrm{m}}$ +	47,09	46,85	46,79	47,13
$t_{iw} =$	0 34 +	44,29	44,63	43,86	43,96

Die Berechnung der Stundenwinkel t_{ie} und t_{iw} des Durchganges durch den Achsenäquator aus den einzelnen Fadenbeobachtungen ist in Tabelle 2 dargestellt. Der kleinen Zenitdistanzen respektive Stundenwinkel wegen muß dieser Berechnung die genaue Beziehung (51a) zugrunde gelegt werden. Als Näherungswerte der Stundenwinkel t_e und t_w des Durchgangs durch den Achsenäquator und als Näherungswert von μ_N sind angenommen worden

$$\left.\begin{aligned} t_e &= 0^h 34^m 47{,}^s0 \\ t_w &= 0\ \ 34\ \ 44{,}0 \end{aligned}\right\} \mu_N = -1{,}^s50;$$

sie weichen von den damit berechneten Werten

$$\left.\begin{aligned} t_e &= \frac{1}{n}\,[t_{ie}] = 0^h 34^m 46{,}^s96 \\ &\qquad\qquad \pm 0{,}085 \\ t_w &= \frac{1}{n}\,[t_{iw}] = 0^h 34^m 44{,}^s18 \\ &\qquad\qquad \pm 0{,}174 \end{aligned}\right\} \mu_N = -1{,}^s38$$

so wenig ab, daß die Rechnung nicht wiederholt zu werden braucht; es ist definitiv

$$\mu_N = \frac{1}{2}(t_w - t_e) = \qquad -1{,}^s38,$$

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_w + t_e) = \quad 0^h 34^m 45{,}^s57.$$

Es wird somit:

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} p &= 9{,}978\,1274 \\ \lg \cos t_0 &= 9{,}994\,9857 \\ \lg \sec \mu_N &= \qquad\qquad 0 \\ \hline \lg \operatorname{tg} \Phi_0 &= 9{,}973\,1131 \\ \Phi_0 &= 43^0 13' 39{,}''22 \\ -i &= \qquad + 5{,}44 \\ \Phi &= 43^0 13' 44{,}''66 \end{aligned}$$

i ist das Mittel der vier beobachteten Neigungen.

Die innere Genauigkeit des Φ-Wertes läßt sich mit Hilfe der Beziehung

$$m_\Phi = \frac{1}{2}\ \operatorname{tg} z \cos \Phi \sqrt{m_{U_e}^2 + m_{U_w}^2}$$

abschätzen; sie folgt aus der Beziehung (55a), wenn darin $dp = 0$ gesetzt wird. Mit den angegebenen mittleren Fehlern der Stundenwinkel t_e und t_w, mit welchen die mittleren Fehler m_{U_e} und m_{U_w} zu identifizieren sind und mit den Werten $\operatorname{tg} z = 0{,}105$ und $\cos \Phi = 0{,}729$ erhält man in Bogensekunden:

$$m_\Phi = \pm 15 \cdot 0{,}038 \sqrt{0{,}^2085 + 0{,}^2174} = \pm 0{,}''11.$$

DRITTES ZAHLENBEISPIEL

Beobachtung des direkten Bildes vor dem Umlegen und des von einem Quecksilberhorizont reflektierten Bildes nach dem Umlegen.

Ort:	Astronomische Anstalt der Universität Basel in Binningen.
Instrument:	Bambergsches Passageninstrument mit mechanischer Nachführung des beweglichen Fadens und automatischer Nachführung des Fernrohres in Zenitdistanz; Vergrößerung 86fach.
Beobachter:	Dr. J. O. FLECKENSTEIN.
Datum:	20. Oktober 1945.

Die scheinbaren Rektaszensionen und Poldistanzen der beobachteten Sterne sowie ihre Zenitdistanzen sind in Tabelle 1 aufgeführt; die angegebenen Uhrkorrektionen sind aus den Zeitsignalen der Neuenburger Sternwarte abgeleitet.

Die mittleren Örter der beiden letzten Sterne sind dem Preliminary General Catalogue von Boss entnommen unter Berücksichtigung der systematischen Deklinationsreduktionen auf den Neuen Fundamentalkatalog FK 3, auf welchen sich die Örter der beiden ersten Sterne beziehen. Die kurzperiodischen Mondglieder sind nicht berücksichtigt.

Tabelle 1

Stern	α	p	z	u
β Lyr	$18^h48^m03{,}^s382$	$56^0 41' 50{,}''33$	$41^0 54'$	$-24{,}^s759$
β Triang	02 06 18,838	55 16 05,83	39 27	− 24,771
Boss 746	03 15 20,096	55 58 29,86	40 40	− 24,801
λ Cyg	20 45 17,254	53 42 22,06	36 50	− 24,804

In der Tabelle 2 sind die mittleren Stundenwinkel $\bar{t}$ mit ihren mittleren Fehlern angegeben; sie beruhen auf je 10 Doppelkontakten:

$$\bar{t} = \bar{U} + u - \alpha;$$

sie enthält ferner die an diesen Stundenwinkeln anzubringenden Reduktionen dt als Summe der beiden Reduktionen dt' und dt'':

$$dt' = \frac{1}{10}\left[\frac{m''}{15}\right] \operatorname{cotg} \bar{t},$$

$$dt'' = \pm k \operatorname{cosec} p \operatorname{cosec} \nu \operatorname{cosec} \bar{t},$$

in welchen einzuführen ist:

$$k = 0{,}^s0135,$$

$$\nu = 90^0 - \Phi = 47^0 32{,}'5.$$

μ_N ist gleich Null angenommen worden.

Tabelle 2

Stern	Okularfolge	$\bar{t}$	m. F.	dt'	dt''	dt	t
β Lyr *W*	N–S	$3^h32^m12{,}^s24$	$\pm 0{,}^s024$	$+0{,}^s165$	$+0{,}^s274$	$+0{,}^s44$	$3^h32^m12{,}^s68$
β Triang *E*	S–N	3 22 30,87	±0,018	+0,205	−0,288	−0,08	3 22 30,79
Boss 746 *E*	N–S	3 27 22,68	±0,032	+0,203	−0,281	−0,08	3 27 22,60
λ Cyg *W*	S–N	3 11 06,58	±0,036	+0,278	+0,306	+0,58	3 11 07,16

Zur Berechnung der Polhöhe kombinieren wir die in der gleichen Okularfolge beobachteten Sterne miteinander. Die Berechnung ist in der Tabelle 3, Seite 120, dargestellt.

Die angegebenen mittleren Fehler bringen nur die innere Genauigkeit zum Ausdruck; sie sind mit Hilfe der Beziehung

$$m_\Phi^2 = \frac{\sin^2 z_w \sin^2 z_e}{\sin^2 (z_w + z_e)} (m_{U_w}^2 + m_{U_e}^2) \cos^2 \Phi$$

berechnet. Als Endwert ist anzunehmen

$$\Phi = 42^0 27' 32{,}''26 \pm 0{,}''13.$$

Tabelle 3

	β Lyr – Boss 746	β Triang – λ Cyg
$t_0 =$	$3^{h}29^{m}47^{s},64$	$3^{h}16^{m}48^{s},975$
$\Delta t =$	$+\,2\ \ 25,04$	$-\,5\ \ 41,815$
$p_w - p_e =$	$+\,0^{0}43'20'',47$	$-\,1^{0}33'43'',77$
$p_w + p_e =$	112 40 20,19	108 58 27,89
cotg t_0	9,885 7885	9,936 0385
sin $(p_w - p_e)$	8,100 6152	$8{,}435\,5486_n$
cosec $(p_w + p_e)$	0,034 9284	0,024 2632
tg $(\Delta t - \mu_N)$	8,021 3321	$8{,}395\,8503_n$
$\Delta t - \mu_N =$	$+\,2^{m}24^{s},43$	$-\,5^{m}42^{s},054$
$\mu_N =$	$+\ \ 0,61$	$+\ \ 0,24$
$t_w - \mu_N =$	$3^{h}32^{m}12^{s},07$	$3^{h}11^{m}06^{s},92$
$t_e + \mu_N =$	3 27 23,21	3 22 31,03
tg p_w	0,182 4714	0,134 0624
cos $(t_w - \mu_N)$	9,778 9565	9,827 3656
tg Φ_0	9,961 4279	9,961 4280
tg p_e	0,170 6033	0,159 1088
cos $(t_e + \mu_N)$	9,790 8251	9,802 3189
tg Φ_0	9,961 4284	9,961 4277
$\Phi = \Phi_0 \pm \varkappa_0 =$	$42^{0}27'32'',31$	$42^{0}27'32'',20$
	$\pm\,0,19$	$\pm\,0,18$