

Azimutes b beobachtet, so lassen sich auf den Schenkeln der Winkel $t_2 - t_1$ und $t_4 - t_3$ mit Hilfe der Poldistanzen der Sterne die vier Örter S_1, S_2, S_3 und S_4 angeben; S_1 und S_2 liegen auf dem Vertikal des Azimutes a und S_3 und S_4 auf dem Vertikal des Azimutes b . Da aber auch der Winkel $t_3 - t_2$ bekannt ist, ist die gegenseitige Lage der beiden Vertikale auf der Kugel gegeben; sie schneiden sich im gesuchten Zenit Z ; es kann jetzt der Meridian eingezeichnet, die Poldistanz PZ abgemessen und es können die Stundenwinkel der vier Sterne angegeben werden.

Die günstigsten Umstände sind dann vorhanden, wenn sich die beiden Vertikale rechtwinklig schneiden; kommt es nur auf die Bestimmung der Uhrkorrektur und der Polhöhe an, so wird man die beiden Sternpaare in kleinen Zenitdistanzen, je zu beiden Seiten des Zenites, beobachten, um zu erreichen, daß eine Unsicherheit in den Richtungen der beiden Vertikale sich so wenig als möglich auf die Lage des Schnittpunktes übertragen kann ⁴⁾.

Das Instrument, das zu den Methoden der Ortsbestimmung verwendet wird, die auf der Elimination der Zenitdistanz oder des Azimutes beruhen, braucht nicht mit einem genau geteilten Vertikal- oder Horizontalkreis versehen zu sein; es genügen Einstellkreise, die auf eine bis zwei Bogenminuten genau abgelesen werden können.

Wir behandeln im Folgenden nur diese Methoden*); sie verdienen die Bezeichnung «genau» insofern, als nur die unvermeidlichen Fehler der Durchgangsbeobachtungen und die Unsicherheiten der Sternörter das Resultat beeinflussen; da keine Winkel gemessen werden, spielen Kreisteilungsfehler keine Rolle.

*) Eine analytische Diskussion der günstigsten Beobachtungsumstände aller möglichen Methoden gibt die Dissertation von E. HERZOG, «Die Aufgaben der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung in systematischer Behandlung» (Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Band LVIII, 1947).

II. KAPITEL

**Die Reduktion der beobachteten Durchgangszeiten
und deren mittlere Fehler. — Differentialausdrücke.****a) Allgemeine Bemerkungen**

Um den Einfluß der unvermeidlichen Beobachtungsfehler zufälliger Natur auf die Durchgangszeit des einzelnen Sternes herabzumindern, bringt man in der Brennebene des Fernrohrobjektives ein Fadennetz oder einen beweglichen Faden an, so daß man entweder die Durchgänge durch die einzelnen Fäden beobachten oder mit Hilfe des unpersönlichen Mikrometers auf einem Chronographen die Momente festhalten kann, zu welchen sich der Stern an bestimmten Stellen des Gesichtsfeldes befunden hat.

Sowohl wenn Almukantaratdurchgänge als wenn Vertikaldurchgänge beobachtet werden, können die einzelnen Uhrzeiten auf den Moment des Durchganges durch den Mittelfaden des Netzes reduziert werden, wozu die Abstände der Seitenfäden vom Mittelfaden bekannt sein müssen. Einem Netz paralleler Fäden entspricht an der Bezugskugel eine Schar von Großkreisen, die sich in zwei diametralen Punkten der Kugel schneiden. Damit die Durchgänge in einem bestimmten Abstand vom Mittelfaden beobachtet werden, bringt man einen senkrecht zur Richtung der Seitenfäden verlaufenden Doppelfaden an und hält sich bei der Beobachtung der Durchgänge an die Vorschrift, den Stern innerhalb des Doppelfadens zu halten oder wenigstens in dessen unmittelbarer Nähe. Benützt man zur Beobachtung die Aug- und Ohrmethode oder die Registriermethode, so hat der Beobachter eine Hand frei, so daß er die nötige Verstellung des Fernrohrs in Zenitdistanz oder in Azimut vornehmen kann. Zur Beobachtung mit dem unpersönlichen Mikrometer braucht der Beobachter aber beide Hände; in diesem Fall muß er den Stern bei schiefer Bewegung außerhalb des Doppelfadens beobachten und durch besondere Maßnahmen dafür sorgen, daß keine systematischen Fehler entstehen. Dazu gehört eine sorgfältige Justierung des Fadennetzes nach der Sollrichtung. Einen kleinen Justierungsfehler kann man bei Vertikalbeobachtungen, wenn das Instrument zum Zweck der Elimination der Fadendistanzen und der Kollimation umgelegt

wird, leicht unschädlich machen, solange die Bewegung nicht sehr schief erfolgt. Nimmt zum Beispiel die Zenitdistanz während des Durchganges zu, so läßt man den Stern vor dem Umlegen vom horizontalen Doppelfaden aus im umkehrenden Fernrohr sich nach oben bewegen und stellt nach dem Umlegen das Fernrohr in Zenitdistanz so ein, daß er sich nun in der unteren Hälfte des Gesichtsfeldes nach oben bewegt und sich am Ende wieder in unmittelbarer Nähe des Horizontalfadens befindet.

Wird der Vertikaldurchgang eines Sternes vor dem Umlegen am Horizontalfaden im Abstand f vom kollimationsfreien Mittelfaden beobachtet, nach dem Umlegen aber nicht mehr am Horizontalfaden, sondern im Abstand d von diesem und damit in einer um d größeren oder kleineren Zenitdistanz, so wird der Stern nicht wieder im Abstand f , sondern im Abstand f' vom Mittelfaden beobachtet, der durch

$$f' = f \cos d$$

gegeben wird, so daß

$$f - f' = f \cdot 2 \sin^2 \frac{d}{2}$$

wird. Der Unterschied $f - f'$ erreicht, wenn $d = 15'$ ist, erst bei $f = 100^s$ den Betrag von 0^s001 .

Weicht dagegen die Richtung des Fadens von der richtigen Orientierung um den Winkel v ab, so ändert der Abstand vom Mittelfaden beim Übergang zu der um d vom Horizontalfaden entfernten Stelle um

$$d \sin v.$$

Soll dieser Betrag kleiner als 0^s001 bleiben, so muß, wenn v zu einer Bogenminute angenommen wird, der vor dem Umlegen in unmittelbarer Nähe des Horizontalfadens beobachtete Stern nach dem Umlegen in einer Entfernung d vom Horizontalfaden beobachtet werden, die kleiner als $3^s4 = 0^s85$ bleibt. Um Beträge von dieser Größenordnung handelt es sich also bei der Einstellung des Fernrohres in Zenitdistanz, wenn bei einem Fehler der Orientierung von ± 1 Bogenminute der Einfluß der Fadenschiefe bei der Beobachtung außerhalb des horizontalen Doppelfadens eliminiert werden soll.

Bewegt sich der Stern sehr schief zur Fadenrichtung, wie es zum Beispiel bei Vertikaldurchgängen im I. Vertikal der Fall ist, so kann das unpersönliche Mikrometer nur dann benützt werden, wenn das Fernrohr dem Stern automatisch nachgeführt wird. Zur automatischen Nachführung in Zenitdistanz bei Durchgangsbeobachtungen im I. Vertikal ist das Passageninstrument der astronomischen Anstalt der Universität Basel mit folgender Vorrichtung versehen worden (vergleiche Figur 13). Als Energiequelle dient ein kleiner Synchronmotor M ; er wird an das Lichtnetz (220 V und 50 Perioden/sec) angeschlossen. Zwischen das Zahnrad Z_1 , das auf der Endachse des Motors sitzt, und das Zahnrad Z_4 , das seine Bewegung über die Kegelräder Z_5 und Z_6 auf die Achse der

Schnecke *Sch* überträgt, können die Zahnräder Z_2 und Z_3 eingeschaltet werden, entweder so, daß die Bewegung von Z_1 durch Z_2 und Z_3 auf Z_4 übertragen wird, oder so, daß nur Z_3 die Übertragung übernimmt. Hiezu sitzen die beiden Zahnräder Z_2 und Z_3 auf einer Platte, die sich mittels des Hebels *He* um die Achse des Zahnrades Z_4 drehen läßt. Wird der Hebel nach unten gestellt, so wird Z_1 über Z_3 mit Z_4 verbunden; Z_2 wird in dieser Stellung zwar von Z_3 mitgeführt,

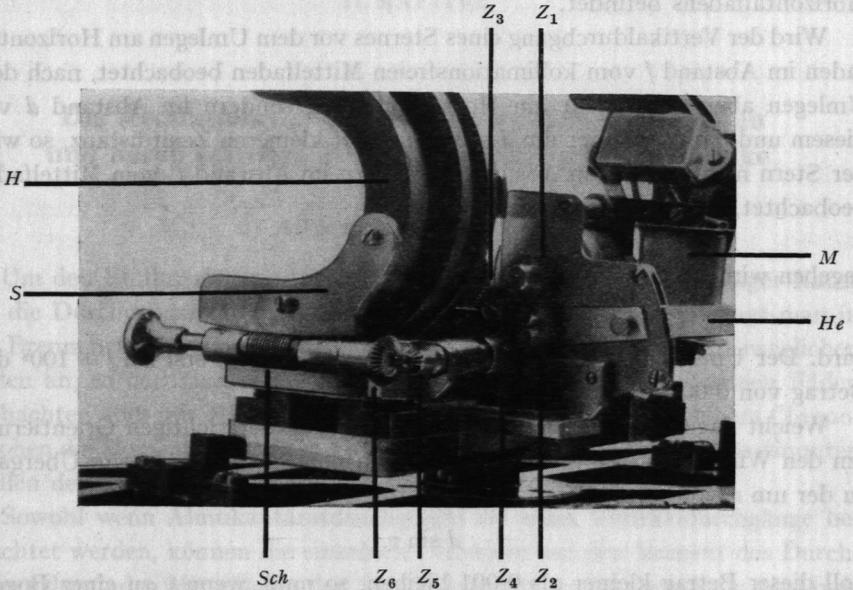


Fig. 13

greift aber nicht in Z_1 ein. Z_4 dreht sich dann im gleichen Sinn wie Z_1 . Wird der Hebel *He* nach oben gestellt, so greift Z_2 in Z_1 ein und überträgt seine Bewegung durch Z_3 , das nicht mehr mit Z_1 verbunden ist, auf Z_4 . Es bewegt sich jetzt Z_4 im umgekehrten Sinn wie Z_1 . In einer Mittelstellung des Hebels greift weder Z_2 noch Z_3 in Z_1 ein, so daß die Nachführung ausgeschaltet ist. Die Schnecke *Sch* greift in die Zähne des Schneckenradsegmentes *S* ein, das mit dem Hebel *H* verbunden ist, der sonst zur Feineinstellung in Zenitdistanz dient. – Zur Abstimmung des Mechanismus auf eine gegebene Zenitdistanzänderung können variiert werden 1. die Umdrehungsgeschwindigkeit der Endachse des Synchronmotors, 2. die Zahl der Zähne an den Kegelrädern Z_5 und Z_6 , 3. die Ganghöhe der Schnecke und 4. der Radius des Schneckenradsektors.

b) Reduktion der Almukantaratdurchgänge

Man kann die Zeiten des Durchganges zweier verschiedener Sterne durch denselben Seitenfaden direkt miteinander kombinieren zur Ableitung der Uhr-

korrektur nach der Zingerschen oder der Polhöhe nach der Pewzowschen Methode; man kann aber auch vom arithmetischen Mittel der einzelnen Uhrzeiten ausgehen; die hierzu erforderlichen Beziehungen erhält man auf folgendem Weg.

Es sei

z' die scheinbare Zenitdistanz des Mittelfadens,

f der Winkelabstand des Seitenfadens vom Mittelfaden,

r_0 die Refraktion in der Zenitdistanz z' ,

r die Refraktion in der Zenitdistanz $z' + f$,

$z = z' + r_0$ die wahre Zenitdistanz des Mittelfadens (MF.),

$z + \Delta z = z' + f + r$ die wahre Zenitdistanz des Seitenfadens (SF.).

Die Differenz Δz der wahren Zenitdistanzen ist dann gleich

$$\Delta z = f + (r - r_0).$$

Führt man hierin $(r - r_0)$ auf die Änderung $\Delta r''$ in Bogensekunden zurück, welche die Refraktion bei einer Änderung von z' um $1^\circ = 3600''$ erleidet, so kann man immer ausreichend genau setzen

$$r - r_0 = f \frac{\Delta r''}{3600''},$$

so daß

$$\Delta z = f \left(1 + \frac{\Delta r''}{3600''} \right)$$

wird.

Ist nun t der Stundenwinkel des Sternes bei der wahren Zenitdistanz z und t' der Stundenwinkel bei der wahren Zenitdistanz $z + \Delta z$, so folgt aus der Differenz der beiden Beziehungen

$$\cos z = \cos \Phi \cos p + \sin \Phi \sin p \cos t,$$

$$\cos (z + \Delta z) = \cos \Phi \cos p + \sin \Phi \sin p \cos t'$$

leicht:

$$\sin \frac{t' - t}{2} = \frac{\sin \frac{\Delta z}{2}}{\sin \Phi \sin p} \cdot \frac{\sin \left(z + \frac{\Delta z}{2} \right)}{\sin \frac{t' + t}{2}}. \quad (4)$$

Die Differenz $(t' - t)$ ist gleich der Differenz der Uhrzeiten, zu welchen sich der Stern am Seitenfaden und Mittelfaden befindet: die Reduktion vom Seitenfaden auf den Mittelfaden ist also gleich $-(t' - t)$.

Die Beziehung (4) ist streng; sie läßt sich aber zur Berechnung der Reduktion $(t' - t)$ nur verwenden, wenn die rechter Hand auftretenden Stunden-

winkel t' und t bekannt sind; zu deren Ermittlung genügt es aber immer, von einem Näherungswert der Uhrkorrektion auszugehen.

Die strenge Beziehung (4) wird man nur verwenden müssen, wenn die Durchgänge in Meridiannähe beobachtet werden. Da Δz in der Regel kleiner als 10–15 Bogenminuten sein wird, darf der Sinus von $\frac{\Delta z}{2}$ durch den Bogen ersetzt werden. Da

$$\frac{t' + t}{2} = t + \frac{t' - t}{2}$$

ist, wird unter Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t' + t}{2}\right)} &= \frac{\sin z + \frac{\Delta z}{2} \cos z + \dots}{\sin t + \frac{t' - t}{2} \cos t + \dots} \\ &= \frac{\sin z}{\sin t} \left(1 + \frac{\Delta z}{2} \cotg z\right) \left(1 - \frac{t' - t}{2} \cotg t + \dots\right) \\ &= \frac{\sin z}{\sin t} \left(1 + \frac{\Delta z}{2} \cotg z - \frac{t' - t}{2} \cotg t + \dots\right) \end{aligned}$$

Es wird dann

$$t' - t = \Delta z \frac{\sin z \left(1 + \frac{\Delta z}{2} \cotg z - \frac{t' - t}{2} \cotg t + \dots\right)}{\sin \Phi \sin p \sin t}$$

Führt man in der Klammer für $t' - t$ den Näherungswert

$$\begin{aligned} t' - t &= \Delta z \frac{\sin z}{\sin \Phi \sin p \sin t} \\ &= \Delta z \frac{1}{\sin \Phi \sin a} \end{aligned}$$

ein, so erhält man

$$t' - t = \frac{\Delta z}{\sin \Phi \sin a} \left(1 + \frac{\Delta z}{2} \left(\cotg z - \frac{\cotg t}{\sin \Phi \sin a}\right)\right).$$

Die Reduktion $\Delta t = -(t' - t)$ vom Seitenfaden auf den Mittelfaden wird somit, wenn zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \operatorname{cosec} \Phi \operatorname{cosec} a, \\ n_0 &= \cotg z - m_0 \cotg t \end{aligned} \right\} (5a)$$

gesetzt wird, gleich

$$t - t' \equiv \Delta t = -\Delta z \cdot m_0 \left(1 + \frac{\Delta z}{2} n_0\right).$$

Drückt man Δz in Zeitsekunden aus, um Δt in Zeitsekunden zu erhalten, so wird

$$\Delta t^{\text{sec}} = -\Delta z^{\text{sec}} m_0 \left(1 + \frac{\Delta z^{\text{sec}}}{2} 15 \sin 1'' \cdot n_0 \right) \quad (5b)$$

mit

$$\Delta z^{\text{sec}} = f^{\text{sec}} \left(1 + \frac{\Delta r''}{3600''} \right).$$

Die Uhrzeit U_M des Durchganges durch den Mittelfaden wird dann gleich:

$$U_M = U + \Delta t.$$

Beobachtet man die Durchgänge mit dem unpersönlichen Mikrometer, so hat man noch die Kontaktbreite und den toten Gang zu berücksichtigen; es wird

$$U_M = U + \Delta t + k |m_0| (1 + \dots);$$

k = halbe Summe von Kontaktbreite und totem Gang.

Im I. Vertikal ist mit $a = 90^\circ$

$$m_0 = \operatorname{cosec} \Phi$$

und

$$\sin \Phi = \operatorname{cotg} t \operatorname{tg} z,$$

also

$$n_0 = \operatorname{cotg} z - m_0 \operatorname{cotg} t = 0,$$

das heißt die Änderung des Stundenwinkels ist im I. Vertikal bis auf kleine Größen höherer Ordnung der Änderung der Zenitdistanz proportional.

c) Reduktion der Vertikaldurchgänge (Fig. 14)

1. *Reduktion auf den Achsenäquator.* Wir nehmen an, es sei der Durchgang eines Sternes mit Hilfe des unpersönlichen Mikrometers beobachtet worden; U' sei die Uhrzeit des Momentes, in welchem der Kontaktstreifen der Mikrometertrommel vor dem Umlegen, und U'' der Moment, in welchem er nach dem Umlegen die Schließung des Stromes erzeugt hat. Am arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(U' + U'')$ der auf dem Chronographen registrierten Uhrzeiten sind dann zwei Korrekturen anzubringen, um den Moment des Durchganges durch den Achsenäquator zu erhalten; die erste Korrektur berücksichtigt, daß sich der Stern vor und nach dem Umlegen nicht mit derselben azimutalen Geschwindigkeit bewegt; die zweite Korrektur trägt dem Umstande Rechnung, daß wegen der Breite des Kontaktstreifens und wegen des toten Ganges der Schraube sich der Stern in den Momenten des Stromschlusses sich nicht gleich weit vom Achsenäquator entfernt befunden hat.

Macht man die Beobachtung mit Hilfe eines Fadennetzes, indem man vor und nach dem Umlegen die Momente des Durchganges durch die gleichen Fä-

den entweder nach der Aug- und Ohrmethode notiert oder auf einem Chronographen registriert, so ist nur die erste Korrektur anzubringen.

Wegen der Zapfenungleichheit ist die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse vor dem Umlegen nicht identisch mit der Neigung nach dem Umlegen; jene sei i' , diese i'' . Es ist deshalb auch der Pol Q' des Achsenäquators

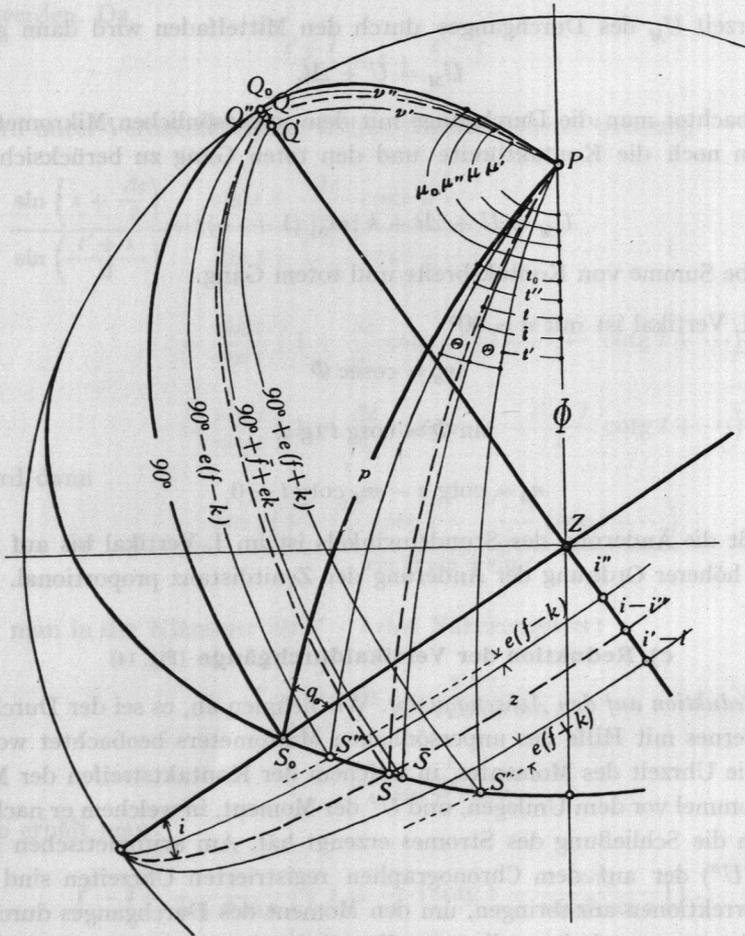


Fig. 14

vor dem Umlegen zu unterscheiden vom Pol Q'' nach dem Umlegen; wir bezeichnen die dem Stern im Azimut um 90° vorangehenden Pole mit Q' und Q'' .

Der Winkelwert der halben Summe von Kontaktbreite und totem Gang sei k . S' sei der Ort des Sternes im Moment der Kontakt- oder Fadenbeobachtung vor dem Umlegen und S'' der Ort nach dem Umlegen. Die Abstände $S'Q'$ und $S''Q''$ setzen wir gleich

$$\begin{aligned} S'Q' &= 90^\circ + e(f + k), \\ S''Q'' &= 90^\circ - e(f - k); \end{aligned}$$

hierin ist e der Wert $+1$ oder -1 beizulegen, je nachdem sich der Stern dem zugeordneten Pol des Achsenäquators nähert oder sich von ihm entfernt.

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{2} (U' + U''), \\ \vartheta &= \frac{1}{2} (U'' - U')^*, \\ \bar{t} &= \bar{U} + u - \alpha, \end{aligned}$$

so werden die Stundenwinkel des Sternes in den Momenten U' und U'' gleich:

$$\begin{aligned} t' &= \bar{t} - \vartheta, \\ t'' &= \bar{t} + \vartheta. \end{aligned}$$

Es sei t der Stundenwinkel des Sternes im Moment, wo er sich im Punkt S des mittleren Achsenäquators, dessen Pol die Neigung $\frac{1}{2}(i' + i'')$ hat, befindet; dann ist $(t - \bar{t})$ die am arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(U' + U'')$ anzubringende Korrektur. Um sie zu berechnen, führen wir die Stundenwinkel μ' und μ'' der Punkte Q' und Q'' ein und deren Poldistanzen ν' und ν'' . Wir setzen

$$\mu = \frac{1}{2} (\mu' + \mu'')$$

und

$$\nu = \frac{1}{2} (\nu' + \nu'');$$

es wird dann

$$\begin{aligned} \mu' &= \mu + d\mu, & \nu' &= \nu + d\nu, \\ \mu'' &= \mu - d\mu, & \nu'' &= \nu - d\nu, \end{aligned}$$

mit

$$d\mu = \frac{1}{2} (\mu' - \mu''), \quad d\nu = \frac{1}{2} (\nu' - \nu'').$$

In den Dreiecken $PS'Q'$ und $PS''Q''$ werden dann die Winkel bei P gleich:

$$\begin{aligned} \mu' - t' &\equiv \mu - \bar{t} + \vartheta_0, \\ \mu'' - t'' &\equiv \mu - \bar{t} - \vartheta_0 \end{aligned}$$

mit

$$\vartheta_0 = \vartheta + d\mu.$$

Zur Zeit \bar{U} habe der Ort \bar{S} des Sternes vom Pol Q den Abstand $90^\circ + \bar{f} + ek$. Die Dreiecke $P\bar{S}Q$ und PSQ geben dann die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} -\sin(\bar{f} + ek) &= \cos p \cos \nu + \sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}), \\ 0 &= \cos p \cos \nu + \sin p \sin \nu \cos(\mu - t). \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

*) In der Figur Winkel Θ .

Aus der Differenz dieser beiden Beziehungen folgt

$$2 \sin \frac{1}{2} (t - \bar{t}) = \sin (\bar{f} + ek) \frac{\operatorname{cosec} p \operatorname{cosec} v}{\sin \left(\mu - \frac{\bar{t} + t}{2} \right)}. \quad (\text{b})$$

Um hierin die unbekannte Entfernung \bar{f} zu eliminieren, gehen wir von den Beziehungen aus, welche die Dreiecke $PS'Q'$ und $PS''Q''$ liefern:

$$\begin{aligned} -\sin e(f+k) &= \cos p \cos(\nu + d\nu) + \sin p \sin(\nu + d\nu) \cos(\mu - \bar{t} + \vartheta_0), \\ +\sin e(f-k) &= \cos p \cos(\nu - d\nu) + \sin p \sin(\nu - d\nu) \cos(\mu - \bar{t} - \vartheta_0). \end{aligned}$$

Vernachlässigt man im arithmetischen Mittel dieser beiden Beziehungen, das ist

$$\begin{aligned} -\cos e f \sin ek &= \cos p \cos \nu \cos d\nu \\ &+ \sin p \sin \nu \cos d\nu \cos(\mu - \bar{t}) \cos \vartheta_0 \\ &- \sin p \cos \nu \sin d\nu \sin(\mu - \bar{t}) \sin \vartheta_0 \end{aligned}$$

Glieder, die von höherer Ordnung klein sind, so erhält man

$$-\sin ek = \cos p \cos \nu + \sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \cos \vartheta_0 + \dots$$

Durch Elimination von $\cos p \cos \nu$ aus dieser Beziehung mit Hilfe der Beziehung (a) wird $(\bar{f} + ek)$ auf bekannte Größen zurückgeführt:

$$\sin(\bar{f} + ek) = \sin ek - \sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \cdot 2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}.$$

Damit geht (b) über in:

$$2 \sin \frac{1}{2} (t - \bar{t}) = -\operatorname{cosec} \left(\mu - \frac{\bar{t} + t}{2} \right) \left(\cos(\mu - \bar{t}) \cdot 2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \frac{\sin ek}{\sin p \sin \nu} \right). \quad (6a)$$

Die Berechnung der Reduktion $(t - \bar{t})$ nach dieser Beziehung setzt die Kenntnis des Stundenwinkels t , der neben \bar{t} rechter Hand auftritt, voraus. Man wird sich mit Hilfe eines Näherungswertes der Uhrkorrektion zunächst einen Näherungswert von \bar{t} verschaffen und kann dann mit Hilfe der Beziehung

$$t - \bar{t} = -\cotg(\mu - \bar{t}) \cdot 2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{ek \operatorname{cosec}(\mu - \bar{t})}{\sin p \sin \nu} \quad (6b)$$

zu einem Näherungswert von t übergehen.

Die Beziehung (6b) liefert übrigens meist schon einen ausreichend genauen Wert der Reduktion $(t - \bar{t})$; die Beziehung (6a) wird man nur anwenden müssen, wenn die Beobachtungen in der Nähe der größten Digression eines Sternes oder bei sehr kleinen Zenitdistanzen in der Nähe des I. Vertikales stattfinden.

Im Dreieck PSQ ist der Winkel bei S nur um eine kleine Größe verschieden vom Komplement des parallaktischen Winkels q des Sternes im Dreieck $P\bar{S}Q$; es ist

$$\begin{aligned} \cos q &= \sin \nu \sin(\mu - \bar{t}), \\ \sin q &= \cos \nu \sin p - \sin \nu \cos p \cos(\mu - \bar{t}). \end{aligned}$$

Benützt man die Abkürzung

$$m'' = 2 \frac{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}}{\sin 1''}$$

und setzt

$$\vartheta_0 = \vartheta + \dots$$

so wird der Ausdruck für die Reduktion $(t - \bar{t})$ in Zeitsekunden gleich:

$$(t - \bar{t})^{\text{sec}} = -\frac{m''}{15} \cotg(\mu - \bar{t}) + e k^{\text{sec}} \text{cosec } p \text{ sec } q. \quad (6c)$$

Die Koordinaten μ, ν des Poles Q sind mit den Horizontalkoordinaten, der Neigung i und dem Azimut a_0 des Instrumentenvertikals, durch die folgenden Beziehungen verbunden:

$$\begin{aligned} \sin \nu \cos \mu &= \sin i \sin \Phi - \cos i \cos \Phi \sin a_0, \\ \sin \nu \sin \mu &= \cos i \cos a_0, \\ \cos \nu &= \sin i \cos \Phi + \cos i \sin \Phi \sin a_0. \end{aligned}$$

Wird die Neigung i sehr klein gehalten, so können μ und ν aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin \nu \cos \mu &= -\cos \Phi \sin a_0, \\ \sin \nu \sin \mu &= \cos a_0, \\ \cos \nu &= \sin \Phi \sin a_0 \end{aligned} \quad (7)$$

ermittelt werden.

Ist die horizontale Komponente der täglichen Bewegung des Sternes sehr klein – welcher Fall eintritt, wenn sich der Stern in der Nähe des Poles des Äquators oder in der Nähe der größten Digression befindet oder wenn er in der Nähe des I. Vertikales bei sehr kleinen Zenitdistanzen beobachtet wird –, so ersetzt man die Durchgangsbeobachtungen durch Einstellungen des beweglichen Fadens auf den Stern in beiden Lagen des Instrumentes und leitet daraus den Abstand des Sternes vom Achsenäquator ab.

Es seien

$$S'Q = 90^\circ + f'$$

und

$$S''Q = 90^\circ + f''$$

die Abstände des Sternes zur Zeit U' vor dem Umlegen und zur Zeit U'' nach dem Umlegen vom Pol Q des mittleren Achsenäquators. Sind M' und M'' die den Einstellungen entsprechenden Ablesungen an der Mikrometertrommel, so ist

$$\frac{1}{2} (f' + f'') = \pm \frac{1}{2} (M' - M'') \times \text{Schraubenwert};$$

es gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem die Ablesungen zu- oder abnehmen, wenn der Faden vor dem Umlegen in größere Distanz vom Pol Q gebracht wird.

Es sei

$$\bar{S}Q = 90^\circ + \bar{f} = 90^\circ + \frac{1}{2} (f' + f'') + \left\{ \bar{f} - \frac{1}{2} (f' + f'') \right\}$$

der Abstand des Sternes vom Pol Q zur Zeit $\bar{U} = \frac{1}{2} (U' + U'')$. Die an $\frac{1}{2} (f' + f'')$ anzubringende Korrektur erhält man auf folgendem Wege. Das arithmetische Mittel der Beziehungen

$$\begin{aligned} -\sin f' &= \cos \rho \cos \nu + \sin \rho \sin \nu \cos(\mu - \bar{t} + \vartheta), \\ -\sin f'' &= \cos \rho \cos \nu + \sin \rho \sin \nu \cos(\mu - \bar{t} - \vartheta), \end{aligned}$$

das ist

$$-\frac{1}{2} (\sin f' + \sin f'') = \cos \rho \cos \nu + \sin \rho \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \cos \vartheta,$$

liefert mit der Beziehung

$$-\sin \bar{f} = \cos \rho \cos \nu + \sin \rho \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \quad (c)$$

die Differenz:

$$\sin \bar{f} - \frac{1}{2} (\sin f' + \sin f'') = -\sin \rho \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \cdot 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

oder, immer ausreichend,

$$\bar{f} - \frac{1}{2} (f' + f'') = -\sin \rho \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \cdot 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (8a)$$

Der Faktor von $2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ läßt sich in folgender Weise umformen:

Bis auf kleine Größen höherer Ordnung ist nach der Beziehung (c)

$$-\sin \rho \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) = \cos \rho \cos \nu,$$

oder, wenn

$$\cos \nu = \sin \Phi \sin a_0$$

eingeführt wird:

$$-\sin \rho \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) = \cos \rho \sin \Phi \sin a_0.$$

Ist a^* das Azimut des Sternes im Moment \bar{U} und \bar{z} seine Zenitdistanz, so ist genähert

$$\sin(a_0 - a^*) = \sin \bar{f} \operatorname{cosec} \bar{z}$$

oder, immer ausreichend, wenn \bar{z} nicht sehr klein ist:

$$a_0 = a^* + \bar{f} \operatorname{cosec} \bar{z} + \dots$$

Meist wird man

$$a_0 = a^* + \dots$$

setzen dürfen. Somit wird

$$\bar{f} = \frac{1}{2} (f' + f'') + \cos \rho \sin a^* \sin \Phi \cdot \frac{m''}{15}, \quad (8b)$$

worin f' und f'' in Zeitsekunden auszudrücken sind.

2. *Reduktion vom Achsenäquator auf den Instrumentenvertikal* wegen der Neigung der Horizontalachse.

Es sei i_v die Neigung, die aus zwei Ablesungen des Niveaus, die vor dem Umlegen in zwei verschiedenen Lagen gemacht worden sind, hervorgegangen ist. Die Neigung i' der Umdrehungsachse unterscheidet sich von i_v um die Zapfenungleichheit κ_v . Ist von den beiden Zapfenenden das in die Richtung des Poles Q' fallende Ende das dickere, so ist

$$i' = i_v - \kappa_v$$

die Erhebung des Poles Q' über dem Horizont. Nach dem Umlegen fällt dann das dünnere Ende in die Richtung des Poles Q' ; es ist also, wenn i_n und κ_n die i_v und κ_v nach dem Umlegen entsprechenden Größen sind:

$$i'' = i_n + \kappa_n.$$

Die Neigung i des mittleren Achsenäquators wird also gleich

$$i = \frac{i' + i''}{2} = \frac{(i - \kappa)_v + (i + \kappa)_n}{2}.$$

Haben die Zapfen kreisrunde Form, so ist $\kappa_v = \kappa_n \equiv \kappa$, also

$$i = \frac{i_v + i_n}{2}.$$

Wird das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild des Sternes beobachtet, so liegt die Zeit des Durchganges durch den Achsenäquator um ebenso viel vor (oder nach) der Zeit des Durchganges durch den Instrumentenvertikal, als die Zeit des direkt beobachteten Sternbildes nach (oder vor) dem Durchgang durch den Instrumentenvertikal liegt. Beobachtet man also vor dem Umlegen das direkte Bild und nach dem Umlegen das reflektierte, so ist als Neigung der Achse vor dem Umlegen der Wert $+i'$ und nach dem Umlegen der Wert $-i''$ einzuführen, so daß die Neigung i des mittleren Achsenäquators gleich

$$i = \frac{i' - i''}{2} = \frac{(i - \kappa)_v - (i + \kappa)_n}{2}$$

wird. Da aber bei kreisrunder Form der Zapfen

$$i_v - i_n = 4\kappa$$

ist, so wird

$$i = \kappa.$$

Beobachtet man also vor oder nach dem Umlegen das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild des Sternes, so liegt der Pol des mittleren Achsenäquators nur um den Winkelbetrag der Zapfenungleichheit über oder unter dem Horizont.

Es sei die Entfernung des Sternes S im mittleren Achsenäquator vom Pol Q_0 des Instrumentenvertikales gleich

$$SQ_0 = 90^\circ + \Delta i$$

und z die Instrumentalzenitdistanz des Sternes, das heißt sein Abstand vom höchsten Punkt des mittleren Achsenäquators; dann ist

$$\sin \Delta i = \sin i \cos z. \quad (9a)$$

Der Unterschied zwischen dem Stundenwinkel t_0 des Sternes, wenn er sich im Instrumentenvertikal befindet, und dem Stundenwinkel t des Sternes im Achsenäquator folgt dann aus den beiden Beziehungen:

$$\begin{aligned} -\sin \Delta i &= \cos p \cos v_0 + \sin p \sin v_0 \cos(\mu_0 - t), \\ 0 &= \cos p \cos v_0 + \sin p \sin v_0 \cos(\mu_0 - t_0), \end{aligned}$$

in welchen μ_0 und v_0 Stundenwinkel und Poldistanz des Poles Q_0 bezeichnen. Aus der Differenz dieser beiden Beziehungen folgt unter Beachtung der Beziehung (9a):

$$2 \sin \frac{t_0 - t}{2} = \frac{\sin i \cos z}{\sin p \sin v_0} \operatorname{cosec} \left(\mu_0 - \frac{t_0 + t}{2} \right).$$

Da die Neigung i klein gehalten werden kann, so daß sie höchstens den Betrag von einigen Bogensekunden annimmt, liefert die Beziehung

$$t_0 - t = i \frac{\cos z}{\sin p \sin v} \operatorname{cosec}(\mu - \bar{t}) = i \cos z \operatorname{cosec} p \sec q \quad (9b)$$

immer einen ausreichenden Näherungswert der Reduktion $(t_0 - t)$; sie kann dann mit der Reduktion $(t - \bar{t})$ zusammengefaßt werden, so daß in Zeitsekunden

$$(t_0 - \bar{t})^{\text{sec}} = -\frac{m''}{15} \cotg(\mu - \bar{t}) + (ek + i \cos z) \operatorname{cosec} p \sec q \quad (9c)$$

wird. Hierin sind k und i in Zeitsekunden auszudrücken.

d) Die Beobachtung der Durchgangszeiten

Die Uhrzeiten des Sterndurchganges durch einen Vertikal oder einen Almkantarat werden, wenn ein Fadennetz benützt wird, entweder nach der Aug- und Ohrmethode oder nach der Registriermethode beobachtet. Eine größere Genauigkeit bietet die Verwendung eines beweglichen Fadens in Verbindung mit einer Registriertrommel, wobei der Faden dem Stern unter Bisektion des Sternbildes entweder von Hand oder unter Benützung eines Triebwerkes nachgeführt wird.

Die Aug- und Ohrmethode kommt mit den einfachsten Hilfsmitteln aus; der Beobachter zählt die von einer Uhr gegebenen Sekundenschläge mit und merkt sich den Abstand des Sternes vom Faden sowohl bei dem – dem Durchgang – vorausgehenden als ihm nachfolgenden Schlag. Das Verhältnis des einen oder andern Abstandes zu ihrer Summe setzt dann der Beobachter in den Zahlenwert des Bruchteiles um, der, zur Ordnungszahl des vorausgehenden Schlages addiert, die gesuchte Durchgangszeit liefert. Man kann diesen Bruchteil auch nur nach dem Gehör abschätzen, indem man den Moment der Bisektion des Sternes durch den Faden erfaßt und diesen Moment nach dem Gedächtnis als Bruchteil des Sekundenintervalles ausdrückt. Bei langsamem Durchgang des Sternes durch den Faden bietet diese Art der Beobachtung eine größere Genauigkeit als die Abschätzung mit Hilfe der sehr kleinen Distanzen.

Eine größere Genauigkeit gewährt die zweite Methode, bei welcher sich der Beobachter eines Tasters bedient, um mit Hilfe eines elektrischen Stromes den Moment des Durchganges durch eine Marke neben den Sekundenmarken der Uhr auf dem ablaufenden Band eines Chronographen festzuhalten. Um Änderungen der persönlichen Gleichung so wenig als möglich auswirken zu lassen, empfiehlt es sich, den Strom durch den Taster auf den Moment der voraussichtlichen Bisektion des Sternbildes zu schließen und nicht erst, nachdem der Moment der Bisektion bewußt geworden ist. Sehr polnahe Sterne werden nach der Registriermethode weniger genau beobachtet als nach der Aug- und Ohrmethode, bei welcher sich der Beobachter auch bei stärkerer Luftruhe davon Rechenschaft geben kann, ob er den Durchgang des Sternes durch den Faden noch zu erwarten oder schon als erfolgt zu beurteilen habe.

Die größte Genauigkeit in der Beobachtung der Durchgänge bietet die Verwendung des Registriermikrometers; damit ist auch eine weitgehende Befreiung von der Beeinflussung der Beobachtungen durch die persönliche Gleichung verbunden, weshalb es auch als unpersönliches Mikrometer bezeichnet wird. Seine Verwendung zur Beobachtung von Durchgängen durch einen Vertikal hat außerdem den großen Vorteil, daß man keine Fadendistanzen zu kennen braucht und daß der Einfluß der Kollimation schon in der Uhrzeit des einzelnen Sterndurchganges eliminiert wird, wenn das Instrument während des Durchganges umgelegt und der Stern vor und nach dem Umlegen an denselben Kontakten beobachtet wird.

Es braucht relativ viel Übung, bis der Beobachter in der Lage ist, durch die Nachführung des Fadens von Hand die Bisektion des Sternbildes während einiger Umdrehungen genau aufrecht zu erhalten. Schon bald nach der Einführung des Registriermikrometers in die Beobachtungspraxis hat man gesucht, die Nachführung von Hand zu ersetzen durch die mechanische Nachführung mit Hilfe eines Triebwerkes. Die der Mikrometerspindel vom Motor erteilte Umdrehungsgeschwindigkeit muß sich in kontinuierlicher Weise ändern

lassen. Das wurde beim ersten Triebwerk, das H. STRUVE*) in Königsberg 1897 konstruieren ließ, dadurch erreicht, daß der Motor einen Kreiskegel um seine Achse in Rotation versetzte; vom Kegelmantel wurde eine Kreisscheibe durch Reibung mitgenommen, deren Rotationsgeschwindigkeit durch Verschieben längs einer Mantellinie sich von einem Minimalwert in der Nähe der Spitze bis zu einem Maximalwert in der Nähe der Kegelbasis variieren ließ. In der Praxis hat sich diese Einrichtung nicht bewährt; da die Geschwindigkeit der Fadenbewegung nicht genau auf die Geschwindigkeit des Sternes eingestellt werden konnte, war der Beobachter gezwungen, von Hand nachzuhelfen und die Motorbewegung zu beschleunigen oder zu verzögern**).

Um die Nachteile zu vermeiden, die mit der erzwungenen Änderung der Motorbewegung verbunden waren, und doch die Vorteile, welche die gleichförmige Bewegung des Fadens durch ein mechanisches Getriebe mit sich brachte, nicht zu verlieren, hat L. COURVOISIER die folgende Änderung des Beobachtungsverfahrens vorgeschlagen und praktisch ausprobiert. Der Beobachter versucht nicht mehr, die ungenaue Nachführung des Fadens durch den Motor von Hand zu korrigieren, sondern läßt den Motor absichtlich ein wenig zu rasch oder zu langsam sich bewegen. Im ersten Fall läßt man den Faden den Stern und im zweiten Fall den Stern den Faden einholen. Der Moment, in welchem die Bisektion eintritt, wird mit Hilfe eines Handtasters auf einem Chronographen festgehalten neben den Momenten der Uhrsekunden und der Kontaktmomente, die beide automatisch auf dem Chronographen zur Aufzeichnung gelangen. Es ist leicht ersichtlich, daß ein Fehler in der Betätigung des Handtasters sich um so weniger in der aus solchen Beobachtungen abgeleiteten Durchgangszeit auswirkt, je kleiner der Unterschied in der Bewegung des Fadens und des Sternes ist; denn wenn ständig Bisektion stattfindet, ist es gleichgültig, wann die Tastersignale fallen, da in diesem Falle nur die automatisch aufgezeichneten Kontaktmomente zur Ableitung der Durchgangszeit gebraucht werden. Diese Bisektions- oder Koinzidenzbeobachtungen werden während des Durchganges des Sternes so oft als möglich wiederholt. COURVOISIER hat bei Beobachtungen mit einem Meridianinstrument bis zu 10 Koinzidenzbeobachtungen erhalten.

Soll das Instrument während des Durchganges zum Zweck der Elimination der Kollimation umgelegt werden, womit bekanntlich auch eine genauere Bestimmung der Achsenneigung verbunden ist, als wenn die Neigung aus Umlegungen des Niveaus allein abgeleitet werden muß, so kommt dieses Verfahren der Koinzidenzbeobachtung nicht in Frage. Der Beobachter würde

*) H. STRUVE. Erste Mitteilung in der Vierteljahrsschrift 33 (1898), p. 135 im Jahresbericht der Sternwarte Königsberg über das Jahr 1897. H. STRUVE. Über die Verbindung eines Uhrwerkes mit dem unpersönlichen Mikrometer von Repsold. A. N. 155, 353 (1901).

***) DR. FRITZ COHN. Ergebnisse von Beobachtungen am Repsold'schen Registriermikrometer bei Anwendung eines Uhrwerkes. A. N. 157, 357 (1901).

vor und nach dem Umlegen nicht mehr als je 2–3 Koinzidenzmomente erhalten. Die Genauigkeit der aus 4–6 solchen Momenten abgeleiteten Durchgangszeit würde nicht größer ausfallen als die Genauigkeit des Durchganges, der auf je 10 vor und nach dem Umlegen registrierten Kontaktmomenten unter Handnachführung des Mikrometers beruht. Das Koinzidenzverfahren hat ferner noch den Nachteil, daß die rechnerische Ermittlung der Durchgangszeit viel mehr Zeit beansprucht als die gewöhnliche Mikrometerregistrierung.

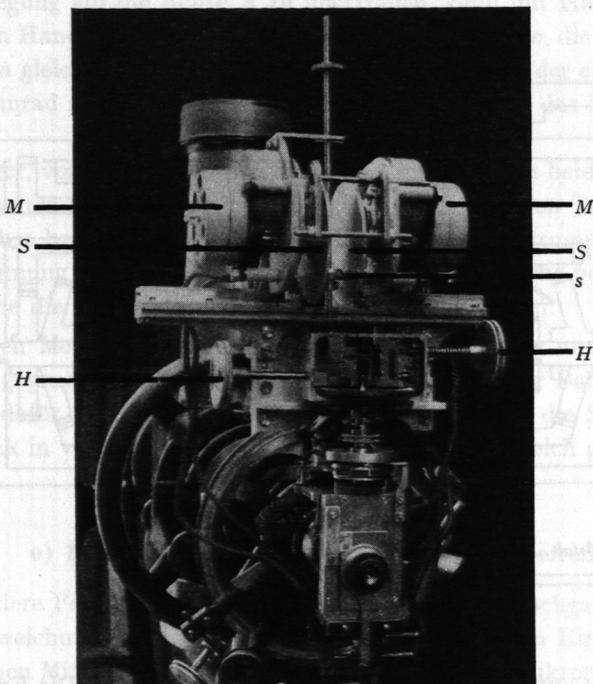


Fig. 15

Nun läßt sich aber die mechanisierte Nachführung so gestalten, daß damit nur noch Vorteile und keine Nachteile gegenüber der Handnachführung verbunden sind. Es ist dazu nur notwendig, den Antriebsmechanismus so zu ändern, daß trotz der Nachführung des Fadens durch das Triebwerk der Faden noch beliebig von Hand verstellt werden kann. Es ist dann nicht mehr notwendig, die Bewegung des Motors zu beschleunigen oder zu verzögern, was wegen der Trägheit der Massen unerwünschte Nebenwirkungen zur Folge hat.

Die im Folgenden beschriebene Konstruktion ist im Sommer 1945 am Passageninstrument der Astronomischen Anstalt der Universität Basel angebracht worden (vergleiche Figur 15). Als Kraftquelle dienen zwei kleine Synchron-

motoren M , die an den Lichtstrom von 220 Volt und 50 Perioden pro Sekunde angeschlossen werden. Die Rotationsgeschwindigkeit des Ankers wird durch ein Reduktionsgetriebe auf eine Umdrehung in 15 sec herabgesetzt. Die beiden Motoren werden gegeneinandergestellt und treiben mit ihren Endwellen zwei in entgegengesetzter Richtung laufende Scheiben S an. Eine dritte Scheibe s , die quer zu diesen antreibenden Scheiben gestellt wird, kann längs einem Durchmesser derselben verschoben werden und wird von ihnen durch Reibung mitgenommen; sie überträgt die Bewegung ihrer Achse A_s durch ein beson-

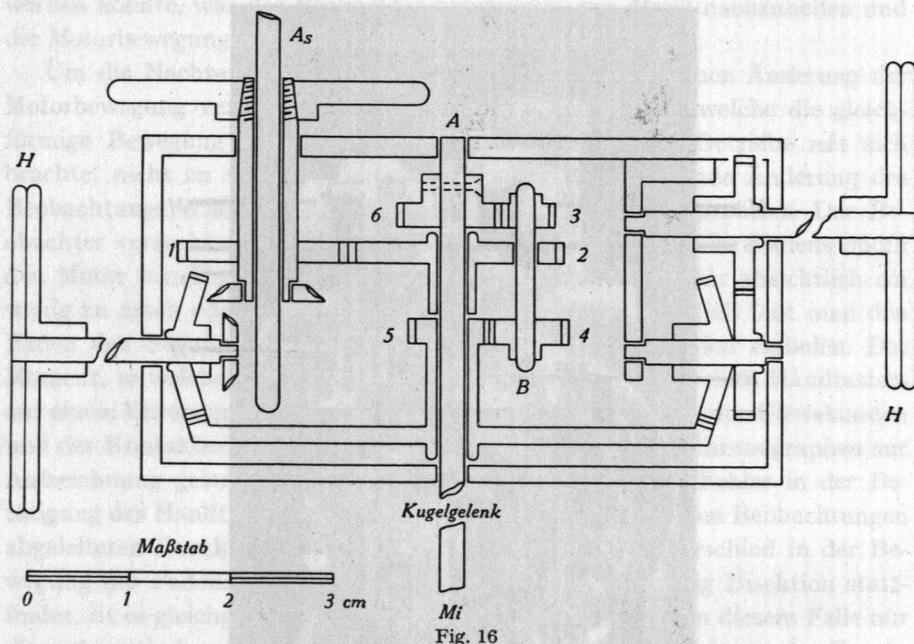


Fig. 16

deres Getriebe auf die Achse des Mikrometers (Figur 16). Die Endachsen der Synchronmotoren wirken nicht direkt auf die Achsen der Scheiben S , sondern durch eine Wechselradschaltung, die analog der Seite 29/30 beschriebenen Einrichtung ist, so daß der Drehungssinn der Scheiben S umgekehrt werden kann.

Die Achse A_s (Figur 16) der verstellbaren Scheibe s nimmt zunächst das Zahnrad 1 mit, das seine Bewegung auf das Zahnrad 2 überträgt; die Achse A dient dem Rad 2 nur als Lager wie auch dem Zahnrad 5, das mit dem Kegelrad verbunden ist. Die Scheibe des Zahnrades 2 ist durchbohrt; diese Bohrung dient der Achse B der miteinander verbundenen Zahnräder 3 und 4 als Lager. Das Zahnrad 4 greift in das mit dem Kegelrad verbundene Zahnrad 5 ein. Bei der Bewegung des Rades 2 wird die Achse B der Räder 3 und 4 um die Achse A herumgeführt; dabei wickelt sich das Rad 4 auf dem Rad 5 ab. Wegen

des Widerstandes, den das mit dem Kegelrad verbundene Getriebe ausübt, wird aber das Rad 5 nicht mitgenommen, sondern bleibt stehen. Das Rad 3 nimmt also das Rad 6, das fest auf der Achse A sitzt, mit, weil die Zahl der Zähne des Rades 3 nicht gleich der Zahl der Zähne des Rades 6 ist; hätten sie gleiche Zahnzahl, so würde sich 3 auf 6 abwickeln, wie sich 4 auf 5 abwickelt. Mit der Achse A wird die Achse M_i des Mikrometers gekoppelt; damit dabei kein Zwang ausgeübt wird, geschieht es mit Hilfe eines Kugelgelenkes.

Das Zahnrad 5, auf das sich das Zahnrad 4 stützt, um die vom Motor gegebene Bewegung auf die Achse A zu übertragen, kann mit Hilfe der beiden Triebe H von Hand bewegt werden. Damit die beiden Triebe, die das Kegelrad antreiben, im gleichen Sinn bewegt werden müssen, ist auf der einen Seite ein weiteres Zahnrad zwischen das Rad des Handtriebes und das Kegelrad eingeschaltet.

Der Träger, von dem dieses Getriebe zusammen mit den beiden Synchronmotoren gehalten wird, ist an derjenigen Stelle des massiven Teiles der horizontalen Achse befestigt, wo bei der Verwendung des Instrumentes zur Polhöhenbestimmung nach der HORREBOW-TALCOTT-Methode die beiden Niveaus sitzen, welche die Zenitdistanz des Fernrohres kontrollieren.

Die beiden Motoren sind auf einem Schlitten montiert und werden von einer Feder gegeneinander gezogen; zwei Anschläge auf der Bahn des Schlittens sorgen dafür, daß der von den beiden Scheiben S auf die Scheibe s ausgeübte Druck in verschiedenen Zenitdistanzen ungefähr gleich groß ist.

e) Die mittleren Fehler der Durchgangszeiten

Der mittlere Fehler der Uhrzeit des einzelnen Fadendurchganges läßt sich aus den Abweichungen der auf den Mittelfaden reduzierten Einzelwerte vom arithmetischen Mittel berechnen; wird das unpersönliche Mikrometer benützt, so läßt sich der mittlere Fehler der einzelnen Kontaktzeit in einfacher Weise aus den Abweichungen der arithmetischen Mittel der vor und nach dem Umliegen am gleichen Kontakt beobachteten Uhrzeiten von deren Gesamtmittel ableiten. Der Fehler wird um so größer, je langsamer sich der Stern in der zum Faden senkrechten Richtung bewegt. Ist v die Komponente der scheinbaren Bewegung des Sternes in dieser Richtung und V die Vergrößerungszahl des Fernrohres, so ist in erster Annäherung der mittlere Fehler m_V der einzelnen Fadendurchgangszeit oder der einzelnen Kontaktzeit dem Produkt vV umgekehrt proportional. Nimmt man als Zeiteinheit die Sternzeitsekunde, der wir die Uhrsekunde gleichsetzen, und als Einheit des Winkelweges $15'' = 1 \text{ sec}$, so ist im Parallel die Geschwindigkeit des Sternes in der Poldistanz p gleich $\sin p$, und somit, wenn (q) der Winkel ist, den die Bewegungsrichtung im

Parallel mit der Normalen zur Fadenrichtung bildet:

$$v = \cos(q) \sin p.$$

Bezeichnet b_0 den Proportionalitätsfaktor, so ist

$$m_U = \pm b_0 \frac{\operatorname{cosec} p}{V \cos(q)}$$

zu setzen. Der mittlere Fehler eines im Meridian beobachteten Durchganges wird, wenn er durch Multiplikation mit $\sin p$ auf den größten Kreis bezogen wird, da $\cos(q)$ gleich 1 zu setzen ist, gleich

$$m_U \sin p = \pm \frac{b_0}{V},$$

das heißt konstant. Nun werden die Durchgänge der rasch bewegten Sterne erfahrungsgemäß weniger sicher beobachtet als die Durchgänge der langsam bewegten. Diesem Umstande kann man Rechnung tragen dadurch, daß man den mittleren Fehler $m_U \sin p \cos(q)$ auffaßt als Resultante zweier Komponenten, nämlich der von der Poldistanz p unabhängigen Komponente b_0/V und einer zweiten von der Poldistanz und vom Winkel (q) abhängigen Komponente. Da diese mit der zur Fadenrichtung senkrechten Komponente der Geschwindigkeit des Sterns, das ist $\sin p \cos(q)$, verschwinden muß, macht man für m_U unter Einführung einer zweiten Konstanten a_0 den Ansatz:

$$m_U^2 = a_0^2 + b_0^2 \frac{\operatorname{cosec}^2 p}{V^2 \cos^2(q)}. \quad (10)$$

Aus Durchgangsbeobachtungen im Meridian hat man die folgenden Werte der Konstanten a_0 und b_0 abgeleitet:

Methode	a_0	b_0
1. Aug- und Ohrmethode	$\pm 0,10$	$\pm 4,7$
2. Registriermethode	,07	4,7
3. Unpersönliches Mikrometer unter Handantrieb:		
a) Längenbestimmungen des geodätischen In- stitutes in Potsdam	,057	3,0
b) Längenbestimmungen der Schweizerischen geodätischen Kommission	,031	2,6
4. Unpersönliches Mikrometer unter mechani- schem Antrieb bei Koinzidenzbeobachtungen	,020	2,4
5. Unpersönliches Mikrometer unter mechani- schem Antrieb mit Korrekturmöglichkeit . .	,022	2,5

Die unter 1, 2 und 3a gegebenen Zahlen sind in der 4. Auflage von TH. ALBRECHTS «Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen» angegeben.

Die unter 3b angegebenen Werte sind Band 21, Seite 25, der *Astronomisch-geodätischen Arbeiten in der Schweiz* entnommen; die dort angeführten Zahlen sind mit $\sqrt{2}$ multipliziert, um sie auf die einzelne Kontaktbeobachtung zu beziehen.

Die Konstanten der Methode 4, des Koinzidenzverfahrens von COURVOISIER, sind aus seinen Angaben in A.N. 167, 211 abgeleitet. Die zur Methode 5 angegebenen Werte sind vorläufiger Natur; sie beruhen auf Durchgangsbeobachtungen, die im Sommer 1945 an einigen Abenden von Dr. J. O. FLECKENSTEIN angestellt worden sind. Ihre Konstanten liegen zwischen den Werten der Methoden 3b und 4; diese Methode liefert die Durchgangszeit ebenso genau wie das Koinzidenzverfahren, weil viel mehr Einzelbeobachtungen während des Durchganges möglich sind; es können vor und nach dem Umlegen ebensoviele Kontakte beobachtet werden wie bei der Handnachführung.

In der folgenden Tabelle sind die auf den größten Kreis bezogenen mittleren Fehler $m_U \sin p$ einer Einzelbeobachtung im Meridian, die in verschiedenen Pol-distanzen bei den einzelnen Verfahren zu erwarten sind, zusammengestellt, wenn bei 80facher Vergrößerung beobachtet wird. Unter «N» ist das Verhältnis von $a_0^2 + \left(\frac{b_0}{V}\right)^2$ zu $\left(\frac{b_0}{V}\right)^2$ angegeben; wird ein Äquatorstern an N-mal so viel Fäden oder Kontakten beobachtet als ein polnaher Stern, so wird der mittlere Fehler seiner Durchgangszeit, bezogen auf den größten Kreis senkrecht zum Meridian, gleich groß wie der mittlere Fehler der Durchgangszeit des Polsternes. Von der Möglichkeit, verschiedene Sterne gleich genau zu beobachten durch geeignete Wahl der Zahl der Einzelbeobachtungen, werden wir bei fehler-theoretischen Untersuchungen Gebrauch machen.

Methode	p					
	90°	45°	$m_U \sin p$			N
			30°	10°	0°	
1	± 0,116	± 0,092	± 0,077	± 0,061	± 0,059	3,9
2	,091	,077	,068	,060	,059	2,4
3a	,068	,055	,047	,039	,038	3,3
3b	,045	,039	,036	,033	,033	1,9
4	,027	,024	,022	,020	,022	1,5
5	,038	,035	,033	,031	,031	1,5

f) Differentialausdrücke

Ändert man die drei gegebenen Stücke eines Dreiecks, so kann die Änderung, die irgendeines der übrigen Stücke erleidet, mit Hilfe des funktionalen Zusammenhanges berechnet werden. Wir leiten die Beziehung, welche die Änderung der drei gegebenen Stücke mit der Änderung eines vierten Stückes verbindet, ab, unter der Voraussetzung, es seien die Änderungen kleine Größen erster Ordnung, deren Quadrate und Produkte vernachlässigt werden dürfen. Diese Beziehung verwenden wir auch zur Berechnung des Fehlers, der von den Fehlern der drei gegebenen Stücke auf das berechnete Stück übergeht.

1. Die Differentialbeziehung des Cosinussatzes.

Die Änderung dz , welche die Zenitdistanz erleidet, wenn Φ , p und t der Reihe nach um $d\Phi$, dp und dt geändert werden, wird gleich

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial z}{\partial p} dp + \frac{\partial z}{\partial t} dt.$$

Der Cosinussatz

$$\cos z = \cos \Phi \cos p + \sin \Phi \sin p \cos t$$

liefert durch partielle Ableitung

1) nach Φ :

$$\begin{aligned} \sin z \frac{\partial z}{\partial \Phi} &= \cos p \sin \Phi - \sin p \cos \Phi \cos t \\ &= -\sin z \cos a; \end{aligned}$$

2) nach p :

$$\begin{aligned} \sin z \frac{\partial z}{\partial p} &= \cos \Phi \sin p - \sin \Phi \cos p \cos t \\ &= \sin z \cos q; \end{aligned}$$

3) nach t :

$$\begin{aligned} \sin z \frac{\partial z}{\partial t} &= \sin \Phi \sin p \sin t \\ &= \sin z \sin p \sin q \\ &= \sin z \sin \Phi \sin a. \end{aligned}$$

Somit wird

$$dz = -d\Phi \cos a + \cos q dp + \sin q dt \sin p. \quad (11a)$$

Ist z' die scheinbare Zenitdistanz und r_z die Refraktion, so ist

$$z = z' + r_z$$

und

$$dz = dz' + dr_z.$$

Wird

$$dt = d(U + u - \alpha)$$

gesetzt, so erhält man

$$dz' - \sin a du \sin \Phi + d\Phi \cos a = \sin q d(U - \alpha) \sin p + \cos q dp - dr_z. \quad (11b)$$

Ist die Refraktion bei gleicher Zenitdistanz in verschiedenen Azimuten nicht gleich groß, so bleibt bei den Methoden, die auf der Elimination der Zenitdistanz beruhen, ein Fehler wirksam, dem durch die eingeführte Verbesserung dr_z Rechnung getragen werden kann.

2. Die Differentialbeziehung des Kotangentensatzes.

Das Azimut a des Sternes erleidet, wenn sich Φ , p und t ändern, die Änderung

$$da = \frac{\partial a}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial a}{\partial p} dp + \frac{\partial a}{\partial t} dt.$$

Die Koeffizienten der Änderungen folgen aus

$$\cotg a = \frac{\cos \Phi \sin p \cos t - \sin \Phi \cos p}{\sin t \sin p}$$

durch partielle Differentiation

1) nach Φ :

$$\frac{1}{\sin^2 a} \frac{\partial a}{\partial \Phi} = \frac{\sin \Phi \sin p \cos t + \cos \Phi \cos p}{\sin t \sin p},$$

was unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\sin t \sin p = \sin z \sin a$$

und des Cosinussatzes übergeht in

$$\frac{\partial a}{\partial \Phi} = \cos z \sin a \operatorname{cosec} z;$$

2) nach p :

$$\frac{1}{\sin^2 a} \frac{\partial a}{\partial p} = - \frac{\sin \Phi}{\sin t \sin^2 p},$$

was wegen der Beziehungen

$$\frac{\sin \Phi}{\sin p} = \frac{\sin q}{\sin a}$$

und

$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\sin p}{\sin z}$$

übergeht in

$$\frac{\partial a}{\partial p} = - \sin q \operatorname{cosec} z;$$

3) nach t :

$$\frac{1}{\sin^2 a} \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\cos \Phi \sin p - \cos p \sin \Phi \cos t}{\sin^2 t \sin p},$$

was wegen der Beziehungen

$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\sin p}{\sin z},$$

$$\sin z \cos q = \cos \Phi \sin p - \sin \Phi \cos p \cos t$$

übergeht in

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sin p \cos q \operatorname{cosec} z.$$

Es wird also

$$\sin z da = \cos z d\Phi \sin a - \sin q dp + \cos q dt \sin p. \quad (12a)$$

Das verbesserte Azimut $a + da$ ist aber nur dann gleich dem wahren Azimut, das ein Beobachter bei fehlerfreier Messung erhalten hätte, wenn sich der scheinbare und der wahre Ort im gleichen Vertikal befinden. Ist dr_a die Lateralrefraktion, die den Stern gegen den Pol Q_0 des Vertikals verschiebt, so ist das wahre Azimut des Instruments gleich

$$a + da + dr_a \operatorname{cosec} z.$$

Die Gesamtverbesserung

$$da_0 = da + dr_a \operatorname{cosec} z$$

wird also durch die folgende Beziehung mit du und $d\Phi$ verbunden:

$$\begin{aligned} \sin z da_0 - \cos q du \sin p - \cos z d\Phi \sin a \\ = \cos q d(U - \alpha) \sin p - \sin q dp + dr_a. \end{aligned} \quad (12b)$$

Ist die laterale Refraktion bei gleichem Azimut in verschiedenen Zenitdistanzen nicht gleich groß, so bleibt bei den Methoden, die auf der Elimination des Azimutes beruhen, ein Fehler wirksam, dem durch die eingeführte Verbesserung dr_a Rechnung getragen werden kann.