I. KAPITEL

Definitionen und Problemstellung

a) Definitionen

Der Ort eines Punktes an der Erdoberfläche kann durch die folgenden drei Koordinaten bestimmt werden:

1. durch die wahre Meereshöhe des Punktes, das ist der in der Lotlinie gemessene Abstand des Punktes vom Geoid;

2. durch den Winkel Φ, den die Lotrichtung im Punkt mit der Parallelen zur Umdrehungsachse der Erde bildet;

3. durch den Winkel Λ, den die durch Lotrichtung und Parallele zur Umdrehungsachse bestimmte Ebene, das ist die Meridianebene, mit einer als Ausgang gewählten Meridianebene bildet.

Es ist eine Aufgabe der Geodäsie, die Meereshöhen zu bestimmen; wir werden uns mit ihr nicht beschäftigen, sondern nur zeigen, wie man die an zweiter und dritter Stelle genannten Richtungskoordinaten ermittelt. Φ ist die Zenitdistanz des Pols oder die Poldistanz des Zenites und somit das Komplement der Höhe des Pols über dem Horizont oder der geographischen Breite. Die Werte von Φ können wir auf das Intervall von 0^0 bis 180^0 beschränken, wenn wir den Winkel Λ von 0^0 bis 360^0 (in Zeitmaß von 0^h bis 24^h) gehen lassen. Ist φ die Polhöhe, die wir auf der Nordhemisphäre positiv nehmen, so besteht zwischen Φ und φ die Beziehung

$$\Phi + \varphi = 90^0.$$

Λ ist die geographische Länge des Punktes; wir nehmen sie nach Osten positiv, entgegen der scheinbaren täglichen Bewegung der Gestirne.

Zur vollständigen Orientierung an einem Punkt der Erdoberfläche gehört die Kenntnis der Lage der Meridianebene; man gibt sie an durch das Azimut der Richtung nach einem irdischen Objekt, das ist der Winkel, den die durch die Lotrichtung und das Objekt gelegte Vertikalebene mit der Meridianebene bildet. Wir rechnen das Azimut a oder A einer Richtung vom Südpunkt des Horizontes über Westen von 0^0 bis 360^0.

Weder die Winkel Φ und Λ noch das Azimut a oder A lassen sich direkt durch eine Messung ermitteln; die Erscheinung, die uns auf indirektem Weg zur Kenntnis dieser Größen führt, ist die scheinbare tägliche Bewegung der Gestirne. Das Hauptinstrument, das uns zur Lösung der Aufgaben der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung verhilft, ist deshalb eine *Uhr*. Wir setzen voraus, daß die bei den Messungen benützte Uhr nach Sternzeit reguliert sei, das heißt, daß ihr Stand gegen Sternzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des wahren Frühlingspunktes durch den Meridian um genau 24^h zunehme. Ist das nicht der Fall, so ist an den Uhrablesungen eine Korrektion anzubringen, durch die sie auf die Annahme, daß der Gang gleich null sei, reduziert werden. Die hiezu nötige Kenntnis des Uhrganges erhält der Beobachter heute leicht durch die Vergleichung seiner Uhr mit den von verschiedenen Stationen drahtlos ausgesendeten Zeitzeichen.

Außer der Uhr muß dem Beobachter ein Instrument zur Verfügung stehen, das ihm erlaubt, den Durchgang eines Gestirnes entweder durch einen bestimmten Vertikal oder durch einen bestimmten Almukantarat zu beobachten. Benützt er dazu einen astronomischen Theodoliten, so kann er am Horizontalkreis die zum Vertikaldurchgang und am Vertikalkreis die zum Almukantaratdurchgang gehörige Stellung der Visierlinie des Fernrohres ablesen; direkt meßbar sind aber nur Differenzen von Azimutwinkeln oder Differenzen von Zenitdistanzen. Wird dagegen zur Beobachtung ein genau justiertes Passageninstrument benützt, so ist das Resultat der Beobachtung nur die Uhrzeit des Durchganges des Sternes entweder durch eine bestimmte Vertikalebene (Vertikaldurchgang) oder durch einen bestimmten Almukantarat (Almukantaratdurchgang).

Den an der Uhr abgelesenen Moment des Durchganges durch einen Almukantarat oder Vertikal bezeichnen wir mit dem Symbol U. Die äquatorialen Koordinaten des Gestirnes, das wir beobachten, setzen wir als bekannt voraus; es sei α die scheinbare Rektaszension (AR) und p das Komplement der scheinbaren Deklination δ, das heißt die Poldistanz. Ist u die Uhrkorrektion und Θ die Sternzeit im Moment U der Uhrzeit, so ist

$$\Theta = U + u$$

und der Stundenwinkel t gleich

$$t = U + u - \alpha.$$

Im sphärischen Dreieck, dessen Eckpunkte der Pol P des Äquators, das Zenit Z und der Ort S des Gestirnes sind, wird dann die Seite $ZS = z$ gleich der wahren Zenitdistanz des Gestirnes; sie wird mit den beiden anderen Seiten p und Φ und mit dem gegenüberliegenden Winkel t durch den Cosinussatz verbunden:

$$\cos z = \cos p \cos \Phi + \sin p \sin \Phi \cos t. \tag{1}$$

Das Supplement des Azimutes a des Gestirnes bildet mit den Seiten Φ und p und mit dem Winkel t vier aufeinanderfolgende Stücke des Dreieckes; sie werden durch den Cotangentensatz miteinander verbunden:

$$\operatorname{cotg} p \sin\Phi = \cos\Phi \cos t - \sin t \operatorname{cotg} a. \tag{2}$$

Diese beiden Beziehungen sind die Grundformeln, die den Aufgaben der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung, welche wir behandeln werden, zugrunde liegen; sie sagen aus:

Es kann bei bekanntem Sternort die Polhöhe oder der Stundenwinkel entweder aus der Zenitdistanz z oder aus dem Azimut a des Gestirnes abgeleitet werden; soll die Polhöhe ermittelt werden, so muß der Stundenwinkel bekannt sein, und soll der Stundenwinkel ermittelt werden, so muß die Polhöhe bekannt sein.

Um die Länge Λ zu bestimmen, ist der Beobachter auf die Mitarbeit eines Beobachters im Ausgangsmeridian angewiesen. Hat das Gestirn an einem Punkt der Erdoberfläche, dessen Lotrichtung in der zum Ausgangsmeridian parallelen Ebene liegt, den Stundenwinkel t_0 im Moment, wo es gegenüber dem Meridian der Länge Λ den Stundenwinkel t hat, so ist

$$\Lambda = t - t_0,$$

oder, wenn man die Stundenwinkel t und t_0 auf die Sternzeiten Θ und Θ_0 und die Rektaszension des Gestirnes zurückführt:

$$\begin{aligned} t &= \Theta - \alpha, \\ t_0 &= \Theta_0 - \alpha, \\ \Lambda &= \Theta - \Theta_0, \end{aligned} \tag{3a}$$

oder schließlich, wenn man die Sternzeiten auf die Uhrzeiten U und U_0 der beiden Beobachter und die Korrektionen u und u_0 ihrer Uhren zurückführt:

$$\begin{aligned} \Theta &= U + u, \\ \Theta_0 &= U_0 + u_0, \\ \Lambda &= (U - U_0) + (u - u_0). \end{aligned} \tag{3b}$$

Die Bestimmung der Länge ist damit auf die Bestimmung der Uhrkorrektion an den beiden Meridianen und auf die Vergleichung der demselben Moment entsprechenden Uhrzeiten zurückgeführt. Die Vergleichung der Uhrzeiten bietet dank den Zeitsignalen, die – unter normalen Friedensverhältnissen – von einer größeren Zahl über die Erde verteilter Stationen drahtlos ausgesendet werden, keine Schwierigkeiten.

b) Geometrische Betrachtungen

Im Dreieck PZS (Figur 1 und 2) ist die Seite $PS = p$ immer bekannt. Da ein sphärisches Dreieck durch drei beliebige seiner sechs Stücke bestimmt ist, sind folgende Arten der Bestimmung des Stundenwinkels t und damit der Uhrkorrektion u und der Zenitdistanz Φ des Pols möglich:

1. Gesucht u, wenn gegeben sind z, p und Φ.
2. Gesucht Φ, wenn gegeben sind z, p und t.
3. Gesucht u, wenn gegeben sind a, p und Φ.
4. Gesucht Φ, wenn gegeben sind a, p und t.

In allen vier Fällen ist ferner gegeben die Uhrzeit U, zu welcher das Gestirn entweder in der Zenitdistanz z oder im Azimut a beobachtet worden ist, und die Rektaszension α des Gestirnes.

Die wahren Zenitdistanzen z gehen aus den scheinbaren, das heißt den beobachteten Zenitdistanzen dadurch hervor, daß diese um den Betrag der astronomischen Refraktion vermehrt werden.

Wir nehmen an, daß ausschließlich Fixsterne beobachtet werden; es dürfen dann die am Beobachtungsort gültigen Richtungskoordinaten z oder a in die Beziehungen (1) oder (2) eingeführt werden, da es wegen der großen Ent-

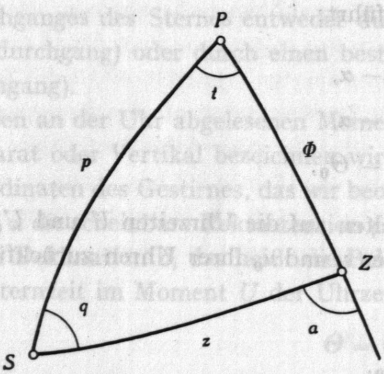

Fig. 1

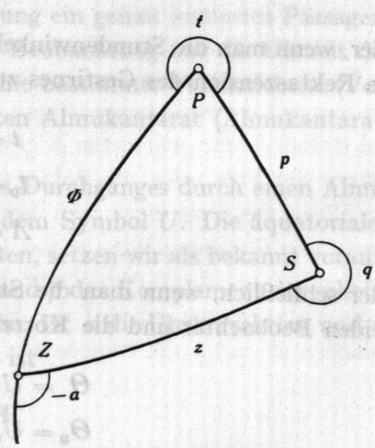

Fig. 2

fernungen der Fixsterne nicht nötig ist, auf die geozentrischen Werte von z oder a überzugehen.

Wir betrachten zunächst die geometrische Lösung dieser Aufgaben und nehmen zu diesem Zweck an, daß uns eine Kugelfläche und die zur Zeichnung von Groß- oder Kleinkreisen erforderlichen Hilfsmittel zur Verfügung stehen. Von praktischer Bedeutung ist die geometrische Lösung nicht, da sie die gesuchten Größen auch dann nur mit sehr beschränkter Genauigkeit liefert, wenn ein großer Globus benützt wird. Die geometrische Lösung erlaubt aber, sich in anschaulicher Weise Rechenschaft zu geben von den Umständen, unter welchen die Beobachtungen angestellt werden müssen, wenn die gesuchten Größen so genau als möglich werden sollen; sie läßt uns auch leicht übersehen,

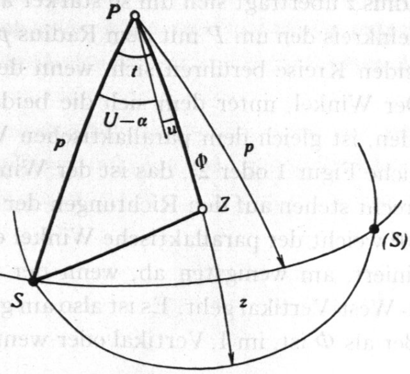

Fig. 3

unter welchen Umständen die Zeit ohne die Kenntnis der Polhöhe und die Polhöhe ohne die Kenntnis der Zeit bestimmt werden kann.

1. *Bestimmung der Uhrkorrektion u mit Hilfe der Zenitdistanz z,* die ein Gestirn der AR α und der Poldistanz p zur Uhrzeit U an einem Ort der Polhöhe $\varphi = 90^0 - \Phi$ erreicht hat (Figur 3).

Wir tragen auf einem Großkreis der Kugel die Punkte P und Z im Abstand Φ auf. Der Ort S des Gestirnes ist dann gegeben als Schnittpunkt zweier Kleinkreise, nämlich des Kleinkreises, der mit dem Radius p um P, und des Kleinkreises, der mit dem Radius z um Z gelegt wird. Da sich diese beiden Kreise in zwei Punkten schneiden, ist noch zu entscheiden, welcher von den beiden Schnittpunkten als Ort S des Gestirnes zu nehmen ist. Diese Entscheidung ist möglich, wenn der Beobachter sich bei der Messung gemerkt hat, ob die Zenitdistanz mit der Zeit zu- oder abnimmt; im ersten Fall liegt der Sternort auf der Westseite, im zweiten Fall auf der Ostseite des Meridianes PZ.

Der Winkel bei P im Dreieck PZS ist der Stundenwinkel t, und da

$$t - (U - \alpha) = u$$

ist, erhält man die Uhrkorrektion u, indem man von PS aus entgegen der täglichen Bewegung den Winkel $(U - \alpha)$ abträgt.

Die Antwort auf die Frage, wo das Gestirn beobachtet werden muß, damit der Stundenwinkel t und damit auch die Uhrkorrektion so genau als möglich bestimmt wird, ergibt sich durch folgende Überlegung. Der Beobachter begeht sowohl bei der Messung der Zenitdistanz z als bei der Feststellung der zugehörigen Uhrzeit U einen Fehler. Wir können aber nur *einen* Fehler annehmen, wenn wir entweder den Fehler der Zenitdistanz-Messung auf die Uhrzeit oder den Fehler der Uhrzeit auf die Zenitdistanz werfen. Wenn wir das letztere tun und voraussetzen, daß p, α und Φ fehlerfrei bekannt seien, so ist in unserer Konstruktion nur der um Z mit dem Radius z geschlagene Kreis fehlerhaft. Ein Fehler im Radius z überträgt sich um so stärker auf den Stundenwinkel, je schiefer dieser Kleinkreis den um P mit dem Radius p geschlagenen Kleinkreis schneidet. Die beiden Kreise berühren sich, wenn der Stern im Meridian beobachtet wird. Der Winkel, unter dem sich die beiden Kreise außerhalb des Meridians schneiden, ist gleich dem parallaktischen Winkel q des sphärischen Dreieckes (vergleiche Figur 1 oder 2), das ist der Winkel bei S, weil die Seiten PS und ZS senkrecht stehen auf den Richtungen der beiden Kleinkreise. Vom Wert 90^0 oder 270^0 weicht der parallaktische Winkel eines Sternes, der südlich vom Zenit kulminiert, am wenigsten ab, wenn der Stern durch den ersten, das heißt den Ost–West-Vertikal geht. Es ist also am günstigsten, Sterne, deren Poldistanz p größer als Φ ist, im I. Vertikal oder wenigstens in seiner Nähe zu beobachten.

Nun stellt sich aber die Frage, ob die Beobachtung im I. Vertikal auch günstig sei, wenn man den Einfluß eines Fehlers der Polhöhe auf die Uhrkorrektion vermeiden oder klein halten will. Verschiebt man den Punkt Z auf dem Meridian um $d\Phi$, so ändert sich die Seite ZS nur um eine kleine Größe höherer Ordnung, wenn sich S im I. Vertikal befindet, weil dieser senkrecht zum Meridian steht, das heißt aber, es führen die Stücke $\Phi + d\Phi$, p und z zur gleichen Lage des Punktes S gegenüber dem Meridian wie Φ, p und z, und es hat ein Fehler $d\Phi$ keinen Einfluß auf den Stundenwinkel.

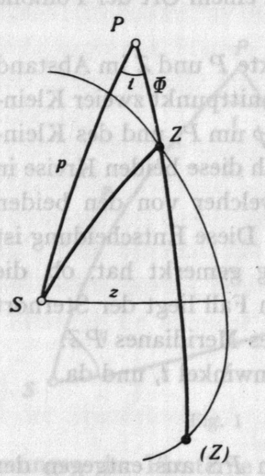

Fig. 4

Der parallaktische Winkel kann den Wert 90^0 oder 270^0 annehmen bei Sternen, die in die größte Digression kommen, das heißt bei Sternen, deren Poldistanz p kleiner als Φ ist. Diese Sterne kommen aber aus zwei Gründen nicht als Beobachtungsobjekte der Zeitbestimmung in Betracht; erstens ändern sie die Zenitdistanz langsamer als die den I. Vertikal passierenden Sterne, so daß sich der Moment des Durchganges durch einen Almukantarat weniger genau feststellen läßt, und zweitens hat eine Änderung von PZ um $d\Phi$ eine Änderung in der Lage des Punktes S und damit in der Größe des Stundenwinkels zur Folge, die von gleicher Größenordnung wie $d\,\Phi$ werden kann.

2. *Bestimmung der Poldistanz Φ des Zenites mit Hilfe der Zenitdistanz z*, die ein Gestirn der AR α und der Poldistanz p zur Uhrzeit U im Stundenwinkel t erreicht hat (Figur 4).

Wir tragen vom Punkte P aus zwei Großkreise ab, die sich unter dem Winkel t schneiden. Auf dem im Sinn der täglichen Bewegung vorausgehenden Schenkel liegt der Sternort S im Abstand p vom Punkt P. Der um S mit dem Radius z geschlagene Kleinkreis schneidet den andern Schenkel des Winkels t in zwei Punkten. Welcher von diesen beiden Punkten als das Zenit des Beobachtungsortes zu nehmen ist, kann der Beobachter entscheiden auf Grund der Notierung, ob der Stern bei zu- oder abnehmendem Azimut beobachtet worden ist.

Der Ort Z wird am sichersten festgelegt, wenn der zweite Schenkel des Winkels t, das ist der Meridian, von dem um S gelegten Kleinkreis rechtwinklig geschnitten wird; das ist dann der Fall, wenn die Beobachtung im Meridian

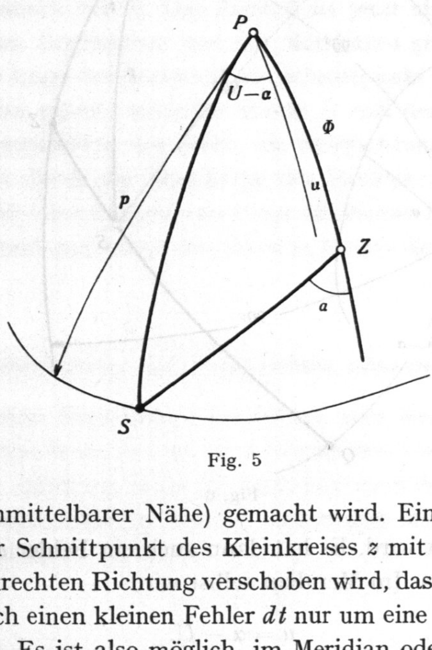

Fig. 5

(oder in dessen unmittelbarer Nähe) gemacht wird. Ein Fehler dt hat dann zur Folge, daß der Schnittpunkt des Kleinkreises z mit dem Meridian in der zum Meridian senkrechten Richtung verschoben wird, das heißt die Entfernung $PZ = \Phi$ wird durch einen kleinen Fehler dt nur um eine kleine Größe höherer Ordnung geändert. Es ist also möglich, im Meridian oder in seiner unmittelbaren Nähe die Polhöhe ohne Kenntnis der Zeit zu bestimmen. Im Meridian selbst wird, wenn man die Zenitdistanz und die Poldistanz des Sternes nach Süden positiv, nach Norden negativ nimmt:

$$\Phi = p - z.$$

3. *Bestimmung der Uhrkorrektion u mit Hilfe des Azimutes a,* das ein Gestirn der AR α und der Poldistanz p zur Uhrzeit U an einem Ort der Polhöhe $\varphi = 90^0 - \Phi$ erreicht hat (Figur 5).

Wir tragen auf einem als Meridian gewählten Großkreis, auf dem die Punkte P und Z sich im Abstand Φ befinden, von Z aus den Winkel a im Sinn der täglichen Bewegung ab. Der nicht im Meridian liegende Schenkel dieses Winkels wird vom Kleinkreis, der mit dem Radius p um P gelegt wird, im Sternort S geschnitten. Der Großkreis PS bildet mit dem Meridian PZ den gesuchten Stundenwinkel t; die Uhrkorrektion u erscheint als Differenz des Winkels t und des Winkels $(U-\alpha)$, indem man $(U-\alpha)$ entgegen der täglichen Bewegung von PS aus abträgt.

Wie ersichtlich, erhält man den Sternort als Schnittpunkt zweier senkrecht stehender Kreise, wenn die Beobachtung im Meridian (oder in seiner unmittelbaren Nähe) gemacht wird. Es hat dann auch ein Fehler $d\,\Phi$ keinen Einfluß auf die Uhrkorrektion. Im Meridian selbst wird

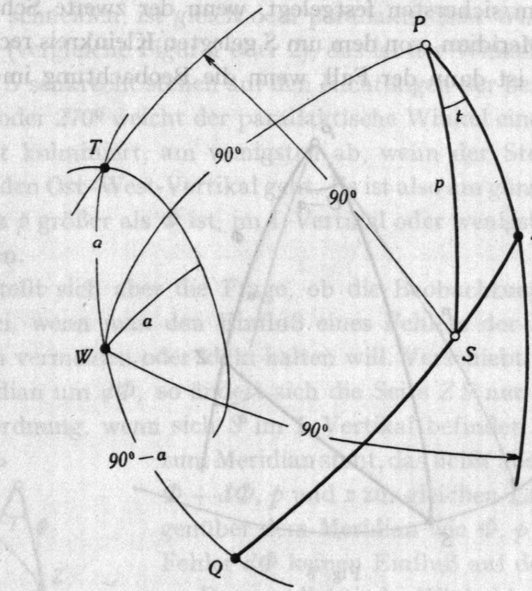

Fig. 6

$$u = \alpha - U.$$

4. *Bestimmung der Poldistanz Φ des Zenites mit Hilfe des Azimutes a,* das ein Gestirn der AR α und der Poldistanz p zur Uhrzeit U im Stundenwinkel t erreicht hat (Figur 6).

Es ist jetzt gegeben die Seite $PS = p$ des sphärischen Dreieckes und der Winkel t, den PS mit dem Meridian bildet. Auf diesem ist der Punkt Z so zu bestimmen, daß ZS mit dem Meridian den gegebenen Azimutwinkel a bildet.

Der Ort des Punktes Z ist bekannt, wenn wir die Lage der Polare zu Z, das ist der Horizont, angeben können. Der Horizont ist als Großkreis aber bestimmt, sobald zwei seiner Punkte, die weder zusammenfallen noch einander diametral gegenüberliegen, bekannt sind. Ein erster Punkt kann sofort angegeben werden, es ist der Westpunkt W des Horizontes, welcher Pol zum Meridian als Polare ist. Einen zweiten Punkt liefert die folgende Überlegung. Die beiden Pole zum Vertikal, der Z mit S verbindet, als Polaren liegen im Horizont und haben von S 90^0 Abstand. Das Azimut des einen Poles ist um 90^0 größer, das des andern um 90^0 kleiner als das Azimut a des Punktes S. Von dem im Azimut $90^0 + a$ liegenden Pol hat der Westpunkt die Entfernung a. Man erhält also diesen Pol, indem man um S den Großkreis im Abstand 90^0 und um den Westpunkt W einen Kleinkreis mit dem Radius a zieht. Der Schnittpunkt T dieser beiden Kreise liegt im Horizont, der nun als Großkreis, der die Punkte T und W verbindet, gegeben ist. Geht man von T aus im Horizont um 90^0 gegen den Südpunkt des Horizontes, so erhält man den im Horizont liegenden Punkt Q des Vertikales von S. Das Zenit Z ist jetzt als Schnittpunkt des Q mit S verbindenden Großkreises und des Meridianes gegeben.

Damit sich die Lage des Zenites Z als Schnittpunkt zweier sich senkrecht schneidender Kreise ergibt, muß der Punkt Q mit dem Westpunkt W des Horizontes zusammenfallen, das heißt, die Beobachtung muß im I. Vertikal stattfinden. Damit durch die Projektion des Punktes S von Q aus auf den Meridian infolge der Unsicherheit von S nur ein kleiner Fehler in der Lage des Zenites entsteht, muß außerdem der Stern in kleiner Zenitdistanz beobachtet werden.

c) Die Elimination der Zenitdistanz oder des Azimutes

Die Messung einer Zenitdistanz beruht auf zwei Kreislesungen. Ist R die Ablesung am Vertikalkreis bei der Einstellung der Visierlinie auf ein festes Objekt und Z_R die Ablesung, wenn die Visierlinie nach dem Zenit gerichtet ist, so ist unter der Voraussetzung, daß die Ablesungen mit der Zenitdistanz zunehmen, die Zenitdistanz z gleich

$$z = R - Z_R.$$

Dreht man das Instrument um 180^0 und wiederholt die Messung, so wird, wenn die Ablesungen mit L und Z_L bezeichnet werden:

$$z = Z_L - L.$$

Die Ablesungen Z_R und Z_L der Zenitrichtung in den beiden Lagen werden nur gleich, wenn die vertikale Umdrehungsachse des Instrumentes mit der Lotrichtung zusammenfällt. Im allgemeinen wird das nicht der Fall sein; der Unterschied zwischen Z_R und Z_L kann aus den Ablesungen eines Niveaus, dessen Achse in die horizontale Richtung nach dem Objekt fällt und das fest mit der vertikalen Umdrehungsachse des Instrumentes verbunden ist, ermittelt werden. Setzt man

$$\Delta i = \frac{1}{2}(Z_R - Z_L)$$

und

$$Z_R = Z_0 + \Delta i, \quad R_0 = R - \Delta i,$$
$$Z_L = Z_0 - \Delta i, \quad L_0 = L + \Delta i,$$

so wird

$$z = R_0 - Z_0$$

und

$$z = Z_0 - L_0,$$

also

$$z = \frac{1}{2}(R_0 - L_0)$$

und

$$Z_0 = \frac{1}{2}(R_0 + L_0).$$

Mit Hilfe von zwei im Azimut um 180⁰ verschiedenen Messungen kann also die Zenitdistanz z des Objektes und der Zenitpunkt Z_0 des Kreises ermittelt werden.

Bei den Beobachtungen zum Zweck der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung hat man es mit einem sich bewegenden Objekt zu tun. Um den unbekannten Zenitpunkt zu eliminieren, macht man rasch hintereinander zwei Messungen in zwei nahe um 180⁰ im Azimut verschiedenen Lagen. Man führt dann einen Näherungswert des Zenitpunktes ein, so daß der zur Berechnung der Unbekannten t oder Φ benützte Wert der Zenitdistanz sich vom wahren Wert nur um eine kleine Größe erster Ordnung unterscheidet. Da die am benützten Wert anzubringende Verbesserung in den beiden Lagen mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeht, hebt sich im arithmetischen Mittel der Uhrkorrektionen oder der Polhöhenwerte der Einfluß der unbekannten Verbesserung des Zenitpunktes.

Messungen des Azimutes in analoger Weise zur Bestimmung der Uhrkorrektion oder der Polhöhe zu verwerten wie Messungen der Zenitdistanz, ist nicht möglich, weil die Ausgangsrichtung der Azimutmessungen, die Meridianrichtung, unbekannt ist.

Wenn man die Uhrkorrektion und die Polhöhe so genau als möglich bestimmen will mit Hilfe von Almukantarat- oder Vertikaldurchgängen, so macht man die Messung von Zenitdistanzen oder die Messung von Azimutwinkeln überhaupt unnötig. Wir haben eben festgestellt, daß man wegen der Elimination des Zenitpunktes zwei Vertikaldurchgänge beobachten muß. Statt denselben Stern in zwei verschiedenen Lagen zu beobachten, kann man zwei verschiedene Sterne in *demselben* Almukantarat beobachten. Nach der Beobachtung des ersten Sternes dreht man das Instrument, ohne die Klemmung in Zenitdistanz zu lösen, in das Azimut des zweiten Sternes; die Änderung, die die Zenitdistanz dabei erleidet, weil die vertikale Umdrehungsachse nicht genau in die Lotrichtung fällt, wird wieder mit Hilfe des Niveaus bestimmt, so daß ihr Einfluß auf das Resultat der Beobachtung in Rechnung gestellt werden kann. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß alle Fehler, die mit einer Winkelmessung verbunden sind, vermieden werden. Es sind insbesondere die periodischen Teilungsfehler, welche Zenitdistanzmessungen stark verfälschen können. Außerdem macht das Verfahren es unnötig, die Refraktion zu berücksichtigen; man muß nur der Änderung der Refraktion während des Überganges vom ersten Stern zum zweiten Rechnung tragen.

In gleicher Weise läßt sich aber auch die Kenntnis des Azimutes umgehen; man braucht nur die Durchgänge zweier verschiedener Sterne durch *denselben* Vertikal zu beobachten.

Die analytische Behandlung solcher Beobachtungen besteht darin, daß man die Gleichungen (1) oder (2) für die beiden Sterne aufstellt und aus dem

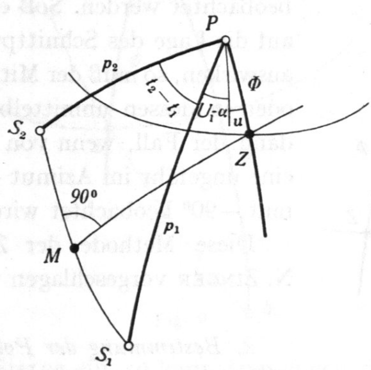

Fig. 7

Gleichungspaar (1) die unbekannte Zenitdistanz z und aus dem Gleichungspaar (2) das unbekannte Azimut a eliminiert. Die resultierende Gleichung enthält dann die Uhrkorrektion u und die Poldistanz Φ des Zenites neben den beiden Uhrzeiten U_1 und U_2 und den Koordinaten (α_1, p_1) und (α_2, p_2) der beiden Sterne. Wir betrachten wieder die geometrische Lösung der Aufgabe, mit Hilfe der gegebenen Größen entweder die Uhrkorrektion u oder die Poldistanz Φ des Zenites zu ermitteln. Die geometrische Lösung gestaltet sich sehr einfach, weil jetzt die Differenz der Stundenwinkel, in welchen die Sterne beobachtet worden sind, bekannt ist; denn aus

$$t_1 = U_1 + u - \alpha_1$$

und $$t_2 = U_2 + u - \alpha_2$$

folgt $$t_2 - t_1 = (U_2 - U_1) - (\alpha_2 - \alpha_1).$$

1. *Bestimmung der Uhrkorrektion u mit Hilfe der Uhrzeiten U_1 und U_2*, zu welchen sich die Sterne (α_1, p_1) und (α_2, p_2) im gleichen Almukantarat an einem Ort der Polhöhe $\varphi = 90^0 - \Phi$ befunden haben (Figur 7).

Von der Spitze P des bekannten Winkels $(t_2 - t_1)$ aus tragen wir die Bögen $PS_1 = p_1$ und $PS_2 = p_2$ ab. Im Mittelpunkt M des S_1 und S_2 verbindenden Großkreisbogens errichten wir die Senkrechte; sie wird vom Kleinkreis, den wir um P mit dem Radius Φ ziehen, im gesuchten Zenit Z geschnitten. Der Großkreis PZ ist dann der Meridian, der mit den Schenkeln des Winkels $(t_2 - t_1)$ die Stundenwinkel t_1 und t_2 bildet. Da

$$u = t_1 - (U_1 - \alpha_1) \equiv t_2 - (U_2 - \alpha_2)$$

ist, ist jetzt noch der Winkel $(U_1 - \alpha_1)$ oder der Winkel $(U_2 - \alpha_2)$ von dem nicht im Meridian liegenden Schenkel des Stundenwinkels entgegen der täglichen Bewegung abzutragen, damit die Uhrkorrektion u in der Figur erscheint.

Damit sich die Mittelsenkrechte und der Kleinkreis rechtwinklig schneiden, müssen die beiden Sterne in Azimuten, die *symmetrisch zum Meridian* liegen, beobachtet werden. Soll ein Fehler in Φ sich nicht auf die Lage des Schnittpunktes der beiden Kreise auswirken, so muß der Mittelpunkt M in das Zenit Z oder in dessen unmittelbare Nähe fallen; das ist dann der Fall, wenn von den beiden Sternen der eine ungefähr im Azimut $+90^0$, der andere im Azimut -90^0 beobachtet wird.

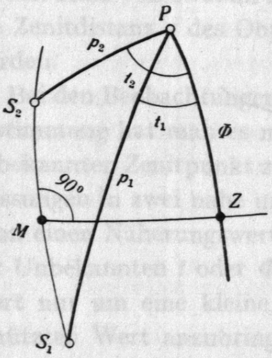

Fig. 8

Diese Methode der Zeitbestimmung ist von N. ZINGER vorgeschlagen worden[1]).

2. *Bestimmung der Poldistanz Φ des Zenites mit Hilfe der Uhrzeiten U_1 und U_2*, zu welchen die Sterne (α_1, p_1) und (α_2, p_2) bei den Stundenwinkeln t_1 und t_2 sich in der gleichen Zenitdistanz befunden haben (Figur 8).

Wir tragen von dem als Meridian gewählten Großkreis aus die Winkel t_1 und t_2 ab und machen auf den nicht im Meridian liegenden Schenkeln $PS_1 = p_1$ und $PS_2 = p_2$. Die im Mittelpunkt M des Großkreisbogens S_1S_2 gezogene Senkrechte schneidet den Meridian im gesuchten Zenit Z. Die Z bestimmenden Kreise schneiden sich senkrecht, wenn die Mittelsenkrechte mit dem I. Vertikal zusammenfällt, wozu erforderlich ist, daß die beiden Sterne in Azimuten, die *symmetrisch zum I. Vertikal* liegen, beobachtet werden.

Die Unsicherheit, die der beobachteten Uhrzeit U_1 oder U_2 anhaftet, hat eine Unsicherheit in der Richtung der von M ausgehenden Mittelsenkrechten zur Folge; diese Unsicherheit wird um so weniger die Lage des Schnittpunktes Z beeinflussen, je näher der Mittelpunkt M dem Meridian liegt. Die beiden Sterne sind deshalb in der Nähe des Meridians zu beobachten; es kann sich dann auch ein Fehler in der Lage des Meridianes, als Folge eines Fehlers der

---

[1]) Die Zahlen verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schlusse des Bandes.

verwendeten Uhrkorrektion, nicht nachteilig auswirken. Im Meridian selber dürfen die Sterne nicht gewählt werden, weil im Meridian keine Almukantaratdurchgänge beobachtet werden können.

Diese Methode der Polhöhenbestimmung ist von M. Pewzow vorgeschlagen worden[2]).

Wenn das Instrument ein Okularmikrometer mit beweglichem Horizontalfaden besitzt, so kann man die Pewzowsche Methode auch zur Beobachtung der Sterne im Meridian selber verwenden. Man sucht dann zwei Sterne aus, von denen der eine nördlich, der andere südlich des Zenites sehr nahe in die gleiche Meridianzenitdistanz kommt. Stellt man das Fernrohr auf die mittlere

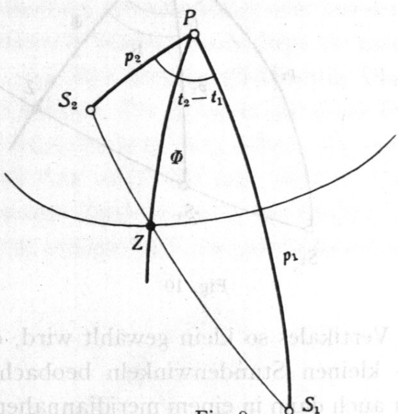

Fig. 9

Zenitdistanz der beiden Sterne ein, so kann man zuerst den einen und dann nach Drehung des Instrumentes um 180⁰ den andern Stern durch das Gesichtsfeld gehen lassen. An Stelle der Durchgangsbeobachtung tritt jetzt die Einstellung des beweglichen Horizontalfadens auf jeden der beiden Sterne. Die den Einstellungen entsprechenden Trommelablesungen führen unmittelbar zur Kenntnis der Differenz der Zenitdistanzen der beiden Sterne, wenn die Umdrehungsachse mit der Lotrichtung zusammenfällt. Sind z_s und p_s Zenitdistanz und Poldistanz des südlichen Sternes, z_n und p_n Zenitdistanz und Poldistanz des nördlichen, so ist

$$\Phi = \frac{1}{2}(p_n + p_s) + \frac{1}{2}(z_n - z_s),$$

worin $(z_n - z_s)$ die mikrometrisch gemessene Differenz der Zenitdistanzen ist.

Diese Methode der Polhöhenbestimmung ist als Horrebow-Talcott-Methode bekannt.

3. *Bestimmung der Uhrkorrektion u mit Hilfe der Uhrzeiten U_1 und U_2*, zu denen sich die Sterne (α_1, p_1) und (α_2, p_2) im gleichen Azimut befunden haben an einem Ort der Polhöhe $\varphi = 90^0 - \Phi$ (Figur 9).

Wir konstruieren das Dreieck PS_1S_2, indem wir den Winkel bei P gleich $(t_2 - t_1)$, $PS_1 = p_1$ und $PS_2 = p_2$ machen. Der Bogen S_1S_2 wird dann vom Kleinkreis um P mit dem Radius Φ im Zenit Z geschnitten. Die Stundenwinkel t_1 und t_2 sind jetzt bekannt, und es kann der die Uhrkorrektion darstellende Winkel angegeben werden.

Wie ersichtlich, ist jetzt zu verlangen, daß der Bogen S_1S_2 sehr nahe in den Meridian fällt. Das kann auf zwei Arten erreicht werden; zunächst dadurch,

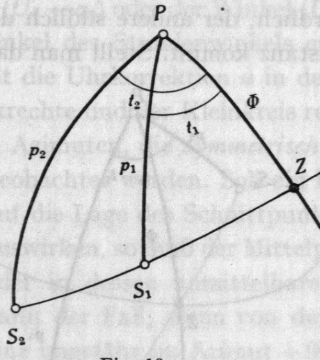

Fig. 10

daß das Azimut des Vertikales so klein gewählt wird, daß beide Sterne in – absolut genommen – kleinen Stundenwinkeln beobachtet werden. Die Beobachtung findet aber auch dann in einem meridiannahen Vertikal statt, wenn der eine der beiden Sterne ein sehr polnaher Stern ist, der in beliebigem Stundenwinkel beobachtet wird.

Werden beide Sterne in kleinen Stundenwinkeln beobachtet, so redet man von einer *Meridianzeitbestimmung*. Die Methode, einen Polstern und einen zweiten (im Zenit oder südlich davon kulminierenden) Stern zu beobachten, ist von W. DÖLLEN vorgeschlagen worden[3]).

4. *Bestimmung der Poldistanz Φ des Zenites mit Hilfe der Uhrzeiten U_1 und U_2*, zu welchen die Sterne (α_1, p_1) und (α_2, p_2) bei den Stundenwinkeln t_1 und t_2 in das gleiche Azimut gekommen sind (Figur 10).

Wir tragen von einem als Meridian gewählten Großkreis die Stundenwinkel t_1 und t_2 ab und machen auf den nicht im Meridian liegenden Schenkeln $PS_1 = p_1$ und $PS_2 = p_2$. Der durch S_1 und S_2 gelegte Großkreisbogen schneidet den Meridian im Zenit Z. Damit $PZ = \Phi$ sicher bestimmt ist, muß der Bogen S_1S_2 mit dem I. Vertikal zusammenfallen oder wenigstens in dessen Nähe liegen. Eine Unsicherheit in der Lage der Punkte S_1 und S_2 wirkt sich am wenigsten aus, wenn sie sich in unmittelbarer Nähe des Zenites befinden, der eine auf der Ost- und der andere auf der Westseite des I. Vertikals.

Ein Fehler in der Uhrkorrektion beeinflußt die Lage des Meridians gegenüber dem Dreieck PS_1S_2. Da ein Fehler du das Zenit in der Richtung des I. Vertikales verschiebt, wird der Fehler $d\Phi$ eine kleine Größe höherer Ordnung, wenn du klein von der ersten Ordnung ist.

Die beiden Sterne sind somit im I. Vertikal bei kleinen Zenitdistanzen zu beobachten, der eine im Osten, der andere im Westen.

d) Simultane Bestimmungen

Da die Uhrkorrektion oder die Polhöhe entweder aus den Durchgängen zweier Sterne durch denselben Almukantarat oder aus den Durchgängen durch denselben Vertikal ermittelt werden kann, liegt es nahe, zu fragen, ob mit Hilfe der Durchgänge von drei Sternen gleichzeitig Uhrkorrektion und Polhöhe bestimmt werden können. Die Antwort auf diese Frage läßt sich sowohl auf geometrischem als analytischem Weg geben; die geometrische Beantwortung besteht darin, daß man zeigt, wie man die drei Unbekannten – in dem einen Falle die gemeinsame Zenitdistanz z, die Uhrkorrektion u und die Poldistanz Φ des Zenites, im andern Falle das gemeinsame Azimut neben u und Φ

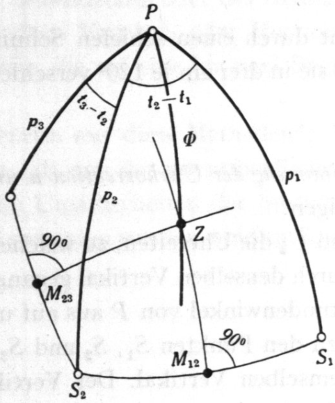

Fig. 11

– durch Konstruktion finden kann. Die analytische Beantwortung hat von der Funktionaldeterminante der drei Funktionen, durch welche die drei Unbekannten miteinander verbunden werden, auszugehen. Verschwindet die Funktionaldeterminante, so sind die drei Unbekannten nicht voneinander unabhängig. Wir gehen an dieser Stelle nur auf die geometrische Behandlung dieser Frage ein.

1. *Simultane Bestimmung der Uhrkorrektion u und der Poldistanz Φ des Zenites mit Hilfe der Uhrzeiten U_1, U_2 und U_3,* zu welchen drei verschiedene Sterne in denselben Almukantarat gekommen sind (Figur 11).

Bekannt sind die Differenzen $t_2 - t_1$ und $t_3 - t_2$ der Stundenwinkel. Auf den Schenkeln dieser Winkel tragen wir die Poldistanzen p_1, p_2 und p_3 ab und erhalten die Sternörter S_1, S_2 und S_3, die nach Voraussetzung auf dem gleichen Almukantarat liegen. Die Mittelsenkrechten der Seiten S_1S_2, S_2S_3 und S_3S_1 des Dreieckes $S_1S_2S_3$ schneiden sich im Zenit Z. Da das Zenit schon durch den Schnittpunkt von 2 der 3 Mittelsenkrechten bestimmt ist und es gleichgültig sein muß, welche beiden Mittelsenkrechten zur Konstruktion gewählt werden,

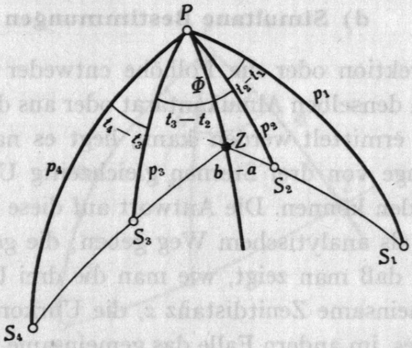

Fig. 12

wird man, um Z nicht durch einen schiefen Schnittpunkt zu erhalten, die 3 Sterne so wählen, daß sie in drei um je 120^0 verschiedenen Azimuten durch den Almukantarat gehen.

2. *Simultane Bestimmung der Uhrkorrektion u und der Poldistanz* mit Hilfe von Vertikaldurchgängen.

Es seien U_1, U_2 und U_3 die Uhrzeiten, zu welchen drei Sterne mit verschiedenen Poldistanzen durch denselben Vertikal gegangen sind. Trägt man wieder die Differenzen der Stundenwinkel von P aus auf und geht mit Hilfe der Poldistanzen der Sterne zu den Punkten S_1, S_2 und S_3 über, so liegen diese nach Voraussetzung auf demselben Vertikal. Der Vertikal ist aber als Großkreis schon durch zwei Punkte bestimmt, wenn sie weder zusammenfallen noch sich diametral gegenüberliegen. Bei fehlerfreien Beobachtungen liegt also der Punkt S_3 auf dem schon durch S_1 und S_2 gelegten Vertikal. Durch zwei oder mehr Durchgänge wird also nur die Lage des Vertikales gegenüber dem Pol P festgelegt. *Die Lage des Zenites auf dem Vertikal bleibt unbestimmt.* Uhrfehler und Polhöhe können also durch drei oder mehr im selben Vertikal beobachtete Durchgangszeiten nicht simultan bestimmt werden.

Die Aufgabe, simultan Zeit und Polhöhe aus Vertikaldurchgängen zu ermitteln, ist lösbar, wenn in *zwei verschiedenen Vertikalen* die Durchgänge von je zwei verschiedenen Sternen beobachtet werden (Figur 12). Sind die Sterne 1 und 2 im Vertikal des Azimutes a und die Sterne 3 und 4 im Vertikal des

Azimutes b beobachtet, so lassen sich auf den Schenkeln der Winkel $t_2 - t_1$ und $t_4 - t_3$ mit Hilfe der Poldistanzen der Sterne die vier Örter S_1, S_2, S_3 und S_4 angeben; S_1 und S_2 liegen auf dem Vertikal des Azimutes a und S_3 und S_4 auf dem Vertikal des Azimutes b. Da aber auch der Winkel $t_3 - t_2$ bekannt ist, ist die gegenseitige Lage der beiden Vertikale auf der Kugel gegeben; sie schneiden sich im gesuchten Zenit Z; es kann jetzt der Meridian eingezeichnet, die Poldistanz PZ abgemessen und es können die Stundenwinkel der vier Sterne angegeben werden.

Die günstigsten Umstände sind dann vorhanden, wenn sich die beiden Vertikale rechtwinklig schneiden; kommt es nur auf die Bestimmung der Uhrkorrektion und der Polhöhe an, so wird man die beiden Sternpaare in kleinen Zenitdistanzen, je zu beiden Seiten des Zenites, beobachten, um zu erreichen, daß eine Unsicherheit in den Richtungen der beiden Vertikale sich so wenig als möglich auf die Lage des Schnittpunktes übertragen kann [4]).

Das Instrument, das zu den Methoden der Ortsbestimmung verwendet wird, die auf der Elimination der Zenitdistanz oder des Azimutes beruhen, braucht nicht mit einem genau geteilten Vertikal- oder Horizontalkreis versehen zu sein; es genügen Einstellkreise, die auf eine bis zwei Bogenminuten genau abgelesen werden können.

Wir behandeln im Folgenden nur diese Methoden*); sie verdienen die Bezeichnung «genau» insofern, als nur die unvermeidlichen Fehler der Durchgangsbeobachtungen und die Unsicherheiten der Sternörter das Resultat beeinflussen; da keine Winkel gemessen werden, spielen Kreisteilungsfehler keine Rolle.

*) Eine analytische Diskussion der günstigsten Beobachtungsumstände aller möglichen Methoden gibt die Dissertation von E. Herzog, «Die Aufgaben der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung in systematischer Behandlung» (Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Band LVIII, 1947).