



Michael Reichard, BSc

**Zinsstrukturanalyse
Stochastische Zinsmodelle zur
Bewertung von
Versicherungsverträgen**

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur/in

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer/in:

O.Univ.-Prof. Dr.phil. Robert Tichy
Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Michael Thonhauser

Institut für Analysis und Number Theory
Graz, September 2016

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum/Date

Unterschrift/Signature

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Problemstellung	1
1.1	Einteilung der Arbeit	2
2	Nelson-Siegel Verfahren	3
2.1	Parametrisches Zinsmodell	4
2.2	Kalkulationsergebnisse	7
3	Heath-Jarrow-Morton Modell	8
3.1	Arbitrage in Bond-Märkten	8
3.2	Marktpreisrisiko	9
3.3	Diskrete Approximation eines Heath-Jarrow-Morton Modells	11
3.3.1	Basismodell	12
3.3.2	Arbitragebedingungen	13
3.4	Stetiges Heath-Jarrow-Morton Modell	14
3.4.1	Basismodell	14
3.4.2	Arbitragebedingung	16
4	Markt konsistentes Zinsmodell	18
4.1	Diskretes Zinsmodell	18
4.2	Schätzmethode	24
4.3	Kalibrierungs Ergebnisse	28
5	LIBOR-Markt Modell	31
5.1	Drift unter dem Martingalmaß	32
5.1.1	„Spot“ Martingalmaß	33
5.1.2	Weitere Martingalmaße	35
5.2	Korrelation	37
5.3	Volatilität	40
5.3.1	Swaprates und Swaptions	41
5.3.2	Swaption Black-Scholes Preis	43
5.3.3	Implizite Volatilität vs. LIBOR Volatilität	43
5.4	Ergebnisse einer Kalibrierung	48
6	LIBOR-Markt Modell mit Ausfallrisiko	54
6.1	Ausfallsprozess	54
6.2	Nullkupon Anleihen Struktur	55
6.3	Forward Dynamiken	57
6.4	HJM Driftbedingungen in einem stetigen Kontext	59
6.4.1	Driftbedingung unter einem Martingalmaß	62
6.5	Maßwechseltechnik	64
6.5.1	Drift unter dem T_k -forward Maß	65
6.5.2	Spot LIBOR Maß	66

6.5.3	Überlebens Maß	70
6.6	Rückgewinnungszahlung und Ausfalls-Optionen	71
6.6.1	Rückgewinnungszahlung	72
6.6.2	Ausfalls-Option	74
6.7	Kalibrierungs Ergebnisse	77
6.7.1	Unabhängigkeit	78
6.7.2	Problem der Datenverfügbarkeit	78
7	Konklusion	80
8	Danksagung	81
A	Stochastische Integration	82
B	Itô Formel	85
C	Doléan Exponential	86
D	Poisson Prozess	87
E	Markierter Punkt Prozess und Satz von Girsanov	88

1 Einleitung und Problemstellung

In der Finanz- und Versicherungsmathematik spielen die Zinsstrukturen seit Anbeginn des Finanz- und Versicherungswesens eine zentrale Rolle. Durch die neue Rechtsgrundlage Solvency II wird eine mit dem Finanzmarkt konsistente Bewertung von Versicherungsverbindlichkeiten gefordert. Unter Versicherungsverbindlichkeiten versteht man zum Beispiel Lebensversicherungsverträge oder Pensionsversicherungsverträge welche sich über lange Zeiträume von über 30 Jahren erstrecken können. Da der Markt aber nur Zinsstrukturen von begrenzter Laufzeit bietet, wie zum Beispiel dreißig jährige Staatsanleihen, wirft das die Frage nach geeigneten Strukturen zur Absicherung von langfristigen Verbindlichkeiten auf. Auch das damit verbundene Risiko sowie Anlagestrategien zur Absicherung solcher Risiken sind Bestandteil einer Markt konsistenten somit rechtskonformen Bewertung von solchen Verbindlichkeiten.

Diese Arbeit behandelt die oben beschriebene Fragestellung von langfristigen Verbindlichkeiten mit Hilfe von Zinsstrukturen über lange Zeiträume. Es werden verschiedene Modelle behandelt mit denen man langfristige Zinsverläufe beschreiben und messen kann. Es werden drei unterschiedliche Modelle gewählt um so verschiedenste Sichtweisen zu behandeln. Das erste Zinsmodell, das so genannte Nelson-Siegel Verfahren, Gilli et al. [2010], beschreibt eine deterministische Struktur der Zinsen. Es wurde von Charles Nelson und Andrew Siegel in den 60er Jahren erdacht und bot eine Basis von parametrischen Zinsmodellen. Lars Svensson erweiterte dieses Modell durch einen weiteren Parameter zu dem Nelson-Siegel-Svensson Verfahren. Doch man erkannte schnell, dass solche Verfahren zu wenig Flexibilität boten um gute Berechnungsgrundlagen zu generieren.

Die Basis des zweiten Modells bildet das Heath-Jarrow-Morton Gefüge, auch HJM-Modell genannt, welches in den späten 80er Jahren von David Heath, Robert A. Jarrow und Andrew Morton in Heath et al. [1990] und Heath et al. [1992] vorgestellt wurde. Eine solche Struktur verfügt über eine Zufallskomponente welche die nötige Flexibilität in der Zinsebene schafft. Das in der Arbeit behandelte Modell basiert auf der Arbeit Teichmann und Wüthrich [2013] und beschreibt Nullkupon Anleihen und die damit verbundene Zinskurve in diskreter Zeit. Es wird angenommen, dass an endlich vielen Zeitpunkten (zum Beispiel jeden ersten Tag im Monat) Nullkupon Anleihen existieren. Die Laufzeit jeder einzelnen Anleihe beträgt maximal eine vorher definierte Zeitspanne (zum Beispiel 10 Jahren). Aus diesen Daten die direkt oder indirekt auf dem Finanzmarkt beobachtbar sind, werden Parameter des Modells geschätzt. Anschließend können Vorhersagen beziehungsweise Schätzungen von Zinsstrukturkurven konstruiert werden, die zur konsistenten Marktbeurteilung von langfristigen Verbindlichkeiten (Erlebensversicherung, Ablebensversicherung, usw.) beitragen und gegenüber dem Nelson Siegel Verfahren die Qualität deutlich erhöhen. Ein solches Modell wie in Teichmann und Wüthrich [2013] bietet außerdem den Vorteil, dass wenn es neue Beobachtungen gibt diese Informationen leicht in das Modell miteinfließen. Somit können neue Beobachtungen in die Berechnungen miteinbezogen werden um so ständig aktuelle Vorhersagen und Schätzungen zu garantieren.

Als drittes Modell wird ein in der Praxis häufig verwendetes Modell erarbeitet. Es handelt sich dabei um ein LIBOR-Markt Modell (LMM). Diese Modell wird in vielen Büchern be-

schrieben und es gibt sehr viel spezielle Varianten dieses Modells. Die Grundlage in dieser Arbeit bildet hier [Glasserman, 2003]. Das LIBOR-Market Modell bietet die Möglichkeit die Parameter so zu schätzen, dass sie die aktuelle Marktsituation widerspiegeln. Das heißt wenn dieses Modell auf die aktuellen Daten kalibriert ist, kann man Vorhersagen mit Hilfe von Simulationen generieren. Obwohl dieses Modell viele Schätzungen und Approximationen verwendet bietet es doch einen guten Vergleich zu den anderen Modellen. Es hat den Vorteil, dass keine bzw. nur teilweise historische Daten zur Schätzung herangezogen werden. Die vom Markt beobachteten Daten sind hierbei entscheidend und haben dementsprechend großen Einfluss auf die Schätzungen.

1.1 Einteilung der Arbeit

In Kapitel zwei wird das Nelson-Siegel Verfahren beschrieben. Es werden hier Vorteile sowie auch Nachteile des Modells erörtert und Kalibrierungsergebnisse erarbeitet. Die Kalibrierung wird mit dem in [Gilli et al., 2010] behandelten Algorithmus durchgeführt.

In Abschnitt drei wird das Heath-Jarrow-Morton Modell erarbeitet. Es dient als Grundlage und zum besseren Verständnis für die nachfolgenden Modelle. Dieser Abschnitt beinhaltet interessante Sichtweisen und dient auch zur Beschreibung des Marktrisikos. Dieses Risiko ist schwer zu erfassen spielt aber bei Vorhersagen eine bedeutende Rolle.

Das Kapitel vier beinhaltet das Modell nach [Teichmann und Wüthrich, 2013]. Wie schon oben beschrieben ist es ein sehr dynamisches Modell. Es kann einfach an aktuellen Beobachtungen adaptiert werden und somit nutzt es neue Informationen um genauere Schätzungen zu generieren. Am Ende dieses Kapitels werden wiederum Ergebnisse einer Kalibrierung an österreichischen Staatsanleihen angeführt.

In Kapitel fünf folgt das LIBOR-Markt Modell. Grundlagen dafür bildet [Rebonato, 1999] und [Fries, 2007]. Die Wahl der Struktur von Volatilität und Korrelation sind entscheidende Einflussgrößen eines solchen Modells. Hier wird eine Kalibrierung auf Grund der Datenlage auf den europäischen Markt durchgeführt. Welcher aber repräsentativ auch für österreichische Zinsstrukturen verwendet werden kann.

In Kapitel sechs wird ein LIBOR-Markt Modell mit Ausfallsrisiko erarbeitet welches aus der Arbeit [Schönbucher, 2000a] stammt.

2 Nelson-Siegel Verfahren

Ein tragendes Element in Anleihenmärkten sind Zinskurven bzw. Zinsstrukturen. In diesem Abschnitt wurde als Grundlage die Arbeit Gilli et al. [2010] verwendet. Hierbei wurde eine alternative Berechnungsmethode, sogenanntes „Differential Evolution“, verwendet. Diese Vorgehensweise bietet die Möglichkeit, Parameteranpassungen des Modells flexibler zu gestalten.

Seien t und T Zeitpunkte, dann beschreibt $Y(t, T)$, $t \leq T$, den Zins in einem Zeitraum von $[t, T]$. Diese Funktion stellt die Zinsstruktur dar. Fixiert man den ersten Parameter t und lässt T monoton wachsen, erhält man die zum Zeitpunkt t vorherrschende Zinsstruktur (üblicherweise sollte dies eine „glatte“ Kurve ohne Sprünge bilden). Andererseits fixiert man den Parameter T und lässt t monoton wachsen, so soll dies eine „stochastische Struktur“ bilden. Es soll also die zukünftige stochastische Zinsstruktur aus der heutigen vorherrschenden Struktur fortgesetzt werden. Ein Kontrakt der zu einem Zeitpunkt t fixiert wird und der zum Zeitpunkt T , $T \geq t$, eine Auszahlung von einer Geldeinheit garantiert, ohne dass andere Zahlungen im Zeitraum $[t, T]$ getätigt werden, wird als Nullkupon Anleihe bezeichnet. Die Zinskurven $Y(t, T)$, für jedes t eine, lassen sich daher aus den Preisen von Nullkupon Anleihen ableiten. Sei der Preis einer Nullkupon Anleihe zum Zeitpunkt t gegeben durch $P(t, T)$, wobei T die Maturity der Nullkupon Anleihe ist. Dann gilt die Beziehung

$$Y(t, T) := -\frac{1}{T-t} \log P(t, T). \quad (2.1)$$

Preise von Nullkupon Anleihen sind (logischerweise) positiv und die vorher angeführte Struktur führt zu ausschließlich positiven Zinsen. Die drei häufigsten Ausprägungen von Zinskurven werden durch folgende Begriffe beschrieben. Bei der ersten Form spricht man von steigenden Zinskurven wenn für ein fixes t die Kurve, für T monoton wachsend, ansteigt. Die zweite Form von Zinskurven sind flache Zinskurven, es handelt sich dabei um Zinskurven die nahezu konstant über die Maturity T sind. Die dritte Form von Zinskurven sind inverse Zinskurven, welche mit zunehmender Laufzeit abfallen. In Abbildung 1 sind alle drei Formen exemplarisch dargestellt. Es können auch Mischformen aus den drei Strukturen auftreten. An den Finanzmärkten sind Nullkupon Anleihen nicht sehr liquide und man benötigt andere Quellen zur Beobachtung von Zinswerten. Zwei mögliche Alternativen bieten Staatsanleihen und Zins-Swap-Rates. Für Laufzeiten unter einem Jahr werden Zins-Swap-Rates benutzt und für Laufzeiten über einem Jahr werden Staatsanleihen herangezogen. Es werden Staatsanleihen für einen Zeitraum von 1, ..., 10, 15, 20, 25, 30 verwendet. Eine Staatsanleihe generiert jährlich einen fixen Kupon bzw. einen fixen Zinswert auf den Nennwert N . Sei $K_p(t, T)$ die Kupon Anleihe mit fixen Kuponzahlungen c zu den Kuponzeitpunkten $t < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ und mit Laufzeit $T - t$ (in Jahren), dann ist mit

$$K_p(t, T) = c \sum_{k=1}^n P(t, t_k) + P(t, T)N,$$

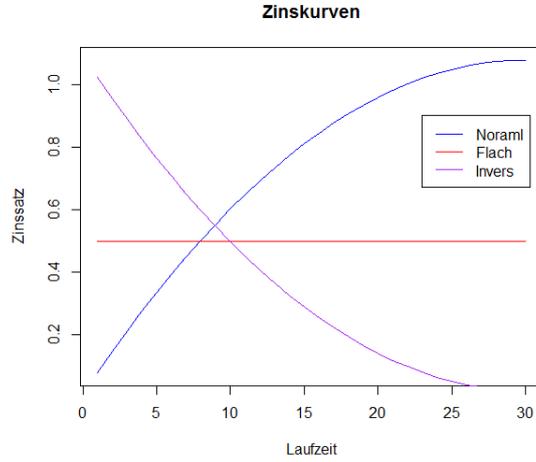


Abbildung 1: Exemplarische Formen von Zinskurven

der Preis fixiert (am Ende der Laufzeit wird der Nennwert mit ausbezahlt). Hierbei ist $P(t, t_k) = e^{-Y(t, t_k)(t_k - t)}$ die Nullkupon Anleihe mit Laufzeit $t_k - t$. Somit setzen sich Staatsanleihen aus Nullkupon Anleihen zusammen. Da aber am Markt der Preis einer Staatsanleihe häufiger beobachtet wird, muss die obige Zusammensetzung von Nullkupon Anleihen geschätzt werden. Eine mögliche Verfahren, das gewählt werden kann, ist das Nelson-Siegel Verfahren.

2.1 Parametrisches Zinsmodell [Gilli et al., 2010]

Das Verfahren beschreibt eine Schätzung von Zinssätzen einer Anleihe. Die Grundidee liegt in der Formulierung der Rendite bzw. des Zinssatzes. Hierbei wird die Annahme getroffen, dass der Zins, $Y(t, T)$, mit Laufzeit $T - t$ die Form

$$Y(t, T) = R_{Siegel}(T - t, \beta) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T-t}{\gamma}\right)}{\frac{T-t}{\gamma}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T-t}{\gamma}\right)}{\frac{T-t}{\gamma}} + \exp\left(-\frac{T-t}{\gamma}\right) \right),$$

besitzt. Der Vektor $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma)$ ist der Parametervektor der Methode. Der erste Parameter β_0 ist unabhängig von der Laufzeit und daher kann man ihn als einen konstanten Zins über alle Zeiträume betrachten. Der Parameter β_1 ist mit γ skaliert und hängt von der Laufzeit ab. Bei steigender Laufzeit (T steigt also im Wert) sinkt der Einfluss von β_1 und daher nimmt β_1 bei kleinerer Laufzeit stärkeren Einfluss auf die Zinsstruktur. Im Gegensatz zu β_1 ist β_2 so gewichtet, dass β_2 bei steigender Laufzeit (T steigt im Wert) mehr Einfluss auf die Zinskurve hat.

Die Funktion R_{Siegel} hat daher die Eigenschaft, dass sie steigende, fallende, inverse, u-förmige und s-förmige Zinskurven wiedergeben kann. Durch diese Funktion wird eine geeignete Zinsstruktur gebildet. Preise von Staatsanleihen sind über die Zeit t , also vom Zeitpunkt der Beobachtung gesehen nicht vergleichbar, da die Laufzeit von solchen Anleihen einen wesentlichen Faktor bildet. Um Staatsanleihen miteinander vergleichen zu können, wird die Rendite herangezogen. In Abbildung 2 ist eine Entwicklung von österreichischen Staatsanleihen (genauer ihrer Renditen) dargestellt. Die Beobachtung des Zinsverfalls seit der Krise 2008 ist hierbei besonders auffällig. Die Rendite ist eine geeignete Wahl zum

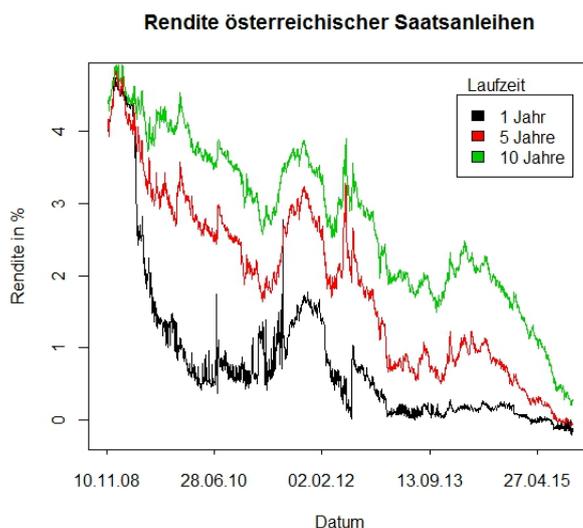


Abbildung 2: Beobachtete Renditen von österreichischen Staatsanleihen seit Mai 2008

Vergleich von Staatsanleihen, den sie bezieht alle wesentlichen Faktoren, wie zum Beispiel Laufzeit, aktueller Preis, Nominale und Kupon einer Staatsanleihe mit ein. Demnach ist die Rendite folgendermaßen definiert.

Definition 2.1. Die Rendite einer Anleihe zum Zeitpunkt t ist gleich demjenigen Zinssatz r , mit dem man alle zukünftigen Zahlungen c abzinsen muss, damit deren Summe gerade gleich dem Kurswert K_{markt} zum Zeitpunkt t der Anleihe ist. Demnach ist die Rendite r_{t,T_i} zum Zeitpunkt t mit einer Restlaufzeit $T_i - t$ die Lösung folgender Gleichung

$$K_{markt}(t) = \frac{1}{(1 + r_{t,T_i})^{T_i-t}} \left(\frac{N}{c} \frac{(1 + r_{t,T_i})^{T_i-t} - 1}{r_{t,T_i}} + N \right). \quad (2.2)$$

Hierbei ist N die Nominale der Anleihe.

Nelson-Siegel Zinskurven

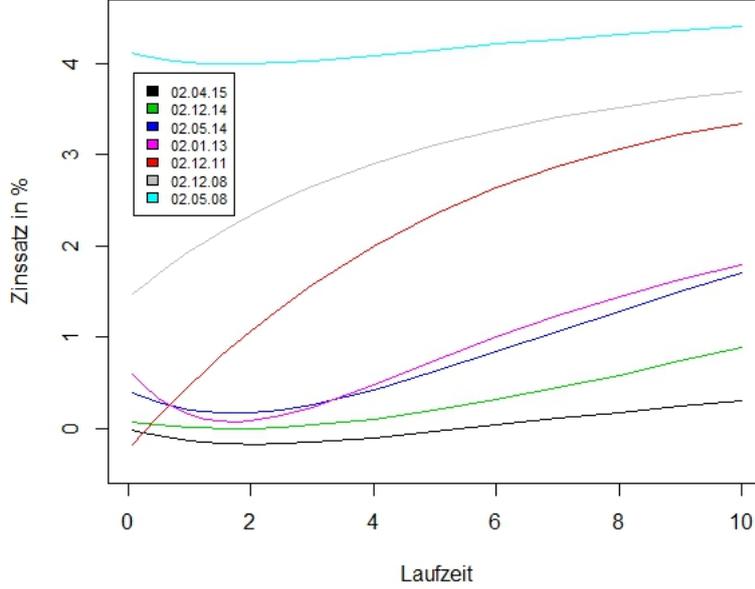


Abbildung 3: Zinskurven aus der Nelson-Siegel Methode

Sei nun die Rendite einer österreichischen Staatsanleihe mit Laufzeit $T_i - t$ gegeben durch r_{t,T_i} . Das Modell formt nun zur Bestimmung der Parameter ein lineares Gleichungssystem (der Parameter γ wurde hier fixiert)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\exp(-(T_1-t)/\gamma)}{(T_1-t)/\gamma} & \frac{1-\exp(-(T_1-t)/\gamma)}{(T_1-t)/\gamma} - \exp(-(T_1-t)/\gamma) \\ 1 & \frac{1-\exp(-(T_2-t)/\gamma)}{(T_2-t)/\gamma} & \frac{1-\exp(-(T_2-t)/\gamma)}{(T_2-t)/\gamma} - \exp(-(T_2-t)/\gamma) \\ 1 & \frac{1-\exp(-(T_3-t)/\gamma)}{(T_3-t)/\gamma} & \frac{1-\exp(-(T_3-t)/\gamma)}{(T_3-t)/\gamma} - \exp(-(T_3-t)/\gamma) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-\exp(-(T_n-t)/\gamma)}{(T_n-t)/\gamma} & \frac{1-\exp(-(T_n-t)/\gamma)}{(T_n-t)/\gamma} - \exp(-(T_n-t)/\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{T_1} \\ r_{T_2} \\ r_{T_3} \\ \vdots \\ r_{T_n} \end{bmatrix}.$$

Hier sind n verschiedene Anleihe-Renditen, basierend auf verschiedener Maturity $\{T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n\}$ gegeben. Dieses Gleichungssystem ist für $n > 3$ ein überbestimmtes Gleichungssystem und besitzt daher keine Lösung. Es muss daher ein globales Minimum unter einer Norm bestimmt werden, welches dann eine Lösung vom obigen System darstellt. Wählt man die euklidische Norm kann man die Bestimmung der Parameter γ, β_0, β_1 und β_2 auf ein Optimierungsproblem von folgender Form zurückführen

$$\min_{\beta} \sum (R_{Siegel} - r_{t,T_i})^2.$$

Der Parameter r_{t,T_i} wiederum steht für die am Markt beobachteten Renditen von Staatsanleihen mit verschiedenen Laufzeiten, zum Beispiel von einem Jahr bis zu zehn Jahren und

die Summe erstreckt sich über die Laufzeiten der Anleihen. Hier wird also an jedem Beobachtungszeitpunkt t das obige Optimierungsproblem gelöst. Es ist auch eine alternative Wahl zur Quadratsumme möglich. Zum Beispiel wird das Quadrat durch den absoluten Abstand zwischen dem beobachteten Wert r_{t,T_i} und dem theoretischen Wert R_{Siegel} ersetzt. Es wird also die Manhattan-Metrik gewählt. Auf diese Weise erhält man pro Beobachtungszeitpunkt einen Vektor β der die Zinskurve dann durch R_{Siegel} beschreibt, aus welcher dieser wiederum der Preis einer Nullkupon Anleihe berechnet wird.

Abbildung 3 zeigt das Ergebnis mehrerer Parameterschätzungen des Nelson-Siegel Verfahrens. Die Abbildung zeigt deutlich die Formveränderung sowie den Zinsverfall im Laufe der Zeit. Die jüngsten Schätzungen spiegeln sogar negative Renditen wieder, welche sich auf das aktuelle Rekordtief des Zinsniveaus beziehen.

Ein Nachteil des Verfahrens ist, dass es sehr statisch ist. Es werden nur Momentaufnahmen der Zinskurve betrachtet und man kann daher keine Aussagen über die weitere Entwicklung der Zinsstruktur treffen. Des Weiteren ist dieses Modell kein stochastisches Modell, es sind also keine zufälligen Größen eingebaut. Es führt dazu, dass das Modell unflexibel ist. Trotzdem ist dieses Modell nützlich um eine Basis für weitere Berechnungen von stochastischen Heath-Jarrow-Morton Modellen zu bilden.

2.2 Kalkulationsergebnisse

Da das Optimierungsproblem nicht von konvexer Natur ist, können die Werte von β stark schwankend sein. Um Ausreißer zu vermeiden, werden die Grenzen für den Wert β_0 mit $[0, 15]$, sowie $\beta_1 \in [-15, 30]$ und $\beta_2 \in [-30, 30]$ gesetzt. In der Tabelle 1 werden Werte für β jährlich angeführt. Um die deutliche Schwankungsbreite zu veranschaulichen sind in Abbildung 4 die gesamten Schätzungen der β -Werte dargestellt. Die Dauer einer β -

Beobachtungstag	β_0	β_1	β_2
30.12.08	9.122141	-4.646089	-5.774192
30.12.09	4.704459	-4.629867	0.06400433
30.12.10	4.942409	-4.658134	1.956709
29.12.11	0.8453236	-1.2742825	11.3716209
28.12.12	3.510064	-3.038089	-5.737580
31.12.13	4.329625	-3.783375	-6.368124
30.12.14	10.53732	-10.52115	-12.01134

Tabelle 1: Beta jeweils Jahres Ende

Schätzung beträgt 3,65 Sekunden. Es werden insgesamt 162 Monate beobachtet und immer der jeweils letzte beobachtete Tag eines Monats als Basis der Schätzung für β verwendet. Somit repräsentiert immer der letzte Tag eines Monats an dem Zinssätze beobachtet werden den Zinssatz des gesamten Monats.

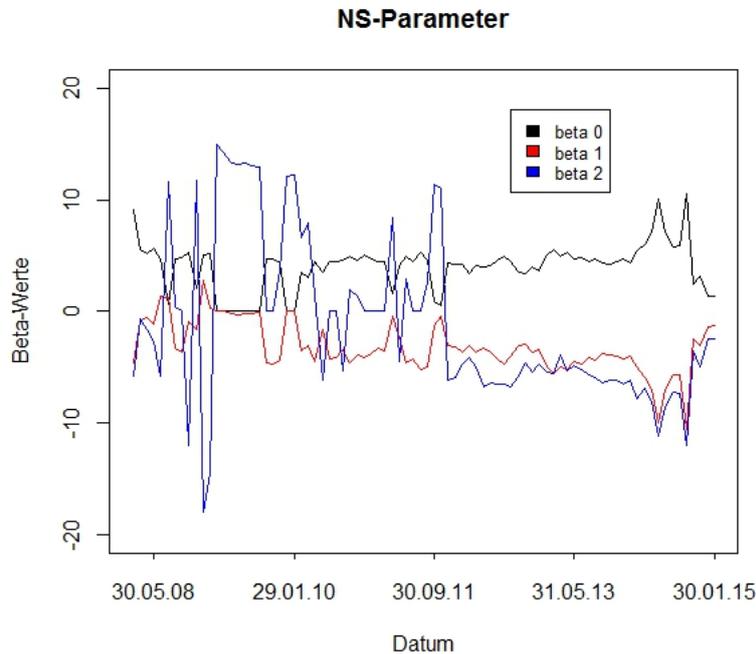


Abbildung 4: β aus österreichischen Staatsanleihen an verschiedenen Zeitpunkten

3 Heath-Jarrow-Morton Modell

3.1 Arbitrage in Bond-Märkten

Dieses Kapitel beinhaltet Definitionen über Arbitrage so wie Sätze und Lemmas aus Musiela und Rutkowski [2006], Föllmer und Schied [2011] und Heath et al. [1990]. Der Aspekt eines „fairen“ Handelns an Märkten wird mit dem Begriff der No-Arbitrage abgedeckt. Es gibt viele mehr oder weniger äquivalente Definitionen von Arbitrage. Die in dieser Arbeit gewählte Definition bezieht sich speziell auf Nullkupon Anleihen, welche wieder das Symbol $P(t, T)$ tragen. Des weiteren wird ein Endzeitpunkt T^* festgelegt welcher den absoluten Endzeitpunkt aller Modelle beschreibt. Sei (Ω, F, \mathbb{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} und σ -Algebra F . Sei $\mathbb{F} = \{F_t\}_{t \geq 0}$ und $F_\infty = F$ eine Filtration auf dem Raum Ω und $r = (r_t)_{t \in [0, T^*]}$ ein \mathbb{F} adaptierter Prozess, sodass die risikolose Anlage $P = (P_t)_{t \in [0, T^*]}$ folgendes erfüllt

$$P_t = e^{\int_0^t r_u du} \quad \forall t \in [0, T^*].$$

Durch die Exponentialfunktion (aus Gleichung (2.1)),

$$P(t, T) = e^{-(T-t)Y(t, T)} \quad t \leq T \leq T^*,$$

ist zu jedem Zeitpunkt $t \leq T^*$ der Preisprozess einer Nullkupon Anleihe $P(t, T)$ strikt positiv. Es wird sich später zeigen, dass durch die Definition einer Arbitrage freien Familie

von Nullkupon Anleihen $P(\cdot, T)$ für jedes $T \leq T^*$ die Nullkupon Anleihen $P(\cdot, T)$ adaptiert an \mathbb{F} sind. Es sei nun angenommen, dass \mathbb{F} die \mathbb{P} -vervollständigte Filtration ist welche von einer Brownschen Bewegung erzeugt wird. Im späteren Verlauf wird diese Brownsche Bewegung durch den so genannten „market price of risk“ angepasst. Dadurch erhält man eine bessere Anpassung des Modells an den Markt.

Der hier erwähnte Prozess r wird auch als „Short-Rate“ bezeichnet. Ein großes Gebiet in der Analyse von Zinsstrukturen bildet die Klasse von Short-Rate Modellen. Diese Modelle nehmen den Ansatz einer stochastischen Differentialgleichung als Basis für die Short-Rate. Bekannte Modelle sind das Vasicek Modell, Cox-Ingersoll-Ross Modell (CIR) oder aber auch das Hull-White Modell. Es existiert ein starker Zusammenhang zwischen der Short-Rate und der später definierten „Forward Rate“. Daher ist es auch möglich, Modelle für die Forward Rate in Terme eines Short-Rate Modells umzuwandeln. Beginnen wir zunächst mit der Arbitrage Bedingung und dem Aspekt des Marktpreisrisikos.

Definition 3.1 ([Musielà und Rutkowski, 2006]). *Eine Familie $P(t, T)$, $t \leq T \leq T^*$, von adaptierten Prozessen (an \mathbb{F}) heißt Arbitrage freie Familie von Bondpreisen relativ zu r wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind*

- $P(T, T) = 1$ für jedes $T \in [0, T^*]$
- es existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}^* auf (Ω, F_{T^*}) welches äquivalent zu \mathbb{P} ist und für jedes $T \in [0, T^*]$ die Bedingung erfüllt, dass

$$Z^*(t, T) := P(t, T)/P_t \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.1)$$

ein Martingal unter \mathbb{P}^* ist.

Jedes oben genannte Maß \mathbb{P}^* wird als Martingalmaß für die Familie $P(t, T)$ bezeichnet. Die Wahl für ein Martingal in (3.1) führt zu folgender Überlegung. Trivialerweise ist $Z^*(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(Z^*(T, T)|F_t)$ für $t \leq T$ ein Martingal, sodass

$$P(t, T) = P_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(P_T^{-1}|F_t), \quad \forall t \in [0, T],$$

erfüllt. Für jedes Martingalmaß \mathbb{P}^* einer Arbitrage freien Familie von Bondpreisen gilt also

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(e^{-\int_t^T r_u du}|F_t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.2)$$

Aus diesem Zusammenhang kann der Preis einer Nullkupon Anleihe als ein bedingter Erwartungswert vom zukünftigen Zinssatz r interpretiert werden. Auch aus der Darstellung in (3.2) sieht man, dass Integrierbarkeit des Prozesses r sowie die Wahl des Martingalmaßes entscheidende Einflussgrößen sind.

3.2 Marktpreisrisiko

Wir definieren nun den \mathbb{F} -adaptierten Prozess r als einen Itô Prozess oder in anderen Worten als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung. Seien dazu $\mu = (\mu_t)_{t \geq 0}$ und

$\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$ an die Filtration \mathbb{F} adaptierte Prozesse und $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung unter dem Maß \mathbb{P} . Die Differentialgleichung lautet

$$dr_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad r_0 \geq 0 \iff r_t = r_0 + \int_0^t \mu_u du + \int_0^t \sigma_u dW_u \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3)$$

Das Maß \mathbb{P} wird als subjektives Maß angesehen. Durch Konstruktion eines neuen äquivalenten Maßes, nämlich des Martingalmaßes \mathbb{P}^* , soll ein objektives Wahrscheinlichkeitsmaß definiert werden. Sei zuerst \mathbb{Q} ein zu \mathbb{P} äquivalentes Maß. Wir verwenden die Radon-Nikodým Ableitung

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_{T^*} \left(\int_0^{\cdot} \lambda_u dW_u \right) =: \eta_{T^*} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.} \quad (3.4)$$

für einen geeigneten vorhersagbaren, \mathbb{R}^d -wertigen Prozess λ . Das oben verwendete \mathcal{E}_{T^*} ist das Doléans Exponential. Die Lösung des Doléans Exponentials lautet

$$\eta_t := \mathcal{E}_t \left(\int_0^{\cdot} \lambda_u dW_u \right) = \exp \left(\int_0^t \lambda_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t |\lambda_u|^2 du \right).$$

Sei nun λ als adaptierter Prozess gegeben und \mathbb{P}^λ das durch (3.4) gegebene Maß, dann ist

$$W_t^\lambda = W_t - \int_0^t \lambda_u du \quad \forall t \in [0, T^*],$$

eine Brownsche Bewegung unter \mathbb{P}^λ und das Maß \mathbb{P}^λ ist nun ein Maß im Sinne von Definition 3.1. Diese Aussage ist äquivalent zum Satz von Girsanov, welcher im folgenden Absatz für eine mehrdimensionale Brownsche Bewegung angeführt ist

Satz 3.1 ([Müller, 2014]). *Sei W eine Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und λ ein vorhersagbarer Prozess sodass $\int_0^t \lambda_s^2 ds < \infty$ \mathbb{P} -fast sicher für alle $t \geq 0$. Sei weiters*

$$\eta_s = \exp \left(\int_0^s \lambda_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^s |\lambda_u|^2 du \right),$$

für $0 \leq s \leq t$ ein \mathbb{P} -Martingal. Dann ist durch $\frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}} = \eta_t$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q}_t definiert das zu \mathbb{P} äquivalent ist. Der durch

$$W_s^* = W_s - \int_0^s \lambda_u du,$$

definierte Prozess $W^* = (W_s)_{s \leq t}$ ist bezüglich \mathbb{Q}_t eine Brownsche Bewegung.

Der Satz von Girsanov kann auch für allgemeinere Prozesse definiert werden. Dabei spielt aber die Integrierbarkeit des Prozesses λ und der Integrator eine wesentliche Rolle.

Lemma 3.1 ([Musielà und Rutkowski, 2006]). *Angenommen der Prozess r folgt einem Itô Prozess wie in (3.3) unter dem Maß \mathbb{P} . Sei $P(t, T)$ eine Arbitrage freie Familie von Bondpreisen relative zu r . Für jedes Martingalmaß $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}^\lambda$ von Definition 3.1 gilt folgendes:*

- Der Prozess r , unter \mathbb{P}^λ , erfüllt

$$dr_t = (\mu_t + \sigma_t \lambda_t) dt + \sigma_t dW_t^\lambda.$$

- Es existiert ein adaptierter, \mathbb{R}^d -wertiger Prozess $b^\lambda(t, T)$, sodass

$$dP(t, T) = P(t, T)(r_t dt + b^\lambda(t, T) dW_t^\lambda).$$

Daraus ergibt sich für jedes $T \in (0, T^*]$

$$P(t, T) = P(0, T) P_t \exp \left(\int_0^t b^\lambda(u, T) dW_u^\lambda - \frac{1}{2} \int_0^t |b^\lambda(u, T)|^2 du \right).$$

Nehmen wir nun an, dass der Prozess r die Bedingung in (3.3) erfüllt (unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}). Es sei $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}^\lambda$ das zu \mathbb{P} äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß. Wenn wir nun den Preis einer Nullkupon Anleihe durch

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(e^{-\int_t^T r_u du} \mid F_t^{W^\lambda} \right), \quad (3.5)$$

definieren, resultiert aus dem Lemma 3.1 für $P(t, T)$ unter dem Maß \mathbb{P}

$$dP(t, T) = P(t, T) \left([r_t - \lambda_t b^\lambda(t, T)] dt + b^\lambda(t, T) dW_t \right).$$

Das lässt den Schluss zu, dass in einem infinitesimalen Betrachtungszeitraum das Investieren in Nullkupon Anleihen und die Investition in eine risikolose Anlage im Allgemeinen nicht die gleichen Ergebnisse erzielen. Dies wird als Marktpreisrisiko (market price of risk) bezeichnet. Das Halten einer solchen Anleihe beinhaltet also ein Marktrisiko. Für gewöhnlich ergibt sich daraus eine höhere Rendite als das Investieren in ein Bankguthaben, welches die risikolose Anlage beschreibt.

Abschließend ist zu erwähnen, dass das Marktpreisrisiko nicht beobachtbar ist. Doch wenn die Short-Rate durch (3.3) gegeben ist, dann kann durch jedes äquivalente Maß \mathbb{P}^* eine Arbitrage freie Familie von Bondpreisen durch (3.5) konstruiert werden. Wenn man nun in (3.5) \mathbb{P} durch \mathbb{P}^* ersetzt, verschwindet das Marktpreisrisiko. Dies setzt aber voraus, dass man das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}^* wählen muss, welches im Allgemeinen nicht eindeutig existiert.

3.3 Diskrete Approximation eines Heath-Jarrow-Morton Modells

In diesem Abschnitt wird ein diskretes HJM-Modell wie in Heath et al. [1990] ausgearbeitet. Der wichtigste Aspekt eines solchen Modells liegt in der Arbitragefreiheit welche durch Modellspezifikationen erreicht werden kann. Dieses diskrete Modell bildet die Basis für das in Kapitel 4 spezifizierte Modell.

3.3.1 Basismodell

Sei $J = \{0, \delta, \dots, n\delta\}$ eine Folge von Zeitpunkten mit Endzeitpunkt $T^* = \delta n$ und Schrittweite $\delta > 0$. Sei dazu eine diskrete Filtration gegeben durch $\mathbb{F} = (F_j)_{j \in J}$. Sei $t \in J$ dann definiert man dazu $\bar{t} = \frac{t}{\delta}$, die Anzahl der Schritte bis zum Zeitpunkt t . Die Forward Rate $f(t, T)$ beschreibt den Zinssatz im Zeitintervall $[T, T + \delta]$ zum Zeitpunkt t und ist durch

$$f(t, T) := -\log \left(\frac{P(t, T + \delta)}{P(t, T)} \right) \frac{1}{\delta} \quad \forall T \in J / \{0, T^*\} \text{ und } t \in [0, \delta, \dots, T - \delta] \quad (3.6)$$

definiert. Kehrt man diese Definition um, erhält man die Darstellung des Preises $P(t, T)$ in Termen von $f(t, T)$. Daraus resultiert

$$P(t, T) = \exp \left(- \sum_{j=\bar{t}}^{\bar{T}-1} f(t, j\delta) \delta \right).$$

Es wird das Modell noch durch die Short-Rate und die risikolose Anlage erweitert. Die Short-Rate sei

$$r(t) = f(t, t)$$

und P_t erfüllt folgendes

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_t &= \exp \left(\sum_{j=0}^{\bar{t}} r(j\delta) \delta \right) \quad \forall t \in [\delta, \dots, \delta(n-1)]. \end{aligned}$$

Wir formulieren nun $f(t, T)$ als stochastischen Prozess, sodass die Anfangsbedingungen $\{f(0, t) : t \in [\delta, \dots, \delta(n-1)]\}$, welche deterministisch und vorab gegeben sind, miteinbezogen werden. Hierbei reicht der Zeitpunkt $\delta(n-1)$ aus, da $f(0, \delta(n-1))$ der Zinssatz für den Zeitraum $[T^* - \delta, T^*]$ ist und so ein Modell bis zum Endzeitpunkt T^* beschreibt.

Bedingung 3.1 ([Heath et al., 1990]). *Man wählt einen fixen aber beliebigen Zeitpunkt $T \in \{\delta, \dots, \delta(n-1)\}$. Die Familie von Forward-Raten erfüllt nun die Bedingung*

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \sum_{j=1}^{\bar{t}} a_j [u_1(j\delta, T) - v_1(j\delta, T)] + \sum_{j=1}^{\bar{t}} v_1(j\delta, T) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\bar{t}} b_j [u_2(j\delta, T) - v_2(j\delta, T)] + \sum_{j=1}^{\bar{t}} v_2(j\delta, T), \end{aligned} \quad (3.7)$$

für jedes $t \in [\delta, \dots, T]$. Die Variablen $u_i : [0, T^*] \times [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$ und $v_i : [0, T^*] \times [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sind zufällige Funktionen welche am Zeitpunkt t von Informationen vor t abhängen können (messbar bezüglich F_t). Des weiteren sind a_j und b_j , $j \in [1, \dots, (\bar{T}-1)]$,

von einander abhängige Zufallsvariablen die den Wert $\{0, 1\}$ annehmen mit Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} q_{00}(j) & \text{ für } a_j = 0, b_j = 0, \\ q_{01}(j) & \text{ für } a_j = 0, b_j = 1, \\ q_{10}(j) & \text{ für } a_j = 1, b_j = 0, \\ q_{11}(j) & \text{ für } a_j = 1, b_j = 1. \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall können die Werte a_j und b_j von Zeitpunkten in der Vergangenheit abhängig sein.

3.3.2 Arbitragebedingungen

Das folgende Lemma gibt Bedingungen vor, unter welchen das Modell (3.7) keine Arbitrage Möglichkeiten beinhaltet. Dazu benötigt man noch einen normierten Prozess $Z(t, T)$. Dieser ist ähnlich zu (3.1).

$$Z(t, T) = \frac{P(t, T)}{P_t} = \exp \left(- \sum_{j=\bar{t}}^{\bar{T}-1} f(t, j\delta)\delta - \sum_{j=0}^{\bar{t}} f(j\delta, j\delta)\delta \right).$$

Lemma 3.2. Seien die Funktionen $\{u_1(\cdot, T), v_1(\cdot, T), u_2(\cdot, T), v_2(\cdot, T) : T \in [\delta, \dots, \delta(n-1)]\}$ gegeben und erfülle die Familie von Forward-Raten die Bedingung (3.7) dann sind folgende Aussagen äquivalent

- Der Forward-Rate Prozess gegeben in (3.7) ist ein Arbitrage freier Preisprozess.
- Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\{\pi_{00}(j), \pi_{01}(j), \pi_{10}(j), \pi_{11}(j)\}$ für $j \in \{1, \dots, (n-1)\}$ bezüglich $\{a_j, b_j\}$ welcher sich zu Eins summiert, sodass der Prozess $Z(t, T)$ ein Martingal bezüglich dieses Wahrscheinlichkeitsmaßes für alle $T \in J/\{0\}$ und $t \in [0, \dots, T - \delta]$ ist.
- Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\{\pi_{00}(j), \pi_{01}(j), \pi_{10}(j), \pi_{11}(j)\}$ für $j \in \{1, \dots, (n-1)\}$ bezüglich $\{a_j, b_j\}$ welche sich zu Eins summiert, sodass

$$\begin{aligned} & \pi_{00}(j) \exp \left(- \sum_{i=j}^{\bar{T}-1} [v_1(t, i\delta) + v_2(t, i\delta)]\delta \right) + \\ & \pi_{01}(j) \exp \left(- \sum_{i=j}^{\bar{T}-1} [v_1(t, i\delta) + u_2(t, i\delta)]\delta \right) + \\ & \pi_{10}(j) \exp \left(- \sum_{i=j}^{\bar{T}-1} [u_1(t, i\delta) + v_2(t, i\delta)]\delta \right) + \\ & \pi_{11}(j) \exp \left(- \sum_{i=j}^{\bar{T}-1} [u_1(t, i\delta) + u_2(t, i\delta)]\delta \right) = 1. \end{aligned}$$

Das im letzten Absatz genannte Lemma bestimmt durch Festlegung der Funktionen v_1, v_2, u_1, u_2 sowie a_j, b_j für $j \in \{1, \dots, (\bar{T} - 1)\}$ die No-Arbitrage Bedingung. Daraus kann man viele Arbitrage freie Modelle konstruieren. Ein Beispiel wäre das Ho-Lee Modell [Ho und Lee, 1986]. Hierbei wird $b_j = v_2 = u_2 \equiv 0$ gesetzt und wir bezeichnen $v_1 = v$ sowie $u_1 = u$. Dann ist mit

$$h^* = \exp \left(- \sum_{j=1}^{\bar{T}-1} u(\delta, j\delta) \delta \right) \text{ und}$$

$$h = \exp \left(- \sum_{j=1}^{\bar{T}-1} v(\delta, j\delta) \delta \right),$$

das Modell fixiert. Durch Anwenden des oben genannten Lemmas lässt sich nun eine Arbitrage Bedingung herleiten. Für mehr Details siehe [Heath et al., 1990].

3.4 Stetiges Heath-Jarrow-Morton Modell

Grundlage für diesen Abschnitt bildet hier [Heath et al., 1992] und [Musielka und Rutkowski, 2006]. Diese Arbeiten beschäftigen sich mit einer stetigen Version des Heath-Jarrow-Morton Konzepts.

3.4.1 Basismodell

Es wird vorausgesetzt das $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, F, \mathbb{P}, \mathbb{F}^W = (F_t^W)_{t \geq 0})$ gegebene d-dimensionale Brownsche Bewegung ist. \mathbb{F}^W ist also die vervollständigte, rechtsstetige natürliche Filtration der Brownschen Bewegung W . Sei $[0, T^*]$ der Betrachtungszeitraum für ein fixes $T^* \in \mathbb{R}^+$. Zur Formulierung einer Forward-Rate in einem stetigen Kontext werden wiederum die Preise von Nullkupon Anleihen herangezogen. Dazu sind einige Bedingungen an den Preis $P(t, T)$ notwendig.

Bedingung 3.2. *Es existieren für alle $t \in [0, T^*]$ und $T \in [t, T^*]$ die Preise von Nullkupon Anleihen $P(t, T)$, das heißt zu jeder Laufzeit existiert ein Preis. Des weiteren gilt für jedes $t \in [0, T^*]$ das $P(t, t) = 1$ ist und für $0 \leq t \leq T \leq T^*$ ist der Preis $P(t, T)$ differenzierbar im zweiten Argument.*

Definition 3.2. *Die Forward-Rate in einem stetigen Markt von Nullkupon Anleihen ist definiert durch*

$$f(t, T) = - \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}, \quad 0 \leq t \leq T \leq T^*, \quad (3.8)$$

Durch diese Definition kann der Preis für eine Nullkupon Anleihe in Termen der Forward-Rate gegeben werden durch

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.9)$$

Diese Formel ist sehr anschaulich, denn dadurch wird der Preis einer Nullkupon Anleihe durch einen Diskontierungsfaktor beschrieben. Der Faktor besteht aus dem Integral der Forward-Rate über die Laufzeit der Nullkupon Anleihe, also das Integral über zukünftige Zinssätze im Zeitraum der Laufzeit der Anleihe. Nach der Definition der Forward-Rate gibt man nun der Forward-Rate eine Struktur. Im Detail wird die Forward-Rate als ein Itô Prozess modelliert.

Bedingung 3.3. Für jedes fixierte T in $[0, T^*]$ erfüllt die Forward-Rate in einem infinitesimalen Betrachtungszeitraum die Bedingung

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t && \iff \\ f(t, T) &= f(0, T) + \int_0^t \alpha(u, T)du + \int_0^t \sigma(u, T)dW_u && \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.10)$$

für borelmessbare Funktionen $f(0, \cdot) : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$ und Funktionen $\alpha : C \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\sigma : C \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ wobei $C = \{(u, t) : 0 \leq u \leq t \leq T^*\}$ ist.

Dieses Gefüge der Forward-Rate wirft natürlich die Frage der Integrierbarkeit der zwei Funktionen α und σ auf, da in diesem Falle auch stochastische Prozesse als Integratoren erwünscht sind. Die folgende Bedingung genügt zur Erfüllbarkeit der Integrierbarkeit nach dem Itô Integral.

Bedingung 3.4. Für jedes T sind $\alpha(\cdot, T)$ und $\sigma(\cdot, T)$ an \mathbb{F}^W adaptierte Prozesse ($\alpha(t, T)$ bzw. $\sigma(t, T)$ sind F_t^W messbar). Für diese Prozesse gilt

$$\int_0^T |\alpha(u, T)|du + \int_0^T |\sigma(u, T)|^2 du < \infty \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Hierbei können die Funktionen α und σ auch von der Forward-Rate abhängig sein. Die Dynamik des Preises einer Nullkupon Anleihe $P(t, T)$ lässt sich nun durch die Funktionen α und β sowie die Short-Rate $f(t, t)$ ausdrücken.

Lemma 3.3 ([Musielà und Rutkowski, 2006] Lemma 13.1.1). Der Nullkupon Anleihen Preis $P(t, T)$ ist gegeben durch

$$dP(t, T) = P(t, T)(a(t, T)dt + b(t, T)dW_t), \quad (3.11)$$

wobei a und b

$$a(t, T) = f(t, t) - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}|\sigma^*(t, T)|^2, \quad b(t, T) = -\sigma^*(t, T).$$

Für jedes $t \in [0, T]$ ist

$$\alpha^*(t, T) = \int_t^T \alpha(t, u)du, \quad \sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, u)du. \quad (3.12)$$

Beweis. Sei $I_t = \ln P(t, T)$. In Hinblick auf (3.8) und (3.10) lässt sich I_t schreiben als

$$I_t = - \int_t^T f(0, u) du - \int_t^T \int_0^t \alpha(v, u) dv du - \int_t^T \int_0^t \sigma(v, u) dW_u du,$$

Wendet man den Satz von Fubini an folgt

$$I_t = - \int_t^T f(0, u) du - \int_0^t \int_t^T \alpha(v, u) du dv - \int_0^t \int_t^T \sigma(v, u) du dv dW_v,$$

oder äquivalent,

$$\begin{aligned} I_t &= - \int_0^T f(0, u) du - \int_0^t \int_v^T \alpha(v, u) du dv - \int_0^t \int_v^T \sigma(v, u) du dv dW_v \\ &\quad + \int_0^t f(0, u) du + \int_0^t \int_v^t \alpha(v, u) du dv + \int_0^t \int_v^t \sigma(v, u) du dv dW_v. \end{aligned}$$

Für die Short-Rate r_u gilt,

$$r_u = f(u, u) = f(0, u) + \int_0^u \alpha(v, u) dv + \int_0^u \sigma(v, u) dW_v,$$

und daraus folgt dann für I_t

$$I_t = I_0 + \int_0^t r_u du - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, v) dv du - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, v) dv du dW_u.$$

Setzt man nun die Gleichungen (3.12) ein kommt man zu

$$I_t = I_0 + \int_0^t r_u du - \int_0^t \alpha^*(u, T) du - \int_0^t \sigma^*(u, T) dW_u.$$

Um (3.11) zu erhalten, wendet man auf I_t das Itô Lemma an. □

3.4.2 Arbitragebedingung

Durch eine Formulierung eines äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbb{P}^* auf einen normierten Prozess, wie zum Beispiel in (3.1), kann man eine Bedingung an die Funktion α konstruieren unter welcher dieser normierte Prozess ein Martingal bildet. So erhält man eine Arbitrage freie Familie von Bondpreisen die durch die Forward-Rate dargestellt ist. Die Wahl des normierenden Faktors ist hierbei entscheidend.

- Wählt man ein Bankguthaben, $P_t = \exp\left(\int_0^t f(u, u) du\right)$ als normierende Größe, erhält man ein Wahrscheinlichkeitsmaß welches als „spot“ Martingalmaß bezeichnet wird. Der normierte Prozess hat die Form

$$Z(t, T) = \frac{P(t, T)}{P_t}.$$

- Wählt man die Nullkupon Anleihe $P(t, T^*)$ als normierende Größe, erreicht man ein „forward“ Martingalmaß. Der normierte Prozess hat in diesem Fall die Form

$$F_B(t, T, T^*) = \frac{P(t, T)}{P(t, T^*)}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann für jede Laufzeit T ein solches Maß gewählt werden. Durch den Satz von Girsanov ist $F_B(t, T, T^*)$ ein Martingal unter \mathbb{P} wenn

$$a(t, T) - a(t, T^*) = (b(t, T^*) - h_t)(b(t, T) - b(t, T^*)).$$

Hierbei definiert $h = (h_t)_{t \in [0, T^*]}$ das Maß (siehe (3.4))

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_{T^*} \left(\int_0^{\cdot} h_u dW_u \right) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Bedingung 3.5. *Es existiert ein adaptierter \mathbb{R}^d -wertiger Prozess $h = (h_t)_{t \in [0, T^*]}$, sodass*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\mathcal{E}_{T^*} \left(\int_0^{\cdot} h_u dW_u \right) \right) = 1,$$

und, für jedes $T \leq T^*$ die Bedingung

$$\int_T^{T^*} \alpha(t, u) du + \frac{1}{2} \left| \int_T^{T^*} \sigma(t, u) du \right|^2 + h_t \int_T^{T^*} \sigma(t, u) du = 0,$$

erfüllt.

Analog kann das Prozedere für den Prozess $Z(t, T)$ formuliert werden.

Bedingung 3.6. *Es existiert ein adaptierter \mathbb{R}^d -wertiger Prozess $\lambda = (\lambda_t)_{t \in [0, T^*]}$, sodass*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\mathcal{E}_{T^*} \left(\int_0^{\cdot} \lambda_u dW_u \right) \right) = 1,$$

und für jedes $T \leq T^*$ die Bedingung

$$\alpha^*(t, T) = \frac{1}{2} |\sigma^*(t, T)|^2 - \sigma(t, T) \lambda_t, \quad \forall t \in [0, T],$$

erfüllt.

Der in der Bedingung 3.6 definierte Prozess λ kann mit dem „market price of risk“ im Abschnitt 3.2 assoziiert werden.

Lemma 3.4. *Die Bedingungen in 3.5 und 3.6 sind äquivalent.*

Das oben genannte Lemma besagt, dass durch unterschiedliche Normierungsfaktoren ein gleiches Ergebnis, nämlich jenes, dass die durch den Normierungsfaktor normierten Nullkuponanleihen ein Martingal unter dem entsprechendem Maß bilden. Dadurch ist die Definition 3.1 erfüllt und liefert somit eine Arbitrage freie Familie von Bondpreisen. Abschließend erhält man eine Bedingung für α in der stochastischen Differentialgleichung (3.10):

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, u) du. \quad (3.13)$$

4 Markt konsistentes Zinsmodell

Das folgende Zinsmodell nimmt Zinskurven zur Basis welche in (2.1) aus Nullkupon Anleihen definiert sind. Also nochmals

$$Y(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log P(t, T) \quad 0 \leq t \leq T.$$

Hierbei wird es sich später um ein diskretes stochastisches Modell für die Zinskurven handeln welches frei von Arbitrage ist. Das Konzept beruht auf den Arbeiten [Teichmann und Wüthrich, 2013] sowie [Stefanovits und Wüthrich, 2014]. Man erreicht eine marktnahe Zinsstruktur mit der auch Vorhersagen über zukünftige Zinsentwicklungen getroffen werden können. Hierbei wird aber ein ganz neu auftretendes Problem nicht mit einbezogen, nämlich jenes Problem, dass es für Investitionen mit sehr langen Laufzeiten keine Produkte am Markt gibt welche diese langen Laufzeiten abdecken. Dieses Risiko wird in [Stefanovits und Wüthrich, 2014] als „reinvestment risk“ bezeichnet. Für mehr Details siehe [Stefanovits und Wüthrich, 2014].

4.1 Diskretes Zinsmodell [Teichmann und Wüthrich, 2013]

Sei $\delta = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$ für $n \in \mathbb{N}$ eine konstante Schrittweite und $\delta\mathbb{N}_0 = \{0, \delta, 2\delta, 3\delta, \dots\}$ die Zeitachse des Modells. Wir behandeln nun Zeitpunkte $t \in \delta\mathbb{N}_0$ und Laufzeiten $T \in t + \delta\mathbb{N}_0$. Vorerst wird ein Prozess von Zinskurven definiert welcher Zinskurven mit allen Laufzeiten beinhaltet. Diese Definition wird später auf einen endlichen Zeithorizont der Zinskurven beschränkt. Der Parameter δ hingegen beschreibt den Skalierungsfaktor der Zeit. Wählt man zum Beispiel $n = 1$, bedeutet dies eine jährliche Skalierung und für $n = 12$ eine monatliche Skalierung.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, \mathbb{P} steht hier für das am Markt beobachtete Maß. Sei $\mathbb{F} = (F_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine aufsteigende Folge von σ -Algebren, wobei $F_\infty = \mathcal{F}$ ist. Das Hauptaugenmerk liegt nun auf dem vektorwertigen Prozess der Zinskurven

$$(Y_t^*)_{t \in \delta\mathbb{N}_0} = (Y(t, t), Y(t, t + \delta), Y(t, t + 2\delta), \dots)'_{t \in \delta\mathbb{N}_0} = (Y(t, t + m))'_{m \in \delta\mathbb{N}_0})_{t \in \delta\mathbb{N}_0}. \quad (4.1)$$

Wir nehmen nun an, dass $(Y_t^*)_{t \in \delta\mathbb{N}_0}$ ein an \mathbb{F} adaptierter Prozess ist, also das $(Y_s^*)_{s \leq t}$ messbar bezüglich F_t ist. Im Folgenden benötigen wir ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}^* um ein Arbitrage freies Modell zu erarbeiten. Hierbei wird implizit eine wichtige Annahme getroffen, nämlich jene, dass es ein solches Martingalmaß \mathbb{P}^* gibt, sodass der diskontierte Preisprozess der Nullkupon Anleihen $P(t, T)$ ein Martingal unter diesem Maß bildet.

Es sei $(\epsilon_t)_{t \in \delta\mathbb{N}_0}$ ein vektorwertiger Gauss-Prozess unter \mathbb{P} der zu \mathbb{F} adaptiert ist. Die Dimension dieses Prozesses wird später gleich einem maximalen Zeithorizont der Laufzeit $T \in t + \delta\mathbb{N}_0$ von $Y(t, T)$ sein. Diese maximale Laufzeit ist für jede Zinskurve aus Y_t^* für $t \in \delta\mathbb{N}_0$ gleich und wird später festgelegt. Im speziellen ist ϵ_t messbar bezüglich F_t , unabhängig von $F_{t-\delta}$ und $\epsilon_t \sim N(0, I)$ für jedes t aus $\delta\mathbb{N}_0$. Wir definieren \mathbb{P}^* durch einen

Dichteprozess $\eta = (\eta_t)_{t \in \delta\mathbb{N}_0}$ wie in Formel (3.4). Dann besitzt η_t folgende Form

$$\eta_t = \prod_{s=1}^{t/\delta} \exp \left(-\frac{1}{2} \|\lambda_{s\delta}\|^2 + \lambda_{s\delta}^T \epsilon_{s\delta} \right). \quad (4.2)$$

Hier entspricht $(\lambda_t)_{t \in \delta\mathbb{N}_0}$ dem „market price of risk“. Aus dieser Konstruktion folgt, dass \mathbb{P}^* zu \mathbb{P} äquivalent ist und einen Prozess ϵ_t^* definiert, welcher wiederum ein Gauss-Prozess unter \mathbb{P}^* ist. Daraus ergibt sich

$$\epsilon_t - \lambda_t | F_{t-\delta} = \epsilon_t^* | F_{t-\delta}. \quad (4.3)$$

Mit P_t wird eine risikolose Anlagemöglichkeit bezeichnet, wie zum Beispiel ein Bankguthaben. Dieser Prozess P_t soll im Sinne unseres Modells risikolos für eine Periode sein. Der Wert von P_0 ist eins. Die Strategie dieses Prozesses besteht nun darin, zu jedem Zeitpunkt den Wert den man zu Beginn jedes Intervalles hat, in eine Nullkupon Anleihe für das kommende Zeitintervall zu investieren. Mathematisch formuliert erhält man dadurch

$$P_t = \exp \left(\sum_{s=0}^{t/\delta-1} \delta Y(s\delta, (s+1)\delta) \right) = \prod_{s=0}^{t/\delta-1} P^{-1}(s\delta, (s+1)\delta) > 0.$$

Das Maß \mathbb{P}^* ist durch diesen normierenden Prozess also das „spot“ Martingalmaß. Die oben implizite Annahme, dass der Nullkupon Anleihen Preis unter dem „spot“ Martingalmaß ein Martingal bildet führt zu folgender Gleichung,

$$\mathbb{E}^* [P_t^{-1} P(t, t+m) | F_{t-\delta}] = P_{t-\delta}^{-1} P(t-\delta, t+m), \quad t, m \in \delta\mathbb{N}_0. \quad (4.4)$$

Durch diese Konstruktion und der Annahme der Existenz von \mathbb{P}^* ist eine notwendige und hinreichende Bedingung geschaffen worden die Arbitrage ausschließt. Dies ist ganz im Sinne des „fundamental theorem of asset pricing“, für Details siehe [Delbaen und Schachermayer, 1994].

Wir treffen nun im folgenden Abschnitt eine Annahme hinsichtlich der Struktur der Zinskurven Y . Um Arbitrage auszuschließen, wird eine Annahme gewählt, die ähnlich einer deterministischen arbitragefreien Zinsstruktur ist. Die Bedingung, sodass ein deterministisches Zinssystem Arbitrage frei ist, lautet vorerst

$$j\delta Y(t, t+j\delta) = (j+1)\delta Y(t-\delta, t+j\delta) - \delta Y(t-\delta, t) \quad t \in \delta\mathbb{N}_0.$$

Die obige Bedingung wird nun mit zwei weiteren Faktoren erweitert. Einerseits wird ein deterministischer Faktor α , genauer eine deterministische Funktion $\alpha_\delta(t, j\delta, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta})$ und andererseits eine stochastische Komponente die sich aus einer deterministischen Funktion $\nu_\delta(t, j\delta, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta})$ und einem Zufallsvektor ϵ^* (wie in (4.3) beschrieben) zusammensetzt, hinzugefügt. Die Funktion ν wird dabei die selbe Dimension wie die Komponente ϵ^* aus (4.3) besitzen. Für den Prozess in (4.1) werden nun folgende Annahmen getroffen:

Annahme 4.1. Sei $\epsilon^* = (\epsilon_t^*)_{t \in \delta\mathbb{N}_0}$ ein mehrdimensionaler Gauss-Prozess der zu $(F_t)_{t \in \delta\mathbb{N}_0}$ adaptiert ist und ϵ_t^* ist von $F_{t-\delta}$ unabhängig für jedes $t \in \delta\mathbb{N}_0$ (siehe (4.3)). Es existieren Funktionen $\alpha_\delta(\cdot, \cdot, \cdot)$ und $\nu_\delta(\cdot, \cdot, \cdot)$, sodass die Familie von Zinskurven $(Y_t^*)_{t \in \delta\mathbb{N}_0}$ die Bedingung

$$j\delta Y(t, t + j\delta) = (j + 1)\delta Y(t - \delta, t + j\delta) - \delta Y(t - \delta, t) \\ + \alpha_\delta(t, \delta j, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) + \nu_\delta(t, \delta j, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta})^T \epsilon_t^*, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

erfüllen.

Betrachtet man nun die Annahme 4.1 angewandt auf den Preis einer Nullkupon Anleihe der sich aus (2.1) ergibt, kommt man zu folgendem Ergebnis (für $j \in \mathbb{N}$)

$$P(t, t + \delta j) = \frac{P(t - \delta, t + \delta j)}{P(t - \delta, t)} \exp(-\alpha_\delta(t, \delta j, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) - \nu_\delta(t, \delta j, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) \epsilon_t^*). \quad (4.5)$$

Wendet man das „fundamental theorem of asset pricing“

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (P_t^{-1} P(t, t + \delta j) | F_{t-\delta}) = P_{t-\delta}^{-1} P(t - \delta, t + \delta j), \quad (4.6)$$

welches in 4.4 besprochen wurde, auf den Preis einer Nullkupon Anleihe an, führt das unweigerlich zu einer Arbitrage freien Bedingung an das Modell in Annahme 4.1.

Lemma 4.1. Unter der Annahme 4.1 und der Arbitrage freien Bedingung in (4.6) hat $\alpha_\delta(\cdot, \cdot, \cdot)$ folgende Form:

$$\alpha_\delta(t, \delta j, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) = \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [\exp(-\nu_\delta(t, \delta j, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) \epsilon_t^*) | F_{t-\delta}].$$

Beweis 4.1. Wir verwenden die Formel (4.6) in Kombination mit (2.1) sowie die Eigenschaften für messbare Prozesse unter dem bedingten Erwartungswert und erhalten dadurch folgende Darstellung:

$$\exp(-\delta Y(t - \delta, t)) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [P(t, t + j\delta) | F_{t-\delta}] = P(t - \delta, t) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [P(t, t + j\delta) | F_{t-\delta}] \\ = P(t - \delta, t + j\delta) \exp(-\alpha_\delta(t, j\delta, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [\exp(-\nu_\delta(t, \delta j, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) \epsilon_t^*) | F_{t-\delta}]) \\ \stackrel{!}{=} P(t - \delta, t + j\delta)$$

Das Lemma folgt nun aus der Formel

$$P(t - \delta, t + j\delta) \exp(-\alpha_\delta(t, j\delta, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [\exp(-\nu_\delta(t, \delta j, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) \epsilon_t^*) | F_{t-\delta}]) \\ = P(t - \delta, t + j\delta),$$

welche äquivalent zu der Aussage des Lemmas ist.

Es wird nun eine Struktur gesucht unter der man die Annahme 4.1 und die Anforderungen an die Funktion α_δ vereinen kann. Um also das Modell zu vervollständigen muss

eine Wahl für die Funktion ν , sowie ϵ^* unter \mathbb{P}^* und der Maßwechsel zu \mathbb{P}^* getroffen werden. Zunächst betrachten wir endlich viele Laufzeiten, sodass $M \subset \delta\mathbb{N}$ die behandelten Laufzeiten von Nullkupon Anleihen repräsentiert, da die Annahme der Existenz von Nullkupon Anleihen mit jeder möglichen Laufzeit eine sehr starke und auf dem Markt nicht zutreffende Annahme darstellt. Zunächst sei $d = |M| < \infty$ und,

$$\begin{aligned} Y(t, t+k) &:= Y_{t,k} & t \in \delta\mathbb{N}_0, k \in M, \\ P(t, t+k) &:= P_{t,k} & t \in \delta\mathbb{N}_0, k \in M, \\ \tilde{Y}_{t,k} &:= kY(t, t+k) - (k+\delta)Y(t-\delta, t+k) = -\log \frac{P(t, t+k)}{P(t-\delta, t+k)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

definiert. Hierbei ist die Definition von $\tilde{Y}_{t,k}$ für die Werte $t \in \delta\mathbb{N}_0$ und $k \in M$ definiert. Der Prozess \tilde{Y} ist also der negative logarithmierte Return der Nullkupon Anleihen für die Laufzeit $k \in M$. Um das Modell nun explizit formulieren zu können, müssen wir ν sowie $\epsilon_t^* | F_{t-\delta}$ unter \mathbb{P}^* und den Maßwechsel von \mathbb{P} zu \mathbb{P}^* angeben. Die Zufallskomponente $\epsilon_t^* | F_{t-\delta}$ ist äquivalent zu (4.3) und ist ein Zufalls-Zeilenvektor mit Dimension d . Die Struktur von ν hängt vom gesamten Verlauf der Zinskurve ab. Diese Bedingung an ν wird abgeschwächt indem man die Abhängigkeit nur auf die letzte Zinskurve bezieht, daraus folgt (zusätzlich wurde die Funktion mit der Schrittweite δ skaliert)

$$\nu_\delta(t, k, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) = \sqrt{\delta} \nu(t, k, Y_{t-\delta}^*), \quad \forall k \in M.$$

Die Funktion ν ist nun auch von δ unabhängig. Aus Lemma 4.1 folgt nun die Struktur für α durch

$$\begin{aligned} \alpha_\delta(t, k, (Y_s^*)_{s \leq t-\delta}) &= \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[\exp \left(-\sqrt{\delta} \nu(t, k, Y_{t-\delta}^*) \epsilon_t^{*'} \right) | F_{t-\delta} \right] \\ &= \log \left(\exp \left(\frac{\delta}{2} \nu(t, k, Y_{t-\delta}^*)^2 \right) \right) = \frac{\delta}{2} \|\nu(t, k, Y_{t-\delta}^*)\|_{L^2}^2, \quad \forall k \in M. \end{aligned} \quad (4.8)$$

In der oben angegebenen Beziehung wurde ausgenutzt, dass $\epsilon_t^* | F_{t-\delta}$ einer multivariaten Standard-Normalverteilung folgt. Des weiteren ist $\nu(t, k, Y_{t-\delta}^*) | F_{t-\delta}$ ein konstanter Vektor. Somit ist der Ausdruck

$$\exp \left(-\sqrt{\delta} \nu(t, k, Y_{t-\delta}^*) \epsilon_t^{*'} \right) | F_{t-\delta},$$

die momenterzeugende Funktion der Normalverteilung. Kombiniert man obige Formel (4.7) mit dem Ergebnis (4.5) und (4.8), ergibt sich folgende Form

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{t,k} &= -\log \left(\frac{P(t, t+k)}{P(t-\delta, t+k)} \right) \\ &= -\log \left(P(t-\delta, t)^{-1} \exp \left(-\frac{\delta}{2} \|\nu(t, k, Y_{t-\delta}^*)\|^2 - \sqrt{\delta} \nu(t, k, Y_{t-\delta}^*) \epsilon_t^{*'} \right) \right) \\ &= \delta \left(-Y_{t-\delta, \delta} + \frac{1}{2} \|\nu(t, k, Y_{t-\delta}^*)\|^2 \right) + \sqrt{\delta} \nu(t, k, Y_{t-\delta}^*) \epsilon_t^{*'}, \quad \forall k \in M. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Eine mögliche Wahl für eine geeignete Struktur von ν wird in Ortega et al. [2009] angeführt. Zunächst sei noch der ganze Prozess von $\tilde{Y}_{t,k}$ definiert durch

$$\tilde{\Upsilon}_t = (\tilde{Y}_{t,k})_{k \in M}.$$

Die Funktion ν wird nun mittels zwei Parametern spezifiziert. Diese sind:

- Volatilitätsskalierungsfaktor, welcher sich aus einer invertierbaren, linearen Abbildung $\xi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ bildet (es wird im weiteren Verlauf die Matrix $\xi(y) = \text{diag}(\xi(y)_1, \dots, \xi(y)_d)$ verwendet).
- Richtungsfaktor, welcher sich aus einer Matrix $\Lambda^* = [\gamma_1, \dots, \gamma_d] \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}^d$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ bildet.

Die zufällige Komponente des Modells wird nun durch diese zwei Faktoren gesteuert. Ziel ist es eine Struktur zu erreichen bei der an der i -ten Komponente des Vektors ϵ_t^* ein Faktor $\xi(y)_i \gamma'_i$, $y \in \mathbb{R}^d$ wirkt. Daraus bildet sich die Kovarianzstruktur durch

$$\Sigma_{\Lambda^*}(y) = \xi(y) \Lambda^* \Lambda^{*\prime} \xi'(y).$$

Wendet man nun die Struktur

$$\nu(t, \delta j, Y_{t-\delta}^*) = \xi(Y_{t-\delta}^*) \gamma_j$$

auf α an, führt dies zu (hierbei ist $\text{sp}(A) = (A_{1,1}, \dots, A_{n,n})'$ für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$$\alpha(t, \delta j, y)_j = \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^d \xi(y)_{j,j}^2 \gamma_{i,j}^2 = \frac{\delta}{2} \xi(y)_{j,j}^2 \text{sp}(\Lambda^* \Lambda^{*\prime})_j = \frac{\delta}{2} \text{sp}(\Sigma_{\Lambda^*}(y))_j.$$

Mit Formel (4.9) kann nun zusammenfassend ein Gebilde für eine Zinsstruktur konstruiert werden welche nur Laufzeiten aus M beinhalten. Dabei ist zu beachten, dass die Zinskurve zum Zeitpunkt t von der Zinskurve $Y(t - \delta, t + m)$ mit $m \in M$ abhängig ist. Dabei muss also vorausgesetzt werden, dass zum Zeitpunkt $t - \delta$ die gesamte Zinskurve $(Y(t - \delta, t - \delta + m))_{m \in \delta\mathbb{N}}$ bekannt ist.

Annahme 4.2. Sei $Y_{t-\delta}^- = ((Y_{t-\delta, m+\delta})_{m \in M})'$ für $t \in \delta\mathbb{N}$. Für $t \in \delta\mathbb{N}$ und Laufzeiten von Zinskurven aus M wird das Modell gebildet durch:

$$\tilde{\Upsilon}_t = \delta \left(-Y_{t-\delta, \delta} \mathbf{1} + \frac{1}{2} \text{sp}(\Sigma_{\Lambda^*}(Y_{t-\delta}^-)) \right) + \sqrt{\delta} \xi(Y_{t-\delta}^-) \Lambda^* (\epsilon_t - \lambda_t)' \quad (4.10)$$

Hierbei ist $\text{sp}(\Sigma(\cdot)) = (\Sigma_{11}(\cdot), \dots, \Sigma_{d,d}(\cdot))'$ und $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^d$.

In Annahme 4.2 ist das Modell in kompakter Schreibweise zusammengefasst. Um zu zeigen, dass dieses Modell einem HJM-Modell aus (3.11) ähnelt, führt man die Gleichung

in (4.10) in Vektorschreibweise an und erhält (einfachheitshalber wird Angenommen, dass $M = \{\delta, 2\delta, 3\delta, \dots\}$)

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y}_{t,\delta} \\ \tilde{Y}_{t,2\delta} \\ \tilde{Y}_{t,3\delta} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta Y_{t-\delta,\delta} \\ -\delta Y_{t-\delta,\delta} \\ -\delta Y_{t-\delta,\delta} \\ \vdots \end{pmatrix} + \frac{\delta}{2} sp \left[\xi \begin{pmatrix} Y_{t-\delta,2\delta} \\ Y_{t-\delta,3\delta} \\ Y_{t-\delta,4\delta} \\ \vdots \end{pmatrix} \Lambda^* (\Lambda^*)' \xi \begin{pmatrix} Y_{t-\delta,2\delta} \\ Y_{t-\delta,3\delta} \\ Y_{t-\delta,4\delta} \\ \vdots \end{pmatrix}' \right] + \sqrt{\delta} \xi \begin{pmatrix} Y_{t-\delta,2\delta} \\ Y_{t-\delta,3\delta} \\ Y_{t-\delta,4\delta} \\ \vdots \end{pmatrix} \Lambda^* \begin{pmatrix} \epsilon_t^1 - \lambda_t^1 \\ \epsilon_t^2 - \lambda_t^2 \\ \epsilon_t^3 - \lambda_t^3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Wenn man nun für die k -te Zeile obiger Gleichung ein σ_k definiert als

$$\left[\xi \begin{pmatrix} Y_{t-\delta,2\delta} \\ Y_{t-\delta,3\delta} \\ Y_{t-\delta,4\delta} \\ \vdots \end{pmatrix} \Lambda^* (\Lambda^*)' \xi \begin{pmatrix} Y_{t-\delta,2\delta} \\ Y_{t-\delta,3\delta} \\ Y_{t-\delta,4\delta} \\ \vdots \end{pmatrix}' \right]_{kk} = \sigma_k^2,$$

und zusätzlich ein $\mu_k = Y_{t-\delta,\delta}$ definiert, dann kommt man zu einem Preis einer Nullkupon Anleihe von der Form (hier wurde (4.7) verwendet, sowie das Z Normalverteilt ist)

$$P_{t,\delta k} = P_{t-\delta,\delta k+\delta} \exp \left((\mu_k - \frac{1}{2} \sigma_k^2) \delta + \sqrt{\delta} \sigma_k Z \right) \quad (4.11)$$

Wenn man (4.11) genauer betrachtet, ähnelt diese Gleichung einer Lösung einer stochastischen Differentialgleichung, im speziellen einer geometrischen Brownschen Bewegung. Dies spiegelt also das HJM-Gefüge wieder.

Das anschließende Lemma charakterisiert den Return \tilde{Y}_t als einen Gauss-Prozess. Es ist zu beachten, dass nur bedingte Erwartungswerte verwendet wurden, um so ein möglichst dynamisches Modell zu konstruieren. Somit ist der Informationsfluss in das Modell integriert und kann daher laufende Information der Nullkupon Anleihe „online“ adaptieren.

Lemma 4.2. *Unter den Annahmen 4.2 ist $\tilde{Y}_t | F_{t-\delta}$ ein multivariater Gauss-Prozess unter \mathbb{P} und mit bedingtem Erwartungswert und Kovarianz*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\tilde{Y}_t | F_{t-\delta} \right] &= \delta \left(-Y_{t-\delta,\delta} \mathbf{1} + \frac{1}{2} sp(\Sigma_{\Lambda^*}(Y_{t-\delta}^-)) \right) - \sqrt{\delta} \xi (Y_{t-\delta}^-) \Lambda^* \lambda_t', \\ Cov \left[\tilde{Y}_t | F_{t-\delta} \right] &= \delta \Sigma_{\Lambda^*}(Y_{t-\delta}^-) \end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir ein Modell erreicht, das frei von Arbitrage ist, da die Bedingung an die Funktion α unter Zuhilfenahme des normierten Prozesses $P_{t,k}/P_t$ dies garantiert. Des weiteren lässt sich nun eine Vorhersage über eine Periode δ für eine Zinskurve berechnen. Dadurch wird ermöglicht, dass man auch Zinsstrukturen über lange Zeiträume berechnen kann, um so Barwerte von langfristige Verbindlichkeiten zu bestimmen.

4.2 Schätzmethode

Im vorangegangenen Kapitel wurde ein Modell konzipiert, dass durch den Parameter $\xi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ und die Parameter $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ spezifiziert wird. In diesen Abschnitt wird nun versucht aus beobachteten Werten aus der Vergangenheit, Schätzer für die Parameter $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ (Richtungsfaktoren), genauer für die Matrix Λ^* , zu konstruieren. Der Parameter ξ , welcher den Volatilitätsskalierungsfaktor entspricht, wird später definiert und beschrieben.

Angenommen es wurden K Beobachtungen ermittelt, sodass $(\tilde{Y})_{t=\delta, \dots, \delta K}$, $(Y_{t-\delta}^-)_{t=\delta, \dots, \delta(K+1)}$ und $(Y_{t-\delta, \delta})_{t=\delta, \dots, \delta(K+1)}$ bekannt sind. Wir definieren eine Matrix S welche von der Anzahl der Beobachtungen sowie von einem Vektor $y \in \mathbb{R}^d$ abhängig ist. Es wird sich später zeigen, dass die Matrix S einen verzerrten Schätzer für die Matrix Σ_{Λ^*} darstellt. Zunächst aber sei

$$C_K = \frac{1}{\sqrt{K}} \left(\left[\xi(Y_{\delta(k-1)}^-)^{-1} \tilde{Y}_{\delta k} \right]_j \right)_{j=1, \dots, d; k=1, \dots, K} \in \mathbb{R}^{d \times K}, \quad (4.12)$$

$$S_K(y) = \xi(y) C_K C_K' \xi'(y) \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Wählt man $t = (K + 1)\delta$ dann ist C_K eine $F_{t-\delta}$ messbare Zufallsvariable. Wir setzen $\mathbb{P} = \mathbb{P}^*$ und berechnen den Erwartungswert von $S_K(y)$ für ein $y \in \mathbb{R}^d$. Dazu wird folgende Funktion definiert,

$$f_{\Lambda}(z, y) = \xi^{-1}(y) \left[-z + \frac{1}{2} sp(\Sigma_{\Lambda}(y)) \right] \left[-z + \frac{1}{2} sp(\Sigma_{\Lambda}(y)) \right]' (\xi(y)^{-1})',$$

für Vektoren z und y aus \mathbb{R}^d . Zu erwähnen ist, dass die Funktion f_{Λ} nicht von δ abhängig ist. Aus dem Lemma 4.2 folgt nun direkt, dass

$$f_{\Lambda}(Y_{t-\delta, \delta} \mathbf{1}, Y_{t-\delta}^-) = \delta^{-2} \xi(Y_{t-\delta}^-)^{-1} \mathbb{E}_{t-\delta}^*[\tilde{Y}_t] \mathbb{E}_{t-\delta}^*[\tilde{Y}_t]' (\xi(Y_{t-\delta}^-)^{-1})'.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von δ durch den Zeitpunkt $t - \delta$ ab. Was später für eine Konvergenz für $\delta \rightarrow 0$ von Nöten ist. Zunächst kalkulieren wir den Erwartungswert von S_K .

Satz 4.1 ([Teichmann und Wüthrich, 2013]). *Unter den Modellannahmen 4.2 gilt für alle K aus \mathbb{N} und y aus \mathbb{R}^d ,*

$$\mathbb{E}_0^*[S_K(y)] = \delta \Sigma_{\Lambda}(y) + \delta^2 \xi(y) \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_0^*[f_{\Lambda}(Y_{\delta(k-1), \delta} \mathbf{1}, Y_{\delta k - \delta}^{-1})] \right) \xi(y)'.$$

Wird nun ein Zeitpunkt $t = \delta K$ fixiert, und wird Angenommen, dass die Summe beschränkt ist, gilt für $\delta \rightarrow 0$ die Beziehung

$$\mathbb{E}_0^*[S_K(y)] = \delta \Sigma_{\Lambda}(y) + \delta^2 O(1).$$

Also folgt, dass bei fallender Schrittweite die Matrix Σ_Λ durch die Matrix S_K geschätzt werden kann. Wie kann man aus der Kovarianzmatrix Σ_Λ die Richtungsfaktoren $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ bilden? Es stellt sich heraus, dass dies gar nicht von Nöten ist, sondern ein Modell erstellt wird das die selbe Kovarianzstruktur wie das Modell unter der Annahme 4.2 und Lemma 4.2 hat. Dadurch wird eine Approximation verwendet, welche die Werte $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ nicht enthält aber dafür $\Sigma_\Lambda(y) = \xi(y)\Lambda^*\Lambda^{*'}\xi(y)'$. Wir definieren dazu also eine zufällige Funktion $\kappa_t(x, y)$ für $x, y \in \mathbb{R}^d$ welche die Bedingung ,

$$\kappa_t = \kappa_t(x, y) = -\delta x + \frac{1}{2}sp(S_K(y)) + \xi(y)C_K W_t^*, \quad (4.13)$$

erfüllt. Wobei W_t^* ein F_t messbarer und $F_{t-\delta}$ unabhängige standard normalverteilter Zufallsvektor mit Werten in \mathbb{R}^K ist.

Lemma 4.3. *Der Zufallsvektor $\kappa_t|_{F_{t-\delta}}$ besitzt eine d dimensionale Gaussverteilung mit bedingten Momenten,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t-\delta}^*[\kappa_t] &= -\delta x + \frac{1}{2}sp(S_K(y)), \\ Cov_{t-\delta}^*[\kappa_t] &= S_K(y). \end{aligned}$$

Somit folgt κ den selben Gesetzen wie $\tilde{\Upsilon}$ und ist somit eine Approximation für die Log>Returns. Nun ist noch die Wahl des Volatilitätsskalierungsfaktors ξ entscheidend. Dazu verwenden wir eine Hilfsfunktion h welche wie folgt formuliert ist,

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \\ y &\rightarrow h(y) = \theta^{-\frac{1}{2}}y\mathbf{1}_{\{y \leq \theta\}} + y^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{\{y > \theta\}}. \end{aligned}$$

Die in Abbildung 5 gezeigte Skalierungsfunktion zeigt, wie der Zinssatz skaliert wird. Bei Zinswerten über θ wird die Wurzel aus dem Zinssatz genommen um große Ausreißer abzustumpfen. Werte kleiner θ werden mit dem Wert $\theta^{-\frac{1}{2}}$ multipliziert. Die endgültige Wahl von ξ fällt auf,

$$\xi(y) = diag(h(y_1), \dots, h(y_d)) \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d. \quad (4.14)$$

Somit kann man (4.14) in die Matrix C_K einfügen und erhält

$$\begin{aligned} \xi(y)C_K &= \frac{1}{\sqrt{K}}\xi(y) \left(\left[\xi(Y_{\delta k - \delta}^-)^{-1} \tilde{\Upsilon}_{\delta k} \right]_j \right)_{j=1, \dots, d; k=1, \dots, K} \\ &= \frac{1}{\sqrt{K}}diag(h(y_1), \dots, h(y_d)) \left(\left[diag(h(Y_{\delta k - \delta}^-))^{-1} \tilde{\Upsilon}_{\delta k} \right]_j \right)_{j=1, \dots, d; k=1, \dots, K}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Darstellung und mit dem Satz 4.1 kann nun ein Schätzer für Σ_Λ aus einer quadratischen Gleichung bestimmt werden. Sei $y = \mathbf{1}$ dann folgt mit Theorem 4.1 und mit (4.14),

$$\delta^{-1}\mathbb{E}_0^*[S_K(1)] = \Sigma_\Lambda(1) + \delta \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_0^*[f_\Lambda(Y_{\delta(k-1), \delta} \mathbf{1}, Y_{\delta k - \delta}^-)] \right).$$

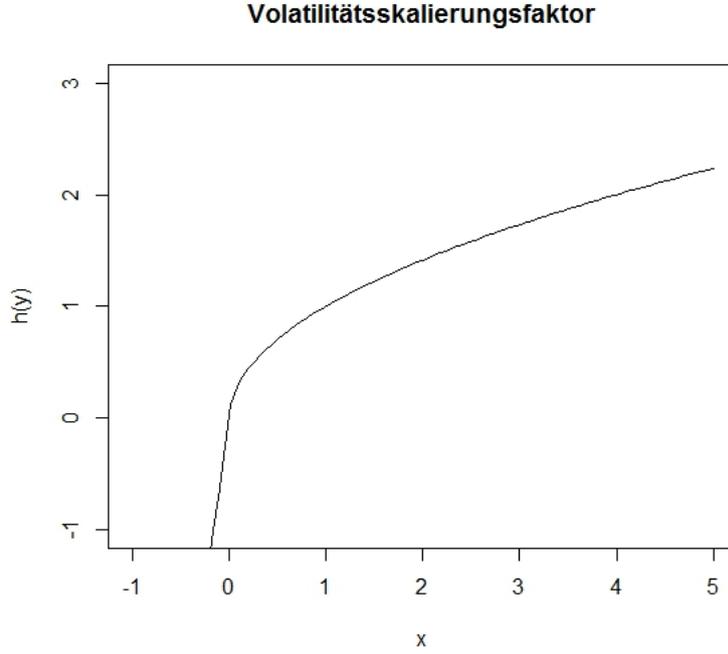


Abbildung 5: Skalierungsfunktion der Volatilität mit $\theta = 0.025$

Unter (4.14) sind die Werte der Matrix $\Sigma_\Lambda(y)$ durch $h(y_i)h(y_j)s_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, d$ gegeben, wobei $\Lambda^*\Lambda'^* = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ ist. Betrachtet man zuerst die Diagonalelemente s_{ii} ergibt sich ein Schätzer aus,

$$\begin{aligned} \delta^{-1}\mathbb{E}_0^*[S_K(1)]_{ii} &= s_{ii} + \frac{\delta}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_0^* \left[\left(\frac{Y_{\delta(k-1),1}}{h(Y_{\delta(k-1),m_i+1})} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathbb{E}_0^*[h(Y_{\delta(k-1),m_i+1})^2]s_{ii}^2 - \mathbb{E}_0^*[Y_{\delta(k-1),1}]s_{ii} \end{aligned}$$

Hierbei entspricht m_i die zu Index i entsprechende Laufzeit. Dies ist eine quadratische Gleichung $a_i s_{ii}^2 + b s_{ii} + c_i = 0$ in s_{ii} und besitzt die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\delta}{4K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_0^*[h(Y_{\delta(k-1),m_i+1})^2], \\ b &= 1 - \frac{\delta}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_0^*[Y_{\delta(k-1),1}], \\ c_i &= -\delta^{-1}\mathbb{E}_0^*[S_K(1)]_{ii} + \frac{\delta}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_0^* \left[\left(\frac{Y_{\delta(k-1),1}}{h(Y_{\delta(k-1),m_i+1})} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Lösung,

$$s_{ii} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a_i c_i}}{2a_i}.$$

Die endgültige Verzerrung β_{ii} des Schätzers der Diagonalelemente ergibt nun,

$$\beta_{ii} = \delta^{-1}(\mathbb{E}_0^*[S_K(1)])_{ii} - s_{ii}.$$

Für Elemente s_{ij} mit $i \neq j$ und Laufzeiten m_i bzw. m_j kann die Gleichung

$$\begin{aligned} \delta^{-1}\mathbb{E}_0^*[S_K(1)]_{ij} &= s_{ij} + \frac{\delta}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_0^* \left[\frac{Y_{\delta(k-1),1}}{h(Y_{\delta(k-1),m_i+1})} \frac{Y_{\delta(k-1),1}}{h(Y_{\delta(k-1),m_j+1})} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathbb{E}_0^*[h(Y_{\delta(k-1),m_i+1})h(Y_{\delta(k-1),m_j+1})] s_{ii} s_{jj} \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbb{E}_0^* \left[Y_{\delta(k-1),1} \frac{h(Y_{\delta(k-1),m_i+1})}{h(Y_{\delta(k-1),m_j+1})} \right] s_{ii} \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbb{E}_0^* \left[Y_{\delta(k-1),1} \frac{h(Y_{\delta(k-1),m_j+1})}{h(Y_{\delta(k-1),m_i+1})} \right] s_{jj} \end{aligned}$$

verwendet werden um die gesamte Matrix $\Lambda^* \Lambda^{*'}$ Schätzen zu können. Daraus kann auch die Verzerrung $\beta_{i,j}$ berechnet werden.

Die Vorteile dieses Modells liegen in der Konstruktion der Schätz-Methodik. Für dieses Modell gibt es eine einfache und schnelle Methode zur Schätzung von erwarteten Zinskurven. Auch neue Beobachtungen nach einer Zeitperiode δ können einfach und schnell adaptiert werden. Somit kann nach jedem Zeitschritt schnell eine neue Schätzung berechnet werden. Der Nachteil liegt darin, dass der Erwartungswert der zukünftigen Zinskurve Υ durch das Lemma 4.3 nur in approximativer Form durch κ ermittelt wird. Auch eine zu große Schrittweite kann zu größeren Abweichungen der Erwartung führen.

Dennoch ist dieses Modell sehr plausibel und vertritt dabei die Thematik von Arbitrage freier Bewertung. Anders als das im nächsten Kapitel erarbeitete LIBOR Markt Modell, verwendet das Modell von [Teichmann und Wüthrich, 2013] keine heuristischen Annahmen, sondern verwendet die tatsächlich vorherrschende Zinskurve als Basis.

Bei einer Kalibrierung ist zu beachten, dass die Datenqualität eine wesentliche Rolle spielt. Qualitative hochwertige Daten zu beobachten ist sozusagen mehr Aufwand als eine Schätzung nach dem Modell durchzuführen. Im folgenden Abschnitt werden Ergebnisse solcher Schätzungen präsentiert.

4.3 Kalibrierungs Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden Kalkulationsergebnisse aus dem diskreten Zinsmodell ausgewertet. Die Basis der Berechnungen bilden Renditen wie in sie in 2.2 definiert sind. Es werden Renditen aus österreichischen Staatsanleihen beobachtet und dabei werden Staatsanleihen verwendet die Laufzeiten (in Jahren) aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ besitzen. Die Daten wurden vom Programm Reuters entnommen. Der entnommenen Datensatz enthielt nicht für jede Laufzeit aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ entsprechende Monatsbeobachtungen für 162 Monate. Dies kann man in Abbildung 6 dadurch erkennen, dass nicht alle Linien gleich lang sind. Ein Teil dieser rohen Daten sind in Abbildung 6 zusammengefasst. Um

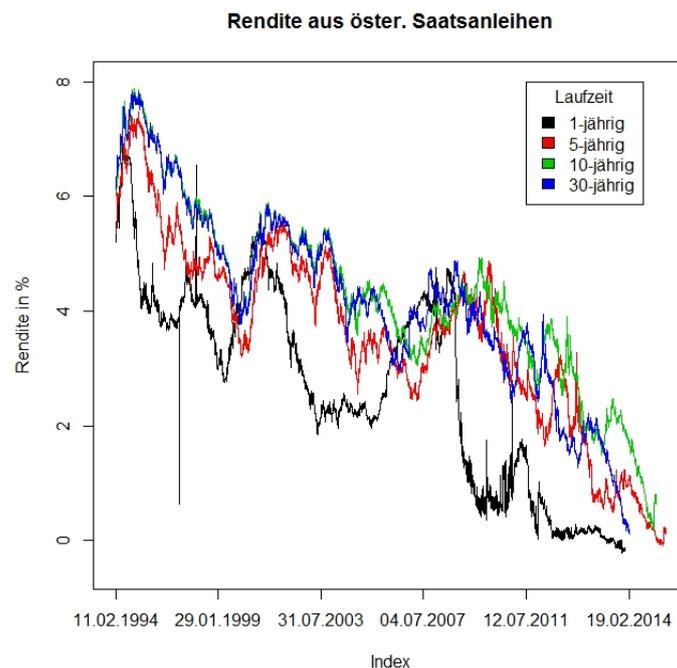


Abbildung 6: Renditen aus österreichischen Anleihen

nun einen vollständigen Datensatz zu gewährleisten wurden fehlende Beobachtungen durch lineare Interpolation erzeugt. Vor allem am Beginn der Zeitreihen (Januar 2002) wurden Interpolationen verwendet. Spätestens ab dem Jahr 2006 waren keine Interpolationen mehr nötig. Aus den Basis Daten (Renditen) wurden dann, wie im Abschnitt zwei beschrieben, monatliche Beobachtungen gebildet. Der Zeitraum erstreckt sich von Januar 2002 bis Juni

2014. Die Parameter sind gegeben durch

$$N = 12$$

$$\delta = \frac{1}{12}$$

$$T^* = 120.$$

Aus diesen Daten wurde dann eine Matrix C_K mit $K = 162$ errechnet, wie sie in 4.12 definiert ist. Diese Matrix kann man mit Renditen aus Staatsanleihen vergleichen um so die Skalierung (siehe 4.12) anschaulich darzustellen. Ein Teil dieses Ergebnisses sieht man in Abbildung 7. Um noch das Konvergenzverhalten zu demonstrieren, wurde die Anzahl K

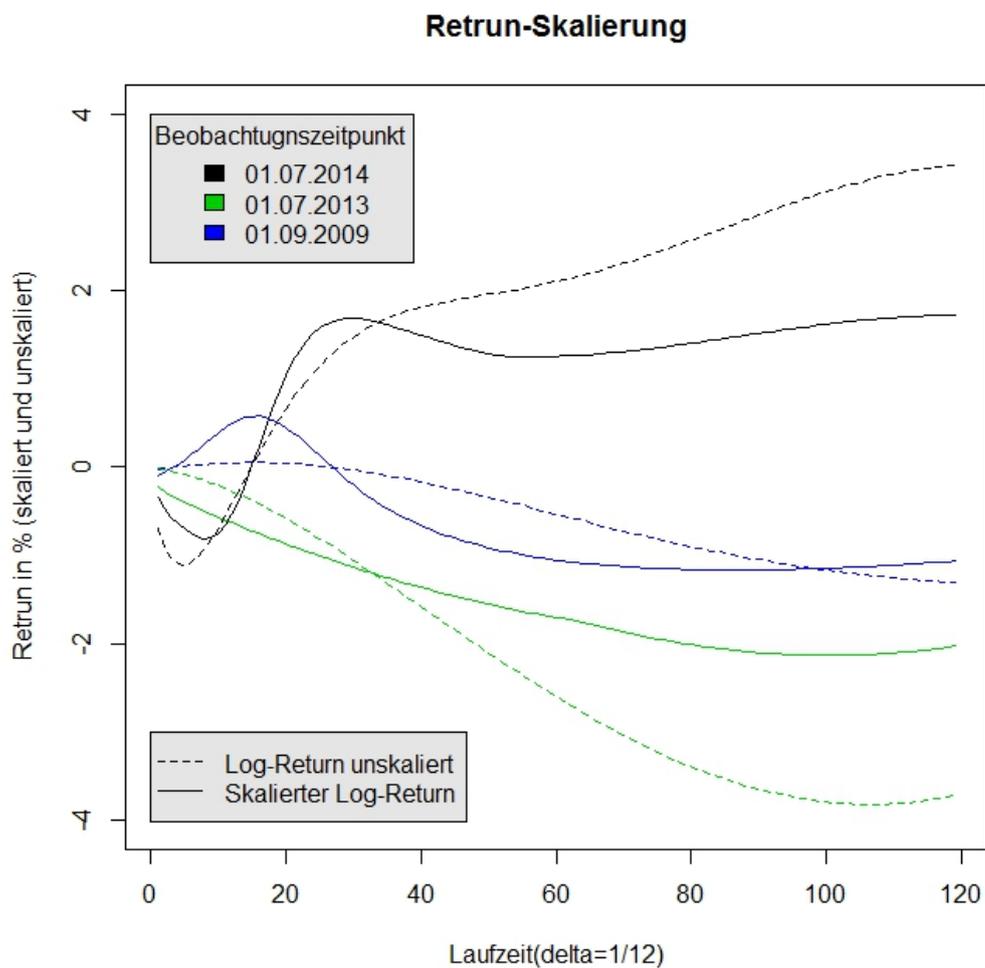


Abbildung 7: Renditen (skaliert und unskaliert)

der beobachteten Werte schrittweise erhöht bist zu einem Wert von 162. In jedem Schritt wurde die Matrix S_K errechnet. Das Resultat aus dieser Berechnung für $s_{i,i}^K$ mit $i \in \{1, 12\}$ ist in Abbildung 8 abgebildet und soll ein Konvergenzverhalten widerspiegeln. Der Index $i = 1$ spiegelt die einmonatige Staatsanleihe wieder sowie der Index $i = 12$ die einjährige Staatsanleihe repräsentiert. Hierbei ist der Parameter der Skalierungsfunktion ξ_θ auf $\theta = 0.025$ gesetzt worden. Dies ist zu vergleichen mit [Teichmann und Wüthrich, 2013].

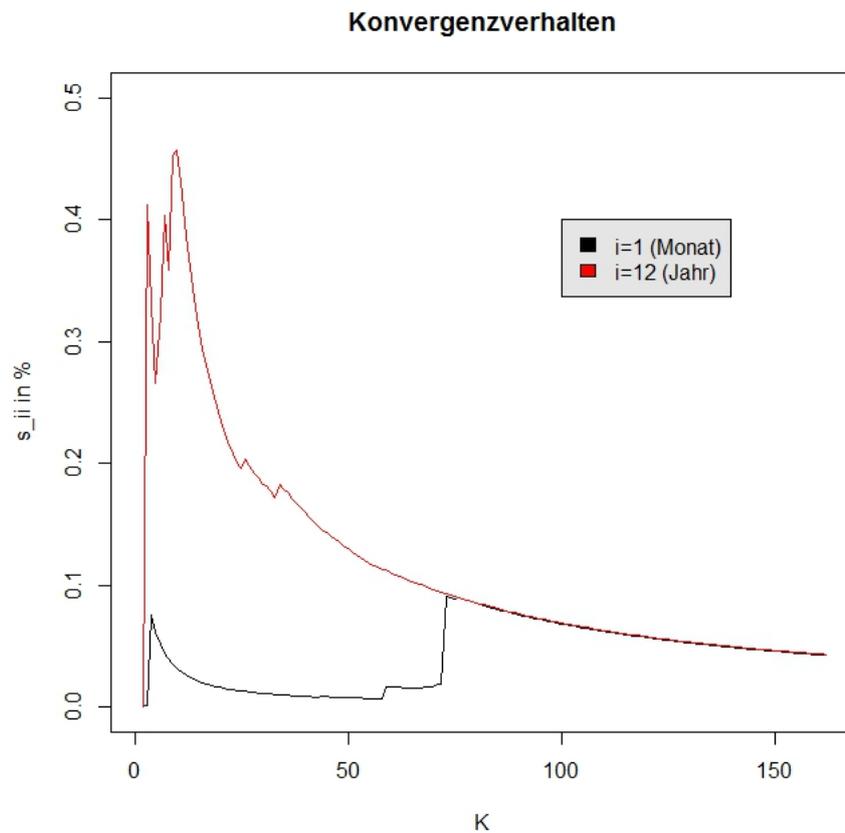


Abbildung 8: Konvergenzverhalten

5 LIBOR-Markt Modell

Der literarische Hintergrund dieses Kapitels bildet [Glasserman, 2003],[Rebonato, 1999] und [Rebonato, 2005]. Vor allem die letzt genannten Arbeiten bilden eine Grundlage für die Struktur der Volatilität des LIBOR-Markt Modells. Der LIBOR ist der durchschnittliche, Banken-interne Zinssatz für den sich eine ausgewählte Gruppen von Banken, welche an der Börse von London notiert sind, Geld leiht bzw. entlehnt. Die Abkürzung LIBOR steht daher für „London Inter Bank Offered Rate“. Eine gute Einführung in das Modell ist gegeben in [Fries, 2007] und wird hier als Grundlage verwendet.

Das LIBOR-Markt Modell (LMM) arbeitet anders als das Modell von [Teichmann und Wüthrich, 2013] direkt mit den Forward-Raten auf einer diskreten Zeitstruktur. Hierbei wird im LIBOR-Markt Modell die Forward-Rate als LIBOR-Rate bezeichnet.

Definition 5.1. Sei $\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ eine diskrete Zeitstruktur (Tenorstruktur) mit $T_i = i\delta$ für $\delta \in \mathbb{R}^+$ und $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Auf dieser Tenorstruktur wird die LIBOR-rate $L_{i,j}(t) \in \mathbb{R}$ für $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $i < j$ ähnlich wie in 3.6 dadurch definiert, dass $L_{i,j}(t) = L(T_i, T_j, t)$, $t \leq T_i < T_j$ der Zinssatz über das Zeitintervall $[T_i, T_j]$ gemessen am Zeitpunkt t ist.

Unsere Grundbausteine im LIBOR-Markt Modell sind wieder Nullkupon Anleihen $P(T_i, T_k)$ mit Zeitpunkten T_i, T_k für $i, k \in \{0, \dots, n\}$ und $i \leq k$. Die Nullkupon Anleihen sind dadurch an die Tenorstruktur gebunden. Daraus lässt sich nun der Preis einer Nullkupon Anleihe mit LIBOR-Raten darstellen:

$$\begin{aligned} L(T_k, T_{k+1}, T_i) &= \frac{1}{T_{k+1} - T_k} \left(\frac{P(T_i, T_k) - P(T_i, T_{k+1})}{P(T_i, T_{k+1})} \right), \quad T_i \leq T_k, \\ L(T_k, T_j, T_i) &= \frac{1}{T_j - T_k} \left(\prod_{m=k}^{j-1} (1 + \delta L_{m,m+1}(T_i)) - 1 \right), \quad T_i \leq T_k < T_j. \end{aligned} \quad (5.1)$$

In der oben angeführten Gleichung sind die Zeitpunkte T_i, T_k, T_j aus $\{0, \delta, 2\delta, \dots, n\delta\}$. Die Nullkupon Anleihe wird nicht direkt als stochastischer Prozess modelliert. Stattdessen wird die LIBOR-Rate $L_i := L_{i,i+1}$ als stochastischer Prozess konstruiert und dabei wird die Annahme getroffen, dass L_i positiv ist (durch Gleichung 5.1 werden alle $L_{k,j}$ durch L_i bestimmt). Dies erreicht man indem man eine geometrische Brownsche Bewegung als LIBOR-Rate Prozess wählt. Diese Bewegung besitzt einen Prozess μ als Driftparameter, sowie eine weitere deterministische Funktion σ welche die Volatilität der geometrischen Brownschen Bewegung bildet. Sei (Ω, F, \mathbb{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $\mathbb{F} = (F_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$, wobei $F = F_n$ ist, gegeben. Daraus bildet sich nun folgende Struktur für die LIBOR-Rate

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dW_i(t), \quad i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad t \leq T_i. \quad (5.2)$$

Hierbei sind W_i für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ an \mathbb{F} adaptierte Brownsche Bewegungen unter dem Maß \mathbb{P} . Somit handelt es sich pro Zeitintervall jeweils um eine Brownsche Bewegung. Dieses System kann zu einer mehrdimensionalen Brownschen Bewegung $W = [W_0, \dots, W_{n-1}]$

zusammengefasst werden. Die Driftparameter μ_i für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ sind an \mathbb{F} adaptierte Prozesse und dadurch sind die Prozesse L_i für $i \in \{0, \dots, n-1\}$ an \mathbb{F} adaptierte Prozesse. Diese Struktur der LIBOR-Raten bietet zusätzlich die Möglichkeit, dass man eine Korrelation zwischen den LIBOR-Raten von verschiedenen Zeitintervallen einbinden kann, indem man die Brownsche Bewegung W korreliert. Die Korrelationsfunktion ist mit einer deterministischen Funktion $-1 \leq \rho \leq 1$ folgendermaßen definiert:

$$dW_i(t)dW_j(t) = d[W_i, W_j]_t = \rho_{i,j}(t)dt, \quad i, j \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (5.3)$$

Zusätzlich seien Startwerte der LIBOR-Raten $L_i(0) = L_{i,0} \in [0, \infty)$ für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$ gegeben. Durch die Einführung folgender Notation lässt sich das System von LIBOR-Raten vereinfacht in einer Matrix darstellen.

$$L(T_i, T_{i+1}, T_k) = L_i(T_k) = \hat{L}_{k,i}, \quad k \leq i, \quad i, k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Hierbei werden nur Zeitpunkte von der Tenorstruktur gewählt. Der erste Index von \hat{L} entspricht dem Betrachtungszeitpunkt und der zweite Index spiegelt das zur LIBOR-Rate korrespondierende Intervall wieder. Die Matrix hat die Form:

$$\begin{bmatrix} \hat{L}_{0,0} & \hat{L}_{0,1} & \dots & \dots & \hat{L}_{0,n-1} \\ 0 & \hat{L}_{1,1} & \dots & \dots & \hat{L}_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \hat{L}_{2,2} & \dots & \hat{L}_{2,n-1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \hat{L}_{n-1,n-1} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Mit dieser Matrix kann man nun Vorhersagen für Zinsstrukturen mittels LIBOR-Raten einfach interpretieren. Am Markt wird die erste Zeile beobachtet, es wird also der Startwert festgelegt. Durch eine explizite Wahl einer Volatilität sowie einer Korrelationsfunktion kann man nun eine Monte Carlo Simulation starten und so Preise von Nullkupon Anleihen berechnen. Aus diesen Preisen kann man dann wiederum Zinssätze generieren und so Zinsvorhersagen bis zum Endzeitpunkt T_n treffen. Der Drift wird sich später durch eine No-Arbitrage Bedingung aus der Volatilität und aus der Korrelation bilden. Eine weitere Möglichkeit der Verwendung dieses Modells wäre z.B. zur Bestimmung von Preisen von Zinsderivaten wie z.B. Swaptions, Caps, Caplets, usw.

Ein wichtiger Aspekt wird dabei die Volatilität und ihre Anpassung an den Markt sein. Dabei werden anders als in [Teichmann und Wüthrich, 2013] keine historischen Daten, sondern aktuelle Daten aus Swaptions herangezogen. Das dabei entstehende nicht konvexe Optimierungsproblem ist nicht leicht lösbar und wird mit Hilfe von numerischen Programmen approximiert.

5.1 Drift unter dem Martingalmaß

Um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen, werden Bedingungen an den Drift μ in (5.2) gefordert, sodass der normierte Prozess von L_i ein Martingal bildet. Dies geschieht mit Hilfe von einem normierenden Prozess wie in Definition 3.1 beschrieben. Der Normierungsfaktor spiegelt hierbei die Wahl des Maßes wieder.

5.1.1 „Spot“ Martingalmaß

Als normierender Prozess wird jener Prozess N gewählt, welcher zum „Spot“ Martingalmaß korrespondiert. Im LIBOR-Markt Modell wird dieses Maß auch als „Spot-LIBOR“ Maß bezeichnet. Der normierende Prozess hat die Form ($t \in \{0, \dots, T_{n-1}\}$)

$$N(t) = P(t, T_{m(t)+1}) \prod_{j=1}^{m(t)+1} \frac{1}{P(T_{j-1}, T_j)} = P(t, T_{m(t)+1}) \prod_{j=0}^{m(t)} (1 + L_j(T_j)\delta). \quad (5.5)$$

Es wurde in der oben angeführten Gleichung folgendes benutzt,

$$\frac{1}{P(T_{j-1}, T_j)} = \frac{P(T_{j-1}, T_{j-1})}{P(T_{j-1}, T_j)} = 1 + L_{j-1}(T_{j-1})\delta.$$

Die Funktion m ist dabei durch $m(t) = \max\{i : T_i \leq t\}$ definiert. Zur Vollständigkeit sei noch das „Spot“ Martingalmaß mit dem Symbol \mathbb{P}^N versehen. Durch die Forderung, dass ein normierter Preisprozess ein Martingal unter \mathbb{P}^N bildet, muss

$$\frac{P(t, T_i)}{N(t)}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, t < T_i,$$

ein Martingal sein. Aus diesem Aufbau kann man nun den Drift für die Prozesse L_i in (5.2) berechnen, denn es muss

$$Drift^{\mathbb{P}^N} \left[\frac{P(t, T_i)}{N(t)} \right] = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, t \in \{0, \dots, T_{n-1}\}, t \leq T_i \quad (5.6)$$

gelten. In den folgenden Umformungen wird der Normierungsfaktor und der Preis der Nullkupon Anleihe durch die LIBOR-Rate ausgedrückt und anschließend deren Dynamiken verwendet um eine No-Arbitrage Bedingung für μ zu erhalten.

$$\begin{aligned} \frac{P(t, T_i)}{N(t)} &= \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{m(t)+1})} \prod_{j=0}^{m(t)} (1 + L_j(T_j)\delta)^{-1} \\ &= \prod_{j=m(t)+1}^{i-1} (1 + L_j(t)\delta)^{-1} \prod_{j=0}^{m(t)} (1 + L_j(T_j)\delta)^{-1}. \end{aligned}$$

Nun muss aus (5.6) gelten, dass

$$Drift^{\mathbb{P}^N} \left[\prod_{k=m(t)+1}^{i-1} (1 + L_k\delta)^{-1} \right] = 0,$$

da

$$\begin{aligned} & \text{Drift}^{\mathbb{P}^N} \left[\prod_{j=m(t)+1}^{i-1} (1 + L_j(t)\delta)^{-1} \prod_{j=0}^{m(t)} (1 + L_j(T_j)\delta)^{-1} \right] \\ &= \text{Drift}^{\mathbb{P}^N} \left[\prod_{j=m(t)+1}^{i-1} (1 + L_j(t)\delta)^{-1} \right] \prod_{j=0}^{m(t)} (1 + L_j(T_j)\delta)^{-1}. \end{aligned}$$

Da das zweite Produkt in der oben angeführten Formel nicht stochastisch ist kann man es als eine Konstante betrachten und daher genügt zur Analyse des Drifts das erste Produkt.

Durch anwenden der Produktregel für stochastische Prozesse (die sich aus der mehrdimensionalen Itô Formel bildet) folgen die nachstehenden Umformungen. Es wurde zur Vereinfachung der Betrachtungszeitpunkt ignoriert, weil es sich bei jedem Element in den Formeln $(L_j(t), \mu_j^{\mathbb{P}^N}(t), \sigma_j(t), \rho_{l,j}(t))$ um den selben Betrachtungszeitpunkt t handelt.

$$\begin{aligned} & \partial \left[\prod_{k=m(t)+1}^{i-1} (1 + L_k\delta)^{-1} \right] \\ &= \sum_{j=m(t)+1}^{i-1} \prod_{\substack{k=m(t)+1 \\ k \neq j}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta L_k} \left(\frac{-\delta dL_j}{(1 + \delta L_j)^2} + \frac{\delta^2 d[L_j]}{(1 + \delta L_j)^3} \right) \\ & \quad + \sum_{\substack{l,j=m(t)+1 \\ l < j}}^{i-1} \prod_{\substack{k=m(t)+1 \\ k \neq j,l}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta L_k} \left(\frac{\delta dL_j}{(1 + \delta L_j)^2} + \frac{\delta^2 d[L_j]}{(1 + \delta L_j)^3} \right) \left(\frac{\delta dL_l}{(1 + \delta L_l)^2} + \frac{\delta^2 d[L_l]}{(1 + \delta L_l)^3} \right) \\ &= \prod_{k=m(t)+1}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta L_k} \left(\sum_{j=m(t)+1}^{i-1} \frac{-\delta dL_j}{1 + \delta L_j} + \frac{\delta^2 d[L_j]}{(1 + \delta L_j)^2} + \sum_{\substack{j,l=m(t)+1 \\ l < j}}^{i-1} \frac{-\delta dL_j}{1 + \delta L_j} \frac{-\delta dL_l}{1 + \delta L_l} \right) \\ &= \prod_{k=m(t)+1}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta L_k} \sum_{j=m(t)+1}^{i-1} \left(-\frac{\delta dL_j}{1 + \delta L_j} + \sum_{l=m(t)+1}^j \frac{\delta dL_j}{1 + \delta L_j} \frac{\delta dL_l}{1 + \delta L_l} \right). \end{aligned}$$

Nun folgt für $i \in \{1, \dots, n\}$ und unter dem Maß \mathbb{P}^N , dass

$$\sum_{j=m(t)+1}^{i-1} \text{Drift}^{\mathbb{P}^N} \left[-\frac{\delta dL_j}{1 + \delta L_j} + \sum_{l=m(t)+1}^j \frac{\delta dL_j}{1 + \delta L_j} \frac{\delta dL_l}{1 + \delta L_l} \right] = 0.$$

Hinreichend für oben angegebene Bedingung ist folgender Ausdruck:

$$\text{Drift}^{\mathbb{P}^N} \left[-\frac{\delta dL_j}{1 + \delta L_j} + \sum_{l=m(t)+1}^j \frac{\delta dL_j}{1 + \delta L_j} \frac{\delta dL_l}{1 + \delta L_l} \right] = 0, \quad j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Setzt man folgendes ein

$$\frac{dL_j}{L_j} = \mu_j^{\mathbb{P}^N} dt + \sigma_j dW_j^{\mathbb{P}^N} \quad \text{und} \quad d[L_j, L_l]_t = L_j L_l \sigma_j \sigma_l \rho_{j,l} dt,$$

erhält man eine Gleichung für den Drift $\mu_j^{\mathbb{P}^N}$. Hierbei sind $W_j^{\mathbb{P}^N}$ für $j \in \{0, \dots, n-1\}$ Brownsche Bewegungen unter dem Maß \mathbb{P}^N . Dieser Drift stellt somit die No-Arbitragebedingung korrespondierend zum „Spot-LIBOR“ Maß dar,

$$-\mu_j^{\mathbb{P}^N} \frac{\delta L_j}{1 + \delta L_j} + \sum_{l=m(t)+1}^j \frac{\delta L_j}{1 + \delta L_j} \frac{\delta L_l}{1 + \delta L_l} \sigma_j \sigma_l \rho_{j,l} = 0.$$

Daraus ergibt sich das Endergebnis durch

$$\mu_j^{\mathbb{P}^N}(t) = \sum_{l=m(t)+1}^j \frac{\delta L_l(t)}{1 + \delta L_l(t)} \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l}(t). \quad (5.7)$$

Hierbei ist zu beachten, dass der Drift $\mu_j^{\mathbb{P}^N}(t)$ für $t > T_j$ nicht definiert ist. Diese Situation ist aber auch nicht relevant, da der Drift für das Intervall $[T_j, T_{j+1}]$ nach dem Zeitpunkt T_j nicht mehr existiert (untere Dreiecksmatrix von (5.4)). Zur Vollständigkeit könnte man in dieser Situation den Drift auf 0 setzen.

In der oben Angeführten Berechnung des Drifts wird in (5.5) die Nullkupon Anleihe $P(t, T_{m(t)+1})$ verwendet. Betrachtet man diesen Aspekt im Detail stellt man fest, dass man diese Nullkupon Anleihe nicht durch die LIBOR-Raten L_i darstellen kann. Bei der Berechnung des Driftterms verschwindet diese Anleihe wieder und daher ist es möglich ohne das man Kenntnis über die stochastische Zusammensetzung von $P(t, T_{m(t)+1})$ besitzt, den Drift zu bestimmen. Es ist mit dem LIBOR Markt Modell nicht möglich solch kurze Zinsstrukturen zu generieren. Wenn $t \in \{0, \delta, \dots, n\delta\}$ gewählt wird ist dieser Aspekt von $P(t, T_{m(t)+1})$ irrelevant, da man dann die Nullkupon Anleihen durch die LIBOR-Rate darstellen kann. Das LMM ignoriert daher solch kurze Zinsstrukturen.

An diesem Punkt kann man den Zusammenhang vom LMM und einem stetigen Modell herstellen. Wenn man LIBOR-Raten betrachtet die nicht mehr an die Tenorstruktur gebunden sind, wie z.B. $L(T_s, T_e, t)$ für $T_s, T_e \notin [T_0, \dots, T_n]$ kann man auch die kurze Zinsstruktur durch die LIBOR-Raten beschreiben. Dies führt dann in weiterer Folge zum bekannten Heath-Jarrow-Morton Modell welches in Kapitel 3 beschreiben wurde. Die LIBOR-Rate entspricht dann wiederum der Forward-Rate.

Das „Spot“-Maß beschreibt den Zins bis zum Zeitpunkt t durch ein Produkt von Aufzinsungsfaktoren kombiniert mit dem Abzinsungsfaktor im Intervall $[t, m(t) + 1]$. Diese „Rollover“-Strategie kommt der Realität am nächsten und wird daher in späterer Folge als Maß für Simulationen gewählt.

5.1.2 Weitere Martingalmaße

Da das „Spot“ Martingalmaß nicht immer die richtige Wahl für bestimmte Anwendungszwecke ist, werden in diesem Abschnitt auch andere Maße und dazu korrespondierenden

Normierungsprozesse erwähnt. Genauere Berechnungen sind hier nicht mehr angeführt und können in Fries [2007] nachgelesen werden.

Eine naheliegende Wahl für einen Prozess als Normierungsfaktor ist es jene Nullkupon Anleihe zu wählen, welche die längste Laufzeit aus der Tenorstruktur besitzt. Demnach ist N gleich

$$N(t) = P(t, T_n).$$

Diese Bestimmung für N führt zu dem so genannten „Terminalen“ Maß (entspricht dem „Forward“ Maß aus Kapitel 3.4.2). Aus dem selben Argument wie oben, nämlich das jede diskontierte Nullkupon Anleihe ein Martingal unter dem terminalen Maß ist, muss folgendes gelten (unter dem „Terminalen“ Maß)

$$Drift \left[\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_n)} \right] = 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Wiederum folgt aus der Beziehung $\frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k+1})} = 1 + \delta L_k(t)$, dass die nachstehende Gleichung gilt:

$$\prod_{k=i}^{n-1} (1 + \delta L_k(T_k)) = \prod_{k=i}^{n-1} \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k+1})} = \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_n)}, \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Demnach muss folgendes gelten

$$Drift \left[\prod_{k=i}^{n-1} (1 + \delta L_k(T_k)) \right] = 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Nun kann dasselbe Prozedere wie in der Herleitung der No-Arbitragebedingung für das „Spot“ Maß angewendet werden. Durch Verwendung der Produktregel und durch bestimmte Umformungen kommt man auf den folgenden Drift für das terminale Maß

$$\mu_j^{\mathbb{P}^N}(t) = - \sum_{l=j+1}^{n-1} \frac{\delta L_l(t)}{1 + \delta L_l(t)} \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l}(t).$$

Dieser Drift verwendet also im Gegensatz zum Drift des „Spot“ Maßes, LIBOR-Raten die sich auf Intervalle nach dem Zeitpunkt T_j beziehen.

Bei dem letzten Maß das hier angeführt wird, handelt es sich um das „ T_k -Forward“ Maß. Dabei handelt es sich um folgenden Normierungsprozess (mit vorher festgelegtem $k \in \{0, \dots, n-1\}$),

$$N(t) = \begin{cases} P(t, T_k) & \text{für } t \leq T_k, \\ P(t, T_{m(t)+1}) \prod_{j=k+1}^{m(t)+1} \frac{1}{P(T_{j-1}, T_j)} & \text{für } t > T_k. \end{cases}$$

Der aus dem oben angeführten Normierungsprozess resultierende Drift lautet

$$\begin{aligned}\mu_j^{\mathbb{P}^N}(t) &= - \sum_{l=j+1}^{k-1} \frac{\delta L_l(t)}{1 + \delta L_l(t)} \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l}(t), & j < k - 1 \text{ und } t \leq T_k \\ \mu_j^{\mathbb{P}^N}(t) &= 0, & j = k - 1 \text{ und } t \leq T_k \\ \mu_j^{\mathbb{P}^N}(t) &= \sum_{l=k}^j \frac{\delta L_l(t)}{1 + \delta L_l(t)} \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l}(t), & k \leq j \text{ und } t \leq T_k \\ \mu_j^{\mathbb{P}^N}(t) &= \sum_{l=m(t)+1}^j \frac{\delta L_l(t)}{1 + \delta L_l(t)} \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l}(t), & t > T_k\end{aligned}$$

Somit ist der Parameter $\mu^{\mathbb{P}^N}$ für verschiedene Maße festgelegt. Im Nachfolgenden wird ausschließlich das „Spot“ Maß gewählt und unter diesem Simulationen berechnet. Noch ausstehend ist die Funktionen σ der Volatilität sowie die Korrelation ρ . Diese sind frei zu wählende Funktionen und fixieren damit das LIBOR-Markt Model endgültig.

5.2 Korrelation

Um einen Überblick über die Struktur von Korrelationen von Anleihen zu bekommen, versucht man am Markt geeignete Korrelationen zu erhalten. Dies ist mit Hilfe von historischen Daten von Anleihen möglich. Unter der empirischen Korrelation

$$Kor(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}},$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind und \hat{x} bez. \hat{y} die arithmetischen Mittel von x bzw. y sind, kann eine empirische Korrelationsmatrix aufgestellt werden. Die Vektoren x und y werden später durch $x = (P(t_k, t_k + T_j))_{j \in \{1, \dots, n\}}$ und $y = (P(t_l, t_l + T_j))_{j \in \{1, \dots, n\}}$ spezifiziert. Die Abbildung 9 zeigt eine solche Korrelation zwischen europäischen Anleihen in einen Zeitraum über die letzten 10 Jahre. Eine auf Grund der Abbildung 9 möglichst einfache Wahl, wäre eine stetige Funktion die je weiter die Intervalle $[T_j, T_{j+1}]$ und $[T_k, T_{k+1}]$ für $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$ entfernt sind desto geringer soll die Korrelation zwischen den jeweiligen LIBOR-Raten L_j und L_k sein. Die Funktion

$$\rho_{i,j}(t) = \rho_{i,j} = e^{-\alpha|T_i - T_j|} \quad \text{für } \alpha \in (0, \infty),$$

erfüllt diese Kriterien. Diese Wahl ist unabhängig von dem Betrachtungszeitpunkt t und ist daher nur von der Tenorstruktur abhängig. Diese Art von Korrelation wird auch in [Fries, 2007] angeführt, ist aber durch die begrenzte Flexibilität mit nur einem Parameter α nicht relevant.

Korrelation von europ. Swap-Zero-Curves

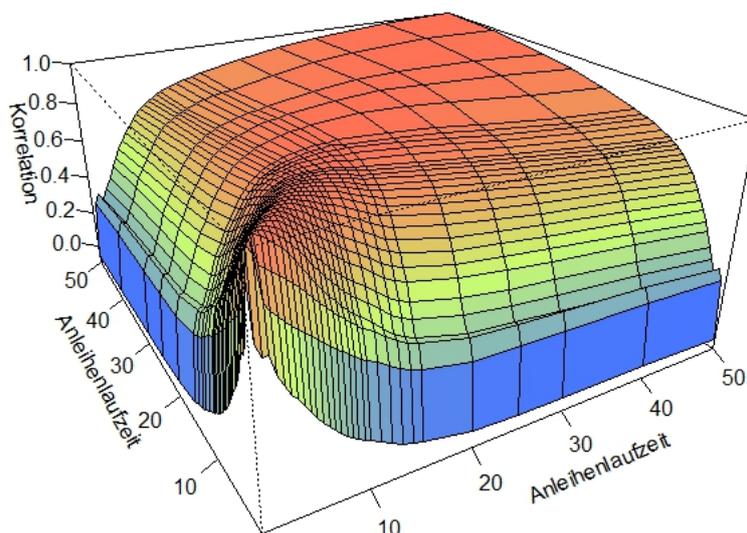


Abbildung 9: Korrelation von europäischen Anleihen

In dieser Arbeit wird eine in [Schoenmakers und Coffey, 2003] behandelte Struktur für die Korrelation gewählt. Dieser Ansatz führt dazu, dass für jede Kombination von Intervallen $[T_i, T_{i+1}]$ und $[T_j, T_{j+1}]$ für $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ und $i \leq j$ ein Korrelationsparameter gewählt werden kann. Später wird die Anzahl jedoch reduziert um eine stabilere Schätzung zu garantieren.

Zunächst sei eine Zahlenfolge $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\}$ mit $c_i \in \mathbb{R}^+$ gegeben, für die gilt

$$1 = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1},$$

$$\frac{c_0}{c_1} < \frac{c_1}{c_2} < \frac{c_2}{c_3} < \dots < \frac{c_{n-2}}{c_{n-1}}.$$

Eine solche Folge erhält man z.B. aus einer Zahlenfolge $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ mit $a_i \in \mathbb{R}^+$

durch

$$\begin{aligned} c_i &= \exp \left(\sum_{l=2}^{i-1} (l-1)a_l + \sum_{l=i}^{n-1} (i-1)a_l \right) \\ &= \exp \left(\sum_{l=2}^{n-1} \min(l-1, i-1)a_l \right), \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Es wird nun durch

$$\rho_{i,j} = \frac{c_i}{c_j} \quad i \leq j \text{ und } i, j \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (5.9)$$

eine Korrelation definiert. Schätzt man nun die Parameter $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ legt die oben angeführte Formel die Korrelationen fest. Um die Anzahl der Parameter zu reduzieren wird $\alpha = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-2}$ und $\beta = a_{n-1}$ gesetzt. Setzt man in (5.9) die Bedingung (5.8) ein, führt dies zu:

$$\rho_{i,j} = \exp \left(-|i-j|\beta - |i-j|\alpha \left((n-1) - \frac{i+j+1}{2} \right) \right).$$

Da die oben angegebene Funktion stark auf kleine Veränderungen der Parameter α bzw. β reagiert kann man die Gleichung umformen, um so eine, in den Parametern, stabilere Funktion zu konstruieren. Für weitere Details siehe Schoenmakers und Coffey [2003]. Die neue Korrelationsfunktion ist wiederum unabhängig vom Betrachtungszeitpunkt t und besitzt die Form

$$\rho_{i,j} = \exp \left(\frac{-|i-j|}{n-2} \left[-\ln(\rho_\infty) + \eta \frac{n-i-j}{n-3} \right] \right) \quad \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Hierbei sind ρ_∞, η die neuen Parameter der Korrelationsfunktion und es muss gelten, dass $0 < \rho_\infty \leq 1$ sowie $0 \leq \eta \leq -\ln(\rho_\infty)$ ist.

Somit ist die Struktur von (5.3) durch die oben konstruierte Form von ρ festgelegt. Bei der oben hergeleiteten Korrelation ist zu Beachten, dass es nur eine augenblickliche Korrelation ist. Das bedeutet, dass die Abhängigkeit vom Betrachtungszeitpunkt ausgeschlossen wurde. Um eine bessere Approximation zu erhalten existiert die „terminale“ Korrelation. Diese dient zur besseren Beschreibung der Korrelation wird aber hier nicht weiter erörtert. Für mehr Information über die terminale Korrelation siehe [Brigo und Mercurio, 2007]. Da die terminalen Korrelation sich nicht nur auf einen Betrachtungszeitpunkt bezieht, existiert keine analytische geschlossene Formel. Man könnte dieses Problem mit Hilfe von Monte Carlo Simulationen entgegenwirken doch der Rechenaufwand erhöht sich dadurch deutlich. Eine Alternative bilden hier Approximationen. Diese haben den Vorteil, dass sie kaum mehr Rechenaufwand benötigen.

Die Kalibrierung der Parameter η, ρ_∞ erfolgt nun durch ein Optimierungsproblem. Seien Beobachtungszeitpunkte $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_K$ gegeben und sei $\hat{P}(t, T_j)$ (t kann hier mit

$t = [t_1, \dots, t_K]$ für $j \in \{0, \dots, n-1\}$ identifiziert werden). Der Vektor \hat{P} ist dann

$$\begin{bmatrix} \hat{P}(t_1, t_1 + T_j) \\ \vdots \\ \hat{P}(t_K, t_K + T_j) \end{bmatrix},$$

wobei \hat{P} beobachtete Preise von Nullkupon Anleihen sind. Eine beobachtete Nullkupon Anleihe $\hat{P}(t, T_j)$ besteht somit aus einem Vektor dessen Einträge an verschiedenen Zeitpunkten beobachtete Preise von Nullkupon Anleihen sind wobei die Laufzeit T_j an jedem Zeitpunkt die selbe ist (T_j aus der Tenorstruktur gewählt). Das Optimierungsproblem hat die Form

$$\begin{aligned} \min_{\eta, \rho_\infty} & \left(\sum_{i,j} \left(\rho_{i,j}(\eta, \rho_\infty) - \text{Kor}(\hat{P}(t, T_i), \hat{P}(t, T_j)) \right)^2 \right) & (5.10) \\ \text{sodass} & \quad 0 \leq \eta \leq -\ln(\rho_\infty) \\ & \quad 0 < \rho_\infty \leq 1. \end{aligned}$$

Somit ist die Korrelation festgelegt und wird in weiterer Folge für die Kalibrierung der Volatilität verwendet.

5.3 Volatilität

Ein entscheidender Parameter des ganzen LIBOR-Markt Modells ist die Volatilität. Da die Volatilitätsstruktur in diesem Modell frei wählbar ist, gibt es dementsprechend viel Auswahl für die Zusammensetzung der Volatilität. Die Arbeit [Rebonato, 2005] und auch [Fries, 2007] beschreiben mögliche Ansätze für die Volatilität. Der Ansatz in dieser Arbeit wird sich auf [Rebonato, 2005] beziehen ist aber auch in [Fries, 2007] vorhanden. Die Anpassung an Marktdaten beruht auf Beobachtungen von gehandelten Derivaten und ist daher von heuristischer Natur. Dennoch ist diese Vorgehensweise sehr praktikabel und oft in der Literatur zu finden.

Eine Erweiterung wäre z.B. eine stochastische Volatilität. Dieser Ansatz wäre dann das Ende von analytischen Lösungen, liefert aber auch ein flexibles System aus LIBOR-Raten. Der Aufbau und die Bedingungen für No-Arbitrage müssten dabei neu überdacht werden. Der Prozess der Volatilität muss auch gewisse Voraussetzungen zur Integrierbarkeit erfüllen. Eine genaue Spezifikation eines solchen Modells ist nicht Ziel dieser Arbeit. Diese Modelle dienen hauptsächlich zur Preisfindung von Derivaten und anderen Zertifikaten bei denen geschlossene Lösungen, wie z.B. die Black-Scholes Formel, nicht ausreichend sind. Ähnlich wie für die Korrelation wird eine parametrische Form für die Volatilität gewählt. Es handelt sich dabei um eine Funktion mit drei Parametern $\alpha, \beta \geq 0$ und $\gamma \geq -20$. Der Wert -20 ist hier frei gewählt, verglichen mit Marktdaten scheint dieser Wert aber plausibel. Die Funktion σ^L wird als

$$\sigma_i^L(t) = (\alpha + \gamma(T_i - t)) e^{-\beta|T_i - t|}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ und } t \leq T_i, \quad (5.11)$$

gewählt. Die oben festgelegte Struktur der Volatilität σ_i^L hat demnach für jede Brownsche Bewegung W_i (siehe (5.2)) bzw. für alle $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, L_i die selben Parameter α, β, γ . Es gibt noch weitere Ansätze die eine bessere Anpassung an die Marktvolatilität bieten. Eine solche Erweiterung wären z.B. neue Parameter $\phi_i \in \mathbb{R}$ sodass

$$\tilde{\sigma}_i^L(t) = \sigma_i^L(t)\phi_i,$$

ist. Für weitere Details einer solchen Struktur siehe [Rebonato, 2005]. In dieser Arbeit wird die Volatilität (5.11) in weiterer Folge verwendet. Im nächsten Kapitel wird die Frage beantwortet wie und unter welchen Annahmen die Volatilität an den Markt kalibriert werden kann.

5.3.1 Swaprates und Swaptions

Zu Beginn dieses Abschnitts wird zuerst die sogenannte „Swapraterate“ dargestellt und danach der Zusammenhang zwischen Swaprates und dem LIBOR-Markt Modell. Die Existenz von Optionsscheinen auf Swaprates ermöglicht nun die Kalibrierung der Volatilität der LIBOR-Raten durch die Volatilität der Swaprates. Dadurch erhält man ein LMM das als Basis aktuelle Marktdaten verwendet und dadurch die Vorhersage von Zinsen realistischer gestalten soll. Der Nachteil liegt darin, dass für jede neue Information die am Markt auftaucht (z.B. neue Preise von Optionen auf Swaps) das LMM neu kalibriert werden muss.

Ein „Zinsswap“ ist ein Tausch von Zinssätzen zu gewissen Konditionen. Eine häufige Form von solchen Kontrakten ist z.B. das Tauschen von fixen Zinssätzen und variablen Zinssätzen. Demnach werden die zwei Zahlungen eines solchen Zinsswaps als statische bez. dynamische Zahlung bezeichnet. Die statische Zahlung (betrachtet zu einem Zeitpunkt t) kann einfach mit Hilfe von Nullkupon Anleihen definiert werden. Dazu sei Nom die Nominale des Tauschgeschäftes und c_{fix} ist der fixierte Zinssatz der statischen Zahlung. Die statische Zahlung $A_{p,q}$ in einem Zeitraum von T_p bis T_q für $p < q$ ist gegeben durch (am Startzeitpunkt T_p des Zinsswaps wird noch kein Zinssatz getauscht):

$$A_{p,q}(t, c_{fix}) = Nom \sum_{i=p}^{q-1} c_{fix} \delta P(t, T_{i+1}) \quad \text{für } p, q \in \{0, 1, \dots, n\}, p < q \text{ und } t \in [0, T_p].$$

Hierbei wird der Austausch im Zeitraum $[T_p, T_q]$ durchgeführt. Somit besteht der Cashflow aus abgezinsten Zahlungen wobei der Abzinsungsfaktor durch die Nullkupon Anleihe beschrieben wird. Analog kann man die dynamischen Zahlungen dieses Kontrakts wie folgt definierten

$$FL_{p,q}(t) = Nom \sum_{i=p}^{q-1} L_i(t) \delta P(t, T_{i+1}).$$

Diese dynamische Zahlung besitzt den gleichen Aufbau wie die statische Zahlung, es wurde nur der fixe Zins c_{fix} durch die LIBOR-Rate ersetzt. Stellt man die LIBOR-Raten mit Hilfe von Nullkupon Anleihen,

$$L(T_i, T_{i+1}, t) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{P(t, T_i) - P(t, T_{i+1})}{P(t, T_{i+1})} \right),$$

dar, erhält man für die dynamischen Zahlungen eine vereinfachte Darstellung

$$FL_{p,q}(t) = N(P(t, T_p) - P(t, T_q)).$$

Die Swaprate wird folgendermaßen definiert.

Definition 5.2. Die Swaprate $S(T_p, T_q, t)$ zum Zeitpunkt t und über den Zeitraum $[T_p, T_q]$ ist jener Zinssatz für eine statische Zahlung (entspricht c_{fix}), welcher den Zinsswaps über den Zeitraum $[T_p, T_q]$ zum Zeitpunkt t den Wert 0 zuteilt. Demnach gilt

$$FL_{p,q}(t) - A_{p,q}(t, S(T_p, T_q, t)) = 0 \quad (5.12)$$

Fügt man nun in die Formel (5.12) die dynamische bzw. statische Zahlung ein, erhält man eine Darstellung der Swaprate als gewichtete Summe von LIBOR-Raten.

$$S(T_p, T_q, t) = S_{p,q}(t) = \sum_{i=p}^{q-1} w_i L_i(t) \quad (5.13)$$

Die Gewichte w_i haben dabei die Form

$$w_i = \frac{P(t, T_{i+1})}{\sum_{j=p}^{q-1} P(t, T_{j+1})}.$$

Die Darstellung (5.13) wird in späterer Folge noch nützlich sein um Volatilitäten zu kalibrieren.

In den folgenden Schritten wird eine Option auf die Swaprate definiert. Diese ist am Markt beobachtbar und wird als „Swaption“ bezeichnet. Durch Annahme einer Log-Normalverteilung der Swaprate kann ein Zusammenhang zwischen der Volatilität der LIBOR-Rate und der Volatilität der Swaprate hergestellt werden.

Definition 5.3. Eine europäische Swaption ist eine Option mit Strike K die zum Zeitpunkt $t \leq T_p$ bewertet ist. Als Basiswert dieser Option wird die Swaprate über das Intervall $[T_p, T_q]$, $p < q$ und $p, q \in \{0, \dots, n\}$ verwendet. Demnach hat der Payoff einer Swaption zum Ausübungszeitpunkt T_p folgende Struktur

$$\text{Payoff}(\text{Swaption})_{T_p} = (S(T_p, T_q, T_p) - K)^+ A(T_p, T_q, T_p). \quad (5.14)$$

Hierbei ist $A(T_p, T_q, t)$ die Annuität über den Zeitraum $[T_p, T_q]$ zum Zeitpunkt t und kann durch

$$A(T_p, T_q, t) = \sum_{i=p}^q \delta P(t, T_{i+1}),$$

gebildet werden.

Im nächsten Schritt wird eine Formel für diesen Optionsschein hergeleitet um so die implizite Volatilität für die Kalibrierung zu nutzen. Dabei ist zu beachten (aus (5.13)), dass die Swaprate eine stochastische Struktur besitzt.

5.3.2 Swaption Black-Scholes Preis

Durch die Annahme der Log-Normalverteilung der Swaprate, dabei entspricht der Erwartungswert dem heutigem Wert der Swaprate, gilt folgende Verteilung für $S(T_p, T_q, T_p)$,

$$\ln(S(T_p, T_q, T_p)) \sim N(\ln[S(T_p, T_q, t)] - \frac{1}{2}\sigma_{S_{p,q},Black}^2 T_p, \sigma_{S_{p,q},Black}^2 T_p).$$

Oder als stochastische Differentialgleichung geschrieben

$$\frac{dS_{p,q}}{S_{p,q}} = \mu_S dt + \sigma_{S_{p,q},inst}(t) dW^S, \quad (5.15)$$

wobei

$$\sigma_{S_{p,q},Black}^2 = \frac{1}{(T_p - t)} \int_t^{T_p} \sigma_{S_{p,q},inst}^2(u) du.$$

Eine solche Annahme ist ein standard Ansatz in der Finanzmathematik. Dieses Umfeld wird auch als „Black-Scholes“ Umfeld bezeichnet. Daraus resultiert die bekannte Black-Scholes Formel für europäische Optionen. In obiger Formel ist die Volatilität der Swaprate durch $\sigma_{S,Black}^2$ gekennzeichnet, welche später durch die am Markt beobachtete implizite Volatilität geschätzt wird. Die Swaprate wird hier unabhängig von der LIBOR-Rate definiert. So kann man die Annuität in (5.8) unabhängig von der Swaprate berechnen. Diese heuristische Annahme muss in der Realität nicht zwingend zutreffen. Es dient lediglich der Vereinfachung um analytische Lösungen zu erhalten. Wendet man die Black-Scholes Formel (dabei wird der Payoff multipliziert mit der Dichte der Log-Normalverteilung und anschließend integriert) an ergibt sich der Preis einer Swaption durch

$$\begin{aligned} P_{Swaption}(t) &= [S(T_p, T_q, t)\Phi(h_1) - K\Phi(h_2)]A(T_p, T_q, t) \\ h_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S(T_p, T_q, t)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{S,Black}^2(T_p - t)}{\sigma_{S,Black}\sqrt{T_p - t}} \\ h_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S(T_p, T_q, t)}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma_{S,Black}^2(T_p - t)}{\sigma_{S,Black}\sqrt{T_p - t}} \end{aligned}$$

Hier sei Angemerkt, dass durch die Normalverteilung der Swaprate Probleme bei der Verträglichkeit mit den LIBOR-Raten auftreten. Die Swaprate welche als Linearkombination von LIBOR-Raten dargestellt ist (5.13) kann nicht einer Log-Normalverteilung folgen da die LIBOR-Raten alle log-normalverteilt sind. Dennoch ist eine solche Annahme aus Sicht der Kalibrierung sinnvoll und nützlich. Für weitere Details über diese Thema siehe [Rebonato, 1999].

5.3.3 Implizite Volatilität vs. LIBOR Volatilität

Durch die Betrachtung der Swaprate als geometrische Brownsche Bewegung (5.15) und durch die Formel (5.13) wird der Zusammenhang des LMM mit der impliziten Volatilität

geformt. Dazu wird die Formel (5.13) so dargestellt, dass die Swaprate durch LIBOR-Raten gebildet wird.

$$\begin{aligned}
S_{p,q} &= \sum_{i=p}^{q-1} w_i L_i \\
&= \sum_{i=p}^{q-1} \frac{P(t, T_{i+1}) \delta}{\sum_{j=p}^{q-1} P(t, T_{j+1}) \delta} L_i \\
&= \frac{\sum_{i=p}^{q-1} P(t, T_{i+1}) \delta L_i}{\sum_{j=p}^{q-1} P(t, T_{j+1}) \delta} \\
&= \frac{P(t, T_p) - P(t, T_q)}{\sum_{j=p}^{q-1} P(t, T_{j+1}) \delta}
\end{aligned}$$

Der letzte oben angeführte Bruch wird nun durch $P(t, T_q)$ erweitert und die Beziehung

$$\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} = 1 + \delta L_i(t),$$

führt zu folgender Darstellung der Swaprate,

$$\begin{aligned}
S_{p,q} &= \frac{\frac{P(t, T_p)}{P(t, T_q)} - 1}{\sum_{j=p}^{q-1} \frac{P(t, T_{j+1})}{P(t, T_q)} \delta} \\
&= \frac{\prod_{i=p}^{q-1} (1 + \delta L_i) - 1}{\sum_{i=p}^{q-1} \delta \prod_{j=i+1}^{q-1} (1 + \delta L_j)}.
\end{aligned}$$

Nun differenziert man (nach Itô) beide Seiten der oben angegebenen Gleichung und betrachtet nur jene Teile des Differentials, welche stochastische Integratoren besitzen (nur diese Teile sind relevant für die Beziehung von $\sigma_{S,inst}$ und σ_i^L). Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
dS_{p,q}(t) &= (\dots)dt + S_{p,q}(t) \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{S_{p,q}(t)} \frac{\partial S_{p,q}(t)}{\partial L_k(t)} dL_k(t) \\
&= (\dots)dt + S_{p,q}(t) \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{S_{p,q}(t)} \frac{\partial S_{p,q}(t)}{\partial L_k(t)} \sigma_k^L(t) L_k(t) dW_k(t).
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Notation sei

$$\hat{w}_i(t) := \frac{\frac{\partial}{\partial L_i(t)} S_{p,q}(t)}{S_{p,q}(t)} = \frac{\partial}{\partial L_i(t)} \log S_{p,q}(t).$$

Daraus ergibt sich,

$$dS_{p,q}(t) = (\dots)dt + S_{p,q}(t) \sum_{k=p}^{q-1} \hat{w}_k(t) \sigma_k^L(t) L_k(t) dW_k(t). \quad (5.16)$$

Es wird nun die quadratische Variation verwendet welche aus der Formel (5.15) gebildet wird. Dadurch ergibt sich in unserem Modell eine quadratische Variation die deterministisch ist und folgende Form besitzt

$$\left(\frac{1}{S_{p,q}^2(t)}\right) d[S_{p,q}(t)]_t = \sigma_{S_{p,q},inst}^2(t)dt.$$

Aus der Herleitung der stochastischen Differentialgleichung (5.16) sieht man jedoch, dass die quadratische Variation von (5.16) nicht deterministisch ist. Daher ist die Annahme einer deterministischen Volatilitätsstruktur der Swaprate in einem LMM nicht ausreichend um die Variabilität der Brownschen Bewegung der Swaprate zu steuern. Tatsache ist, dass die quadratische Variation aus (5.16) nicht deterministisch ist und daher die Black Scholes Formel nicht anwendbar ist. Die Struktur der quadratischen Variation besitzt folgende Form:

$$\left(\frac{1}{S_{p,q}^2(t)}\right) d[S_{p,q}(t)]_t = \sum_{k,l=p}^{q-1} \hat{w}_k(t)\hat{w}_l(t)L_k(t)L_l(t)\sigma_k^L(t)\sigma_l^L(t)\rho_{k,l}dt. \quad (5.17)$$

An diesem Punkt wird nun eine Approximation verwendet um die Parameter der Funktion σ^L durch die Marktvolatilität $\sigma_{S_{p,q},Black}$ aus der Black Scholes Formel doch schätzen zu können. Dazu wird folgende Annahme getroffen

$$\frac{\partial \log S_{a,b}}{\partial \log L_k} \approx \frac{\partial \log S_{a,b}}{\partial \log L_k} \Big|_{t=0}.$$

Es wird also nur der Zeitpunkt $t = 0$ in Formel (5.17) verwendet (nur bei den Termen \hat{w} und L) um deterministische Werte zu erhalten (auch als „freezing“ bezeichnet),

$$\left(\frac{1}{S_{p,q}^2(t)}\right) d[S_{p,q}(t)]_t \approx \sum_{k,l=p}^{q-1} \hat{w}_k(0)\hat{w}_l(0)L_k(0)L_l(0)\sigma_k^L(t)\sigma_l^L(t)\rho_{k,l}dt.$$

Fügt man nun die Marktvolatilität mit der hergeleiteten Volatilität zusammen ergibt sich eine Approximationsformel für σ_k^L durch

$$\hat{\sigma}_{S,Black}^2 \approx \sum_{k,l=p}^{q-1} \hat{w}_k(0)\hat{w}_l(0)L_k(0)L_l(0)\frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \sigma_k^L(t)\sigma_l^L(t)\rho_{k,l}dt.$$

Eine noch unbekannte Größe in der oben angegebenen Formel sind die Gewichte $\hat{w}_k(0)$. Sie können folgendermaßen hergeleitet werden (zur Vereinfachung der Notation wurde der

Betrachtungszeitpunkt t weggelassen, z.B. entspricht $L_k = L_k(t)$ und $P(T_k) = P(t, T_k)$:

$$\begin{aligned}
\hat{w}_k &= \frac{\partial}{\partial L_k} \log(S_{p,q}) \\
&= \frac{\partial}{\partial L_k} \log \left(\frac{P(T_p) - P(T_q)}{\sum_{j=p}^{q-1} P(T_{j+1})\delta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial L_k} \left(\log(P(T_p) - P(T_q)) - \log \left(\sum_{j=p}^{q-1} P(T_{j+1})\delta \right) \right) \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial L_k}(P(T_p) - P(T_q))}{P(T_p) - P(T_q)} - \frac{\sum_{j=p}^{q-1} \frac{\partial}{\partial L_k} P(T_{j+1})\delta}{\sum_{j=p}^{q-1} P(T_{j+1})\delta}.
\end{aligned}$$

Durch die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial L_k} P(T_{j+1}) = \begin{cases} -P(T_{j+1}) \frac{\delta}{1+L_k\delta} & \text{falls } j+1 > k \\ 0 & \text{falls } j+1 \leq k, \end{cases}$$

kann man die Formel für die Gewichte vereinfachen auf (für $t = 0$)

$$\hat{w}_k(0) = \left(\frac{P(0, T_q)}{P(0, T_p) - P(0, T_q)} + \frac{\sum_{j=k}^{q-1} P(0, T_{j+1})\delta}{\sum_{j=1}^{q-1} P(0, T_{j+1})\delta} \right) \frac{\delta}{1 + L_k(0)\delta}.$$

Mit der Formel der Annuität aus Definition 5.2 vereinfacht sich die Notation auf

$$\hat{w}_k(0) = \left(\frac{P(0, T_q)}{P(0, T_p) - P(0, T_q)} + \frac{A(T_k, T_{q-1}, 0)}{A(T_1, T_{q-1}, 0)} \right) \frac{\delta}{1 + \delta L_k(0)}.$$

Durch die oben hergeleitete Approximation der Volatilität lässt sich die Funktion σ^L nun durch numerische Lösungsansätze schätzen. Folgendes Schema für das LMM kann nun zur Kalibrierung verwendet werden:

- Erhebung von folgenden Marktdaten: Preise von Nullkupon Anleihen, Swaptionpreise, Zeitreihen von Preisen von Nullkupon Anleihen
- Anpassung der Daten an die Tenorstruktur
- Schätzung der Korrelation (Parameter η, ρ_∞) aus historischen Daten der Nullkupon Anleihen
- Mit Hilfe der geschätzten Korrelation die Volatilität (Parameter α, β, γ) mittels Approximationsformel schätzen.

Abschließend sind alle Herleitungen im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 5.1 ([Fries, 2007], Theorem 216). *In einem LIBOR-Markt Modell besitzt eine analytische Approximation eines Zinsswaps mit Hilfe der Volatilität der Black-Scholes Formel $\sigma_{S_{p,q},Black}$ folgende Darstellung*

$$\sigma_{S,Black}^2 = \sum_{k,l=p}^{q-1} \nu_k(0) \hat{\gamma}_{k,l}(T_p) \nu_l(0),$$

wobei

$$\hat{\gamma}_{k,l}(T_p) = \int_0^{T_p} \sigma_k^L(t) \sigma_l^L(t) \rho_{k,l}(t) dt,$$

$$\nu_k = \frac{\partial \log(S_{p,q})}{\partial \log(L_k)} = \left(\frac{P(T_q)}{P(T_p) - P(T_q)} + \frac{A(T_k, T_{q-1})}{A(T_1, T_{q-1})} \right) \frac{\delta L_k}{1 + \delta L_k}.$$

Analog zur Korrelation lässt sich hier wieder ein Optimierungsproblem aufstellen. Es wird in späterer Form dann durch numerische Lösungsmethoden approximiert.

$$\min_{\alpha, \beta, \gamma} \left(\sum_{i,j} \left[\sigma_{S_{i,j},Black}^2 - \sum_{k,l=i}^{j-1} \hat{w}_k(0) \hat{w}_l(0) L_k(0) L_l(0) \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \sigma_k^L(\alpha, \beta, \gamma; t) \sigma_l^L(\alpha, \beta, \gamma; t) \rho_{k,l} dt \right]^2 \right)$$

sodass $0 \leq \alpha, 0 \leq \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Da das oben angeführte Optimierungsproblem mit wachsenden Beobachtungen von $\sigma_{S_{i,j},Black}$ steigenden Rechenaufwand produziert, kann man einen Teil dieses Aufwandes reduzieren indem man die Gewichte vor dem Start der Optimierung berechnet. Die Gewichte ändern sich nicht in Abhängigkeit der verschiedenen Beobachtungen von $\sigma_{S_{i,j},Black}$ und können (bzw. sollen) vorab berechnet und gespeichert werden. Da das obige Optimierungsproblem nicht konvex ist können auch lokale Maxima als Ergebnis einer numerischen Lösung wiedergegeben werden. Um solche lokalen Maxima zu vermeiden, werden mehrere Durchläufe mit verschiedenen Startpunkten kalkuliert. Jenes Ergebnis mit minimalem Abstand (also minimalem Wert) wird dann als Lösung verwendet.

Obwohl für diese Kalibrierung bewusst Approximationen und Annahmen getroffen wurden, welche nicht den theoretischen Ergebnissen des LIBOR Markt Modells entsprechen, können dennoch gute Ergebnisse für Zinsstrukturen erzielt werden. Der große Vorteil des LIBOR Markt Modells (es ist sehr nahe an den Marktdaten kalibriert) macht dieses Modell für viele Anwender zum favorisiertem Zinsmodell. Folgender Ausschnitt aus [Solvency] Kaptiel XI, Abschnitt 2, Artikel 77 schreibt z.B. die Verwendung von maßgeblichen risikolosen Zinssätzen vor.

„Der beste Schätzwert entspricht dem wahrscheinlichkeitsgewichteten Durchschnitt künftiger Zahlungsströme („Cashflows“) unter Berücksichtigung des Zeitwerts des Geldes (erwarteter Barwert künftiger Zahlungsströme) und unter Verwendung der maßgeblichen risikofreien Zinskurve.“ [Solvency].

5.4 Ergebnisse einer Kalibrierung

Die Datenlage ist entscheidend für eine gute Kalibrierung des Modells. Alle verwendeten Daten wurden dem Programm Reuters entnommen. Das Modell wurde auf den Stichtag 31.12.2014 kalibriert. Das bedeutet, dass alle Daten und Zinssätze an diesem Tage beobachtet wurden und die Basis der Kalibrierung bilden. Den Anfang bilden Nullkupon Anleihen die am Stichtag beobachtet wurden. Dazu wurde die Swap-Zero-Kurve aus europäischen Anleihen ermittelt. Dabei handelt es sich um Jahreszinssätze die Laufzeiten aus

$$\{3m, 6m, 9m, 1y, 1y3m, 1y6, 1y9m, 2y, \dots, 9y9m, 10y, 11y, \dots, 15y, 20y, 25y, 30y, 40y, 50y\}$$

besitzen. Für diese Anleihen wurden auch historische Zinssätze beobachtet und daraus Zeitreihen erstellt (tägliche Beobachtungen). Der Beginn einer solchen Zeitreihe startet mit dem 31.07.2009 und Endet am Stichtag den 31.12.2014.

In Abbildung 10 ist die Zinskurve per 31.12.2014 aus europäischen Anleihen zu sehen. Die

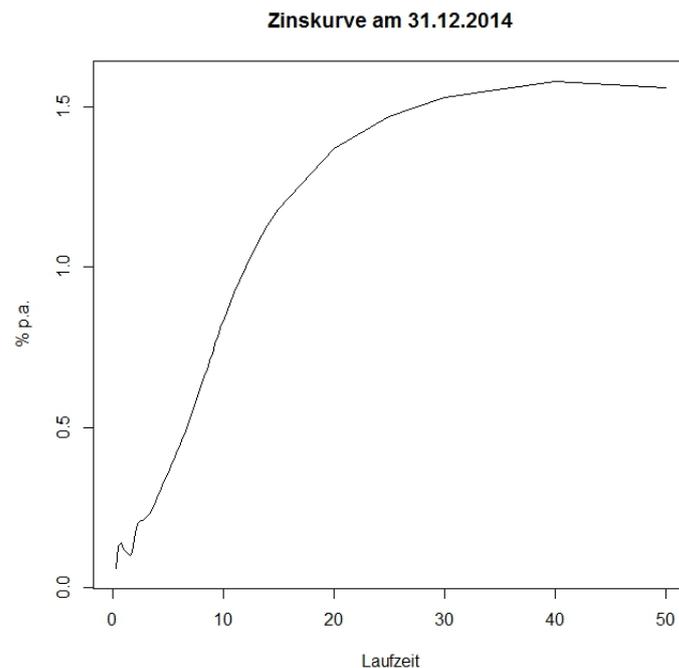


Abbildung 10: Zinsbeobachtung

Abbildung 11 zeigt eine historische Datenreihe des einjährigen Zinssatzes. Dabei fällt der deutliche Zinsverfall in den letzten Jahren auf. Aus dieser europäischen Swap-Zero-Kurve (welche Jahreszinssätze $R(t, T)$ über einen Zeitraum von $[t, T]$ beinhalten) wird durch die



Abbildung 11: Zeitreihe des einjahres Zinssatzes

folgende Formel der Preis einer Nullkupon Anleihe ermittelt.

$$P(t, T_i) = \frac{1}{(1 + R(t, T_i))^{t-T_i}}.$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass nur Nullkupon Anleihen mit Laufzeiten aus der Tenorstruktur berechnet wurden. Die Schrittweite wurde auf Jahresschritte festgelegt ($\delta = 1$) daraus folgen die Nullkupon Anleihen

$$\{P(0, 1), P(0, 2), \dots, P(0, 20)\}.$$

In der Tabelle 2 sind die Preise der Nullkupon Anleihen dargestellt. Aus den historischen Datenreihen aus diesen Anleihen lässt sich nun die Korrelation ρ bestimmen. Dazu wird das Optimierungsproblem (5.10) gelöst. Verwendet wurde dabei „R“ mit der Funktion „constrOptim“ welche einen adaptiven Barriere-Algorithmus zur Lösungssuche verwendet. Es wurden dabei fünf verschiedene Startpunkte gewählt um ein mögliches lokales Maxima auszuschließen. Die Nebenbedingungen der Funktion „constrOptim“ müssen linear sein, doch das Optimierungsproblem in (5.10) hat ein nicht lineare Nebenbedingung. Diese Problem wird dadurch behoben, dass man für den Logarithmus in (5.10) den ersten Term der Taylorreihe verwendet. Dadurch ändert sich die Nebenbedingung auf eine lineare Form von

$$0 \leq \eta \leq -(\rho_\infty - 1),$$

In Tabelle 3 sind die Ergebnisse einer solchen Kalibrierung dargestellt. Man kann aus dieser Tabelle erkennen das die ersten drei Ergebnisse fast Identisch sind. Der Funktionswert ist

$P(0, T_i)$	$R(0, T_i)$
0.9988	0.001201442
0.9967	0.001654095
0.9935	0.002176103
0.9889	0.002794413
0.9824	0.003557658
0.9740	0.004400316
0.9635	0.005325960
0.9508	0.006326370
0.9364	0.007328114
0.9206	0.008307280
0.9041	0.009207155
0.8877	0.009976220
0.8712	0.010662887
0.8545	0.011294649
0.8381	0.011844116
0.8227	0.012272425
0.8073	0.012671371
0.7919	0.013046605
0.7765	0.013402633
0.7612	0.013736447

Tabelle 2: Europäische Nullkupon Anleihen

bei den ersten drei Startpunkt am geringsten und daher wird der dritte Eintrag aus Tabelle 3 als Optimalwert für die Funktion ρ verwendet. In Abbildung 12 ist eine Darstellung der Funktion ρ zu sehen. Dafür, dass eine parametrische Funktion mit nur zwei Parametern gewählt wurde, ist die Annäherung an die Marktkorrelation aus Abbildung 9 ausreichend. Ausstehend ist noch die Optimierung der Funktion σ^L an Volatilitäten von Swaptions. Die Daten von solchen Swaptions sind wiederum aus dem Programm „Reuters“ entnommen worden. Es wurden Optionen auf Swaps über Laufzeit-Differenzen von einem Jahr bis zehn Jahre verwendet (demnach ist T_i, T_j für $S(T_i, T_j, 0)$ aus der Menge $T_i, T_j \in \{1, \dots, 20\}$ und es gilt $T_i \leq T_j$ sowie $T_j - T_i \leq 10$). Der Bewertungszeitpunkt $t = 0$ ist somit der Stichtag per 31.12.2014. Es ist wichtig die Swaptions auf die passenden Nullkupon Anleihen zu wählen. Es wurden also Swaptions die als Basis eine europäischen Swap-Zero-Kurve haben gewählt.

Startpunkt	ρ_∞	η	Funktionswert
{0.1, 0.1}	0.6223425	0.3776575	5.806277
{0.3, 0.3}	0.6223118	0.3776882	5.806277
{0.5, 0.49}	0.6223201	0.3776799	5.806277
{0.1, 0.8}	0.6222902	0.3777098	5.806278
{0.8, 0.1}	0.6197049	0.3802951	5.806420

Tabelle 3: Parameter der Korrelation

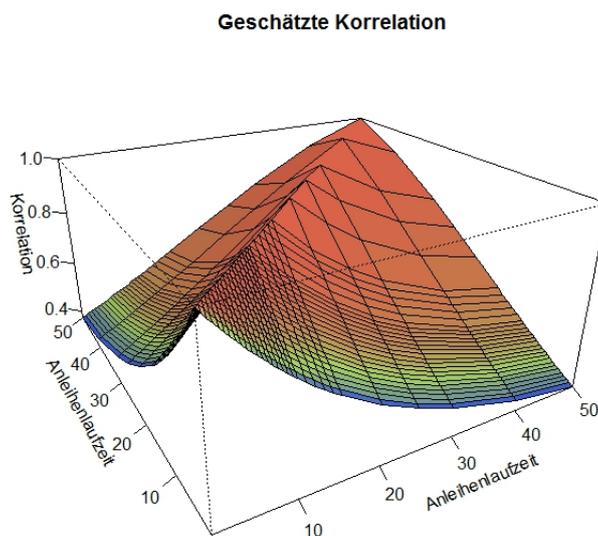


Abbildung 12: Korrelationsfunktion

Im Programm Reuters gibt es die Möglichkeit, direkt Volatilitäten zu erzeugen. Es handelt sich dabei um die implizite Volatilität $\sigma_{S,Black}$ welche als „logVol“ bezeichnet wird. Dies vereinfacht die Kalibrierung etwas, da keine impliziten Volatilitäten ausgerechnet werden müssen. Insgesamt wird also ein Zeitraum von zwanzig Jahren abgedeckt. In Abbildung 13 ist die Volatilität vom 31.12.2014 von den beschriebenen Swaptions angegeben und grafisch dargestellt (dabei entspricht Swaptiontenor den Zeitraum des Swaps $[T_i, T_j]$ und Maturity entspricht dem Ausübungszeitpunkt der Option). Es fällt auf, dass für Swaptions mit kurzer Laufzeit und kurzem Ausübungszeitpunkt eine hohe Volatilität herrscht, wohingegen lange Laufzeiten recht wenig volatil sind. Der Strike der Swaption wird immer so gewählt, dass die Swaption „at the money“ ist. Das bedeutet, dass der Strike K gleich der Swaprate

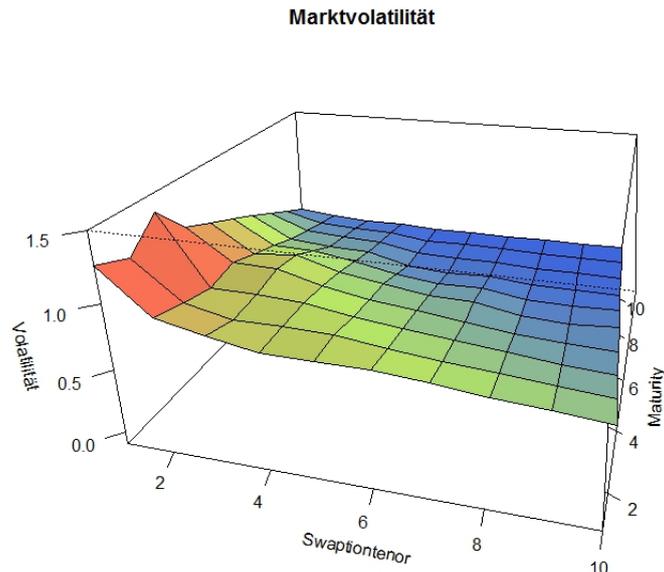


Abbildung 13: Marktvolatilität aus europäischen Swaptions

zum Zeitpunkt t ist,

$$K = S(T_i, T_j, 0).$$

Die Optimierung wurde wiederum durch das Programm „R“ durchgeführt und mit der Funktion „constrOptim“ vorgenommen. Dabei sind die Gewichte aus Nullkupon Anleihen aus der europäischen Swap-Zero-Kurve verwendet worden. Die Marktvolatilität ist in der nachstehenden Tabelle 4 angegeben. Die Ergebnisse der Optimierung sind in Tabelle 5 dargestellt. Dabei sind verschiedene Startpunkte gewählt worden. Es fällt auf, dass sich die Lösungen aller Startpunkte nur minimal unterscheiden. Daher ist die Lösung in der ersten Zeile von Tabelle 5 verwendet worden um einen Vergleich mit der Marktvolatilität aus Tabelle 4 grafisch zu eruieren. Die Abbildung 14 zeigt diesen Vergleich. Man kann erkennen, dass die Volatilitäten für kurze Laufzeiten der Schätzung geringer sind als die Marktvolatilität.

Die Kalibrierung der Volatilität kann noch verfeinert werden indem man mittels der geschätzten Volatilität Preise von Swaptions simuliert. Naheliegend wäre hier eine einfache Monte Carlo Simulation zu verwenden, um großen Rechenaufwand zu vermeiden. Aus diesen simulierten Swaptionpreisen kann man dann wiederum durch die implizite Volatilität die Güte der geschätzten Parameter α , γ und β durch Vergleich mit der Marktvolatilität feststellen. Hier ist zu beachten, dass durch die Simulation und durch die darin enthaltene Diskretisierung wiederum Fehler auftreten.

SWT/M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	126,17	116,15	136,2	111,1	101,16	91,23	81,3	70,4	59,5	48,7
2	94,8	87,5	81,7	86,5	78,5	70,5	62,6	56,9	51,26	45,6
3	86,7	79,4	81,3	84,8	80,9	69,8	58,7	53,7	48,7	43,7
4	80	79,5	79,3	75,2	70,5	64,3	58,2	53,1	48	43
5	79,6	78,4	73,4	68,9	65,1	56,9	48,8	46,2	43,7	41,2
6	79,6	73,9	68,7	64,8	59,1	52,6	46,2	44,8	43,4	42,1
7	76,3	70,2	65,4	60,1	58,8	53	47,2	45,2	43,2	41,3
8	72,8	67,3	61,4	56	51,5	47,9	44,3	43,3	42,3	41,4
9	70,2	63,8	57,9	53,4	49,8	46,8	43,9	43	42,2	41,4
10	66,9	60,6	55,5	51,8	51,8	47,6	43,5	42,8	42,2	41,6

Tabelle 4: Volatilität europäischer Swaptions

Stratp.	α	γ	β	Wert
(0.1, 0.1, 0.1)	2.030802e+00	-5.852877e-05	1.578525e-01	3.57542
(1, 1, 1)	2.030831e+00	-8.050388e-06	1.578783e-01	3.57542
(0.5, 0.5, 0.5)	2.030854e+00	-1.123014e-05	1.578833e-01	3.57542
(1.5, 1.5, 1.5)	2.030953e+00	5.570998e-05	1.579351e-01	3.57542

Tabelle 5: Lösungen des Optimierungsproblems

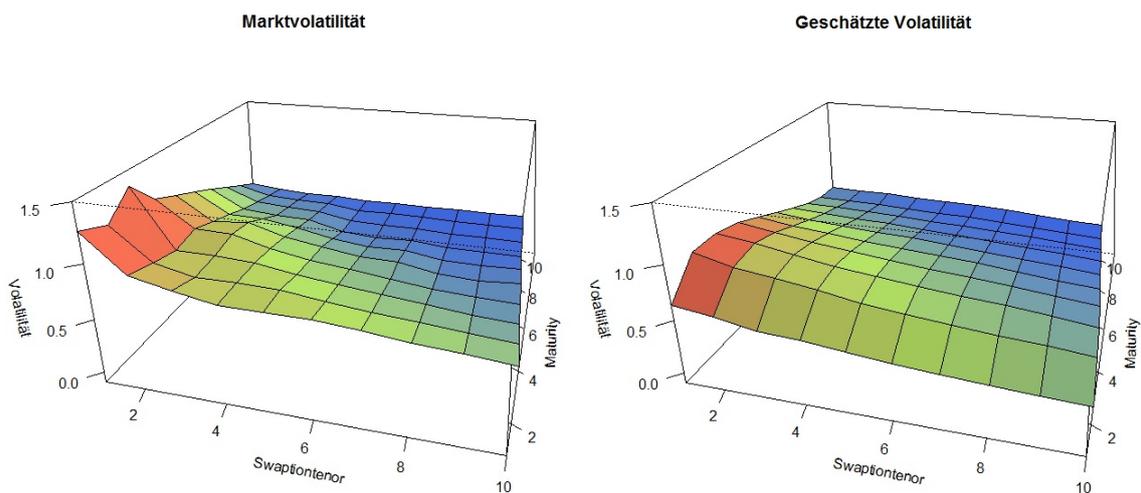


Abbildung 14: Volatilitätsvergleich

6 LIBOR-Markt Modell mit Ausfallrisiko

Eine grundlegende theoretische Annahme von vielen Modellen die einen bestimmten Markt beschreiben sollen, in unserem Fall den Zinsmarkt, ist, dass es keinen Ausfall beziehungsweise keine Zahlungsunfähigkeit in den modellierten Produkten gibt. In den drei vorher beschriebenen Zinsmodellen wird immer angenommen, dass die Nullkupon Anleihe existiert und immer zahlungsfähig ist. In der Realität ist das natürlich nicht der Fall. Wie die Wirtschaftskrise 2008 gezeigt hat, sind scheinbar sicher geglaubte Anleihen wie z.B. Staatsanleihen auch mit Risiko behaftet. Solche Ereignisse führen zu neuen Überlegungen und neuen Modellen in der Finanzmathematik. Ein solches Modell wird in diesen Abschnitt behandelt. Es kombiniert ein schon ausgearbeitetes LIBOR-Markt Modell (Kapitel 5) mit der Möglichkeit einer Zahlungsunfähigkeit. Demnach gibt es in einem solchen Modell Nullkupon Anleihen die mit dem Risiko des Ausfalls behaftet sind.

Die grundlegende Überlegung hinter diesem Modell ist jene, dass man durch das Investieren in risikobehaftete Anleihen mehr Ertrag erwarten kann als in Anleihen ohne Risiko. Da der Investor in diesem Fall das Risiko übernimmt, muss er dementsprechend einen Ausgleich für seine potentiellen Verluste erhalten. Mathematisch formuliert bedeutet dies, dass der Preis einer risikobehafteten Nullkupon Anleihe kleiner oder gleich dem Preis einer risikolosen Anleihe ist (mit den selben Konditionen). Durch die Differenz, den sogenannten „Spread“, lässt sich der Risikoaufschlag messen. Das LIBOR-Markt Modell mit Ausfallrisiko konstruiert diesen Spread nun durch einen Itô Prozess so, dass keine Arbitragemöglichkeiten vorliegen können.

Als Grundlage dieses Kapitels dienen die Arbeiten [Schönbucher, 2000a] und [Fries, 2007]. Die Arbeit [Schönbucher, 2000b] bietet ein gutes Grundgerüst und beinhaltet wichtige theoretische Resultate. Ein solches Resultat ist eine Preisformel für Swaptions auf Nullkupon Anleihen die mit Ausfallrisiko behaftet sind. Diese Formel ist natürlich nur unter gewissen Annahmen gültig, dient aber grundlegend zur Kalibrierung von Volatilitäten (ähnlich wie in Kapitel 5). Auch die Arbeit [Björk et al., 1997] konzentriert sich auf dieses Thema.

6.1 Ausfallsprozess

Ein passende Grundlage für das folgende Unterkapitel bildet [Björk et al., 1997] und [Schönbucher, 2000b]. Den Anfang bildet hier die Ausfallzeit welche den Zeitpunkt der Zahlungsunfähigkeit spezifiziert. Ein solcher Zeitpunkt ist logischerweise unbekannt und wird daher als Zufallszeitpunkt τ konstruiert.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{F} = (F_t)_{t \geq 0}$, $0 \leq t \leq T^*$, wobei $F_{T^*} = F$ ist, eine vollständige Filtration. In späterer Folge wird diese Filtration die diskretisierte Tenorstruktur enthalten.

Bedingung 6.1. *Für das LMM mit Ausfallrisiko werden folgende Annahmen getroffen ($t \leq T^*$):*

- *Die Ausfallszeit (Zeitpunkt einer Zahlungsunfähigkeit) wird durch die Stoppzeit (bzgl. \mathbb{F}) τ modelliert.*

- Die Ausfallsindikator Funktion $O(t)$ (Ausfallsprozess) ist an \mathbb{F} adaptiert und wird mit

$$\begin{aligned} I(t) &:= 1_{\{\tau > t\}}, \\ O(t) &:= 1 - I(t) = 1 - 1_{\{\tau > t\}}, \end{aligned}$$

definiert. Der Ausfallsindikator ist somit 0 vor dem Ausfallszeitpunkt und springt zum Ausfallszeitpunkt auf 1.

- Die Ausfallsindikator Funktion $O(t)$ besitzt einen vorhersagbaren Kompensator $A(t)$, daher ist

$$M(t) := O(t) - A(t), \quad (6.1)$$

ein Martingal (bzg. \mathbb{F}).

- Der Kompensator $A(t)$ ist monoton wachsend (da $O(t)$ monoton wächst), vorher-sagbar und von endlicher Variation. Desweiteren besitzt $A(t)$ eine Intensität $\psi(t)$, sodass

$$A(t) = \int_0^t \psi(s) ds.$$

Die Filtration \mathbb{F} enthält demnach die Information des Prozesses $O(t)$. In späterer Folge wird diese Filtration auch die Information einer mehrdimensionalen Brownschen Bewegung enthalten.

Es wird sich später zeigen, dass in den meisten Fällen die Stoppzeit τ für bestimmte Ergebnisse nicht relevant sein wird, da die nötige Information über den Ausfallsprozess von der Struktur einer risikobehafteten Nullkupon Anleihe abhängen wird.

6.2 Nullkupon Anleihen Struktur

Die Struktur des Modells basiert gleich wie das LMM auf Forward-Raten (bzw. LIBOR-Raten) und zusätzlich existieren Nullkupon Anleihen welche ein Risiko des Ausfalls beinhalten. Aus diesen Anleihen lassen sich dann risikobehaftete Forward-Raten definieren. Wie in den Kapiteln zuvor wird eine Tenorstruktur fixiert. Dabei handelt es sich um Zeitpunkte T_0, \dots, T_n mit $T_i = \delta i$ für $\delta \in \mathbb{R}^+$ und $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dies sind also jene Zeitpunkte an denen Nullkupon Anleihen existieren (sowohl risikolose wie auch risikobehaftete Anleihen).

Bedingung 6.2. Die folgenden Notationen bilden die Grundelemente des Zinsmodells.

- Der Preis einer risikolosen Nullkupon Anleihe (Bewertungszeitpunkt entspricht t , Laufzeit entspricht $T_k - t$) ist gegeben durch

$$P(t, T_k) = P_k(t), \quad t \leq T_k, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

- Der Preis einer risikobehafteten Nullkupon Anleihe ist gegeben durch

$$I(t)\bar{P}(t, T_k) = I(t)\bar{P}_k(t), \quad t \leq T_k, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Hier wurde der Einfluss des Ausfalls und der Preis getrennt. Daher muss der Preis zum Zeitpunkt eines Ausfalls nicht auf den Wert 0 springen da die Indikatorfunktion I dies macht.

- Der Ausfallsrisikofaktor zum Zeitpunkt t mit Endzeitpunkt T_k ist gegeben durch

$$D_k(t) = D(t, T_k) = \frac{\bar{P}_k(t)}{P_k(t)}.$$

Später wird folgen, dass dieser Ausfallsrisikofaktor gleich der Überlebenswahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt T_k unter dem T_k -forward Maß ist.

Die risikobehaftete Nullkupon Anleihe $\bar{P}_k(t)$ kann als versprochener Zins zum Zeitpunkt t im Zeitraum $[t, T_k]$, $k \in \{0, \dots, n\}$, interpretiert werden.

Aus diesen Elementen konstruiert man nun die Forward-Raten. Es gibt in diesem Modell die selben Forward-Raten wie im LMM im Kapitel zuvor und zusätzlich gibt es risikobehaftete Forward-Raten.

Definition 6.1. Durch folgende Notationen sind risikolose und risikobehaftete Forward Raten definiert. Zusätzlich wird noch der Forward Spread und die diskrete Ausfallsdichte bestimmt.

- Die risikolose Forward Rate $F_k(t)$, ist jener Zinssatz der ohne Risiko den Zinssatz über das Intervall $[T_k, T_{k+1}]$ zum Zeitpunkt t festlegt. Es gilt (entspricht 5.1)

$$F_k(t) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{P_k(t)}{P_{k+1}(t)} - 1 \right), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

- Die risikobehaftete Forward Rate $\bar{F}_k(t)$, ist jener Zinssatz der mit „Risiko des Ausfalls“ behaftete Zinssatz über das Intervall $[T_k, T_{k+1}]$ zum Zeitpunkt t festlegt (bedingt darauf, dass der Schuldner bis t nicht zahlungsunfähig wird). Es gilt

$$\bar{F}_k(t) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\bar{P}_k(t)}{\bar{P}_{k+1}(t)} - 1 \right), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

- Der forward Spread über das Intervall $[T_k, T_{k+1}]$ zum Zeitpunkt t ist der Risikoaufschlag der risikobehafteten Forward Rate $\bar{F}_k(t)$. Demnach gilt

$$S_k(t) = \bar{F}_k(t) - F_k(t), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

- Die diskrete Ausfallsdichte vom Zeitintervall $[T_k, T_{k+1}]$ zum Zeitpunkt t ist definiert durch

$$H_k(t) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{D_k(t)}{D_{k+1}(t)} - 1 \right), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Durch diese Definition lassen sich nun folgende Beziehungen für risikolose sowie Risikobehaftete Nullkupon Anleihen herleiten

$$\begin{aligned}\frac{P_k(t)}{P_{k+1}(t)} &= 1 + \delta F_k(t), & \frac{\bar{P}_k(t)}{\bar{P}_{k+1}(t)} &= 1 + \delta \bar{F}_k(t), \\ P_k(t) &= P_1(t) \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{1 + \delta F_j(t)}, & \bar{P}_k(t) &= \bar{P}_1(t) \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{1 + \delta \bar{F}_j(t)}, \\ S_k(t) &= H_k(t)(1 + \delta F_k(t)).\end{aligned}$$

Die oben erwähnten Beziehungen für die risikolose Forward Rate stimmen mit den Formeln aus (5.1) überein. Die Idee ist nun den risikolosen Teil, genauer die risikolose Forward Rate F_k , durch eine geometrische Brownsche Bewegung zu konstruieren. Dadurch kann man die Ergebnisse aus Kapitel 5 verwenden, um eine solche Struktur beschreiben und quantifizieren zu können. Der zusätzliche Aspekt der risikobehafteten Anleihe erfordert zusätzliche Annahmen um Arbitragefreiheit zu gewährleisten.

6.3 Forward Dynamiken

In diesem Abschnitt werden Annahmen an die risikolose Forward Rate und an den Forward Spread, bzw. an die diskrete Ausfallsdichte getroffen welche das Modell spezifizieren. Es sei hier die Filtration \mathbb{F} diskretisiert auf die Tenorstruktur gegeben ($\mathbb{F} = (F_{T_i})_{i=0, \dots, n}$). Des weiteren sei W eine n -dimensionale Brownsche Bewegung, adaptiert zu der Filtration \mathbb{F} und $\sigma_k^F(t) \in \mathbb{R}^n$ (Vektorwertige Form von (5.11)) eine Funktion in den Parametern T_k und t .

Bedingung 6.3. *Die risikolosen Forward Raten haben folgende Dynamiken unter W*

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \mu_k^F(t)dt + \sigma_k^F(t)'dW \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Der Drift in obiger Gleichung wird sich später aus der No-Arbitrage Bedingung ergeben. Dieser Drift ändert sich bekannterweise je nach Wahl des Maßes unter dem man die Dynamiken betrachtet. Das Hauptaugenmerk wird hierbei auf das Spot Martingalmaß mit der Normierungsgröße aus (5.5) liegen.

Denselben Weg für die risikobehaftete Forward Rate zu wählen, jenen der Log-Normalverteilung für Forward Raten, führt zu einer Arbitragemöglichkeit und wäre daher nicht sinnvoll. Man könnte nicht garantieren, dass die Differenz von risikobehafteter Forward Rate und risikoloser Forward Rate positiv ist (negativer Spread). Das würde bedeuten, dass die risikolose Anleihe einen höheren Ertrag generieren könnte als die risikobehaftete Anleihe. Dadurch könnte man durch Verkauf einer risikobehafteten Nullkupon Anleihe und durch die Investition des generierten Kapitals in die risikolose Anleihe eine Arbitragemöglichkeit generieren.

Daher wird der Forward Spread S oder die diskrete Ausfallsdichte H als geometrische Brownsche Bewegung konstruiert. Folgende zwei Alternativen sind möglich:

- Die diskrete Ausfallsdichte H_k hat Dynamiken von der Form (selbe W wie in Bedingung 6.3)

$$\frac{dH_k(t)}{H_k(t)} = \mu_k^H(t)dt + \sigma_k^{H'}dW, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Hierbei ist $\sigma_k^H \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter Vektor und μ_k^H eine Funktion in t und T_k .

- Der Forward Spread S hat Dynamiken von der Form

$$\frac{dS_k(t)}{S_k(t)} = \mu_k^S(t)dt + \sigma_k^{S'}dW, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (6.2)$$

Hierbei ist $\sigma_k^S \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter Vektor.

In diesem Model wird die erste Alternative gewählt, nämlich:

Bedingung 6.4. Die diskrete Ausfallsdichte H_k hat Dynamiken von der Form

$$\frac{dH_k(t)}{H_k(t)} = \mu_k^H(t)dt + \sigma_k^{H'}dW, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Hierbei ist $\sigma_k^H \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter Vektor.

Wählt man diese Konstruktion, dann ist daraus die risikobehaftete Forward Rate durch

$$\frac{d\bar{F}_k(t)}{\bar{F}_k(t)} = \mu_k^{\bar{F}}(t)dt + \sigma_k^{\bar{F}'}dW, \quad k \in \{0, \dots, n-1\},$$

definiert. Dabei ist jetzt die Volatilität $\sigma_k^{\bar{F}}$ nicht mehr ein konstanter Vektor (Aufgrund der Arbitragemöglichkeit). Man kann folgende Beziehungen zwischen den Volatilitäten errechnen:

$$\begin{aligned} \sigma_k^H &= \sigma_k^S - \frac{\delta F_k}{1 + \delta F_k} \sigma_k^F, \\ \bar{F}_k \sigma_k^{\bar{F}} &= \sigma_k^F F_k + \sigma_k^S S_k = (1 + \delta F_k) H_k \sigma_k^H + (1 + \delta H_k) F_k \sigma_k^F. \end{aligned}$$

Letztere Gleichung folgt aus,

$$\bar{F}_k(t) = H_k(t) + \delta F_k(t) H_k(t) + F_k(t),$$

und durch anwenden der Itô Formel auf $\delta F_k(t) H_k(t)$. Weiters wird nun eine No-Arbitragebedingung entwickelt welche sich auf das stetige Heath-Jarrow-Morton Modell aus Kapitel 3 bezieht. Dabei wird nicht eine Forward Rate sondern zwei Forward Raten verwendet und durch den Spread gekoppelt. Hat man diese Bedingung, kann durch den Tausch der normierenden Größe (die sogenannte „change of numeraire technique“ welche eine Anwendung des Satzes von Girsanov ist) eine No-Arbitragebedingung unter verschiedenen Maßen erarbeitet

werden. In diesem Modell treten neue Maße die sogenannten „Überlebensmaße“ auf, welche sich darauf bedingen das der Schuldner den Status der Zahlungsunfähigkeit nicht erreicht hat.

Ein solches Überlebensmaß wird dann benutzt um den Wert von risikobehafteten Payoffs (z.B. Default Swaps) zu bewerten. Daraus ergibt sich dann eine approximative Black Scholes Formel die wiederum die implizite Volatilität σ^H enthält. Da wir nun σ^H eine gleiche funktionale Struktur wie σ^F geben, kann durch Marktbeobachtungen die Funktion σ^H mittels numerischen Optimierungsmethoden geschätzt werden. Daraus resultiert die Struktur der diskreten Ausfallsdichte oder durch die Beziehungen der Volatilitäten die Struktur des Spreads.

6.4 HJM Driftbedingungen in einem stetigen Kontext

Die Arbeit von [Heath et al., 1992] bildet in diesem Abschnitt den Grundbaustein für die Entwicklung eines Modells ohne Arbitragemöglichkeit. Dabei wird ein stetiges Konzept verwendet welches aber auch auf die diskrete Tenorstruktur anwendbar ist. Für den risikolosen Teil (Nullkupon Anleihen P , Forward Rate f , Short Rate r , Bankguthaben P_t) des Modells wird die Definition 3.2 sowie die Bedingungen 3.2, 3.3 und 3.4 herangezogen. Später wird festgestellt, dass die Drift Bedingung (3.13) sich für die risikolose Forward Rate nicht ändert. Die folgenden Definitionen spiegeln den risikobehafteten Teil des Modells wider:

Definition 6.2. Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $\mathbb{F} = (F_t)_{t \geq 0}$ gegeben (diese ist äquivalent zum Abschnitt 6.1). Die folgenden Definition gelten bis zu einem Endzeitpunkt T^* (gleich wie im Kapitel 3)

- Es existieren an allen Zeitpunkten $0 \leq t \leq T^*$ die risikobehafteten Nullkupon Anleihen mit allen Laufzeiten $t \leq T \leq T^*$. Der Preis (Bewertungszeitpunkt t , Laufzeit $T - t$) einer Nullkupon Anleihe ist mit $\bar{P}(t, T)$ gegeben und $\bar{P}(t, T)$ sei im zweiten Argument differenzierbar. Die Auszahlung dieser Anleihe zum Zeitpunkt T ist gegeben durch $I(T)$ (aus Bedingung 6.1).

$$I(T) = 1_{\{\tau > T\}}$$

- Die risikobehaftete Forward Rate ist definiert durch:

$$\bar{f}(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln \bar{P}(t, T), \quad t \leq T \leq T^*.$$

- Die risikobehaftete Short Rate ist gegeben mit $\bar{r}(t) = \bar{f}(t, t)$ und das risikobehaftete Bankguthaben sei gegeben mit $\bar{P}_t = \exp\left(\int_0^t \bar{f}(u, u) du\right) I(t)$,

Alle oben angegebenen Definitionen sind nur für Zeitpunkte $t < \tau$ gültig.

Da nun die Definition solcher risikobehafteten Anleihen festgelegt ist, wird nun angenommen, dass die risikobehaftete Forward Rate mittels einer stochastischen Differentialgleichung dargestellt werden kann.

Bedingung 6.5. *Die Dynamik der risikobehafteten Forward Rate ist gegen durch:*

$$d\bar{f}(t, T) = \bar{\alpha}(t, T)dt + \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}_i(t, T)dW^i(t). \quad (6.3)$$

Dabei wird für die Prozesse $\bar{\alpha}(t, T)$ und $\bar{\sigma}_i(t, T)$ angenommen, dass sie vorhersagbar sind und dass sie technische Voraussetzungen erfüllen sodass,

- differenzieren unter dem Integral und
- vertauschen von Integrationsreihenfolge möglich sind,
- partielle Ableitung nach der Variable T existieren
- und beschränkte Preise $\bar{P}(t, \cdot)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ produzieren.

Aus der oben angegebenen Definition 6.2 ist zu folgern, dass der Preis einer risikobehafteten Nullkupon Anleihe dargestellt werden kann durch:

$$\bar{P}(t, T) = I(t) \exp \left(\int_t^T \bar{f}(t, s) ds \right).$$

Der Faktor $I(t)$ folgt aus der Bedingung dass die Anleihe bei Eintritt eines Ausfalls den Wert $\bar{P}(t, T) = 0$ für $t > \tau$ hat. Man kann nun die Dynamiken von $\bar{P}(t, \cdot)$ errechnen. Für mehr Details siehe [Schönbucher, 2000b].

Proposition 6.1 ([Schönbucher, 2000b] Proposition 2.1 (Punkt 1)). *Sind die Dynamiken der risikobehafteten Forward Rate gegeben durch (6.3), dann sind die Dynamiken der risikobehafteten Anleihe gegeben durch:*

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}(t, T)}{\bar{P}(t-, T)} &= \left[-\bar{\gamma}(t, T) + \bar{r}(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \bar{a}_i^2(t, T) \right] dt \\ &+ \sum_{i=1}^d \bar{a}_i(t, T) dW^i(t) - dO(t). \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \bar{a}_i(t, T) &= - \int_t^T \bar{\sigma}_i(t, v) dv, \\ \bar{\gamma}(t, T) &= \int_t^T \bar{\alpha}(t, v) dv. \end{aligned}$$

Des weiteren sind die Dynamiken der risikobehaftete Short Rate gegeben durch:

$$\bar{r}(t) = \bar{f}(0, t) + \int_0^t \bar{\alpha}(s, t) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \bar{\sigma}_i(s, t) dW^i(s).$$

Diese Proposition kann auch für den risikolosen Fall erfolgen, wird aber nicht weiter erwähnt, da schon im Kapitel 3 eine Bedingung für Arbitragefreiheit erarbeitet wurde. Das Hauptaugenmerk wird nun auf einer erweiterten Form des Satzes von Girsanov liegen. Es wird sich herausstellen, dass durch den Wechsel zu einem Martingalmaß sich die Volatilität der risikobehafteten Anleihe nicht ändern wird. Dasselbe trifft auch für das Integral nach $dO(t)$ zu. Jedoch wird sich der Drift sowie der Intensitätsprozess ψ ändern.

Satz 6.1 ([Schönbucher, 2000b] Theorem 2.3). *Angenommen der Ausfallsprozess $O(t) = (1 - I(t)) = 1_{\{\tau \leq t\}}$ besitzt eine Intensität ψ (siehe (6.1)). Sei θ ein d -dimensionaler vorhersagbarer Prozess $(\theta_1(t), \dots, \theta_n(t))$ und sei ϕ ein strikt positiver vorhersagbarer Prozess mit den Eigenschaften:*

$$\int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds < \infty, \quad \int_0^t |\phi(s)|\psi(s) ds < \infty, \quad \forall t \in (0, T^*).$$

Definiere den Prozess L mit $L(0) = 1$ und

$$\frac{dL(t)}{L(t-)} = \sum_{i=1}^n \theta_i(t) dW^i(t) + (\phi(t) - 1) dM(t).$$

Angenommen $\mathbb{E}[L(t) = 1]$ für alle $t \leq T^*$, dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q welches äquivalent zu P ist und

$$dQ = L_{T^*} dP, \quad \text{und} \quad dQ_t = L_t dP_t,$$

wobei $Q_t := Q|F_t$ und $P_t := P|F_t$ die Beschränkungen von Q und P auf \mathbb{F} sind, sodass

$$dW(t) - \theta(t)dt = d\bar{W}(t),$$

eine n -dimensionale Brownsche Bewegung unter Q ist und

$$\psi_Q(t) = \phi(t)\psi(t),$$

die Intensität des Ausfallsprozesses unter Q ist. Des weiteren kann jedes zu P äquivalente Maß wie oben angegeben, dargestellt werden.

Der oben Erwähnte Prozess θ kann mit dem Marktpreisrisiko aus Kapitel 3.2 assoziiert werden. Der Parameter ϕ ist neu in diesem Kontext und kann als Risikoprämie für das Sprungrisiko betrachtet werden.

6.4.1 Driftbedingung unter einem Martingalmaß

Wie schon zuvor erwähnt, ist es möglich durch geschickte Wahl eines bestimmten Maßes und der entsprechenden Normierungsgröße, Preise von Payoffs die durch Zufallsvariablen repräsentiert sind zu erhalten. Dabei bietet die Maßwechseltechnik eine gute Alternative um zwischen Maßen zu wechseln. Zuvor wurde erörtert, dass der Satz von Girsanov (Satz 3.1) das entscheidende Kriterium ist, welches diesen Wechsel beschreibt. Die erweiterte Form (Satz 6.1) berücksichtigt Sprünge. Grundlegend kann man einen Satz konstruieren welcher für Markierte Punkt Prozesse einen Maßwechsel erzeugen kann (siehe Appendix E). Es wird nun Angenommen, dass bereits ein Maßwechsel zu einem Martingal Maß durchgeführt wurde.

Annahme 6.1. *Das Maß \mathbb{P} mit Normierungsfaktor P_t ist ein Martingal Maß.*

Falls in diesem Fall $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ gilt, dann folgt daraus, dass $\theta \equiv 0$ und $\phi \equiv 1$. Der Ertrag der risikobehafteten Nullkupon Anleihe soll in Erwartung dem risikolosen Zinssatz $r(t)$ entsprechen (unter dem Martingal Maß \mathbb{P}) da sonst eine Arbitragemöglichkeit auftreten kann. Es wird unter dem Martingal Maß \mathbb{P} gefordert, dass

$$\mathbb{E} \left[\frac{d\bar{P}(t, T)}{\bar{P}(t-, T)} \right] \stackrel{!}{=} r(t)dt. \quad (6.4)$$

Setzt man nun die Dynamiken von Proposition 6.1 ein, erfolgt:

$$\begin{aligned} r(t)dt &\stackrel{!}{=} \mathbb{E} \left[\frac{d\bar{P}(t, T)}{\bar{P}(t-, T)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left[-\bar{\gamma}(t, T) + \bar{r}(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \bar{a}_i^2(t, T) \right] dt \right] + \\ &\quad \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^d \bar{a}_i(t, T) dW^i(t) - dO(t) \right], \\ r(t) &= -\bar{\gamma}(t, T) + \bar{r}(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \bar{a}_i^2(t, T) - \psi(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Aus dieser Bedingung wird sich später die Driftbedingung ergeben. Zunächst betrachten wir den Aspekt, dass unter dem Martingalmaß \mathbb{P} das risikobehaftete Bankguthaben \bar{P}_t diskontiert mit dem risikolosen Diskontierungsfaktor $P_t = e^{\int_0^t r(s)ds}$ ein Martingal sein muss. Sei der diskontierte Prozess durch \tilde{c} definiert. Dann gilt:

$$\tilde{c}(t) = I(t) \exp \left(\int_0^t \bar{r}(s) - r(s) ds \right).$$

Die oben angegebene Form entspricht dem Dolean Exponential von

$$\hat{M}(t) := -O(t) + \int_0^{\min\{t, \tau\}} \bar{r}(s) - r(s) ds,$$

welches wiederum ein Martingal ist. Da die Definition von $\bar{r}(t)$ nur für $t < \tau$ definiert ist, wird für $t > \tau$ die risikobehaftete Short Rate mit $\bar{r}(t) = r(t), \forall t \geq \tau$, definiert. Es kann nun gezeigt werden, dass für den Prozess M aus 6.1 gilt, dass $-M(t) = -O(t) + \int_0^t \psi(s) ds$ auch ein Martingal ist. Nimmt man nun die Differenz von $-M(t)$ und $\hat{M}(t)$, ergibt sich

$$M(t) - \hat{M}(t) = \int_0^t \psi(s) - \bar{r}(s) + r(s) ds. \quad (6.6)$$

Dann muss der Prozess auf der linken Seite der Gleichung (6.6) ein Martingal sein. Die rechte Seite von (6.6) ist ein vorhersagbarer Prozess. Das einzige vorhersagbare Martingal ist eine Konstante daher gilt für fast alle s ,

$$\psi(s) = \bar{r}(s) - r(s). \quad (6.7)$$

Fügt man nun die Formel (6.7) als notwendige No-Arbitrage Bedingung in die Formel (6.5) ein, ergibt sich

$$\bar{\gamma}(t, T) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \bar{a}_i^2(t, T). \quad (6.8)$$

Dies ist somit die Driftbedingung für die risikobehaftete Forward Rate. Zusammengefasst ergibt sich folgender Satz:

Satz 6.2. *Die Folgenden Aussagen sind Äquivalent:*

- *Das Maß unter dem die Dynamiken spezifiziert sind, ist ein Martingal Maß.*
- *– Der Short Rate Spread ist die Intensität des Ausfallsprozesses. Diese ist nicht negativ und es gilt*

$$\psi(t) = \bar{r}(t) - r(t) > 0$$

- Der Drift Koeffizient der risikobehafteten Forward Rate erfüllt für $t \leq T, t < \tau$,*

$$\int_t^T \bar{\alpha}(t, v) dv = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \left(\int_t^T \bar{\sigma}_i(t, v) dv \right)^2$$

- Der Drift Koeffizient der risikolosen Forward Rate erfüllt die Bedingung ($t \leq T$),*

$$\alpha(t, T) = \sum_{i=1}^d \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, v) dv.$$

- *– $\bar{r}(t) - r(t) = \psi(t) > 0$*
- Die Dynamiken der risikobehafteten Nullkupon Anleihe sind gegeben durch:*

$$\frac{d\bar{P}(t, T)}{\bar{P}(t^-, T)} = \bar{r}(t) dt + \sum_{i=1}^d \bar{a}_i(t, T) dW^i(t) - dO(t),$$

oder äquivalent,

$$\begin{aligned} \bar{P}(t, T) = & 1_{\{\tau > t\}} \bar{P}(0, T) \exp \left(\int_0^t \bar{r}(s) ds - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t a_i^2(s, T) ds \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^d \int_0^t \bar{a}_i(s, T) dW^i(s) \right). \end{aligned}$$

– Die Dynamiken der risikolosen Nullkupon Anleihe erfüllt unter dem Martingal Maß:

$$\frac{dP(t, T)}{P(t^-, T)} = r(t)dt + \sum_{i=1}^d a_i(t, T) dW^i(t).$$

6.5 Maßwechseltechnik

Wie schon zuvor erwähnt behandelt das hier gewählte Modell auch risikobehaftete Nullkupon Anleihen. Dank dem Satz von Girsanov für markierter Punkt Prozesse ist es möglich auch durch unstetige Nullkupon Anleihen Strukturen einen Maßwechsel durchzuführen. Es wird nun wie in der Definition (3.1) von der Arbitrage freien Familie von Bondpreisen ein Zinssatz r als Basis für risikoloses Investment betrachtet (Bank). Demnach ist der Diskontierungsfaktor für das Spot Martingalmaß \mathbb{P} gegeben durch

$$\beta(t) = e^{-\int_0^t r(s) ds}, \quad P_t = e^{\int_0^t r(s) ds}.$$

Da nun das Martingalmaß durch \mathbb{P} festgelegt wird, kann der Preis p einer Zahlung X zu einem zukünftigen Zeitpunkt T_k in Abhängigkeit des Betrachtungszeitpunktes t ($p(t)$ ist der Preis zum Zeitpunkt $t \leq T_k$) festgelegt werden durch

$$p(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\beta(T_k)}{\beta(t)} X | F_t \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{P_t}{P_{T_k}} X | F_t \right].$$

Da es sich nun um ein Martingalmaß handelt, muss $\beta(t)p(t)$ ein Martingal unter \mathbb{P} sein. Ändert man nun den normierenden Faktor P_t auf $\hat{A}(t)$ dann ist der Preis p' unter dem neuen Normierungsfaktor gegeben durch

$$\begin{aligned} p'(t) &= \frac{P_t}{\hat{A}(t)} p(t) = \frac{P_t}{\hat{A}(t)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\hat{A}(T_k)}{P_{T_k}} X' | F_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{L_{\hat{A}}(T_k)}{L_{\hat{A}}(t)} X' | F_t \right] = \mathbb{E}^{P_{\hat{A}}} [X' | F_t]. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Hierbei ist $X' = \frac{X}{\hat{A}(T_k)}$ die Zahlung die zu dem neuen Normierungsfaktor korrespondiert. In der Gleichung (6.9) wurde ein neues Maß $P_{\hat{A}}$ durch die Radon-Nikodym Ableitung folgendermaßen definiert

$$\frac{dP_{\hat{A}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{F_t} = L_{\hat{A}}(t) = \frac{\beta(0) \hat{A}(t)}{\hat{A}(0) \beta(t)}.$$

Der dichte Prozess $(L_{\hat{A}}(t))_{t \geq 0}$ ist ein Martingal unter \mathbb{P} , da das Martingalmaß aus jedem gehandelten Objekt (in diesem Fall $\hat{A}(t)$) durch Normierung mit P_t ein Martingal macht. Es wird nun durch diese Technik der Erwartungswert $\mathbb{E}^{P_{\hat{A}}}[X|F_t]$ zur Berechnung herangezogen. An diesem Punkt wird der Satz von Girsanov verwendet um die Dynamiken des Prozesses unter dem Maß $P_{\hat{A}}$ zu bestimmen. Somit kann der Erwartungswert direkt unter dem Maß $P_{\hat{A}}$ berechnet werden.

6.5.1 Drift unter dem T_k -forward Maß

Der Normierungsfaktor in diesem Fall ist die risikolose Nullkupon Anleihe $P_k(t) = P(t, T_k)$. Sei nun X ein Zahlung zum Zeitpunkt T_k dann ist der Preis dieser Zahlung zum Zeitpunkt t gegeben durch die Preis Formel (6.9) mit

$$p'(t) = \frac{p(t)}{P_k(0)} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\beta(T_k)P_k(T_k)}{P_k(0)} X \middle| F_t \right] = \mathbb{E}^{P_{\hat{A}}}[X|F_t].$$

Weil $P_k(T_k) = 1$ ist muss die Zahlung nicht auf die neue Form X' transformiert werden. Der Dichte Prozess ist in diesem Fall

$$L_k(t) = \frac{\beta(t)P_k(t)}{P_k(0)} = \frac{dP_k}{d\mathbb{P}} \Big|_{F_t}.$$

Der Preis einer risikolosen Nullkupon Anleihe (unter dem Spot Maß \mathbb{P}) ist gegeben aus der Lösung der Gleichung (3.11) mit,

$$\frac{P(t, T)}{P(0, T)} = \exp \left(\int_0^t r(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_s^T \sigma^f(s, u) du \right)^2 ds - \int_0^t \left(\int_s^T \sigma^f(s, u) du \right) dW^{\mathbb{P}}(s) \right).$$

Aus dieser Gleichung ist zu erkennen, dass sich der Term $\exp \left(\int_0^t r(s) ds \right)$ in L_k aufhebt. Analysiert man nun diese Dichte L_k wird der Wechsel vom Spot Maß \mathbb{P} zum T_k -Forward Maß \mathbb{P}_k durch die neue Brownsche Bewegung

$$dW_{T_k}(t) = dW_{\mathbb{P}} + \alpha_k(t)dt,$$

beschrieben. Hier sei Angemerkt, dass durch den Maßwechsel von \mathbb{P} zum T_k -Forward Maß die Intensität des Sprungprozesses nicht von diesem Wechsel beeinflusst wird. Daher ist die Intensität $\psi_{\mathbb{P}} = \psi_{T_k}$.

Der Drift $\alpha_k(t)$ wurde schon in Kapitel 5 berechnet, indem man die Dynamiken des Prozesses $\frac{P_i(t)}{P_k(t)}$ berechnet und die Eigenschaft des Martingals $\frac{P_i(t)}{P_k(t)}$ ausnutzt um den Drift zu erhalten. Diese Rechnungen sind äquivalent zum Kapitel 5 und werden hier nicht wiederholt. Das Ergebnis kann auch rekursiv dargestellt werden indem man rekursiv vom T_k -Forward Maß auf das T_{k+1} -Forward Maß wechselt. Für weiter Details siehe [Jamshidian, 1997], es ergibt sich

$$\alpha_{k+1}(t) = \alpha_k(t) + \frac{\delta F_k(t)}{1 + \delta F_k(t)} \sigma_k^F(t).$$

6.5.2 Spot LIBOR Maß

Es handelt sich bei diesem mit Ausfallrisiko behafteten Modell um eine Erweiterung eines LIBOR Markt Modells. Dabei spielt auch das Spot-LIBOR Maß eine wesentliche Rolle, da dieses Maß dem Spot Maß ähnelt. Wie in auch in Kapitel 5 beschrieben, hat die normierende Größe N die Form

$$N(t) = P(t, T_{m(t)+1}) \prod_{j=0}^{m(t)} (1 + F_j(T_j)\delta).$$

Hierbei hat $m(t)$ wiederum die Form $m(t) = \max\{i \in \{0, \dots, n\} | T_i \leq t\}$. Für dieses Maß wurden keine Quellen gefunden. In diesem Abschnitt wird der Drift unter dem Spot-LIBOR Maß für ein Arbitrage freies Modell kalkuliert. In Gleichung (6.2) ist der Drift mit $\mu_k^S(t)$ definiert. Diesen gilt es nun zu berechnen.

Es wird eine ähnliche Vorgehensweise verwendet wie in Kapitel 5. Es wird folgender Ausdruck verwendet

$$\frac{\bar{P}(t, T_j)}{N(t)}, \quad t \leq T_j. \quad (6.10)$$

Dieser diskontierte Preisprozess muss ein Martingal unter dem Spot-LIBOR Maß sein. Des weiteren wird verwendet, dass die Zeitpunkte t aus der Tenorstruktur $\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ gewählt werden. Das hat den Vorteil, dass sich $P(t, T_{m(t)+1})$ für $t \in \{T_0, \dots, T_n\}$ auf ein $P(T_j, T_{j+1})$ vereinfacht. Des weiteren wird der bereits berechnete Drift $\mu_j^F(t)$ aus Kapitel 5 (Gleichung (5.7)), nämlich

$$\mu_j^F(t) = \sum_{l=m(t)+1}^j \frac{\delta F_l(t)}{1 + \delta F_l(t)} \sigma_j^F(t) \sigma_l^F(t) \rho_{j,l}^F(t),$$

in die Berechnung miteinbezogen. Hierbei ist zu beachten, dass die Korrelation auch wie in Kapitel 5, eine Funktion mit zwei Parametern ist.

Nun wird die Martingal-Eigenschaft von (6.10) verwendet (da ein normiertes, gehandeltes Produkt ein Martingal unter dem Martingalmaß ist) um $\mu_j^S(t)$ zu bestimmen. Dabei ist nun für ein $i, k \in \{0, \dots, n\}$ mit $k \leq i$ (hierbei wurde die Notation vereinfacht, $\bar{P}(T_k, T_i) = \bar{P}_i(T_k)$, usw.),

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}_i(T_k)}{N(T_k)} &= \frac{\bar{P}_i(T_k)}{P_{k+1}(T_k) \prod_{j=0}^k (1 + F_j(T_j)\delta)} \\ &= \frac{\bar{P}_i(T_k)}{P_{k+1}(T_k)} \prod_{j=0}^k (1 + F_j(T_j)\delta)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Es wird nun folgende Eigenschaft ($\bar{F} = F + S$) verwendet,

$$\bar{P}_i(T_k) = \prod_{j=k+1}^{i-1} (1 + \delta F_j(T_k) + \delta S_j(T_k))^{-1}.$$

Daraus ergibt sich aus (6.11),

$$\begin{aligned}\frac{\bar{P}_i(T_k)}{N(T_k)} &= \prod_{j=k+1}^{i-1} (1 + \delta F_j(T_k) + \delta S_j(T_k))^{-1} \prod_{j=0}^k (1 + F_j(T_j)\delta)^{-1} (1 + F_k(T_k)\delta) \\ &= \prod_{j=k+1}^{i-1} (1 + \delta F_j(T_k) + \delta S_j(T_k))^{-1} \prod_{j=0}^{k-1} (1 + F_j(T_j)\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

Es muss nun gelten, dass

$$Driфт \left[\prod_{j=k+1}^{i-1} (1 + \delta F_j(T_k) + \delta S_j(T_k))^{-1} \right] \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese Vorgehensweise ist analog zur der aus Kapitel 5. Auch in diesem Fall kann hier die Itô Formel verwendet werden. Die Funktion für die Itô Formel lautet in diesem Fall

$$f(F_k, F_{k+1}, \dots, F_{i-1}, S_k, \dots, S_{i-1}) = \prod_{j=k+1}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j}.$$

Definiert man die Dynamiken

$$\begin{aligned}\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} &= \mu_j^F(t)dt + \sigma_j^{F'}(t)dW_t, \\ \frac{dS_j(t)}{S_j(t)} &= \mu_j^S(t)dt + \sigma_j^{S'}(t)dW_t,\end{aligned}$$

und die Korrelationen

$$\begin{aligned}d[F_j, F_i]_t &= \sigma_j^F(t)\sigma_i^F(t)\rho_{j,i}^F(t)dt, \\ d[S_j, S_i]_t &= \sigma_j^S(t)\sigma_i^S(t)\rho_{j,i}^S(t)dt, \\ d[F_j, S_i]_t &= \sigma_j^F(t)\sigma_i^S(t)\rho_{j,i}^{F,S}(t)dt,\end{aligned}$$

dann folgt daraus,

$$\begin{aligned}
df &= \sum_{j=k+1}^{i-1} -\frac{1}{(1 + \delta F_j + \delta S_j)^2} \prod_{\substack{l=k+1 \\ j \neq l}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l} dF_j \\
&+ \sum_{j=k+1}^{i-1} -\frac{1}{(1 + \delta F_j + \delta S_j)^2} \prod_{\substack{l=k+1 \\ j \neq l}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l} dS_j \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,n=k+1 \\ n < j}}^{i-1} \frac{1}{(1 + \delta F_j + \delta S_j)^2} \frac{1}{(1 + \delta F_n + \delta S_n)^2} \prod_{\substack{l=k+1 \\ j \neq l, n \neq l}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l} d[F_j, S_n] \\
&+ \sum_{\substack{j,n=k+1 \\ n < j}}^{i-1} \frac{1}{(1 + \delta F_j + \delta S_j)^2} \frac{1}{(1 + \delta F_n + \delta S_n)^2} \prod_{\substack{l=k+1 \\ j \neq l, n \neq l}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l} d[F_j, F_n] \\
&+ \sum_{\substack{j,n=k+1 \\ n < j}}^{i-1} \frac{1}{(1 + \delta F_j + \delta S_j)^2} \frac{1}{(1 + \delta F_n + \delta S_n)^2} \prod_{\substack{l=k+1 \\ j \neq l, n \neq l}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l} d[S_j, S_n] \\
&+ \sum_{j=k+1}^{i-1} \frac{1}{(1 + \delta F_j + \delta S_j)^3} \prod_{\substack{l=k+1 \\ l \neq j}}^{i-1} \frac{1}{(1 + \delta F_l + \delta S_l)} d[F_j, F_j] \\
&+ \sum_{j=k+1}^{i-1} \frac{1}{(1 + \delta F_j + \delta S_j)^3} \prod_{\substack{l=k+1 \\ l \neq j}}^{i-1} \frac{1}{(1 + \delta F_l + \delta S_l)} d[S_j, S_j] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,n=k+1 \\ n < j}}^{i-1} \frac{1}{(1 + \delta F_j + \delta S_j)^2} \frac{1}{(1 + \delta F_n + \delta S_n)^2} \prod_{\substack{l=k+1 \\ j \neq l, n \neq l}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l} d[S_j, F_n] \\
&+ \sum_{j=k+1}^{i-1} \frac{1}{(1 + \delta F_j + \delta S_j)^2} \frac{1}{(1 + \delta F_n + \delta S_n)^2} \prod_{\substack{l=k+1 \\ j \neq l}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l} d[S_j, F_j].
\end{aligned}$$

Die Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{l=k \\ l \neq j, l \neq n}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l} &= (1 + \delta F_j + \delta S_j)(1 + \delta F_n + \delta S_n) \prod_{l=k}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l}, \\
\sum_{\substack{j,n=k+1 \\ j < n}}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j} \frac{1}{1 + \delta F_n + \delta S_n} d[F_j, S_n] &= \\
\sum_{j=k+1}^{i-1} \left(\frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j} \sum_{n=k+1}^j \frac{1}{1 + \delta F_n \delta S_n} d[F_j, S_n] - \frac{1}{(1 + \delta F_j + \delta S_j)^2} d[F_j, S_j] \right)
\end{aligned}$$

vereinfachen die Rechnung auf

$$\begin{aligned}
df = & \left(\prod_{l=k+1}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l} \right) \sum_{j=k+1}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j} \left[\right. \\
& - dF_j - dS_j + \frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j} \left(d[F_j] + d[S_j] + \frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j} d[F_j, S_j] \right) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=k+1}^j \frac{1}{1 + \delta F_n + \delta S_n} d[F_j, S_n] + \sum_{n=k+1}^j \frac{1}{1 + \delta F_n + \delta S_n} d[F_j, F_n] \\
& + \sum_{n=k+1}^j \frac{1}{1 + \delta F_n + \delta S_n} d[S_n, S_j] + \frac{1}{2} \sum_{n=k+1}^j \frac{1}{1 + \delta F_n + \delta S_n} d[F_n, S_j] \\
& \left. - \frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j} \left(\frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j} d[F_j, S_j] + d[F_j, F_j] + d[S_j, S_j] \right) \right].
\end{aligned}$$

Die oben angegebene Gleichung kann reduziert werden auf

$$\begin{aligned}
df = & \prod_{l=k+1}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_l + \delta S_l} \sum_{j=k+1}^{i-1} \frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j} \left[- dF_j - dS_j \right. \\
& \left. + \sum_{n=k+1}^j \frac{1}{1 + \delta F_n + \delta S_n} \left(d[F_j, F_n] + \frac{1}{2} d[F_n, S_j] + \frac{1}{2} d[S_n, F_j] + d[S_j, S_n] \right) \right].
\end{aligned}$$

Wenn der Drift von jedem einzelnen Summanden in obiger Gleichung (erste Summe über j) Null ist, dann ist der Drift des ganzen Ausdruckes df Null. Daher folgt folgende hinreichende No-Arbitrage Bedingung:

$$\begin{aligned}
\text{Drift} \left[& (-dF_j - dS_j) \frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j} + \frac{1}{1 + \delta F_j + \delta S_j} \right. \\
& \left. \times \sum_{n=k+1}^j \frac{1}{1 + \delta F_n + \delta S_n} \left(d[F_j, F_n] + \frac{1}{2} d[F_n, S_j] + \frac{1}{2} d[S_n, F_j] + d[S_n, S_j] \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man nun die Dynamiken und die Korrelationen (siehe oben) ein, kann man den Drift μ_j^S unter dem Spot-LIBOR-Maß berechnen. Es werden dabei lediglich die Dynamiken eingesetzt und Terme von der Form $d[W] = dt$ und $d[W, t] = 0$ verwendet. Das Endergebnis

lautet

$$\begin{aligned} \mu_j^S(t) = & -\mu_j^F(t) \frac{F_j(t)}{S_j(t)} + \frac{1}{S_j(t)} \sum_{l=m(t)+1}^j \frac{1}{1+F_l(t)+S_l(t)} \left[F_j(t)F_l(t)\sigma_j^F(t)\sigma_l^F(t)\rho_{j,l}^F(t) \right. \\ & + \frac{1}{2}F_l(t)S_j(t)\sigma_l^F(t)\sigma_j^S(t)\rho_{j,l}^{F,S}(t) + \frac{1}{2}F_j(t)S_l(t)\sigma_j^F(t)\sigma_l^S(t)\rho_{j,l}^{F,S}(t) \\ & \left. + S_l(t)S_j(t)\sigma_j^S(t)\sigma_l^S(t)\rho_{j,l}^S(t) \right]. \end{aligned}$$

Dies gilt für $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Mit Hilfe aus dem LIBOR Markt Modell hat man nun einen Drift unter dem Spot LIBOR Maß gefunden. Später kann man mit Hilfe dieses Drifts Simulationen durchführen um vorhersagen der Zinsentwicklung zu generieren.

6.5.3 Überlebens Maß

Da bisher nur Numéraires verwendet wurden, welche nicht mit Ausfallsrisiko behaftet waren, besitzt dieses Modell eine neue Klasse von Maßen. Ein solches Maß ist das T_k -Überlebens Maß. Ähnlich zu dem T_k -Forward Maß wird das T_k -Überlebens Maß verwendet um Zahlungen in der Zukunft, die mit dem Risiko des Ausfalls behaftet sind, zu bewerten. Man verwendet dazu die Preisformel für eine Zahlung X die zum Zeitpunkt T_k fällig wird. Da diese Zahlung nur dann fällig wird falls der Schuldner bis zum Zeitpunkt T_k überlebt, hat die Zahlung die Form $XI(T_k)$ und der Preis unter dem T_k -Überlebens Maß $\bar{\mathbb{P}}_{T_k}$ (normierende Größe ist hier $\bar{P}_k(t)$) hat dann die Form (mit Hilfe der Maßwechseltechnik)

$$p'(t) = \frac{p(t)}{\bar{P}_k(0)} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\beta(T_k)I(T_k)\bar{P}_k(T_k)}{\bar{P}_k(0)} X \right] = \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}_k} [X].$$

Die Radon Nikodym Ableitung von \mathbb{P} zu $\bar{\mathbb{P}}_k$ ist gegeben mit (bedingt auf $\tau > t$)

$$\bar{L}_k(t) = \frac{\beta(t)I(t)\bar{P}_k(t)}{\bar{P}_k(0)} = \frac{d\bar{\mathbb{P}}_k}{d\mathbb{P}} \Bigg|_{\mathcal{F}_t}. \quad (6.12)$$

Dieser Prozess ist ein nicht negatives \mathbb{P} -Martingal mit Anfangswert $\bar{L}_k(0) = 1$. Dieser Prozess ist nicht mehr strikt positiv, da im Falle eines Ausfalls der Prozess auf den Wert 0 springt. Das bedeute, dass das Überlebens Maß jenen Fällen bei denen es zu einem Ausfall der Anleihe kommt auf Null gewichtet,

$$\bar{\mathbb{P}}_k(\tau \leq T_k) = \mathbb{E}^Q[\bar{L}_k(T_k)1_{\{\tau \leq T_k\}}] = 0.$$

Diese Eigenschaft korrespondiert zum Namen Überlebens Maß, denn es werden nur jene Szenarios gewichtet, bei den es zu keinem Ausfall kommt. Das T_k Überlebens Maß ist nicht mehr äquivalent zu \mathbb{P} aber durch den Satz E.1 ist dennoch ein Maßwechsel möglich, denn $\bar{\mathbb{P}}_{T_k}$ ist absolut stetig bezüglich \mathbb{P} .

Betrachtet man die Dichte $\bar{L}_k(t)$ hinsichtlich des Satzes E.1 dann ergibt sich $\phi(t) = 0$ und es ergibt sich ein Maßwechsel mit neuer Brownscher Bewegung:

$$d\bar{W}_{T_k}(t) = dW_{\mathbb{P}}(t) + \bar{\alpha}_k(t)dt = dW_{\mathbb{P}}(t) - \int_t^{T_k} \sigma^{\bar{F}}(t, s)ds.$$

Wiederum kann eine rekursive Form (für $\bar{\alpha}_k$) gefunden werden,

$$\bar{\alpha}_{k+1}(t) = \bar{\alpha}_k(t) + \frac{\delta \bar{F}_k(t) \sigma_k^{\bar{F}}(t)}{1 + \delta \bar{F}_k(t)}.$$

Da wir \bar{F} nicht direkt modellieren, muss die Form des Drifts unter $\bar{\mathbb{P}}_{T_k}$ mit Hilfe der Prozesse F und H dargestellt werden. Wenn wir $\alpha_k^D(t)$ definieren als die negative Volatilität von D_k , das entspricht folgendem Ausdruck

$$\frac{dD_k(t)}{D_k(t-)} = \dots dt - \alpha_k^D(t)dW,$$

dann kann wegen $\bar{P}_k(t) = P_k(t)D_k(t)$ die Volatilität $\bar{\alpha}_k(t)$ durch folgenden Ausdruck formuliert werden

$$\bar{\alpha}_k(t) = \alpha_k(t) + \alpha_k^D(t).$$

Man kann auch in diesem Fall eine rekursive Form von $\alpha_k^D(t)$ finden, nämlich

$$\alpha_{k+1}^D(t) = \alpha_k^D(t) + \frac{\delta H_k(t) \sigma_k^H(t)}{1 + \delta H_k(t)}.$$

Somit ist der Drift unter dem T_k Überlebensmaß festgelegt.

6.6 Rückgewinnungszahlung und Ausfalls-Optionen

Für eine Kalibrierung der Grundbausteine bestehend aus den Nullkupon Anleihen an den Markt, muss es auf dem Finanzmarkt Derivate geben, welche diese Nullkupon Anleihen als Basis besitzen. Denn nur so können mögliche Schätzungen und Anpassungen des LIBOR Markt Modells mit Ausfallsrisiko durchgeführt werden. Der Finanzmarkt bietet mit Ausfalls-Swaps eine Möglichkeit sich gegen Ausfälle von Zahlungen abzusichern. Des Weiteren existieren Optionen auf diese Ausfalls-Swaps. Da ein Ausfalls-Swap, bzw. eine Ausfalls-Option, aus verschiedenen risikobehafteten Nullkupon Anleihen besteht, kann man durch dieses Derivate das LIBOR Markt Modell schätzen. Es wird hier eine ähnliche Vorgehensweise wie bei einem gewöhnlichem LIBOR Markt Modell (Kapitel 5) gewählt, indem man die implizite Volatilität einer Ausfalls-Options Formel verwendet.

Die Rückgewinnungszahlung ist eine weitere Marktanpassung und beschreibt den Wert eines Derivates welches vom Ausfall betroffen ist. Am Finanzmarkt besitzt ein zahlungsunfähiges Derivat einen bestimmten Restwert. Dieser Restwert wird mit dem Begriff der Rückgewinnungszahlung bezeichnet.

Die Ergebnisse in diesem Abschnitt stammen hauptsächlich aus der Arbeit [Schönbucher, 2000a].

6.6.1 Rückgewinnungszahlung

In diesem Abschnitt werden hauptsächlich Rückgewinnungszahlungen aus Anleihen mit Ausfallsrisiko behandelt. Die Höhe der Rückgewinnungszahlung ist vor dem Kauf einer Anleihe nicht bekannt und daher muss die Rückgewinnungszahlung eine Zufallsvariable sein. Eine Anleihe dieser Form besteht daher aus zwei Teilen. Der erste Teil besteht aus den sogenannten nicht rückgewinnungsfähigen Nullkupon Anleihen $\bar{P}(t, T)$ und der zweite Teil besteht aus den rückgewinnungsfähigen Nullkupon Anleihen $\bar{P}^p(t, T)$ welche eine Rückgewinnungszahlung, bestehend aus einem Faktor π mal dem Nennwert (Nominale) zum Zeitpunkt des Ausfalles, besitzt.

Bedingung 6.6. Falls eine Anleihe im Intervall $(T_k, T_{k+1}]$ zahlungsunfähig wird, ist der Restwert der Anleihe gegeben durch einen Rückgewinnungsfaktor π mal der Summe bestehend aus der Nominale und dem Zinssatz der Anleihe über das Intervall $(T_k, T_{k+1}]$. Es gibt zwei Möglichkeiten des Zinssatzes:

- Eine konstante Zinsrate c für Anleihen mit fixem Kupon $1 + c$ (die Nominale ist hierbei normiert mit 1),

$$\pi(1 + c).$$

- Eine variable Zahlung F_k ,

$$\pi(1 + \delta F_k(T_k)).$$

Des weiteren wird mit $e_k(t)$ der Wert zum Zeitpunkt t von einem Kontrakt beschrieben welcher die Auszahlung 1 am Zeitpunkt T_{k+1} garantiert, dann und nur dann, wenn eine Zahlungsunfähigkeit im Intervall $(T_k, T_{k+1}]$ vorliegt.

Der Rückgewinnungsfaktor kann stochastisch aus dem Intervall $[0, 1]$ sein, muss aber unabhängig von der risikolosen Nullkupon Anleihe sein.

Verwendet man nun Bedingung 6.6 dann hat die Zahlung welche zum Zeitpunkt T_N den Wert 1 besitzt, welche keine Kupons während der Laufzeit generiert und eine positive Rückgewinnungszahlung besitzt die Form

$$\bar{P}^p(0, T_N) = \bar{P}_N(0) + \pi \sum_{i=1}^N e_{i-1}(0).$$

Dazu ähnlich kann eine Zahlung die N fixe Kupons $1 + c$ generiert (zu den Zeitpunkten $i = 1, \dots, N$) und welche auf die Nominale 1 normiert ist, beschrieben werden durch

$$\bar{P}_N(0) + \sum_{i=1}^N (c\bar{P}_i(0) + (1 + c)\pi e_{i-1}(0)).$$

Durch diese Modellierung der Rückgewinnungszahlung ist selbst der Wert von einfachen Derivaten wie zum Beispiel von einer Anleihe mit fixen Kuponzahlungen nicht trivial bestimmbar. Die folgenden zwei Ergebnisse legen den Wert von Anleihen mit fixem Kupon und variablen Kupon fest. Dabei spielt die Unabhängigkeits-Annahme von der risikolosen Forward Rate F_k und der Ausfallsdichte H_l eine wesentliche Rolle.

Proposition 6.2 ([Schönbucher, 2000a]). *Unter der Annahme das H_l und F_k unabhängig sind (für $l, k \in \{1, \dots, n-1\}$), gilt (Notation vereinfacht auf $H_l(t) = H_l$):*

- *Der Wert eines Kontrakts e_k der am Zeitpunkt T_{k+1} den Wert 1 garantiert, dann und nur dann, wenn im Zeitraum (T_k, T_{k+1}) eine Zahlungsunfähigkeit vorliegt ist gegeben durch*

$$e_k = \bar{P}_{k+1} \delta H_k.$$

- *Der Wert einer Zahlung $1 + \delta F_k(T_k)$ zum Zeitpunkt T_{k+1} wenn eine Zahlungsunfähigkeit im Intervall (T_k, T_{k+1}) vorliegt hat den Wert*

$$\bar{P}_{k+1} \delta S_k.$$

- *Der Wert einer Zahlung $F_k(T_k)$ zum Zeitpunkt T_{k+1} falls keine Zahlungsunfähigkeit vorliegt ist gegeben mit*

$$\bar{P}_{k+1} F_k.$$

Falls keine Unabhängigkeit zw. den risikolosen Nullkupon Anleihen und den risikobehafteten Nullkupon Anleihen herrscht, muss man auf Approximationen zurückgreifen. Für mehr Details siehe [Schönbucher, 2000a].

Proposition 6.3 ([Schönbucher, 2000a]). *Falls die Prozesse H_k und F_l nicht unabhängig sind, dann gilt:*

- *Der Wechsel vom T_k -forward Maß \mathbb{P}_{T_k} zum T_k -Überlebens Maß $\bar{\mathbb{P}}_{T_k}$ erfolgt mittels Dichte*

$$L_k^D(t) = e^{-\int_0^t \psi(s) ds} \frac{D_k(t)}{D_k(0)}.$$

Die approximative Volatilität (hierbei wurde $H_l(t)$ durch $H_l(0)$ ersetzt) dieses Prozesses ist gegeben durch

$$A_{k,m}^D = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\delta H_l \sigma_l^H}{1 + \delta H_l} T_{l \wedge m}.$$

- *Der Wert eines Kontrakts e_k der am Zeitpunkt T_{k+1} den Wert 1 garantiert, dann und nur dann, wenn im Zeitraum (T_k, T_{k+1}) eine Zahlungsunfähigkeit vorliegt ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} e_k &= \bar{P}_{k+1} \delta \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}_{T_{k+1}}} [H_k] \\ &= \delta H_k \bar{P}_{k+1} + \bar{P}_k \text{cov}^{\mathbb{P}_{T_k}} \left(L_k^D(T_k), \frac{1}{1 + \delta F_k(T_k)} \right) \\ &\approx \delta H_k \bar{P}_{k+1} - \bar{P}_k \frac{\delta F_k}{1 + \delta F_k} \left(\exp \left(\frac{\sigma_k^F A_{k,k}^D}{1 - \delta F_k} \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

- Der Wert einer Zahlung $1 + \delta F_k(T_k)$ zum Zeitpunkt T_{k+1} wenn eine Zahlungsunfähigkeit im Intervall $]T_k, T_{k+1}[$ vorliegt hat den Wert

$$\begin{aligned}\bar{P}_{k+1} \delta \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{T_{k+1}}}[S_k] &= \delta S_k \bar{P}_{k+1} - \delta \bar{P}_{k+1} \text{cov}^{\mathbb{P}^{T_k}}(L_{k+1}^D(T_k), F_k(T_k)) \\ &\approx \delta S_k \bar{P}_{k+1} - \bar{P}_{k+1} \delta F_k (\exp\{A_{k+1,k}^D \sigma_k^F\} - 1).\end{aligned}$$

- Der Wert einer Zahlung $F_k(T_k)$ zum Zeitpunkt T_{k+1} falls keine Zahlungsunfähigkeit vorliegt ist gegeben mit

$$\bar{P}_{k+1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{T_{k+1}}}[F_k] \approx \bar{P}_{k+1} F_k \exp\{A_{k+1,k}^D \sigma_k^F\}.$$

Es wird sich später herausstellen, dass die Rückgewinnungszahlung nicht direkt den Preis von der Ausfalls-Option beeinflusst. Im folgenden Abschnitt wird eine Preisformel für die Ausfalls-Option approximiert um so implizite Volatilitäten vom Markt schätzen zu können.

6.6.2 Ausfalls-Option

In diesem Abschnitt wird eine Ausfalls-Option beschrieben und eine approximative Formel für den Preis einer solchen Option erarbeitet. Die Basis einer Ausfalls-Option ist der so genannte Kreditausfall-Swap.

Definition 6.3. Ein Kreditausfall-Swap besteht aus einem Schuldner A und einem Versicherer B . Bei diesem Vertrag verpflichtet sich B im Falle einer Zahlungsunfähigkeit von einer Referenz Partei C , zu einer Ausfallszahlung an A . Im Falle, dass keine Zahlungsunfähigkeit vorliegt bezahlt B nichts.

Im Gegenzug muss A für diese Absicherung eine Zahlung an B tätigen.

Die Zahlung vom Schuldner A kann verschiedene Formen annehmen. Die häufigste Form ist eine Anleihe mit Kuponzahlung s (s ist fixiert). Demnach ist der Barwert dieser Zahlung gegeben mit (die Zahlungen erfolgen an den Zeitpunkten $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$)

$$s \sum_{k=1}^N \bar{P}_k(0).$$

Diese Zahlung ist gültig solange der Schuldner nicht Zahlungsunfähig wird. Die Ausfallszahlung in diesem Vertrag ist jener Aufschlag auf den Restwert einer zahlungsunfähigen Anleihe welche den Ausfall kompensiert. Wie schon zuvor erwähnt ist der Restwert gegeben durch

$$\pi(1 + c),$$

und die Ausfallszahlung hat die Form

$$1 - \pi(1 + c).$$

Berechnet man nun den Barwert eines solchen Zahlungsstroms kommt man auf die Form

$$D^{def} = (1 - \pi(1 + c)) \sum_{k=0}^{N-1} e_k.$$

Analog zu einem Zins-Swap kann nun die Zahlungsrate so gewählt werden, dass der Wert des Kreditausfall-Swaps zum Zeitpunkt $t = 0$ Null ist. Dieser Zinssatz wird mit Kreditausfall-Rate bezeichnet und besitzt folgende Form

$$\begin{aligned} \bar{s} &= (1 - \pi(1 + c)) \frac{\sum_{k=0}^{N-1} e_k}{\sum_{k=1}^N \bar{P}_k(0)}, \\ \bar{s} &= (1 - \pi(1 + c)) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{w}_k \delta H_k, \quad \text{im Falle von Unabhängigkeit,} \\ \bar{s} &\approx (1 - \pi(1 + c)) \sum_{k=0}^{N-1} \bar{w}_k \left(\delta H_k + (1 + \delta H_k) (e^{(1-F_k(0))A_{k,k}^D \sigma_k^F} - 1) \right). \end{aligned}$$

Die letzte Formel oben bezieht sich auf den korrelierten Fall. Die Gewichte \bar{w}_k haben dabei die Form

$$\bar{w}_k = \frac{\bar{P}_{k+1}}{\sum_{j=0}^{N-1} \bar{P}_{j+1}}.$$

Die Swap-Rate eines gewöhnlichen Zins-Swaps ist eine gewichtete Summe aus den Forward-Raten, nämlich

$$s = \sum_{k=0}^{N-1} w_k \delta F_k.$$

Diese Darstellung spiegelt auch die Kreditausfall-Rate wieder. Die Gewichte haben dabei die selbe Form (den Unterschied machen hier die risikolosen Nullkupon Anleihen)

$$w_k = \frac{P_{k+1}}{\sum_{j=0}^{N-1} P_{j+1}}.$$

Diese Eigenschaft wird später in einem Maßwechsel ausgenutzt, um einen Preis für eine Option auf einen Kreditausfall-Swap zu finden.

Um nun eine Preis einer Ausfalls-Option zu fixieren wird die Auszahlung eines solchen Vertrages betrachtet. Demnach hat eine Ausfalls-Option mit Ausübungszeitpunkt T_k und einer Laufzeit bis zum Zeitpunkt T_N einen Wert (bewertet am Zeitpunkt $t \leq T_k \leq T_N$ und mit Strike \bar{s}^*)

$$(\bar{s}(t, T_k, T_N) - \bar{s}^*) \sum_{j=k}^{N-1} \bar{P}_j(t).$$

Hierbei ist $\bar{s}(t, T_k, T_N)$ die Forward-Kreditausfalls-Rate. Diese ist die Kreditausfalls-Rate zum Zeitpunkt t eines Kreditausfall-Swaps über den zukünftigen Zeitraum $[T_k, T_N]$. Nimmt

man nun an, dass F_k und H_k unabhängig sind, folgt

$$\bar{s}(t, T_k, T_N) = \sum_{j=k}^{N-1} \bar{w}_j \delta H_j.$$

Tritt nun keine Zahlungsunfähigkeit ein, dann wird die Option mit Strike \bar{s}^* dann und nur dann ausgeübt, falls $\bar{s}^* < s(T_k, T_k, T_N)$ ist. Daraus ergibt sich eine Zahlung von

$$(\bar{s}(T_k) - \bar{s}^*)^+ \sum_{j=k}^{N-1} \bar{P}_j.$$

Es wird im folgenden eine Technik wie sie im Kapitel 5 verwendet wurde, angewendet. Die Forward-Kreditausfalls-Rate wird als geometrische Brownsche Bewegung angenommen. Dabei wird ein Martingal Maß gewählt welches eine Berechnung des Erwartungswertes der Zahlung einfach gestaltet. Ein wichtiger Punkt dabei ist, dass $\bar{s}(t)I(t) \sum_{j=k}^{N-1} \bar{P}_j(t)$ am Markt gehandelt wird. Dies ist die Zahlung in einem Kreditausfall-Swap über den Zeitraum $[T_k, T_N]$. Aus dieser Zahlung kann man folgende Normierungsgröße bilden

$$X(t) = I(t) \sum_{j=k}^{N-1} \bar{P}_j(t).$$

Das dazugehörige Martingal Maß trägt das Symbol $\bar{\mathbb{P}}^s$ und wird mit Kreditausfall-Swap Maß bezeichnet. Die Struktur von \bar{s} besitzt nun die Form ($W_{\bar{\mathbb{P}}^s}$ ist eine neue Brownsche Bewegung unter $\bar{\mathbb{P}}^s$ und unabhängig von W)

$$d\bar{s} = \dots dt + \bar{s} \sigma_{\bar{\mathbb{P}}^s}^H dW_{\bar{\mathbb{P}}^s}.$$

In der oben angegebenen Gleichung ist der Drift nicht relevant, da durch den Maßwechsel der Drift eliminiert wird. Die Volatilität $\sigma_{\bar{\mathbb{P}}^s}^H$ wird als Konstant angenommen. Da nun $\bar{\mathbb{P}}^s$ ein Martingal Maß ist, folgt ($W_{\bar{\mathbb{P}}^s}$ ist die Brownsche Bewegung unter $\bar{\mathbb{P}}^s$)

$$d\bar{s} = \bar{s} \sigma_0^H dW_{\bar{\mathbb{P}}^s}.$$

Der Preis der Ausfalls-Option ist nun gegeben durch

$$C(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\beta(T_k) I(T_k) \sum_{j=k}^{N-1} \bar{P}_j(T_k) (\bar{s}(T_k) - \bar{s}^*)^+ \right].$$

Durch einen Maßwechsel (von \mathbb{P} zu $\bar{\mathbb{P}}^s$) vereinfacht sich die Formel auf

$$C(0) = \left(\sum_{j=k}^{N-1} \bar{P}_j(0) \right) \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{P}}^s} [(\bar{s}(T_k) - \bar{s}^*)^+].$$

Daraus ergibt sich nun folgende Proposition.

Proposition 6.4 ([Schönbucher, 2000a]). *Der Wert einer Ausfalls-Option über das Zeitintervall $[T_k, T_N]$ und einem Strike \bar{s}^* , welche nichtig wird falls eine Zahlungsunfähigkeit vor dem Zeitpunkt T_k vorliegt, ist gegeben durch*

$$C = \left(\sum_{j=k}^{N-1} \bar{P}_j(0) \right) (\bar{s}(0)N(d_1) - \bar{s}^*N(d_2)),$$

wobei d_1, d_2 gegeben sind durch

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{\bar{s}}{\bar{s}^*}\right) \pm \frac{1}{2}(\sigma^H)^2 T_k}{\sigma^H \sqrt{T_k}}.$$

Die Rückgewinnungszahlung spielt nur indirekt eine Rolle für den Wert einer Ausfalls-Option. Die Rückgewinnungszahlung beeinflusst den Wert einer risikobehafteten Nullkupon Anleihe \bar{P}_k erheblich. Dadurch fließt diese Anpassung nur indirekt mit ein.

Aus der oben genannten Formel kann nun eine implizite Volatilität berechnet werden. Dadurch ergibt sich eine Schätzung für die Volatilität der Ausfallsdichte H_k aus einem Optimierungsproblem. Aus dieser Volatilität σ^H und aus der Volatilität der risikolosen Nullkupon Anleihe σ^F lässt sich nun die Volatilität des Spreads σ^S bilden.

Fügt man alle Komponenten zusammen, kann man Simulationen durchführen um so eine Markteinschätzung der Zinsen zu generieren. Es können aber auch Lebensversicherungen simuliert werden, um so Werte für eine ökonomische Bilanz zu erhalten. Die Zinsen dieses Vertrages werden dann durch das LIBOR Markt Modell mit Ausfallsrisiko beschrieben.

6.7 Kalibrierungs Ergebnisse

Die Kalibrierung eines solchen Modells wird auf den Kalibrierungen aus Kapitel 5 aufgebaut. Da nun zusätzlich ein Forward Spread modelliert wird, sind weitere Beobachtungen erforderlich. Verwendet wurden die Ergebnisse aus Kapitel 5. Im Detail hat die Volatilität der risikolosen Nullkupon Anleihe die Form

$$\sigma_i^F(t) = (\alpha^F + \gamma^F(T_i - t))e^{-\beta^F|T_i - t|}, \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\},$$

und die Korrelation unter den risikolosen Nullkupon Anleihen besitzt die Form

$$\rho_{i,j}^F = \exp\left(\frac{-|i-j|}{n-2} \left[-\ln(\rho_\infty^F) + \eta^F \frac{n-i-j}{n-3}\right]\right) \quad \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Diese werden äquivalent geschätzt wie im Kapitel 5. Die Ergebnisse werden adaptiert und lauten:

α^F	γ^F	β^F
2.030953e+00	5.570998e-05	1.579351e-01
ρ_∞^F	η^F	X
0.6623425	0.3776575	X

6.7.1 Unabhängigkeit

Wenn die risikolose Nullkupon Anleihe unabhängig von dem Ausfallszeitpunkt unter dem Maß Q modelliert wird, vereinfachen sich die stochastischen Differentialgleichungen der Forward Raten. Die Eigenschaft der Unabhängigkeit impliziert auch die Unabhängigkeit zw. der risikolosen Forward Rate F sowie der Ausfallsdichte H . Diese Unabhängigkeit gilt nicht nur unter dem Maß Q sondern auch unter jedem anderen äquivalenten Martingalmaß. Unabhängigkeit bedeutet in diesem Fall, dass die Kovarianz von F und H mit dem Wert 0 ident ist. Demnach ist (σ_l^H aus Bedingung 6.4, σ_l^F aus Bedingung 6.3)

$$\sigma_k^F \sigma_l^H = 0 \quad \forall k, l \in \{1, \dots, n\}$$

Betrachtet man diesen Aspekt genauer, ist die Unabhängigkeit gegeben wenn die risikolose Forward Rate F_k und die diskrete Ausfallsdichte H_k von verschiedenen unabhängigen Komponenten von W^Q bewegt werden. Es ist zu beachten, dass selbst unter der Unabhängigkeit die risikolose Forward Rate F_k nicht unabhängig von S_k ist, da der Zusammenhang durch die folgende Gleichung gegeben ist

$$\sigma_k^H = \sigma_k^S - \frac{\delta F_k}{1 + \delta F_k} \sigma_k^F.$$

Man kann errechnen, dass unter dem T_{k+1} Überlebens Maß die Dynamiken von F_k , S_k und H_k gegeben sind durch (diese Prozesse sind Martingale unter $\bar{\mathbb{P}}_{T_{k+1}}$)

$$\begin{aligned} \frac{dF_k}{F_k} &= \sigma_k^F d\bar{W}_{k+1}, \\ \frac{dS_k}{S_k} &= \sigma_k^S d\bar{W}_{k+1}, \\ \frac{dH_k}{H_k} &= \sigma_k^H d\bar{W}_{k+1}, \\ \frac{d\bar{F}_k}{\bar{F}_k} &= \sigma_k^{\bar{F}} d\bar{W}_{k+1}. \end{aligned}$$

6.7.2 Problem der Datenverfügbarkeit

Die Schätzung einer impliziten Volatilität σ^H aus Proposition 6.4 erweist sich in der Praxis als schwierig. Trotz längerer Recherche war es nicht möglich konkrete Daten für Ausfalls-Optionen zu beobachten. Im Detail war es schwierig die passenden Anleihen zu einer Ausfalls-Option zu finden und die dementsprechende Preise zu beobachten. Daher war es nicht möglich eine parametrische Funktion für σ^H und damit für σ^S zu schätzen.

Ein weiteres Problem war es, Zinskurven aus Anleihen zu finden die sich von der europäischen Zinskurve (welche als risikolos betrachtet wurde) unterscheiden. Für fast alle Länder in der Europäischen Union wurde die europäische Zinskurve beobachtet. Die Staatsanleihe von Kroatien wies eine deutlich höhere Zinskurve auf als die europäische Zinskurve, daher wurde der Spread zu dieser Anleihe simuliert. Die Volatilität σ^S wurde auf Grund

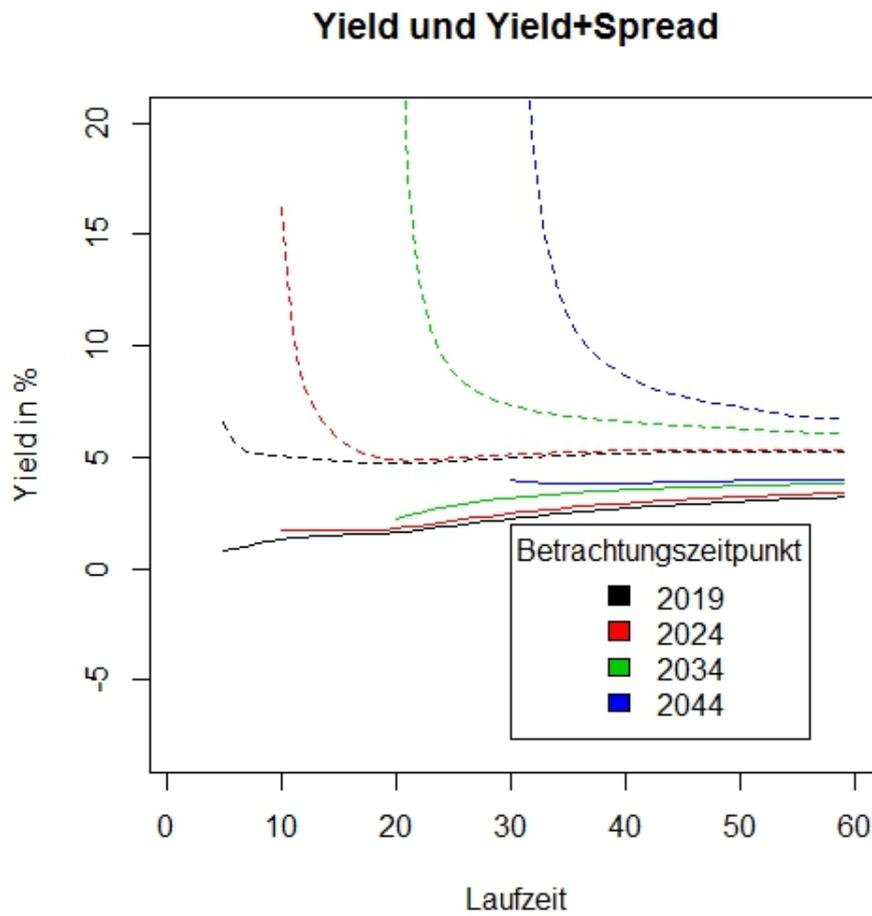


Abbildung 15: Simulierte risikolose und risikobehafete Zinskurven

von Datenmangel gleich σ^F gesetzt. Das Ergebnis dieser Simulation ist in Abbildung 15 zu sehen. Dieses Ergebnis ist nur von akademischer Natur und nicht repräsentativ für den Spread von europäischen Anleihen und Kroatischen Anleihen.

7 Konklusion

Der Hauptteil dieser Arbeit liegt im wesentlichen auf vier Modellen zur Zinsbewertung auf Basis von Staatsanleihen.

Das erste Modell (Nelson-Siegel Verfahren) ist ein deterministisches Modell und ist den Ansprüchen des Zinsmarktes der modernen Zeit nicht mehr gewachsen. Es dient aber immer noch als Grundlage für die aktuelle Bewertung des Marktes. Eine mögliche Projektion der Zinskurven in die Zukunft, ist durch dieses Modell nicht möglich und auch nicht ratsam, da die Unsicherheit einer Zinsveränderung nicht vorhersagbar und daher nicht deterministisch ist.

Das zweite Modell (Teichmann und Wüthrich) ist ein modernes HJM-Modell. Ein sehr großer Vorteil dieses Modells ist die adaptive Kalibrierung die es ermöglicht, neue Beobachtungen in das Modell mit einzubeziehen. Durch die spezielle Struktur der Volatilität ist das Modell sehr flexibel und beinhaltet zusätzlich noch die Abhängigkeit von Zinskurven über verschiedene Betrachtungszeitpunkte. Dieses Modell hält auch für den Fall, dass Zinsen negativ sein können. Da die Datenlage auch negativ Zinsen aufwies, ist dieses Modell sehr gut geeignet um zukünftige Zinsen schätzen zu können. Ein Nachteil des Modells ist, dass für die Vorhersage ein approximierter Prozess verwendet wurde. Daher sind kleine Schrittweiten ratsam um diesen entstehenden Fehler klein zu halten.

Das LMM ist aus heutiger Sicht ebenfalls ein plausibles Zinsmodell. Es bietet Dank der stochastischen Komponente genügend Flexibilität. Der Große Vorteil an diesem Modell liegt darin, dass keine historischen Daten benötigt werden, um das Modell zu kalibrieren. Direkt Markt Daten, und damit die direkte Einschätzung der zukünftigen Zinskurven durch dem Markt fließen in die Kalibrierung mit ein. Paradoxerweise ist diese Markteinschätzung zugleich auch ein Nachteil des Modells. Da die Kalibrierung tatsächlich von einzelnen Stichtagen abhängt, können Falscheinschätzungen an diesen Stichtagen zu falschen Kalibrierungen und damit zu falschen Ergebnissen führen. Daher ist eine sorgfältige Auswahl der Daten von großer Bedeutung.

Das LMM mit Ausfallsrisiko ist ebenfalls den modernen Ansprüchen von Zinsstrukturen gewachsen. Die zusätzliche Modellierung des Ausfallsrisikos stellt eine wichtige Erweiterung von Zinsmodellen dar. Die Unsicherheiten der jüngeren Vergangenheit rechtfertigen diese Annahme. Dieses Modell erbt alle Vor- und Nachteile des LMM von zuvor. Ein weiterer Nachteil ist die nicht transparente Datenlage von Ausfalls-Option (credit default swaption). Diese Datenlücke verhindert eine Kalibrierung an den Markt und somit eine mögliche Einschätzung der zukünftigen Zinslage.

8 Danksagung

Zum Abschluss möchte ich allen Personen danken die mich bei der Ausarbeitung dieser Arbeit und während des Studiums fachlich und persönlich unterstützt haben.

In erster Linie möchte ich mich bei meiner Familie und im speziellen bei meinen Eltern bedanken, die mir das Studium an der Technischen Universität Graz ermöglicht haben und mich bei all meinen Entscheidungen ermutigt haben.

Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei meiner Freundin, die mich immer wieder ermutigte und mit vielen nützlichen Tipps einen wesentlichen Teil zur Diplomarbeit beigetragen hat.

Ein weiter Dank gilt Herrn Dr. Jürgen Hartinger der durch nützliche Denkanstöße diese Arbeit beeinflusst hat. Außerdem danke ich dem Versicherungsmathematischen Büro der Kärntner Landesversicherung die mich bei der Datensuche tatkräftig unterstützt hat.

Ein weiter Dank gilt der Grazer Wechselseitigen Versicherung welche mir die Thematik dieser Arbeit näher gebracht hat.

A Stochastische Integration

In diesem Abschnitt wird erörtert wie ein Integral über einen stochastischen Prozess definiert ist. Im wesentlichen orientiert sich dieser Abschnitt an [Müller, 2014].

Definition A.1. • Die kleinste σ -Algebra \mathcal{P} von Teilmengen aus $[0, \infty) \times \Omega$, bezüglich der alle linksstetigen adaptierten Prozess messbar sind, heißt σ -Algebra der vorhersagbaren Ereignisse. \mathcal{P} ist eine Untere σ -Algebra von $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{A}$.

- Ein Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt vorhersagbar, wenn er \mathcal{P} -messbar ist. Insbesondere sind alle linksstetigen adaptierten Prozesse vorhersagbar.

Einer der wesentlichsten Prozesse in unseren Modellen ist die Brownsche Bewegung. Dieser Prozess hat stetige Pfade und ist daher vorhersagbar.

Definition A.2. Ein reelwertiger stochastischer Prozess $B = (B_t)_{t \geq 0}$ heißt (eindimensionale, standard) Brownsche Bewegung bezüglich einer (vorgegebenen) Filtration $((\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$, wenn er an diese Filtration adaptiert ist und die folgenden Bedingungen erfüllt

- $B_0 = 0$,
- Für $0 \leq s < t$ ist $B_t - B_s$ unabhängig von \mathcal{F}_s und $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$,
- B hat stetige Pfade.

Der folgende Satz erscheint vorerst trivial ist dennoch der Grund warum stochastische Modelle durch eine Brownsche Bewegung aufgestellt werden können.

Satz A.1. Die Brownsche Bewegung existiert. Die kanonische Filtration der Brownschen Bewegung ist rechtsstetig. Die vervollständigte kanonische Filtration erfüllt daher die üblichen Bedingungen (rechtsstetig, \mathbb{P} -vollständig).

In den angegebenen stochastischen Modellen ist der Begriff eines Martingals wesentlich. Die Brownsche Bewegung ist zum Beispiel ein Martingal unter der kanonischen Filtration.

Definition A.3. Ein Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt ein Martingal bezüglich einer Filtration $((\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$, wenn $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ für alle $t \geq 0$ und

- X ist adaptiert,
- $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ \mathbb{P} -fast sicher für alle $0 \leq s \leq t$.

Eine Erweiterung eines Martingals ist das sogenannte lokale Martingal. Es wird später dazu dienen, dass das Integral nicht nur über Brownsche Bewegungen möglich ist, sondern die Klasse der Integratoren möglichst vielfältig gewählt werden kann.

Definition A.4. Ein Prozess X heißt ein lokales Martingal, wenn es eine monoton wachsende Folge von Stoppzeiten T_n mit $T_n \uparrow \infty$ \mathbb{P} -fast sicher gibt, sodass die bei T_n gestoppten Prozesse X^{T_n} Martingale sind. Die Lokalisierungsfolge $(T_n)_{n \geq 1}$ darf dabei von X abhängen. Analog sind lokale beschränkte Prozesse solche, für die alle X^{T_n} beschränkt sind.

Es wird nun der Raum der quadratisch integrierbaren Martingale festgelegt. Dieser dient später für die Definition eines stochastischen Integrals über eine Brownsche Bewegung.

Definition A.5. Ein Prozess X heißt quadratisch integrierbar, wenn

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty.$$

Wesentlich für die eindeutige Existenz eines Integrals nach einer Brownschen Bewegung ist folgender Satz

Satz A.2. Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein rechtsstetiges, quadratisch integrierbares Martingal. Dann konvergiert X_t in L^2 und fast sicher gegen eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable X_∞ . Es gilt

$$X_t = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) \quad (\mathbb{P}\text{-fast sicher}).$$

Folgender Raum, nämlich der Raum der quadratisch integrierbaren Martingale mit rechtsstetigen Pfaden, ist ein Hilbertraum. Das bedeutet das der Raum

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 &:= \{\text{quadratisch integrierbare Martingale } X \text{ mit rechtsstetigen Pfaden}\}, \\ \mathcal{M}_c^2 &:= \{\text{quadratisch integrierbare Martingale } X \text{ mit stetigen Pfaden}\}, \end{aligned}$$

vollständig bezüglich der induzierten Norm ist.

Satz A.3. Die zugrunde liegende Filtration \mathcal{F} sei \mathbb{P} -vollständig. Dann gilt: Die Räume \mathcal{M} und \mathcal{M}_c^2 versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle := \mathbb{E}(X_\infty Y_\infty)$$

sind Hilberträume.

Sei $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine rechtsstetige Funktion von beschränkter Variation und schreibt man $g = h_1 - h_2$ mit h_1, h_2 monoton wachsend (ist möglich da g von beschränkter Variation ist). Dann sind durch

$$\nu_1((a, b]) := h_1(b) - h_1(a), \quad \nu_2((a, b]) := h_2(b) - h_2(a)$$

zwei Maße auf den Borelschen Teilmengen von $(0, \infty)$ festgelegt. Das Lebesgue-Stieltjes Integral ist dann durch

$$\int_{(0, \infty)} f dg := \int_{(0, \infty)} f d\nu = \int_{(0, \infty)} f d\nu_1 - \int_{(0, \infty)} f d\nu_2$$

definiert, wenn $\int_{(0,\infty)} |f| d\nu_i < \infty$ für $i = 1, 2$ ist. Ist die Funktion f nun stetig dann stimmt das Lebesgue-Stieltjes Integral mit dem Riemann-Stieltjes Integral überein. Dieses ist als Grenzwert der Riemann-Stieltjes Summen

$$\sum_{k=1}^n f(t'_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})), \quad (t_{k-1} \leq t'_k \leq t_k)$$

definiert, wenn die Feinheit $\|\pi_n\| = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$ für die Zerlegung π_n gegen null strebt und der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Zwischenstelle t'_k ist. Da nun die Brownsche Bewegung stetig ist können Integrale der Form

$$\int e^s dB_s(\omega), \int \cos(s) dB_s(\omega), (usw).$$

Pfadweise als Riemann-Stieltjes Integral definiert werden. Für unsere Modelle ist dies ausreichend da wir nur Integrale über stetige Funktionen nach einer Brownschen Bewegung berechnen.

Im Falle des Itô Integrals wird die Zwischenwertstelle nicht wie oben unabhängig gewählt sondern immer das linke Intervallende t_{k-1} als Zwischenwertstelle herangezogen. Dadurch lässt sich das Integral nach Itô nicht nur auf stetige Funktionen anwenden sondern auch auf Prozesse die aus dem Raum

$$\mathcal{H}^2 := \left\{ Y : Y \text{ ist adaptiert, messbar und } \mathbb{E} \left(\int_0^\infty Y_s^2 ds \right) < \infty \right\}$$

stammen. Zuerst sei aber eine Definition für einfach vorhersagbare Prozesse definiert und anschließend auf den Raum \mathcal{H}^2 erweitert.

Definition A.6. Ein Prozess Y heißt einfach vorhersagbar, wenn er dargestellt werden kann als

$$Y_t = \Phi_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^n \Phi_k 1_{(t_{k-1}, t_k]}(t).$$

Dabei ist $0 = t_0 \leq \dots \leq t_n < \infty$. Die Φ_k , sind alle beschränkt, $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -messbare Zufallsvariablen und Φ_0 ist eine beschränkte, \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsvariable. Die Menge aller einfach vorhersagbarer Prozesse bezeichnet man mit \mathcal{P}^0 .

Definition A.7. Das stochastische Integral $I_B(Y) = (I_B(Y)_t)_{t \geq 0}$ nach einer Brownschen Bewegung für einfach vorhersagbare Prozesse Y ist definiert durch

$$I_B(Y)_t = \int_0^t Y_s dB_s = \sum_{k=1}^n \Phi_k (B_{\min(t_k, t)} - B_{\min(t_{k-1}, t)})$$

Führt man nun in den Raum \mathcal{H}^2 die L^2 -norm

$$\|Y\|_{\mathcal{H}} := \mathbb{E} \left(\int_0^\infty Y_s ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

ein, dann kann man beweisen, dass die lineare Abbildung $I_B : \mathcal{P}^0 \rightarrow \mathcal{M}_c^2$ eine Isometrie ist, d.h.

$$\|I_B(Y)\|_{\mathcal{M}} = \|Y\|_{\mathcal{H}}.$$

Daraus resultiert nun die endgültige Definition des stochastischen Integrals über die Funktionen aus dem Raum \mathcal{H}^2 indem man eine eindeutige Fortsetzung von I_B von \mathcal{P}^0 nach \mathcal{H}^2 bildet. Dies ist möglich da \mathcal{P}^0 dicht in \mathcal{H}^2 liegt.

Satz A.4. *Es gibt eine eindeutige bestimmte Fortsetzung von I_B zu einer linearen Isometrie $I_B : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{M}_c^2$. Diese definiert das stochastische Integral $I_B(Y)$ für $Y \in \mathcal{H}^2$. Für $Y \in \mathcal{H}^2$ ist das stochastische Integral $I_B(Y) = \int Y dB$ ein (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutig bestimmtes, quadratisch integrierbares Martingal mit stetigen Pfaden.*

Eine weiter Entwicklung wäre die Integration I_B nicht nur nach der Brownschen Bewegung zu definieren sondern eine weiter Klasse von Prozessen zu definieren nach dem das Integral möglich ist. Eine solche Klasse von Prozessen bilden die Semimartingale. Die Definition solcher Semimartingale benötigt die Formulierung eines allgemeinem stochastischen Integral welches in [Müller, 2014] nachzulesen ist.

Ein Beispiel eines Semimartingals wäre die Brownsche Bewegung B welche selbst ein Semimartingal ist. Integration nach einem Semimartingal bildet wieder ein Semimartingal. Des weiteren sind dadurch auch Itô Prozesse Semimartingale.

B Itô Formel

Die Itô Formel ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung auf stochastische Integrale. Sie wird z.B. für die Berechnung des Drifts im LMM verwendet. Für die Formulierung wird der Begriff der quadratischen Variation verwendet.

Definition B.1. *Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess. Existiert für ein $t \geq 0$ eine Zufallsvariable $[X]_t$, sodass*

$$[X]_t^{\pi_n} := \sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \rightarrow [X]_t \text{ (in Wahrscheinlichkeit),}$$

wenn die Feinheit $\|\pi_n\|$ der Zerlegung $\pi_n : 0 = t_0 < \dots < t_n = t$ gegen null strebt, dann heißt $[X]_t$ die quadratische Variation des Prozesses X auf $[0, t]$.

Diese Eigenschaft kann noch erweitert werden in dem man $[X, Z]_t^{\pi_n}$, wobei $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess ist, folgendermaßen definiert

$$[X, Z]_t^{\pi_n} := \sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}).$$

Daraus wird dann durch die Einführung eines neuen Konvergenzbegriffes die Kovariation definieren (Die quadratische Variation ist ein Spezialfall der Kovariation).

Definition B.2. Man sagt eine Folge von rechtsstetigen (bzw. linksstetigen) Prozessen Y^n konvergiert upc gegen Y . wenn für jedes $t \geq 0$

$$\sup_{s \leq t} |Y_s^n - Y_s| \rightarrow 0 \quad \text{in } W!$$

Folgender Satz definiert die Kovariation welche ein wichtiger Bestandteil in der Itô Formel ist.

Satz B.1. Seien X, Z Semimartingale. Es existieren adaptierte, linksseitigstetige mit rechtsseitig existierenden Limiten (cádlág) Prozesse $[X]$ und $[X, Z]$ für die

$$\begin{aligned} [X]^{\pi_n} &\xrightarrow{\text{upc}} [X] \\ [X, Z]^{\pi_n} &\xrightarrow{\text{upc}} [X, Z] \end{aligned}$$

wenn die Feinheit $\|\pi_n\|$ der Zerlegung gegen null strebt. $[X] = [X, X]$ heißt die quadratische Variation von X und $[X, Z]$ die Kovariation von X und Z .

Daraus kann man nun die berühmte Itô Formel konstruieren. Hier wird eine allgemeine Form formuliert welche nicht nur auf stetigen Semimartingale anwendbar ist (dadurch existiert von einem Prozess X ein weiterer Prozess X_- welcher der linksseitige Grenzwert an jeder Stelle ist und $\Delta X = X - X_-$).

Satz B.2. Sei $X = (X^1, \dots, X^d)$ eine d -dimensionales Semimartingal das \mathbb{P} -fast sicher nur Werte in einer offenen Menge U aus \mathbb{R}^d annimmt. Sei weiters $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist $f(X)$ ein Semimartingal und es gilt \mathbb{P} -fast sicher

$$\begin{aligned} f(X_t) = & f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-}) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}) d[X^i, X^j]_s \\ & + \sum_{s \leq t} \left\{ \Delta f(X_s) - \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-}) \Delta X_s^i - \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}) \Delta [X^i, X^j]_s \right\}. \end{aligned}$$

C Doléan Exponential

Eine Folgerung aus der Itô Formel ist der Exponentialprozess eines stetigen Semimartingals das auch das Doléan Exponential genant wird.

Satz C.1. Sei X ein stetiges Semimartingal. Die bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutige Lösung der stochastische Differentialgleichung

$$dZ_t = Z_{t-} dX_t, \quad Z_0 = 1,$$

ist

$$Z_t = \mathcal{E}(X)_t = \exp \left(X_t - \frac{1}{2} [X]_t \right).$$

Ist X ein lokales Martingal, dann ist auch $\mathcal{E}(X)$ ein lokales Martingal. $\mathcal{E}(X)$ heißt auch Doléan Exponential von X .

Der oben angeführte Satz kann auch für allgemeine Semimartingale konstruiert werden. Dabei kommen zusätzliche Sprungterme zur Lösung hinzu. Für mehr Details siehe [Müller, 2014].

D Poisson Prozess

Der Poisson Prozess ist eine vereinfachte Variante des Cox-Prozesses.

Definition D.1. Sei $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozess heißt *homogener Poisson Prozess* $P_{\lambda,t}$ mit Intensität $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $t \in [0, \infty)$ falls die Pfade von $P_{\lambda,t}$ rechtsstetig sind und es existieren die linksseitig Limiten von $P_{\lambda,t}$. Außerdem gelten folgende drei Eigenschaften

- Sei $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ gegeben dann sind die Zufallsvariablen $P_{\lambda,t_i} - P_{\lambda,t_{i-1}}$ für $2 \leq i \leq n$ unabhängig von einander (unabhängige Zuwächse).
- $P_{\lambda,0} = 0$ \mathbb{P} -fast sicher.
- Sei $0 < s < t < \infty$ gegeben dann gilt, dass die Zufallsvariable $P_{\lambda,t} - P_{\lambda,s}$ einer Poissonverteilung mit Parameter $\lambda(t-s)$ folgt. Demnach gilt

$$\mathbb{P}[P_{\lambda,t} - P_{\lambda,s} = k] = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Der Poisson Prozess ist ein Zählprozess. Weitere Eigenschaften des Prozesses $P_{\lambda,t}$ ergeben sich aus den Ankunftszeiten T_n und Zwischenankunftszeiten X_n welche die Form

$$T_n = \min\{t \geq 0 : P_{\lambda,t} = n\} \quad X_n = T_n - T_{n-1} \quad n \geq 1$$

besitzen. Die Zwischenankunftszeit ist also die Wartezeit zwischen dem Eintreten des $n-1$ -ten Ereignisses und des n -ten Ereignisses. Es kann gezeigt werden, dass die Zwischenankunftszeit einer Exponentialverteilung mit Parameter λ folgt und das X_1, X_2, \dots unabhängig sind.

Ein inhomogener Poisson Prozess unterscheidet sich vom homogenen Prozess dadurch, dass die Intensität λ durch eine Funktion in der Zeit ersetzt wird. Dabei muss die Funktion $\lambda(t)$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \lambda(t) &> 0 \quad t \in [0, \infty) \\ \int_s^t \lambda(r) dr &< \infty \quad s, t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

erfüllen.

E Markierter Punkt Prozess und Satz von Girsanov

Zur Definition eines markierten Punkt Prozesses ([Schlather, 2007]) wird zuerst ein einfacher Punkt Prozess definiert und aus diesem wird später ein markierter Punkt Prozess definiert. Ein solch einfacher Punkt Prozess ist ein Prozess an dem an bestimmten Punkten in der Zeit ein Ereignis aus einem Wahrscheinlichkeitsraum passiert.

Definition E.1. Sei (Ω, F, \mathbb{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum gegeben. Ein einfacher Punkt Prozess ist eine Folge von Zufallsvariablen $T = (T_n)_{n \geq 1}$ aus dem Raum $\bar{\mathbb{R}}^+$ (ist der Abschluss vom Raum $[0, \infty[= \mathbb{R}^+$). Dabei erfüllen die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots) &= 1, \\ \mathbb{P}(T_n < T_{n+1}, T_n < \infty) &= \mathbb{P}(T_n < \infty) \quad n \geq 1, \\ \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty) &= 1. \end{aligned}$$

Demnach ist ein einfacher Punkt Prozess eine Folge von strikt positiven, monoton wachsenden Zufallsereignissen. Die letzte Bedingung legt außerdem fest, dass es in einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ und $a, b \in [0, \infty)$ nur endlich viel Ereignisse gibt. Des weiteren ist der Grenzwert des Zeitpunktes des letzten Ereignisses fast sicher Unendlich.

Daraus kann man nun einen markierten Punkt Prozess definieren. Dazu sei (E, \mathcal{E}) ein messbarer Raum mit σ -Algebra \mathcal{E} . Dieser Raum wird als „mark space“ bezeichnet. Zu diesem Raum fügt man nun jenes Event Δ hinzu, welches als irrelevantes Event bezeichnet wird, denn dieses Event tritt nie ein. Demnach ist

$$\bar{E} = E \cup \Delta \quad \bar{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E}, \{\Delta\}),$$

der mark space mit dem irrelevantem Ereignis.

Definition E.2. Ein markierter Punkt Prozess mit mark space E ist eine Doppelfolge $(T, Y) = ((T_n)_{n \geq 1}, (Y_n)_{n \geq 1})$ mit Werten aus dem Raum $\bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{E}$. Wobei die Zufallssequenzen $(T_n)_{n \geq 1}$ und $(Y_n)_{n \geq 1}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, \mathbb{P}) definiert sind und T einem einfachen Punkt Prozess entspricht. Des weiteren gilt,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n \in E, T_n < \infty) &= \mathbb{P}(T_n < \infty), \quad n \geq 1, \\ \mathbb{P}(Y_n = \Delta, T_n = \infty) &= \mathbb{P}(T_n = \infty), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Ein einfaches Beispiel für einen markierten Punkt Prozess wäre z.B. ein Poisson Prozess. Dabei handelt es sich bei dem Raum $E = \mathbb{N}$ und der einfache Punkt Prozess $(T_n)_{n \geq 1}$ erfüllt dabei die Bedingung $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ wobei $(\tau_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge von unabhängigen und exponentialverteilten Zufallsvariablen (Parameter λ) ist. Der Marker $(Y_n)_{n \geq 1}$ ist in diesem Fall eine Folge von Einsen.

Der Grund warum hier ein markierter Punkt Prozess eingeführt wurde, liegt darin, dass es möglich ist ein zufälliges Maß mit Hilfe solcher Prozesse zu definieren. Es wird zunächst

der einfache Fall behandelt bei dem ein einfacher Poisson Prozess die Grundlage bildet. Dazu sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poisson Prozess mit Sprungzeiten T_1, T_2, \dots . Dann ist N_t die Anzahl der Sprünge im Zeitraum $[0, t]$

$$N_t = \#\{i \geq 1, T_i \in [0, t]\}.$$

Des weiteren ist für $t > s$

$$N_t - N_s = \#\{i \geq 1, T_i \in (s, t]\}.$$

Eine solche Zähleigenschaft definiert ein Zählmaß M auf dem Raum $[0, \infty)$. Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^+$ sei

$$M(\omega, A) = \#\{i \geq 1, T_i(\omega) \in A\}.$$

Dann ist $M(\omega, \cdot)$ ein positives und ganzzahliges Maß und $M(A)$ ist mit Wahrscheinlichkeit 1 endlich für jedes beschränkte Intervall A . Da dieses Maß von ω abhängig ist, ist dieses Maß ein zufälliges Maß und es kann gezeigt werden, dass folgendes gilt (mit $|\cdot|$ wird das Lebesgue Maß bezeichnet),

$$\mathbb{E}[M(A)] = \lambda|A|.$$

Man kann auch den Weg umkehren und von einem zufälligem Maß ausgehen und daraus durch

$$N_t(\omega) = M(\omega, [0, t]) = \int_{[0, t]} M(\omega, ds),$$

einen Poisson Prozess definieren. Dabei muss man beachten, dass die Eigenschaften die eine Poisson Prozess ausmachen in dem zufälligen Maß M vorhanden sind. Für mehr Details siehe [Cont Rama, 2003].

Die Einschränkungen auf das verwendete Lebesgue Maß und auf den Raum \mathbb{R}^+ können verallgemeinert werden. Dadurch erhält man ein Maß das als Poisson Zufallsmaß bezeichnet wird.

Definition E.3 ([Cont Rama, 2003]). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $E \subset \mathbb{R}^d$ und μ ein (positives) Radon Maß auf (E, \mathcal{E}) . Ein Poisson Zufallsmaß auf E mit Intensitäts Maß (Kompensator) μ ist ein ganzzahliges, zufälliges Maß mit

$$\begin{aligned} M : \Omega \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (\omega, A) &\mapsto M(\omega, A), \end{aligned}$$

sodass

- Für $\omega \in \Omega$ ist $M(\omega, \cdot)$ ein ganzzahliges Radon Maß auf E , d.h. für jede beschränkte und messbare Menge $A \subset E$ ist $M(A) < \infty$ und $M(A)$ ist eine ganzzahlige Zufallsvariable.

- Für jede messbare Menge $A \subset E$ ist $M(\cdot, A) = M(A)$ eine Poisson Zufallsvariable mit Parameter $\mu(A)$:

$$\mathbb{P}(M(A) = k) = e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- Falls die Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ disjunkt sind, dann sind die Zufallsvariablen $M(A_1), \dots, M(A_n)$ unabhängig voneinander.

Es kann noch gezeigt werden, dass zu jedem Radon Maß μ ein Poisson Zufallsmaß existiert welches als Kompensator das Maß μ besitzt (Proposition 2.14 in [Cont Rama, 2003]). Des weiteren ist es auch möglich eine kompensiertes Poisson Zufallsmaß \bar{M} zu konstruieren indem man

$$\bar{M}(A) = M(A) - \mu(A),$$

setzt. Aus solchen Maßen kann man durch Integration Prozesse erzeugen die Martingale sind. Führt man eine Verallgemeinerung fort führt dies zu einem Zufallsmaß welches nicht mehr ganzzahlig sein muss. Demnach korrespondiert ein solches Zufallsmaß welches auf einem Raum $E = [0, T] \times \mathbb{R}^d$ definiert ist mit einem markierten Punkt Prozess.

Durch eine allgemeinere Form des Satzes von Girsanov für markierte Punkt Prozesse ist es nun möglich auch in diesen Fällen von Zufallsmaßen einen Maßwechsel durchzuführen. Dabei spielt der folgende Satz die Hauptrolle. Dieser Satz und die Existenz von äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen stammt aus der Arbeit [Björk et al., 1997].

Satz E.1 ([Björk et al., 1997], Theorem 3.13). Sei $(\Omega, (F_t)_{t \geq 0}, Q)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $W_Q(t)$ eine n -dimensionale Brownsche Bewegung adaptiert an $(F_t)_{t \geq 0}$ und $\mu(dq; dt)$ ist ein Marked Point Prozess auf $(\Omega, (F_t)_{t \geq 0}, Q)$.

Der marker q vom Marked Point Prozess ist aus dem Raum (E, \mathcal{E}) . Es wird Angenommen, dass der Kompensator von $\mu(dq, dt)$ die Form $\nu_Q(dq, dt) = K_q(dq)\lambda_q(t)dt$ unter Q besitzt. Hierbei ist $\lambda_q(t)$ die Dichte der Ankünfte des Punkt Prozesses und $K_Q(dq)$ ist die bedingte Dichte des markers auf (E, \mathcal{E}) .

Sei θ ein n -dimensionaler vorhersagbarer Prozess und $\Phi(t, q)$ eine nicht negative vorhersagbare Funktion (vorhersagbar im Sinne das die Funktion messbar bezüglich $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ ist, \mathcal{P} ist die σ -Algebra der vorhersagbaren Prozesse) mit den Eigenschaften

$$\int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds < \infty, \quad \int_0^t \int_E |\Phi(s, q)| K_Q(dq) \lambda_Q(s) ds < \infty, \quad t < \infty.$$

Definiert man einen Prozess $L(t)$ mit $L(0) = 1$ und

$$\frac{dL(t)}{L(t-)} = \theta(t) dW_Q(t) + \int_E (\Phi(t, q) - 1) (\mu(dq, dt) - \nu_Q(dq, dt)).$$

Zusätzlich nimmt man an, dass $\mathbb{E}^Q[L(t)] = 1$ für $t < \infty$. Dann gilt für das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\left. \frac{dP}{dQ} \right|_{F_t} = L(t),$$

die Bedingung, dass

$$dW_Q(t) - \theta(t)dt = dW_P(t)$$

eine Brownsche Bewegung unter P ist und

$$\nu_P(dq, dt) = \Phi(t, q)\nu_Q(dq, dt),$$

der vorhersagbare Kompensator von μ unter P ist. Definiert man $\phi(t) = \int_E \Phi(t, q)K_Q(dq)$ und $L_E(q) = \frac{\Phi(t, q)}{\phi(t)}$ für $\phi(t) > 0$ und andererseits ist $L_E(q) = 1$. Dann ist

$$\lambda_P(t) = \phi(t)\lambda_Q(t),$$

die Dichte der Ankunftsrate des markierten Punkt Prozesses unter P . Des weiteren ist

$$K_P(dq) = L_E(q)K_Q(dq),$$

die transformierte bedingte Dichte des markers unter P .

Literatur

- Björk, T., Kabanov, Y. und Runggaldier, W. Bond market structure in the presence of marked point processes. Mathematical Finance, 7(2):211–239, 1997.
- Brigo, D. und Mercurio, F. Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit. Springer Science & Business Media, 2007.
- Cont Rama, T. P. Financial modelling with jump processes, Volume 2. CRC press, 2003.
- Delbaen, F. und Schachermayer, W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Mathematische annalen, 300(1):463–520, 1994.
- Föllmer, H. und Schied, A. Stochastic finance: an introduction in discrete time. Walter de Gruyter, 2011.
- Fries, C. Mathematical finance: theory, modeling, implementation. John Wiley & Sons, 2007.
- Gilli, M., Große, S. und Schumann, E. Calibrating the nelson-siegel-svensson model. Available at SSRN 1676747, 2010.
- Glasserman, P. Monte Carlo methods in financial engineering, Volume 53. Springer Science & Business Media, 2003.
- Heath, D., Jarrow, R. und Morton, A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A discrete time approximation. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25(4):419–440, 1990.
- Heath, D., Jarrow, R. und Morton, A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. Econometrica: Journal of the Econometric Society, pages 77–105, 1992.
- Ho, T. S. und Lee, S.-B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. Journal of Finance, pages 1011–1029, 1986.
- Jamshidian, F. Libor and swap market models and measures. Finance and Stochastics, 1(4):293–330, 1997.
- Müller, W. Stochastische analysis skriptum. 2014.
- Musiela, M. und Rutkowski, M. Martingale methods in financial modelling, Volume 36. Springer Science & Business Media, 2006.
- Ortega, J., Pullirsch, R., Teichmann, J. und Wergieluk, J. A dynamic approach for scenario generation in risk management. Preprint on arXiv, 2009.

- Rebonato, R. On the pricing implications of the joint lognormal assumption for the swap-
tion and cap markets. Journal of computational Finance, 2(3):57–76, 1999.
- Rebonato, R. Volatility and correlation: the perfect hedger and the fox. John Wiley &
Sons, 2005.
- Schlather, M. Point process theory and applications: Marked point and piecewise determi-
nistic processes. Journal of the American Statistical Association, 102(479):1077–1078,
2007.
- Schoenmakers, J. und Coffey, B. Systematic generation of parametric correlation structures
for the libor market model. International Journal of Theoretical and Applied Finance,
6(05):507–519, 2003.
- Schönbucher, P. A libor market model with default risk. Available at SSRN 261051, 2000a.
- Schönbucher, P. J. Credit risk modelling and credit derivatives. PhD thesis, Rheinische
Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn, 2000b.
- Solvency, I. Richtlinie: Richtlinie 2009/138/eg des europäischen parlaments und
des rates vom 25. november 2009 betreffend die aufnahme und ausübung der
versicherungs-und rückversicherungstätigkeit (solvabilität ii). eur-lex. europa.
eu/legal-content/DE/TXT/PDF.
- Stefanovits, D. und Wüthrich, M. V. Hedging of long term zero-coupon bonds in a market
model with reinvestment risk. European Actuarial Journal, 4(1):49–75, 2014.
- Teichmann, J. und Wüthrich, M. V. Consistent yield curve prediction. Preprint, ETH
Zurich, 2013.