

Die Spannung würde demnach infolge der Kerbwirkung auf das 2,9fache der bei der ersten Rechnung ermittelten steigen, ist aber sicher noch zulässig. Zur Bestimmung der Nutenwandstärke wurde das Gewicht des Füllstücks zu 9,6 g, die von ihm entwickelte Fließkraft zu 56 kg ermittelt, woraus sich die Belastung der Längeneinheit der Nuten zu $Z_{1\text{cm}} = 204 \text{ kg/cm}$ ergab. Die Nutenwand wird auf Zug und Biegung beansprucht und muß bei $k_b = k_z = 750 \text{ kg/cm}^2$ zulässiger Beanspruchung 6,8 mm stark werden, wie nach Abb. 2272 aus:

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_b = \frac{Z_{1\text{cm}}}{2 x_1} + \frac{6 Z_{1\text{cm}} (x_1/2 + c_1)}{2 x_1^2} = k_z$$

oder

$$x_1 = \frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} + \sqrt{\frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} \left(\frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} + 3 c_1 \right)} \quad (754)$$

oder mit

$$\frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} = \frac{204}{750} = 0,272 \text{ aus } x_1 = 0,272 + \sqrt{0,272 (0,272 + 3 \cdot 0,11)} = 0,68 \text{ cm}$$

folgt. In einem unter 45° durch die Kehle gelegten Schnitt wird:

$$x_2 = 0,71 \frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} + \sqrt{0,71 \frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} \left(0,71 \frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} + 4,25 c_1 \right)} \quad (755)$$

$$= 0,193 + \sqrt{0,193 (0,193 + 4,25 \cdot 0,11)} = 0,55 \text{ cm}.$$

Schließlich kann man in gleicher Weise auch den Querschnitt 3 auf das Biegemoment $\frac{Z_{1\text{cm}}}{2} \cdot c_3$ berechnen, wenn auch zu beachten ist, daß diese Berechnung zu ungünstig ist, weil ein um so größerer Teil der Kraft $Z_{1\text{cm}}/2$ durch tangentielle Spannungen im Kranz aufgenommen wird, je weiter der Querschnitt vom Angriffspunkt der Kraft abliegt. Der Sicherheit wegen auf das volle Moment berechnet, wird:

$$x_3 = \sqrt{\frac{6 Z_{1\text{cm}} \cdot c_3}{2 k_b}} \quad (756)$$

$$= \sqrt{\frac{6 \cdot 204 \cdot 1,39}{2 \cdot 750}} = 1,06 \text{ cm}$$

erforderlich. In Abb. 2270 sind diese Maße zur Aufzeichnung des strichpunktierten Randes des Kranzes benutzt, der beim Vergleich mit Abb. 2263 deutlich die viel günstigeren Verhältnisse bei Verwendung von Hammerfüßen erkennen und diese namentlich für hochbeanspruchte Schaufeln vorteilhaft erscheinen läßt. Insbesondere ist die Kranzbreite in Abb. 2270 nur 72 gegenüber 92 mm in Abb. 2263.

Praktisch wird man den Kranz, Abb. 2270, in Rücksicht auf größere Steifigkeit etwas verstärken und ihm den kräftig angedeuteten Umriß geben.

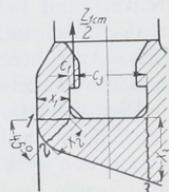


Abb. 2272. Berechnung der Kranzabmessungen im Fall der Befestigung der Schaufeln durch Hammerfüße.

IV. Trommeln und Scheiben.

A. Werkstoffe der Trommeln und Scheiben von Dampfturbinen. Wahl der zulässigen Beanspruchung, Ausführungen.

In Rücksicht auf die Betriebsicherheit muß von den Werkstoffen der Trommeln und Scheiben der Dampfturbinen große Festigkeit und Zähigkeit, namentlich aber größte Gleichmäßigkeit und Spannungsfreiheit verlangt werden. Man verwendet deshalb ausschließlich zähe, gut durchgeschmiedete und vor der letzten Bearbeitung zwecks Beseitigung aller Spannungen sorgfältig ausgeglühte Stähle. Für gering beanspruchte, mit mäßiger Geschwindigkeit laufende Trommeln und Scheiben genügt im Siemens-

Martinofen hergestellter Regelstahl St 42.11 der DIN 1611 mit 4200...5000 kg/cm² Zugfestigkeit, $\delta_5 = 30\%$ Bruchdehnung und 2300...2750 kg/cm² Spannung an der Streckgrenze oder Regelstahl St 50.11 der DIN 1611 mit 5000...6000 kg/cm² Zugfestigkeit, $\delta_5 = 24\%$ Bruchdehnung und 2750...3300 kg/cm² Spannung an der Streckgrenze.

Für höher beanspruchte nimmt man:

St C 45.61 der DIN 1661, der ausgeglüht 6000...7000 kg/cm² Zugfestigkeit, $\delta_5 = 19\%$ Bruchdehnung und 3400 kg/cm² Spannung an der Streckgrenze, vergütet 6500...7500 kg/cm² Zugfestigkeit, $\delta_5 = 18\%$ sowie 3900 kg/cm² Spannung an der Streckgrenze besitzt.

Bei sehr hohen Beanspruchungen greift man zu legierten Stählen, insbesondere zu Nickelstahl von 6000...7000 kg/cm² Zugfestigkeit, 3500...4000 kg/cm² Spannung an der Streckgrenze oder Chromnickelstahl von 7000 kg/cm² Zugfestigkeit, $\delta_5 = 15\%$ Bruchdehnung und 5000 kg/cm² Spannung an der Streckgrenze.

Die Proben zur Nachprüfung der Festigkeitseigenschaften werden zweckmäßigerweise den Stücken selbst entnommen, vgl. Abb. 76, und zwar bei Trommeln dem ausgebohrten Kern, bei Scheiben an der Nabe, weil dort die höchste Beanspruchung durch die tangentialen Zugspannungen auftritt und das Stück am wenigsten durchgeschmiedet ist, so daß die Proben Mindestzahlen ergeben werden. Das schwierige Durcharbeiten der Naben von Scheiben sucht man übrigens durch Aufdornen der Bohrung zu erreichen.

Gleichmäßigkeit und Spannungsfreiheit der Stücke muß gefordert werden in Rücksicht auf die Erwärmung beim Betrieb, welche die Spannungen zur Wirkung kommen läßt und Werfen und Verziehen, damit aber unruhigen Lauf und selbst Anstreifen der Scheiben- und Trommelkränze an den ruhenden Teilen verursachen kann.

Die zulässige Beanspruchung wählt man am besten in Abhängigkeit von der Streckgrenze. Nach Stodola nimmt man bei der Berechnung der Scheiben auf die normale Laufgeschwindigkeit für k_z das 0,25...0,4fache der Spannung an der Streckgrenze. Sind Ventilationslöcher in den Scheiben vorgesehen, so pflegen die Spannungen an den Lochumfängen nach den Formeln (792) und (793) die höchsten zu sein. Praktische Ausführungen zeigen dort nach der gleichen Quelle 0,35...0,6 der Spannung an der Streckgrenze.

Die recht hohen Beanspruchungen im Vergleich mit den sonst im Maschinenbau üblichen sind zulässig, weil die an einfachen Trommeln und Scheiben errechneten Spannungen den wirklichen nahe kommen und weil die Inanspruchnahme durch den Betrieb gleichförmig, ruhender Belastung ähnlich ist, solange keine Schwingungen auftreten; sie setzen aber auch fehlerfreie Werkstoffe voraus. Zur Beurteilung der größten Inanspruchnahme genügt es, sofern man die höchste Schubspannung als maßgebend ansieht, die Tangentialspannung in der Mitte der Scheibe oder am Umfang der Bohrungen zu kennen. Da die Spannung parallel zur Drehachse $\sigma_3 = 0$ ist, wird nach den Ausführungen auf S. 46 $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_t + 0) = \frac{\sigma_t}{2}$.

Naturgemäß ist auch auf die genaue Bearbeitung und den sorgfältigen Zusammenbau der Teile großer Wert zu legen. Alle raschlaufenden müssen ausgewuchtet werden. Bedingt doch schon eine Abweichung des Schwerpunktes eines 1000 kg schweren Ankers um 0,1 mm von der Drehachse bei 3000 Umläufen in der Minute $\frac{1000}{981} \cdot 314^2 \cdot 0,01 = 1010$ kg

Fliehkraft. Das Auswuchten geschieht zunächst meist statisch, indem man die Teile an den Lagerstellen auf zwei genau wagerechte und parallele Lineale stützt und nachprüft, ob sie in allen Stellungen im Gleichgewicht bleiben, also keine ausgesprochene Ruhelage infolge einseitiger Lage des Schwerpunktes zeigen. Durch diese statische Untersuchung lassen sich jedoch etwaige Zentrifugalmomente nicht nachweisen, die entstehen, wenn die Schwerpunkte einzelner Teile außerhalb, der Gesamtschwerpunkt aber auf der Drehachse liegen. Solche Fehler werden durch dynamisches Auswuchten nachgewiesen, wobei man den Läufer in federnd gestützten Lagern laufen läßt und beobachtet, ob das

Ganze dauernd ruhig bleibt. Ist das nicht der Fall, so läßt sich an den Ausschlägen die Lage der Schwerpunkte ermitteln und der Fehler durch Anbringen von Ausgleichgewichten beseitigen.

Zur Nachprüfung der mechanischen Festigkeitsverhältnisse zusammengebauter Teile dient die Schleuderprobe. Bei derselben wird die Drehzahl auf das 1,15 bis 1,2fache, am Dynamoankern und Rädern von Kreisverdichtern bis auf das 1,5fache der normalen gesteigert und dadurch das Stück der 1,32- bis 2,25fachen Beanspruchung durch die Fliehkraft ausgesetzt. Wenn dabei an einzelnen Stellen die Fließgrenze überschritten wird, z. B. die Naben sich erweitern und auf den Wellen locker werden, so hält man das für zulässig, weil sich der Werkstoff verfestigt hat und weitere Belastungen in gleicher Höhe aushält, sofern keine wechselnden Spannungen auftreten. Denn dann wäre Ermüdung, schließlich Rißbildung und Bruch zu erwarten. Auch darf sich der Fließvorgang nicht auf zu weite Gebiete erstrecken.

Dem Lockerwerden auf der eigentlichen Welle beugt man dadurch vor, daß man das Ausdrehen auf den endgültigen Durchmesser erst nach dem Schleudern vornimmt und die Teile warm aufzieht oder durch kegelige Buchsen verspannt oder auf federnde Ringe stützt, damit sie trotz der Erweiterung beim Laufen und Warmwerden beim Anlassen dauernd festsitzen oder zentrisch laufen.

B. Berechnung raschlaufender Trommeln und Scheiben auf Festigkeit.

Für die Beanspruchung raschlaufender Trommeln und Scheiben sind in erster Linie die Eigenfliehkraft und die Fliehkraftwirkung der auf dem Umfang sitzenden Schaufeln, Becher, Pole usw. entscheidend, während die Wirkung der durch das Treibmittel erzeugten Umfangskraft meist vernachlässigt werden kann. Dabei nimmt man gewöhnlich die Wirkung der Schaufeln, Pole usw. gleichmäßig längs des Umfangs oder der Oberfläche verteilt an. Gegenüber der so ermittelten Spannung fällt jedoch die tatsächliche um so höher aus, je mehr die Belastung aus einzelnen örtlich wirkenden Kräften besteht, je kleiner z. B. die Zahl der Pole an einem Dynamoanker ist. Eine genauere Untersuchung dieses Falles hat H. Schmalz [XXIX, 9] durchgeführt, indem er die Gesamtbelastung in eine gleichmäßige Grundbelastung und mehrere darüber gelagerte harmonische Lastwellen zerlegt, die zugehörigen Spannungen ermittelt und übereinander lagert.

1. Beanspruchung von Trommeln.

An Trommeln, die mit Nuten zur Befestigung der Beschauelung versehen sind, Abb. 2273, ermittelt man zunächst die mittlere Wandstärke s_t und den zugehörigen Außenhalbmesser R_1 . Liegt nun das Verhältnis des Innen- zu diesem Außenhalbmesser $\frac{R_2}{R_1}$ in der Nähe von 1, ist also die Wandstärke der Trommel nicht allzu beträchtlich, so dürfen die beim Laufen in der Wandung entstehenden tangentialen Zugspannungen gleichmäßig verteilt angenommen werden. Wenn γ das Einheitsgewicht des Werkstoffes in kg/cm^3 , v_t die Laufgeschwindigkeit am mittleren Wandungshalbmesser in cm/sek und $g = 981 \text{ cm/sek}^2$ die Fallbeschleunigung bedeuten, so bedingt die Eigenfliehkraft eine mittlere Zugspannung:

$$\sigma_{z1} = \frac{\gamma \cdot v_t^2}{g} \text{ kg/cm}^2, \quad (757)$$

wie des näheren beim Riementrieb auf S. 1168 unter Beachtung der dort verwandten andern Maßeinheiten nachgewiesen wurde. Aus den folgenden, für verschiedene Lauf-

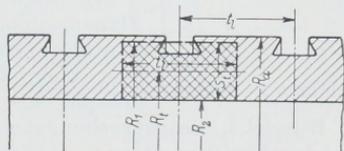


Abb. 2273. Bezeichnungen an Trommelwandungen.

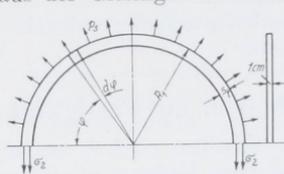
geschwindigkeiten v_t bei $\gamma = 7,85/1000 \text{ kg/cm}^3$ gültigen Werten erhellt, daß Trommeln nur für mäßige Laufgeschwindigkeiten bis zu etwa 100 m/sek geeignet sind.

$v_t =$	20	40	60	80	100	120 m/sek
$\sigma_{z1} =$	32	128	288	512	800	1150 kg/cm ² .

Auch die von der Beschauelung entwickelten Fliehkräfte erzeugen tangentielle Zugspannungen in der Wandung. Zur Berechnung derselben geht man von der auf 1 cm des Trommelumfangs vom Halbmesser R_1 entwickelten Fliehkraft $Z_{1 \text{ cm}}$ aus und denkt sie sich gleichmäßig über die Teilung t_t , den Mittenabstand zweier Schaufelreihen, Abb. 2273, verteilt. Dann stellt $p_s = \frac{Z_{1 \text{ cm}}}{t_t}$ die mittlere, auf einen cm² der Trommeloberfläche entfallende Belastung dar, welche Spannungen in Höhe von:

$$\sigma_2 = \frac{p_s \cdot R_1}{s_t} = \frac{Z_{1 \text{ cm}} \cdot R_1}{s_t \cdot t_t} \quad (758)$$

erzeugt, wie sich leicht bei Betrachtung eines Trommelstreifens von 1 cm Breite, Abb. 2274, aus der Gleichgewichtsbedingung in senkrechter Richtung:



$$2 \sigma_2 \cdot 1 \cdot s_t = \int_0^\pi p_s \cdot 1 \cdot R_1 \cdot d\varphi \cdot \sin \varphi = 2 p_s \cdot R_1$$

nachweisen läßt. Somit ist die Gesamtbeanspruchung der Wandung:

$$\sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\gamma \cdot v_t^2}{g} + \frac{Z_{1 \text{ cm}} \cdot R_1}{s_t \cdot t_t} \quad (759)$$

Abb. 2274. Zur Ermittlung der Spannungen infolge der Fliehkräfte der Schaufeln.

Neben diesen tangentialen Spannungen entstehen noch radial gerichtete in Ansatzquerschnitt III der Zacken, Abb. 2267, der die von den Schaufeln und den Zacken selbst entwickelten Fliehkräfte zu übertragen hat. Sie fallen aber nur bei ungewöhnlich schmalen Zacken größer als die Tangentialspannungen aus und sind erst dann für die Inanspruchnahme der Trommelwandung entscheidend.

Die radiale Erweiterung ϱ , der die Trommel beim Laufen unterliegt, ergibt sich auf Grund der gleichen Betrachtung, wie sie für die Erweiterung ϱ_k von Riemenscheibenkränzen nach Formel (683) S. 1204 gilt:

$$\varrho = \alpha \cdot \sigma_z \cdot R_t \quad (760)$$

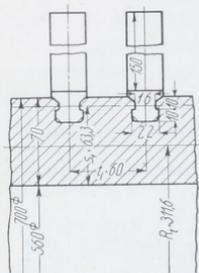


Abb. 2275. Zu Beispiel 4.

Sie ist u. a. beim Einschrumpfen der Zapfen oder Wellenden in die Trommeln zu beachten; das radiale Schrumpfmaß muß größer als diese Erweiterung sein, um das Lösen der Verbindung beim Laufen zu vermeiden, was nicht allein in Rücksicht auf die Übertragung des Drehmoments, sondern auch wegen des ruhigen zentrischen Laufes notwendig ist.

Dickwandige Trommeln, wie sie u. a. als Kernkörper von Dynamoankern vorkommen, müssen als durchbohrte Scheiben gleicher Stärke — man denkt sich aus dem Kern eine solche von 1 cm Dicke herausgeschnitten — berechnet werden, vgl. Beispiel 8.

Beispiel 4. Beanspruchung der Trommelwandung, Abb. 2275, bei 3000 Umläufen/min. Auf dem Umfange sitzen $z = 152$ mit dem Füllstück aus einem Stück bestehende Schaufeln von 150 mm wirksamer Länge. Jede von ihnen entwickelt beim Laufen eine Fliehkraft von 560 kg. Trommelwerkstoff: Siemens-Martinstahl St 50. 11 DIN 1611 mit mindestens 2750 kg/cm² Spannung an der Streckgrenze.

Die mittlere Wandstärke ergibt sich aus dem Wandquerschnitt F zwischen zwei Schaufelreihen von $t_t = 60$ mm Abstand:

$$s_t = \frac{F}{t_t} = \frac{7,0 \cdot 6,0 - 2,2 \cdot 1,0 - 1,6 \cdot 1,0 - 0,5 \cdot 0,4}{6} = \frac{38}{6} = 6,33 \text{ cm}.$$

Mittlerer Wandungshalbmesser $R_t = \frac{56,0 + 6,33}{2} = 31,16 \text{ cm}$, ideeller Außenhalbmesser $R_u = 34,33 \text{ cm}$, mittlere Wandungsgeschwindigkeit $v_t = \omega \cdot R_t = 314 \cdot 31,16 = 9790 \text{ cm/sek}$.
Mittlere Tangentialspannung beim Laufen:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma \cdot v_t^2}{g} = \frac{7,85 \cdot 9790^2}{1000 \cdot 981} = 767 \text{ kg/cm}^2.$$

Wirkung der Schaufeln. Teilung längs des Kreises vom Halbmesser R_1 :

$$t = \frac{2 \pi \cdot R_1}{z} = \frac{2 \pi \cdot 34,33}{152} = 1,42 \text{ cm}.$$

Fliehkraft auf 1 cm Länge:

$$Z_{1 \text{ cm}} = \frac{Z_s}{t} = \frac{560}{1,42} = 394 \text{ kg/cm}.$$

Tangentialspannung:

$$\sigma_2 = \frac{Z_{1 \text{ cm}} \cdot R_1}{s_t \cdot t_l} = \frac{394 \cdot 34,33}{6,33 \cdot 6} = 356 \text{ kg/cm}^2.$$

Summe der Spannungen:

$$\sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 = 767 + 356 = 1123 \text{ kg/cm}^2.$$

Von der Mindestspannung an der Streckgrenze werden somit $\frac{1123}{2750} \cdot 100 = 40,8\%$ ausgenutzt.

Die mittlere Radialspannung im Ansatzquerschnitt der Zacken von $e = 38 \text{ mm}$ Breite ist niedrig. Eigenfliehkraft des Zackens von $7,8 \text{ cm}^2$ Querschnitt je Zentimeter Länge:

$$(Z_s)_{1 \text{ cm}} = \frac{G}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_z = \frac{7,8 \cdot 1 \cdot 7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 34 = 209 \text{ kg/cm};$$

$$\sigma_r = \frac{(Z_1)_{1 \text{ cm}} + (Z_s)_{1 \text{ cm}}}{e} = \frac{394 + 209}{3,8} = 159 \text{ kg/cm}^2.$$

Die radiale Erweiterung der Trommel beim Laufen beträgt:

$$\varrho = \alpha \cdot \sigma_z \cdot R_t = \frac{1123 \cdot 31,16}{2100000} = 0,0167 \text{ cm}.$$

2. Berechnung raschlaufender Scheiben.

Höhere Umfangsgeschwindigkeiten als $100 \dots 120 \text{ m/sek}$ lassen sich an den rotierenden Kraft- und Arbeitsmaschinen nur durch Scheiben ermöglichen. Sie gestatten 300 m/sek und mehr auszunutzen, weil die durch die Eigenfliehkraft niedrig beanspruchten mittleren Teile der Scheibe zur Aufnahme der Fliehkkräfte der äußeren herangezogen werden. Die Ausbildung oder das Einsetzen der Beschauelung verlangen meist die Verstärkung des Außenrandes zu einem Kranz, die Befestigung auf der Welle vielfach auch die Ausbildung einer Nabe, so daß man an Scheibenrädern meist drei Teile unterscheiden kann, die auch bei der Berechnung oft für sich betrachtet werden, den Kranz, die eigentliche Scheibe und die Nabe.

Dementsprechend wurden auch die Bezeichnungen nach Abb. 2276 gewählt, diejenigen der eigentlichen Scheibe durch Zahlen: R_1, x_1 und R_2, x_2 , die des Kranzes durch das Bezeichnen $k: R_k, b_k, s_k$, die der Nabe durch $n: R_n, b_n, s_n$ gekennzeichnet. Der Außenhalbmesser ist R_a , der Nabenbohrungshalbmesser R_o genannt. Zu dem beliebigen Durchmesser r gehört die Scheibenstärke x .

Die folgenden Berechnungen gelten unter der Voraussetzung, daß die Scheiben symmetrisch zu ihrer Mittelebene ausgebildet sind und daß sich ihre Stärke so allmählich

ändert, daß man die Neigung der radialen Spannungen vernachlässigen kann. Dann entstehen beim Laufen nur radiale und tangentielle Zugspannungen, die man genügend genau über die Dicke der Scheibe gleichmäßig verteilt ansehen kann. Der Fliehkraft Z des Scheibenausschnittes A in Abb. 2277 wird durch den Zuwachs, den die eingezeichneten Tangential- und Radialspannungen σ_t und σ_r erfahren, das Gleichgewicht gehalten. Es gilt, die Größe dieser Spannungen in beliebigen Abständen von der Drehachse, also den Spannungsverlauf längs des Scheibenhalmessers zu ermitteln.

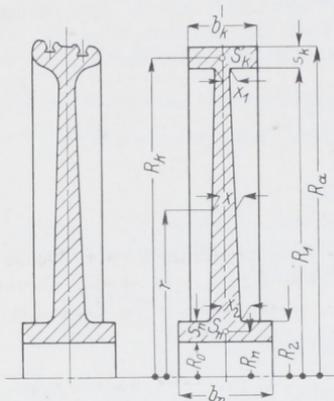


Abb. 2276. Bezeichnungen an Scheiben.

Zu dem Zweck denkt man sich aus einem Elementarringe der Scheibe vom Halbmesser r und der Stärke dr ein Element unter dem Winkel $d\varphi$, Abb. 2278, herausgeschnitten. Hat die Scheibe die Stärke x , so ist der Inhalt des Elements durch

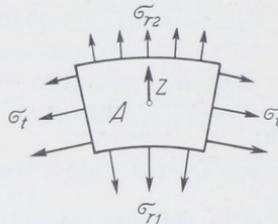


Abb. 2277.

seine Masse durch $dV = r \cdot d\varphi \cdot x \cdot dr$, und die von ihm entwickelte Fliehkraft bei der Winkelgeschwindigkeit ω durch:

$$dM = \frac{\gamma}{g} \cdot r \cdot d\varphi \cdot x \cdot dr$$

$$dZ = dM \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot d\varphi \cdot x \cdot dr$$

gegeben. Wirken nun an den Begrenzungsflächen des Elements die Spannungen:

σ_r an der Innenfläche 1, radial nach innen gerichtet, die um das Differential größere $\sigma_r + d\sigma_r$ an der Fläche 2, radial nach außen und die einander gleichgroßen Tangentialspannungen σ_t an den Flächen 3 und 4, so erhält man die am Element angreifenden, in Abb. 2279 eingeschriebenen Kräfte P_1 , P_2 und T ,

wenn man die Spannungen mit den Flächen, an denen sie wirken, multipliziert. Das Gleichgewicht in Richtung des Halbmessers verlangt nun, daß:

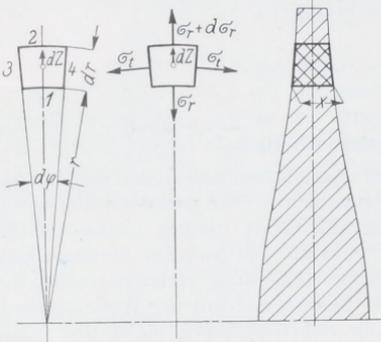


Abb. 2278.

Zur Berechnung der Spannungen in Scheiben.

$$\begin{aligned} -P_1 + P_2 - 2T \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + dZ &\approx -P_1 + P_2 \\ &- T \cdot d\varphi + dZ \\ &= -\sigma_r \cdot r \cdot d\varphi \cdot x + (\sigma_r + d\sigma_r)(x + dx)(r + dr) d\varphi \\ &- \sigma_t \cdot x \cdot dr \cdot d\varphi + \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot d\varphi \cdot x \cdot dr = 0 \end{aligned}$$

sei. Vernachlässigt man die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung, so geht die Gleichung über in:

$$+\sigma_r \cdot dx \cdot r + \sigma_r \cdot x \cdot dr + d\sigma_r \cdot x \cdot r - \sigma_t \cdot x \cdot dr + \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x \cdot dr = 0 \quad (761)$$

und führt zur ersten Hauptgleichung:

$$\frac{d(\sigma_r \cdot x \cdot r)}{dr} - \sigma_t \cdot x + \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x = 0. \quad (762)$$

Die zweite Hauptgleichung gewinnt man auf Grund der Formänderungen, denen das Element und die Ringe unterliegen, aus denen die Scheibe zusammengesetzt gedacht

werden kann. Bei einer Dehnungszahl α des Scheibenwerkstoffs würde die Radialspannung σ_r allein eine Dehnung in radialer Richtung $\alpha \cdot \sigma_r$ erzeugen. Die tangential Spannung σ_t verringert dieselbe um $\frac{1}{m} \cdot \alpha \cdot \sigma_t$, wenn m die Querdehnungszahl ist. Mithin beträgt die radiale Gesamtdehnung:

$$\varepsilon_r = \alpha \left(\sigma_r - \frac{1}{m} \cdot \sigma_t \right). \quad (763)$$

Entsprechend wird die tangentiale:

$$\varepsilon_t = \alpha \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \cdot \sigma_r \right). \quad (764)$$

Löst man die Gleichungen nach σ_r und σ_t auf, so folgt:

$$\sigma_r = \frac{m(m \cdot \varepsilon_r + \varepsilon_t)}{\alpha(m^2 - 1)}; \quad \sigma_t = \frac{m(\varepsilon_r + m \cdot \varepsilon_t)}{\alpha(m^2 - 1)}.$$

Der Elementarring vom Halbmesser r und Umfang $U = 2\pi r$ nimmt beim Laufen einen größeren Durchmesser an. Beträgt die radiale Erweiterung ϱ cm, so ist sein innerer Umfang $2\pi(r + \varrho)$ geworden und mithin um $\lambda = 2\pi\varrho$ cm gewachsen. Die Tangentialdehnung läßt sich somit auch durch:

$$\varepsilon_t = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\varrho}{2\pi r} = \frac{\varrho}{r} \quad (765) \quad P_2 \cdot (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi$$

ausdrücken. In radialer Richtung nimmt die Erweiterung auf der Strecke dr um $d\varrho$ zu; also ist die Radialdehnung:

$$\varepsilon_r = \frac{d\varrho}{dr}. \quad (766)$$

Diese Beziehungen gestatten, die Spannungen allein auf die Verschiebung ϱ in radialer Richtung zurückzuführen:

$$\sigma_r = \frac{m \left(m \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} \right)}{\alpha(m^2 - 1)}, \quad \sigma_t = \frac{m \left(\frac{d\varrho}{dr} + m \frac{\varrho}{r} \right)}{\alpha(m^2 - 1)}. \quad (767)$$

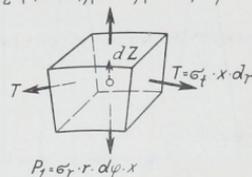


Abb. 2279.

In die erste Hauptgleichung eingeführt, wird:

$$\begin{aligned} d \left[\left(m \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} \right) \cdot x \cdot r \right] - \left(\frac{d\varrho}{dr} + m \frac{\varrho}{r} \right) \cdot x + \alpha \cdot \frac{m^2 - 1}{m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x &= 0, \\ m \cdot d \left(\frac{d\varrho}{dr} \cdot x \cdot r \right) + d(\varrho \cdot x) - \frac{d\varrho}{dr} \cdot x - m \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot x + \alpha \cdot \frac{m^2 - 1}{m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x &= 0. \end{aligned}$$

Nach Division durch $m \cdot x \cdot r$:

$$\frac{1}{x \cdot r} \cdot d \left(\frac{d\varrho}{dr} \cdot x \cdot r \right) + \frac{1}{m} \cdot \frac{d(\varrho \cdot x)}{x \cdot r} - \frac{1}{m \cdot r} \cdot \frac{d\varrho}{dr} - \frac{\varrho}{r^2} + \alpha \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r = 0$$

läßt sich die Differentiation durchführen:

$$\frac{d^2\varrho}{dr^2} + \frac{d\varrho}{dr} \cdot \frac{d \ln x}{dr} + \frac{d\varrho}{dr} \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{m} \cdot \frac{d\varrho}{r \cdot dr} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{d \ln x}{dr} - \frac{1}{m \cdot r} \cdot \frac{d\varrho}{dr} - \frac{\varrho}{r^2} + \alpha \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r = 0,$$

eine Beziehung, die mit $\alpha \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 = A$ zur zweiten Hauptgleichung führt:

$$\frac{d^2\varrho}{dr^2} + \frac{d\varrho}{dr} \left(\frac{d \ln x}{dr} + \frac{1}{r} \right) + \varrho \left(\frac{1}{m \cdot r} \cdot \frac{d \ln x}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) + A \cdot r = 0. \quad (768)$$

a) Die Scheibe gleicher Festigkeit ohne Bohrung.

Die von de Laval angegebene und zuerst angewandte Scheibenform gestattet, alle Elemente der Scheibe mit der noch zulässig erachteten Beanspruchung auszunutzen, führt zu geringen Scheibengewichten und ermöglicht, die bei der betreffenden Spannung größtmögliche Geschwindigkeit zu erreichen. Mit $\sigma_t = \sigma_r = \sigma$ und $d\sigma_r = 0$ geht die erste Hauptgleichung (762) über in:

$$\sigma \frac{d(x \cdot r)}{dr} - \sigma \cdot x + \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x = \sigma \cdot r \cdot \frac{dx}{dr} + \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x = 0.$$

Zur Trennung der Veränderlichen multipliziert man die Gleichung mit $\frac{dr}{\sigma \cdot r \cdot x}$, wobei:

$$\frac{dx}{x} = - \frac{\gamma}{\sigma} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cdot r \cdot dr$$

wird und die Integration zu:

$$\ln x = - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} \cdot \frac{r^2}{2} + C$$

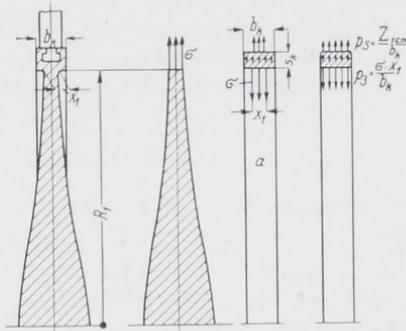


Abb. 2280.

Zur Berechnung der Scheibe gleicher Spannung.

führt. C findet man aus der Bedingung, daß die Scheibe nach Abb. 2280 am Übergang zum Kranz in der Entfernung R_1 von der Drehachse eine bestimmte Stärke x_1 haben muß, wie weiter unten des näheren ausgeführt ist, so daß $x = x_1$ für $r = R_1$ wird. Damit findet sich:

$$C = + \frac{\gamma}{2g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} \cdot R_1^2 + \ln x_1$$

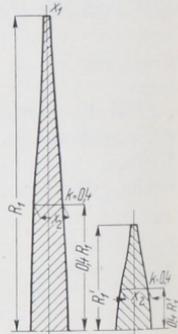


Abb. 2281.

Scheiben gleicher Festigkeit verschiedenen Durchmessers, aber für gleiche Umfangsgeschwindigkeit.

und

$$\ln x = + \ln x_1 + \frac{\gamma}{2g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} (R_1^2 - r^2)$$

oder

$$x = x_1 \cdot e^{\frac{\gamma}{2g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} (R_1^2 - r^2)} = x_1 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot v_1^2}{2g \cdot \sigma} (1 - k^2)} \tag{769}$$

In der letzten Form ist $k = \frac{r}{R_1}$ und $\omega \cdot R_1 = v_1$, der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe, gesetzt. Dabei zeigt sich, daß die Scheibenstärke x bei demselben Wert für k , d. h. in verhältnismäßigem Abstand von der Drehachse gleich groß ist, Abb. 2281.

Wie die Spannung, so ist auch die Dehnung an allen Stellen der Scheibe gleich groß:

$$\epsilon_r = \epsilon_t = \alpha \left(\sigma - \frac{1}{m} \cdot \sigma \right) = \alpha \frac{m-1}{m} \cdot \sigma, \tag{770}$$

so daß ein beliebiger Halbmesser r in radialer Richtung um:

$$q = \epsilon_r \cdot r = \alpha \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot r \tag{771}$$

wächst.

Abb. 2282 bis 2285 geben die Form von Scheiben gleicher Festigkeit auf Grund der vorstehenden Ableitung berechnet wieder. Angenommen sind dabei: $\sigma = 2000 \text{ kg/cm}^2$, Scheibenstärke am äußeren Rande in der Entfernung $R_1 = 1000 \text{ mm}$ $x_1 = 20 \text{ mm}$ und

bei Abb.	2282	2283	2284	2285
oder	$v_1 = 100$	200	300	400 m/sek Umfangsgeschwindigkeit
	$n = 955$	1900	2865	3820 Umläufe in der Minute.

Die Abbildungen zeigen deutlich, in welchem Maße die Scheiben an der Nabe mit steigender Umfangsgeschwindigkeit verstärkt werden müssen. Die Grenze der praktischen Ausführbarkeit liegt, sofern man nicht höhere Beanspruchungen zulassen will, nach Abb. 2285 bei etwa 400 m/sek, da in dem Falle die auf S. 1313 bei der Ableitung gemachte Voraussetzung, daß sich die Stärke der Scheibe so allmählich ändere, daß die Neigung der radialen Spannungen vernachlässigt werden kann, nur unvollkommen erfüllt ist.

Beispielweise ergibt sich für $v = 300$ m/sek Umfangsgeschwindigkeit der Exponent von e

$$\frac{\gamma}{2g} \cdot \frac{v^2}{\sigma} (1 - k^2) = \frac{7,85}{2 \cdot 1000 \cdot 981} \cdot \frac{30000^2}{2000} (1 - k^2) = 1,800 (1 - k^2),$$

womit die folgende Zahlenreihe errechnet ist:

Abstand r	100	80	60	40	20	0 cm
k	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0
$1 - k^2$	0	0,36	0,64	0,84	0,96	1
Scheibenstärke x	2,0	3,8	6,3	9,1	11,3	12,1 cm

Um nun den Anschluß des Kranzes an die Scheibe ohne zusätzliche Spannungen zu ermöglichen, muß sich der Kranz beim Laufen um den gleichen Betrag erweitern, um den sich der Rand der Scheibe vergrößert. Zum Aufstellen dieser Randbedingung betrachte man den Kranz nach Abb. 2280 als einen geschlossenen Ring oder als Stück einer Trommelwandung a , die 1. durch die Eigenfliehkraft, 2. durch die Fliehkkräfte der Beschauelung radial nach außen zu, 3. durch die in der Scheibe herrschende Spannung $\sigma_r = \sigma$ auf der Breite x_1 radial nach innen zu belastet ist. Die Wirkung der unter 1. und 2. genannten Kräfte läßt sich nach Formel (759) beurteilen, wenn sinngemäß für v_t die mittlere Kranzgeschwindigkeit v_k , für s_t die Kranzstärke s_k und für t_t die Kranzbreite b_k eingeführt wird. Die dritte Belastung denkt man sich in derselben Weise wie diejenige der Schaufeln gleichmäßig über die Kranzbreite b_k verteilt, wodurch sie einer radialen Belastung des Ringes $p_3 = \frac{\sigma \cdot x_1}{b_k}$ kg/cm² gleichkommt. Ihr entspricht eine mittlere Druckspannung im Kranz $\sigma_3 = -\frac{p_3 \cdot R_1}{s_k} = -\frac{\sigma \cdot x_1 \cdot R_1}{s_k \cdot b_k}$ kg/cm², wie sich auf dem gleichen Wege nachweisen läßt, der für die Ermittlung von σ_2 an Abb. 2274 benutzt wurde, so daß der Kranz insgesamt beansprucht ist mit:

$$\sigma_k = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{\gamma}{g} \cdot v_k^2 + \frac{Z_{1 \text{ cm}} \cdot R_a}{s_k \cdot b_k} - \frac{\sigma \cdot x_1 \cdot R_1}{s_k \cdot b_k} \quad (772)$$

Nach Formel (760) erweitert er sich beim Laufen um $\varrho_k = \alpha \cdot \sigma_k \cdot R_k$. Durch Gleichsetzen mit der radialen Vergrößerung der Scheibe nach (771) mit $r = R_1$ wird:

$$\sigma_k = \frac{m - 1}{m} \cdot \sigma \cdot \frac{R_1}{R_k} \quad (773)$$

woraus unter Beachtung der Beziehung (772):

$$x_1 = \frac{s_k \cdot b_k}{\sigma \cdot R_1} \left[\frac{\gamma}{g} v_k^2 + \frac{Z_{1 \text{ cm}} \cdot R_a}{s_k \cdot b_k} - \frac{m - 1}{m} \cdot \sigma \cdot \frac{R_1}{R_k} \right] \quad (774)$$

folgt. Untere Grenzwerte für x_1 sind allerdings durch die Bearbeitung und die Neigung der Scheibe zum Werfen gezogen. Stodola gibt für x_1 mindestens 7...12 mm bei

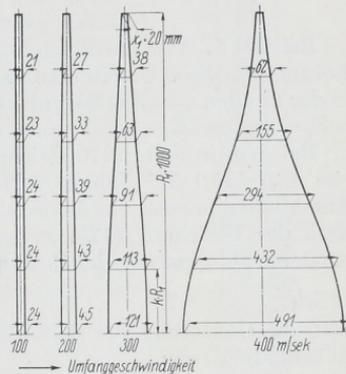


Abb. 2282 bis 2285. Scheiben gleicher Festigkeit für verschiedene Umfangsgeschwindigkeit. M. 1:20.

1 m und 25 . . . 40 mm bei 3 m Scheibendurchmesser an. Karraß [XXIX, 2] empfiehlt:

$$x_1 \geq 0,01 D, \quad (775)$$

also verhältnismäßig dem Scheibendurchmesser D zu nehmen.

Will man von einem bestimmten Wert für x_1 ausgehen, so liefert die Gleichung (774) die Spannung σ , welche der Berechnung der Scheibe zugrunde zu legen ist:

$$\sigma = \frac{m \cdot R_k (\gamma \cdot v_k^2 \cdot s_k \cdot b_k + g \cdot Z_{1\text{cm}} \cdot R_a)}{g \cdot R_1 [m \cdot R_k \cdot x_1 + (m-1) \cdot s_k \cdot b_k]}, \quad (776)$$

Beispiel 5. Für die Beschauflung Abb. 2270 ist eine Scheibe gleicher Festigkeit ohne Bohrung für 3000 Umläufe/min zu berechnen. In der ersten Schaufelreihe sitzen $z_1 = 334$, in der zweiten $z_2 = 382$ Schaufeln, die samt den zugehörigen Füllstücken Fliehkräfte von je $Z_1 = 224$ und $Z_2 = 186$ kg ausüben.

Bei dem in Abb. 2270 strichpunktiert gezeichneten Mindestquerschnitt des Kranzes von $F_k = 13,1$ cm² Inhalt, mit einem Schwerpunkthalbmesser $R_k = 56,7$ cm, einem Anschlußhalbmesser an die Scheibe $R_1 = 55,5$ cm und der Mindeststärke der letzteren nach der Beziehung (775) $x_1 \geq 0,01 D = 0,01 \cdot 1200 = 12$ mm, wenn man für D den mittleren Durchmesser der Beschauflung einsetzt, wird die mittlere Kranzgeschwindigkeit:

$$v_k = \omega \cdot R_k = 314 \cdot 56,7 = 17810 \text{ cm/sek}$$

und die Belastung der Kranzaußenfläche auf 1 cm des Umfangs bei $R_a = 57,8$ cm Außenhalbmesser:

$$Z_{1\text{cm}} = \frac{z_1 \cdot Z_1 + z_2 \cdot Z_2}{2 \pi \cdot R_a} = \frac{334 \cdot 224 + 382 \cdot 186}{2 \pi \cdot 57,8} = 402 \text{ kg/cm}.$$

Führt man noch $s_k \cdot b_k = F_k$ in Formel (776) ein, so wird die Spannung an der Anschlußstelle und damit in der eigentlichen Scheibe:

$$\sigma = \frac{m \cdot R_k (\gamma \cdot v_k^2 \cdot F_k + g \cdot Z_{1\text{cm}} \cdot R_a)}{g \cdot R_1 [m \cdot R_k \cdot x_1 + (m-1) \cdot F_k]} = \frac{3,3 \cdot 56,7 \left(\frac{7,85}{1000} \cdot 17810^2 \cdot 13,1 + 981 \cdot 402 \cdot 57,8 \right)}{981 \cdot 55,5 (3,3 \cdot 56,7 \cdot 1,2 + 2,3 \cdot 13,1)} = 736 \text{ kg/cm}^2.$$

Verstärkt man den Kranz dem stark ausgezogenen Umriß der Abb. 2270 entsprechend, so erhöht sich mit $F'_k = 16$ cm², $R'_k = 56,5$, $R'_1 = 54,8$ cm und $v'_k = 17750$ cm/sek die Scheibenspannung bei der gleichen Stärke an der Anschlußstelle von 12 mm auf $\sigma' = 818$ kg/cm². Der Vergleich von σ' und σ zeigt, in welchem Maße der schwerere Kranz spannungserhöhend wirkt. (Der Kranz allein, als frei umlaufender Ring berechnet, würde einer tangentialen Fliehspannung von:

$$\frac{\gamma}{g} \cdot v_k^2 = \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 17750^2 = 2520 \text{ kg/cm}^2$$

ausgesetzt sein. Durch die Verbindung mit der Scheibe wird dieser Betrag nach (773) auf eine mittlere Tangentialspannung

$$\sigma_k = \frac{m-1}{m} \cdot \sigma' \cdot \frac{R'_1}{R'_k} = \frac{2,3}{3,3} \cdot 818 \cdot \frac{54,8}{56,5} = 554 \text{ kg/cm}^2$$

herabgemindert.)

Wählt man in Rücksicht auf größere Steifigkeit der Scheibe $x'_1 = 15$ mm, entsprechend der stark umrissenen Form in Abb. 2270 und 2286, so sinkt die Spannung wieder auf $\sigma'' = 673$ kg/cm². Die Scheibenstärken in verschiedenen Abständen nach Formel (769) geben die folgenden Zahlenreihen an:

	$r = 0$	10	20	30	40	50 cm
bei $x_1 = 12$ mm und $F_k = 13$ cm ²	$x = 62,7$	59,4	50,6	38,7	26,6	16,0 mm
bei $x'_1 = 15$ mm und $F'_k = 16,0$ cm ²	$x' = 87,4$	82,4	69,1	51,5	34,2	20,2 mm.

Die Ableitung der Formel (769) setzt eine volle Scheibe ohne Bohrung voraus. Konstruktiv hat de Laval diese Bedingung durch die Befestigung der Wellenschenkel an Rädern hoher Umfangsgeschwindigkeit nach Abb. 2219 erfüllt, indem er zwei be-

sondere Ränder für die Gewindelöcher der Anschlußschrauben vorsah. Bohrungen selbst kleinsten Durchmessers erhöhen die örtlichen Spannungen auf mindestens das doppelte, wie für die Scheiben gleicher Stärke auf S. 1323 nachgewiesen wird. An der Thyssen-Röder-Turbine Abb. 2225 sind zum Ausgleich dort, wo die Anschlußschrauben der Trommel und des Wellenendes sitzen, Verstärkungen der Scheiben vorgesehen, die gleichzeitig der gegenseitigen Zentrierung der Teile dienen. (Die in Abb. 2219 ange deutete Eindrehung unter dem Kranze bezweckt, dort die größte Spannung entstehen zu lassen, damit bei etwaigen Überbeanspruchungen nur der Kranz wegfliegt, nicht aber die ganze Scheibe in Mitleidenschaft gezogen wird und mit ihrer gesamten Wucht zur Wirkung kommt.)

b) Die Scheibe gleicher Festigkeit mit Nabe.

Soll die Scheibe eine Bohrung bekommen, so muß die Nabe derart bemessen sein, daß, ähnlich wie oben am Kranz gezeigt, die vorgeschriebene Radialspannung an der Übergangsstelle bei gleicher radialer Vergrößerung der Scheibe und der Nabe vorhanden ist. Die Nabe, als geschlossener Ring betrachtet, steht:

1. unter der Wirkung der Eigenfliehkraft, ist
2. durch die in der Scheibe herrschende Radialspannung $\sigma_r = \sigma$ auf der Breite x_2 , Abb. 2289, radial nach außen zu belastet und kann

3. noch einer Radialpressung an der Nabeninnenfläche p_0 ausgesetzt sein, die beim Zusammenbau der Scheibe mit der Welle benutzt wird, um das Losewerden der Scheibe beim Laufen zu vermeiden.

Bei der im Verhältnis zum Bohrungshalbmesser meist nicht un beträchtlichen Nabenwandstärke ist es nun nicht mehr zulässig, mit der mittleren Tangentialspannung wie am Kranz zu rechnen. Das würde zu einer wesentlichen Unterschätzung der größten Spannung an der Innenfläche der Nabe, einer Überschätzung an der Anschlußstelle der Scheibe führen. Nimmt man in erster An näherung hyperbolische Spannungsverteilung in der Nabenwand nach Linie ABC in Abb. 2287 an, so ergeben sich die Spannungen an der Innen- und Außenfläche σ_0 und σ_2 aus der mittleren Spannung σ_n :

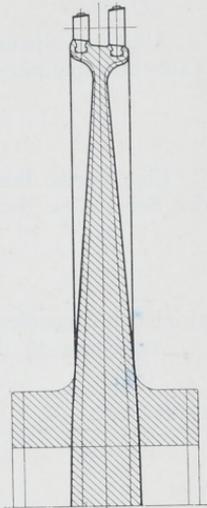


Abb. 2286. Scheiben gleicher Festigkeit zum Kranz Abb. 2270. M. 1 : 8.

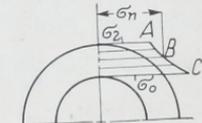


Abb. 2287. Zur Berechnung der Nabe.

$$\sigma_0 = \sigma_n \cdot \frac{R_n}{R_0} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \sigma_n \cdot \frac{R_n}{R_2}; \quad (777)$$

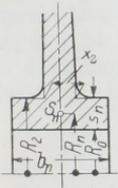


Abb. 2288. Bezeichnungen an der Nabe von Scheiben.

vgl. hierzu die Ausführungen auf S. 1280 unten und 1281. Damit läßt sich die Ableitung der Formel auf die mittlere Spannung σ_n zurückführen; sie erfolgt auf dem gleichen Wege wie am Kranz.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 2288 ergibt sich nach Abb. 2289:

1. eine mittlere Fliehschpannung $\sigma_1 = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_n^2$, Zur Berechnung der Nabe.
2. infolge der Radialspannung σ an der Ansatzstelle der Scheibe von der Breite x_2

$$\sigma_2 = \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} \cdot \frac{R_2}{s_n},$$

wenn die Belastung $\sigma \cdot x_2$ auf der Nabenbreite b_n gleichmäßig verteilt in Höhe von $\frac{\sigma \cdot x_2}{b_n}$ angenommen wird,

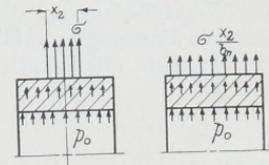


Abb. 2289.

3. infolge der radialen an der Innenfläche vom Halbmesser R_0 wirkenden Pressung p_0 :

$$\sigma_3 = \frac{p_0 \cdot R_0}{s_n}.$$

Alle drei Spannungen sind Zugspannungen. Insgesamt wird somit die mittlere Tangentialspannung in der Nabe:

$$\sigma_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_n^2 + \frac{\sigma \cdot x_2 \cdot R_2}{b_n \cdot s_n} + \frac{p_0 \cdot R_0}{s_n}. \quad (778)$$

Eine zweite Beziehung ergibt sich aus der Bedingung, daß die radiale Erweiterung der Scheibe an der Anschlußstelle nach Formel (771):

$$\varrho_2 = \alpha \frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot R_2 \quad (779)$$

gleich der Vergrößerung der Nabe sein muß. Die letztere beträgt

$$\alpha \cdot \sigma_2 \cdot R_2 = \alpha \cdot \sigma_n \cdot \frac{R_n}{R_2} \cdot R_2 = \alpha \cdot \sigma_n \cdot R_n,$$

so daß:

$$\frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot R_2 = \sigma_n \cdot R_n$$

oder

$$\frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot \frac{R_2}{R_n} = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_n^2 + \frac{\sigma \cdot x_2 \cdot R_2}{b_n \cdot s_n} + \frac{p_0 \cdot R_0}{s_n} \quad (780)$$

sein muß. Falls der Bohrungshalbmesser R_0 gegeben ist und die Nabenstärke s_n angenommen wird, folgt daraus die Nabenbreite:

$$b_n = \frac{m \cdot g \cdot x_2 \cdot R_2 \cdot R_n \cdot \sigma}{(m-1) \cdot g \cdot s_n \cdot R_2 \cdot \sigma - m \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot s_n \cdot R_n^3 - m \cdot g \cdot p_0 \cdot R_0 \cdot R_n}. \quad (781)$$

Die Spannung an der Nabeninnenfläche wird:

$$\sigma_0 = \sigma_{\max} = \frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot \frac{R_2}{R_0}. \quad (782)$$

Genauer läßt sich die Spannungsverteilung, insbesondere die größte Spannung in der Nabenbohrung ermitteln, wenn man die Nabe als eine Scheibe gleicher Stärke b_n betrachtet und nach den auf S. 1326 abgeleiteten Formeln berechnet, wie Beispiel 9 zeigt.

Das Schrumpfmaß, mit dem die Scheibe aufzuziehen ist, ergibt sich aus der Summe der Vergrößerung ϱ_0 , die der Bohrungshalbmesser durch die Tangentialspannung σ_0 und die Pressung p_0 erfährt und der Zusammendrückung ϱ_w der Welle durch p_0 . Nach den Formeln (765) und (764) ist:

$$\varrho_0 = \varepsilon_t \cdot R_0 = \alpha \left(\sigma_0 + \frac{p_0}{m} \right) R_0 \quad \text{und} \quad \varrho_w = \alpha \left(p_0 - \frac{p_0}{m} \right) R_0,$$

da die Pressung p_0 eine gleichhohe tangential Druckspannung an der Wellenoberfläche erzeugt. Somit wird das beim Aufziehen anzuwendende Schrumpfmaß, bezogen auf den Bohrungsdurchmesser:

$$2(\varrho_0 + \varrho_w) = 2\alpha \cdot (\sigma_0 + p_0) \cdot R_0. \quad (783)$$

Beispiel 6. Zu der stark ausgezogenen Form der Scheibe gleicher Festigkeit, Abb. 2286, soll die Breite der Nabe von $2R_0 = 150$ mm Bohrungsdurchmesser und $s_n = 70$ mm Wandstärke näherungsweise berechnet werden, wenn die Zusammenbauspannung bei 3000 Umläufen/min noch $p_0 = 50$ kg/cm² beträgt.

Mit $R_n = 75 + 35 = 110$ mm mittlerem und $R_2 = 75 + 70 = 145$ mm äußerem Halbmesser der Nabe wird $x_2 = 78$ mm und

$$b_n = \frac{3,3 \cdot 981 \cdot 7,8 \cdot 14,5 \cdot 11 \cdot 673}{2,3 \cdot 981 \cdot 7,0 \cdot 14,5 \cdot 673 - 3,3 \cdot \frac{785}{1000} \cdot 314^2 \cdot 7,0 \cdot 11^3 - 3,3 \cdot 981 \cdot 50 \cdot 7,5 \cdot 11} = 23,2 \text{ cm.}$$

An der Nabeninnenfläche herrschen:

$$\sigma_0 = \frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot \frac{R_2}{R_0} = \frac{2,3}{3,3} \cdot 673 \cdot \frac{14,5}{7,5} = 907 \text{ kg/cm}^2$$

Spannung. Das Schrumpfmaß beträgt:

$$2\alpha(\sigma_0 + p_0) \cdot R_0 = \frac{2(907 + 50) \cdot 7,5}{2100000} = 0,0068 \text{ cm.}$$

c) Die Scheibe gleicher Stärke.

$x = \text{konst.}$ und $d \ln x = 0$ läßt die zweite Hauptgleichung (768) übergehen in:

$$\frac{d^2 \varrho}{dr^2} + \frac{d\varrho}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\varrho}{r^2} + A \cdot r = 0$$

oder

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(\varrho \cdot r)}{dr} \right] = -A \cdot r,$$

(weil

$$\frac{1}{r} \frac{d(\varrho \cdot r)}{dr} = \frac{1}{r} \left(r \cdot \frac{d\varrho}{dr} + \varrho \right) = \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r}$$

und

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} \right] = \frac{1}{dr} \left[\frac{d^2 \varrho}{dr^2} - \frac{d\varrho \cdot dr^2}{dr^2} + \frac{d\varrho}{r} - \varrho \cdot \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{d^2 \varrho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varrho}{dr} - \frac{\varrho}{r^2}$$

ist, da das zweite Glied in der Klammer unendlich klein höherer Ordnung ist.)

Die Gleichung läßt sich integrieren und führt zu:

$$\frac{1}{r} \frac{d(\varrho \cdot r)}{dr} = -A \cdot \frac{r^2}{2} + C_1$$

und

$$d(\varrho \cdot r) = -\frac{A}{2} \cdot r^3 \cdot dr + C_1 \cdot r \cdot dr$$

$$\varrho \cdot r = -\frac{A}{8} \cdot r^4 + C_1 \cdot \frac{r^2}{2} + C_2 \quad \text{oder} \quad \varrho = -\frac{A \cdot r^3}{8} + \frac{C_1 \cdot r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

Mit

$$\frac{d\varrho}{dr} = -\frac{3}{8} A \cdot r^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}$$

und

$$\frac{\varrho}{r} = -\frac{A}{8} \cdot r^2 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}$$

wird nach den Beziehungen (767) die Radialspannung:

$$\sigma_r = \frac{m \left(m \cdot \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} \right)}{\alpha(m^2 - 1)} = \frac{m}{\alpha(m^2 - 1)} \left[-\frac{A \cdot r^2}{8} (3m + 1) + \frac{C_1}{2} \cdot (m + 1) - \frac{C_2}{r^2} (m - 1) \right], \quad (784)$$

die Tangentialspannung

$$\sigma_t = \frac{m \left(\frac{d\varrho}{dr} + m \cdot \frac{\varrho}{r} \right)}{\alpha(m^2 - 1)} = \frac{m}{\alpha(m^2 - 1)} \left[-\frac{A \cdot r^2}{8} (m + 3) + \frac{C_1}{2} (m + 1) + \frac{C_2}{r^2} (m - 1) \right], \quad (785)$$

C_1 und C_2 finden sich aus den von den jeweiligen Umständen abhängigen Randbedingungen.

α) Die Scheibe gleicher Stärke ohne Bohrung.

An einer vollen Blechscheibe, wie sie z. B. an Wasserbremsen vorkommen, wird am äußeren Rand, also für $r = R_1$, $\sigma_r = 0$, im Mittelpunkt der Scheibe, also für $r = 0$, $\sigma_t = \sigma_r$. Diese Bedingungen, eingesetzt in die Gleichungen 784 und 785, führen zu:

$$0 = -\frac{A \cdot R_1^2}{8} (3m+1) + \frac{C_1}{2} (m+1) - \frac{C_2}{r^2} (m-1)$$

und

$$\frac{C_1}{2} (m+1) - \frac{C_2}{0} (m-1) = \frac{C_1}{2} (m+1) + \frac{C_2}{0} (m-1)$$

oder

$$C_2 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 = \frac{A}{4} R_1^2 \frac{3m+1}{m+1}.$$

Damit wird die Spannung im Abstände r von der Drehachse in radialer Richtung:

$$\sigma_r = \frac{A \cdot m}{\alpha (m^2 - 1)} \left[-\frac{r^2}{8} (3m+1) + \frac{R_1^2}{8} (m+1) \right],$$

$$\sigma_r = \frac{A}{8} \frac{m (3m+1)}{\alpha (m^2 - 1)} (R_1^2 - r^2) = \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (3m+1) (R_1^2 - r^2), \quad (786)$$

in tangentialer:

$$\sigma_t = \frac{A}{8} \frac{m}{\alpha (m^2 - 1)} [(3m+1) R_1^2 - (m+3) r^2] = \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1) R_1^2 - (m+3) r^2]. \quad (787)$$

Die größte herrscht in der Mitte der Scheibe:

$$\sigma_{r \max} = \sigma_{t \max} = \frac{3m+1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_1^2. \quad (788)$$

Beispiel 7. An einer Scheibe von 1200 mm Durchmesser von beliebiger, aber durchweg gleicher Stärke treten bei $n = 3000$ Umläufen/min die folgenden Spannungen auf: am äußeren Umfang bei $r = R_1 = 60$ cm:

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_t = \frac{m-1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_1^2 = \frac{2,3}{4 \cdot 3,3} \cdot \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 60^2 = 495 \text{ kg/cm}^2,$$

in der Mitte der Scheibe bei $r = 0$:

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{3m+1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_1^2 = \frac{10,9}{8 \cdot 3,3} \cdot \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 60^2 = 1175 \text{ kg/cm}^2.$$

β) Die Scheibe gleicher Stärke mit Bohrung.

Für eine freiumlaufende Scheibe gleicher Stärke mit einer Bohrung vom Halbmesser R_2 lauten die Randbedingungen:

für $r = R_1$, $\sigma_r = 0$, für $r = R_2$, $\sigma_r = 0$. Durch Einführen in die Beziehung (784):

$$-\frac{A}{8} R_1^2 (3m+1) + \frac{C_1}{2} (m+1) - \frac{C_2}{R_1^2} (m-1) = 0,$$

$$-\frac{A}{8} R_2^2 (3m+1) + \frac{C_1}{2} (m+1) - \frac{C_2}{R_2^2} (m-1) = 0$$

findet man:

$$C_1 = \frac{A}{4} \frac{3m+1}{m+1} (R_1^2 + R_2^2) \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{A}{8} \frac{3m+1}{m-1} \cdot R_1^2 \cdot R_2^2;$$

$$\sigma_r = \frac{A}{8} \frac{m (3m+1)}{\alpha (m^2 - 1)} \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} - r^2 \right) = \frac{3m+1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} - r^2 \right), \quad (789)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{A}{8} \frac{m}{\alpha (m^2 - 1)} \left[(3m+1) \left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} \right) - (m+3) r^2 \right] \\ &= \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \left[(3m+1) \left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} \right) - (m+3) r^2 \right]. \end{aligned} \quad (790)$$

Zahlenmäßig ist σ_t stets größer als σ_r . Am Rand der Bohrung, also für $r = R_2$, entsteht die größte Tangentialspannung:

$$\begin{aligned}\sigma_{t\max} &= \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1)(2R_1^2 + R_2^2) - (m+3)R_2^2] \\ &= \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1)R_1^2 + (m-1)R_2^2].\end{aligned}\quad (791)$$

Im Vergleich mit der Tangentialspannung in der vollen Scheibe nach Formel (788):

$$\sigma'_t = \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (3m+1) \cdot R_1^2$$

ist sie rund doppelt so groß, wenn der Bohrungshalbmesser R_2 klein ist. Sie wächst weiter an, wenn R_2 zunimmt.

Wird die Scheibe des Beispiels 7 mit einer Bohrung von 150 mm Durchmesser versehen, so wächst die Tangentialspannung am äußeren Rande auf 532, am Bohrungsumfang auf 2355 kg/cm².

Nach Kirsch [III, 4] steigt die Spannung am Umfang einer Bohrung in einer unbegrenzten ebenen Platte auf das Doppelte, wenn die Platte nach allen Richtungen gleichmäßig gespannt ist und sogar auf das Dreifache, wenn die Platte nur einer gleichmäßigen Längsspannung in einer bestimmten Richtung ausgesetzt ist. Dieser Höchstwert tritt in den Endpunkten des zur Zugrichtung senkrechten Bohrungsdurchmessers auf, während in den Endpunkten des zur Zugrichtung parallelen Durchmessers ein der Zugspannung gleich großer tangentialer Druck auftritt. Wendet man nach Stodola dieses Ergebnis auf ein kleines Loch an einer beliebigen Stelle einer umlaufenden Scheibe an, die unter der radialen Spannung σ_r , unter der tangentialen σ_t steht, so kann man in erster Annäherung in den Endpunkten des radial gerichteten Bohrungsdurchmessers eine Spannung erwarten:

$$\sigma' = 3\sigma_t - \sigma_r, \quad (792)$$

in den Endpunkten des dazu senkrechten Bohrungsdurchmessers eine solche von:

$$\sigma'' = 3\sigma_r - \sigma_t. \quad (793)$$

Bohrungen an irgend einer Stelle einer Scheibe erhöhen also die Spannung am Bohrungsumfange auf mindestens das Doppelte derjenigen an derselben Stelle der vollen Scheibe. Ist eine der beiden Spannungen klein, so steigt die größte Beanspruchung am Lochrande auf das Dreifache der anderen.

γ) Die Scheibe gleicher Stärke mit Randbelastung; Berechnung raschlaufender Dynamoanker.

Unterliegt eine Scheibe gleicher Stärke radialen Belastungen am äußeren oder inneren Rande in Höhe von σ_1 und σ_2 kg/cm², so entstehen Spannungen, die sich aus den Grundgleichungen (784) und (785) ergeben, wenn man ω und damit $A = 0$, ferner am äußeren Rande, also für $r = R_1$, $\sigma_r = \sigma_1$, am Innenrande, also für $r = R_2$, $\sigma_r = \sigma_2$ einsetzt und C_1 und C_2 bestimmt:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{m}{\alpha(m^2-1)} \left[\frac{C_1}{2}(m+1) - \frac{C_2}{R_1^2}(m-1) \right] \left| \begin{array}{l} R_1 \\ -R_2 \end{array} \right| \\ \sigma_2 &= \frac{m}{\alpha(m^2-1)} \left[\frac{C_1}{2}(m+1) - \frac{C_2}{R_2^2}(m-1) \right] \left| \begin{array}{l} R_1 \\ -R_2 \end{array} \right| - 1 \\ C_1 &= \frac{2\alpha(m-1)}{m} \frac{\sigma_1 \cdot R_1^2 - \sigma_2 \cdot R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}; \quad C_2 = \frac{\alpha(m+1)}{m} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot R_1^2 \cdot R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}.\end{aligned}$$

Damit wird die Radialspannung in der Entfernung r von der Achse:

$$\sigma_r = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left[\sigma_1 \cdot R_1^2 - \sigma_2 \cdot R_2^2 - (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} \right]. \quad (794)$$

die Tangentialspannung:

$$\sigma_t = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left[\sigma_1 \cdot R_1^2 - \sigma_2 \cdot R_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} \right]. \quad (795)$$

Die größte Spannung bildet sich an der Lochleibung aus:

$$\sigma_{t\max} = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left[2 \sigma_1 \cdot R_1^2 - \sigma_2 \cdot (R_1^2 + R_2^2) \right]. \quad (796)$$

Nach den vorstehend entwickelten Formeln läßt sich die Beanspruchung der oft langen, manchmal auch aus mehreren Platten nach Abb. 2290 zusammengesetzten, raschlaufenden Dynamoanker berechnen, wenn man der Betrachtung eine Scheibe von 1 cm Stärke zugrunde legt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 8. Die Beanspruchung des Ankers, Abb. 2268, ist bei der normalen Drehzahl $n = 333/\text{min}$ und bei der Durchgangdrehzahl $1,8 n = 600/\text{min}$ zu ermitteln. Die sechs geblätternen und durch Schrauben zusammengehaltenen Pole sind mit Schwalbenschwänzen in fünf den Ankerkern bildenden Stahlplatten befestigt. (Das Beispiel entspricht etwa dem Anker des Wechselstromgenerators des Spullerseekraftwerks nach der Zeitschrift „Elektrotechnik und Maschinenbau“ 1927, S. 985.)

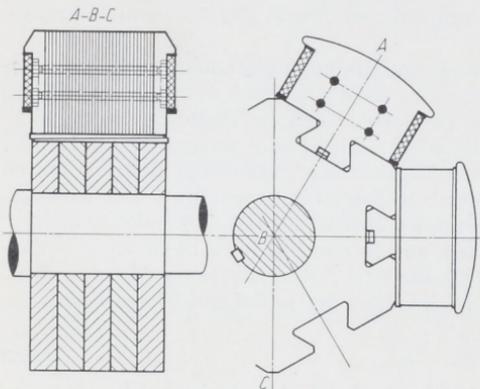


Abb. 2290. Dynamoanker.

Winkelgeschwindigkeit bei der normalen Drehzahl $\omega = 34,87/\text{sek}$. Beim Durchgehen der Maschine steigen sämtliche von Fliehkräften abhängigen Spannungen auf das $1,8^2 = 3,24$ fache, wie jeweils eingeklammert angegeben ist.

Beanspruchung der Pole. Das Gewicht einer 1 cm starken, aus den Polen

herausgeschnittenen Scheibe außerhalb Ebene I einschließlich der Wicklung errechnet sich, wenn man auch für die letztere das Einheitsgewicht des Stahls $7,85 \text{ kg}/\text{dm}^3$ einsetzt, zu $38,6 \text{ kg}$. Bei dem Schwerpunktabstand von der Drehachse $R_p = 108 \text{ cm}$ beträgt die Fliehkraft:

$$(Z_1)_{1\text{cm}} = \frac{G}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_p = \frac{38,6}{981} \cdot 34,87^2 \cdot 108 = 5170 \text{ kg}/\text{cm}$$

und die Beanspruchung des Kehlquerschnitts I :

$$\sigma_{zI} = \frac{(Z_1)_{1\text{cm}}}{a_I} = \frac{5170}{24} = 216 \text{ kg}/\text{cm}^2 \quad (700 \text{ kg}/\text{cm}^2).$$

Der Polfuß wiegt $4,36 \text{ kg}/\text{cm}$ Breite, hat $69,2 \text{ cm}$ Schwerpunkthalbmesser und entwickelt:

$$(Z_2)_{1\text{cm}} = \frac{4,36}{981} \cdot 34,87^2 \cdot 69,2 = 375 \text{ kg}/\text{cm}$$

Fliehkraft. Die Summe beider Kräfte $(Z_p)_{1\text{cm}} = 5545 \text{ kg}/\text{cm}$ zerlegt sich in Flankendrucke längs der Schwalbenschwanznut in Höhe von:

$$K_{1\text{cm}} = \frac{(Z_p)_{1\text{cm}}}{2 \cos(\psi - \varrho)} = \frac{5545}{2 \cos(60^\circ - 8^\circ)} = 4500 \text{ kg}/\text{cm}.$$

Flächendruck an den Flanken (749):

$$p = \frac{K_{1\text{cm}} \cdot \cos \varrho}{b_1} = \frac{4500 \cdot \cos 8^\circ}{13,5} = 330 \text{ kg}/\text{cm}^2 \quad (1070 \text{ kg}/\text{cm}^2).$$

Beanspruchung der Zacken. In den Schnitten *II* der Nebenabbildung 2268 (*a*) entstehen durch die in der Mitte der Nutflanken vereinigt gedachten Drucke und durch die Eigenfliehkraft der Zackennasen, die sich zu $K_{1\text{cm}} = 248 \text{ kg/cm}$ ergab, nach den Formeln (750) und (751) mit $\frac{K}{l} = K_{1\text{cm}}$ und $\frac{Z'}{l} = Z'_{1\text{cm}}$ die folgenden Beanspruchungen:

$$\sigma_b + \sigma_z = \frac{6 K_{1\text{cm}} \cdot a}{h^2} + \frac{K_{1\text{cm}} \cdot \sin \beta}{h} = \frac{6 \cdot 4500 \cdot 10}{29,6^2} + \frac{4500 \cdot \sin 10^\circ}{29,6} = 305 + 27 = 332 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_b + \sigma'_z = \frac{6 Z'_{1\text{cm}} \cdot c}{h^2} + \frac{Z'_{1\text{cm}} \cdot \sin \gamma}{h} = \frac{6 \cdot 248 \cdot 7,0}{29,6^2} + \frac{248 \cdot \sin 43^\circ}{29,6} = 12 + 6 = 18 \text{ kg/cm}^2,$$

in Summe 350 kg/cm^2 (1134 kg/cm^2). Die Flankendrucke setzen sich zu einer Resultierenden:

$$Q_{1\text{cm}} = 2 K_{1\text{cm}} \cdot \cos(\psi - \varrho - \varphi/2) = 2 \cdot 4500 \cdot \cos(60^\circ - 8^\circ - 30^\circ) = 8350 \text{ kg/cm}$$

zusammen.

Durch die von dem $8,46 \text{ kg/cm}$ schweren Zacken an einem Halbmesser von $76,5 \text{ cm}$ entwickelte Fliehkraft:

$$Z_3 = \frac{8,46}{981} \cdot 34,87^2 \cdot 76,5 = 802 \text{ kg/cm}$$

wird der Kehlquerschnitt mit einer mittleren Zugspannung:

$$\sigma_{z3} = \frac{(Q + Z_3)_{1\text{cm}}}{e} = \frac{8350 + 802}{30} = 305 \text{ kg/cm}^2 \quad (988 \text{ kg/cm}^2)$$

beansprucht.

Läuferkern. In erster Annäherung darf er als eine durchbohrte Scheibe gleicher Stärke vom Außenhalbmesser $R_1 = 620$ und Bohrungshalbmesser $R_2 = 260 \text{ mm}$ angesehen werden, die der Eigenfliehkraft und einer gleichmäßig auf dem äußeren Umfang verteilten Belastung

$$\sigma_1 = \sigma_{z3} \cdot \frac{e}{\varphi \cdot R_1} = 305 \cdot \frac{30}{\pi/3 \cdot 62} = 141 \text{ kg/cm}^2$$

ausgesetzt ist.

Tangentialspannung am Umfang der Bohrung durch die Fliehkraft:

$$\begin{aligned} \sigma_{t1} &= \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1)(2R_1^2 + R_2^2) - (m+3)R_2^2] \\ &= \frac{1}{8 \cdot 3,3} \cdot \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 34,87^2 [10,9(2 \cdot 62^2 + 26^2) - 6,3 \cdot 26^2] = 32 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$

durch die Pole:

$$\sigma_{t2} = \frac{2 \sigma_1 \cdot R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{2 \cdot 141 \cdot 62^2}{62^2 - 26^2} = 342 \text{ kg/cm}^2.$$

Berücksichtigt man die örtliche Wirkung der Pole nach H. Schmalz [XXIX, 9], so tritt eine weitere Steigerung der Spannungen in den Symmetrieebenen der Zacken um 27 kg/cm^2 ein, so daß die höchste Beanspruchung längs der Bohrungswandung $32 + 342 + 27 = 401$ (1300) kg/cm^2 wird.

Preßt man den Anker auf die Welle auf oder schrumpt man beide zusammen, derart, daß bei der normalen Umlaufgeschwindigkeit noch eine Zusammenbauspannung von $\sigma_2 = -50 \text{ kg/cm}^2$ zwischen beiden herrscht, so erhöht sich die Spannung noch um:

$$\sigma_{t3} = -\frac{\sigma_2(R_1^2 + R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{50(62^2 + 26^2)}{62^2 - 26^2} = 71 \text{ kg/cm}^2.$$

Beim Durchgehen ist die Erweiterung der Bohrung größer als das Schrumpfmaß, wie sich ohne weiteres nach der beträchtlichen Zunahme der Tangentialspannungen um $1300 - 472 = 828 \text{ kg/cm}^2$ gegenüber $\sigma_{t3} = 71 \text{ kg/cm}^2$ erwarten läßt.

Nach der vorstehenden Rechnung tritt zahlenmäßig die höchste Beanspruchung des Ankers längs der Bohrungswandung auf; in Wirklichkeit ist sie aber infolge der Kerbwirkung in der Kehle an der Ansatzstelle der Zacken zu suchen.

δ) Berechnung der Nabe als Scheibe gleicher Stärke.

Die genauere Berechnung der Nabe als Scheibe gleicher Stärke am Rad gleicher Festigkeit, Abb. 2286, bedingt folgenden Rechnungsgang. Die Zunahme des Außenhalbmessers der Nabe ist unter Berücksichtigung der gleichmäßig nach Abb. 2289 auf der Nabe verteilten Radialspannung $\sigma_{r_n} = \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n}$ unter Bezugnahme auf die Formeln (765) und (764):

$$\rho_2 = \varepsilon_t \cdot R_2 = \alpha \left(\sigma_{t_n} - \frac{1}{m} \sigma_{r_n} \right) \cdot R_2.$$

Derjenigen der Scheibe nach (779) gleichgesetzt, führt sie zu der Bedingung:

$$\alpha \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot R_2 = \alpha \left(\sigma_{t_n} - \frac{1}{m} \sigma_{r_n} \right) \cdot R_2; \quad \frac{m-1}{m} \cdot \sigma = \sigma_{t_n} - \frac{1}{m} \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n}.$$

Die Tangentialspannung σ_{t_n} an der Nabenaußenfläche setzt sich zusammen aus der durch die Fliehkraft erzeugten nach Beziehung (790) und der durch die radial wirkenden Belastungen nach (795). Unter Austausch von R_2 gegen R_0 und von R_1 und r gegen R_2 sowie mit $\sigma_1 = \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n}$, $\sigma_2 = -p_0$ nach Abb. 2289 wird:

$$\begin{aligned} \sigma_{t_n} &= \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1)(R_2^2 + R_0^2 + R_0^2) - (m+3) \cdot R_2^2] \\ &+ \frac{1}{R_2^2 - R_0^2} \left[\frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} \cdot R_2^2 + p_0 \cdot R_0^2 + \left(\frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} + p_0 \right) \cdot R_0^2 \right] \\ &= \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(m-1)R_2^2 + (3m+1)R_0^2] + \frac{1}{R_2^2 - R_0^2} \left[\frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} (R_2^2 + R_0^2) + 2p_0 \cdot R_0^2 \right]. \end{aligned}$$

Damit geht die oben abgeleitete Bedingung für die gleiche Formänderung an der Anschlußstelle über in:

$$\begin{aligned} \frac{m-1}{m} \cdot \sigma &= \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(m-1)R_2^2 + (3m+1)R_0^2] \\ &+ \frac{1}{R_2^2 - R_0^2} \left[\frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} (R_2^2 + R_0^2) + 2p_0 \cdot R_0^2 \right] - \frac{\sigma \cdot x_2}{m \cdot b_n}. \end{aligned} \quad (797)$$

Die Auflösung nach b_n liefert:

$$b_n = \frac{4g \cdot x_2 [(m-1)R_2^2 + (m+1)R_0^2] \cdot \sigma}{4g(m-1)(R_2^2 - R_0^2) \cdot \sigma - \gamma \cdot \omega^2 [(m-1)R_2^2 + (3m+1)R_0^2] \cdot (R_2^2 - R_0^2) - 8m \cdot g \cdot R_0^2 \cdot p_0} \quad (798)$$

Auf das Beispiel 6 angewendet, wird:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4 \cdot 981 \cdot 7,8 (2,3 \cdot 14,5^2 + 4,3 \cdot 7,5^2) \cdot 673}{4 \cdot 981 \cdot 2,3 (14,5^2 - 7,5^2) \cdot 673 - \frac{7,85}{1000} \cdot 314^2 (2,3 \cdot 14,5^2 + 10,9 \cdot 7,5^2) (14,5^2 - 7,5^2) - 8 \cdot 3,3 \cdot 981 \cdot 7,5^2 \cdot 3} \\ &= 20,3 \text{ cm}, \end{aligned}$$

also 2,9 cm geringer als auf S. 1321 berechnet.

Die größte Tangentialspannung an der Innenfläche ergibt sich aus der Summe der Spannungen nach (791) und (796):

$$\begin{aligned} \sigma_{t_{\max}} &= \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1)R_2^2 + (m-1)R_0^2] + \frac{1}{R_2^2 - R_0^2} \left[2 \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} R_2^2 + p_0 (R_2^2 + R_0^2) \right] \\ &= \frac{1}{4 \cdot 3,3} \cdot \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 (10,9 \cdot 14,5^2 + 2,3 \cdot 7,5^2) \\ &+ \frac{1}{14,5^2 - 7,5^2} \left[2 \cdot \frac{673 \cdot 7,8}{20,3} \cdot 14,5^2 + 50 (14,5^2 + 7,5^2) \right] = 214 + 793 = 1007 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Zylindrische Naben erweitern sich nicht gleichmäßig, sondern nach Abb. 2291 in der Mitte stärker und sind infolgedessen dort auch höher beansprucht. Der Ausgleich ist entweder nach Abb. 2292 oder durch Verstärken oder Verlängern der Nabe möglich. Das letztere ist, abgesehen davon, daß es vielfach durch die konstruktiven Verhältnisse beschränkt sein wird, weniger wirksam, weil die Nabenquerschnitte um so geringer in Anspruch genommen sind, je weiter sie von der Mittelebene abliegen. In einer bestimmten, von den Abmessungen der Nabe und der Höhe der Spannungen an der Ansatzstelle der Scheibe abhängigen Entfernung wird überhaupt keine Formänderung mehr auftreten, eine Verlängerung daher unwirksam sein. Einseitig angesetzte Naben sind ungünstiger, nämlich rund doppelt so hoch beansprucht wie symmetrisch zur Scheibenmitte angeordnete und deshalb nur an mäßig belasteten Scheiben zulässig.

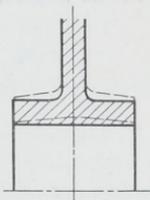


Abb. 2291.
Formänderung langer Naben.

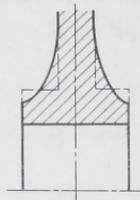


Abb. 2292.
Zur Gestaltung der Naben.

ε) Die Scheibe gleicher Stärke mit Kranz und Nabe.

Die grundlegende Bedingung ist, daß die Formänderungen der drei Teile, Kranz, Scheibe, Nabe, an den beiden Übergangstellen in radialer Richtung gleich groß sein müssen. Bezeichnen σ_{r1} und σ_{r2} die an den genannten Stellen herrschenden Radialspannungen, so unterliegen die drei Teile den durch Abb. 2293 verdeutlichten Belastungen. Für die mittlere Tangentialspannung σ_k am Kranz gilt die auf S. 1317 abgeleitete Formel (772), wenn σ durch σ_{r1} und x_1 durch die gleichmäßige Scheibenstärke x ersetzt wird:

$$\sigma_k = \frac{\gamma}{g} v_k^2 + \frac{Z_{1cm} \cdot R_a}{s_k \cdot b_k} \quad (799) - \frac{\sigma_{r1} \cdot x \cdot R_1}{s_k \cdot b_k}$$

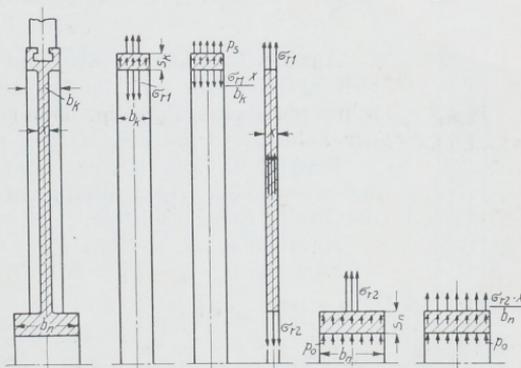


Abb. 2293.

Beanspruchung der Teile eines Rades gleicher Scheibenstärke.

Die zugehörige radiale Erweiterung

$\varrho_k = \alpha \cdot \sigma_k \cdot R_k$ muß gleich der Vergrößerung des Scheibenaußenhalbmessers

$$\alpha \left(\sigma_{t1} - \frac{\sigma_{r1}}{m} \right) R_1, \quad \text{also} \quad \sigma_k \cdot R_k = \left(\sigma_{t1} - \frac{\sigma_{r1}}{m} \right) R_1$$

sein. Die Tangentialspannung σ_{t1} am äußeren Rand der Scheibe setzt sich aus Spannungen infolge der Fliehkraft nach Formel (790) und infolge der Randbelastungen

σ_{r1} und σ_{r2} nach (795) zusammen, wenn in diese Beziehungen $r = R_1$ eingeführt wird. Damit ergibt sich:

$$I. \quad \frac{\gamma}{g} \cdot v_k^2 \cdot R_k + \frac{Z_{1cm} \cdot R_a \cdot R_k}{s_k \cdot b_k} - \frac{\sigma_{r1} \cdot x \cdot R_1 \cdot R_k}{s_k \cdot b_k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(m-1) R_1^3 + (3m+1) R_1 \cdot R_2^2] + \frac{\sigma_{r1} (R_1^3 + R_1 \cdot R_2^2) - 2 \sigma_{r2} \cdot R_1 \cdot R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{\sigma_{r1}}{m} \cdot R_1. \quad (800)$$

In ähnlicher Weise gilt an der Nabe, daß die Erweiterung der Scheibe

$$\propto \left(\sigma_{t2} - \frac{\sigma_{r2}}{m} \right) \cdot R_2$$

gleich der auf S. 1326 abgeleiteten Vergrößerung ϱ_2 des Nabelhalbmessers sein muß:

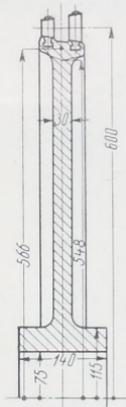
$$\propto \left(\sigma_{t2} - \frac{1}{m} \sigma_{r2} \right) R_2 = \alpha \left(\sigma_{tn} - \frac{\sigma_{r2}}{m} \cdot \frac{x}{b_n} \right) R_2$$

oder

$$\sigma_{t2} - \frac{\sigma_{r2}}{m} = \sigma_{tn} - \frac{\sigma_{r2}}{m} \cdot \frac{x}{b_n}.$$

σ_{t2} setzt sich aus der Wirkung der Fliehkraft nach (791) und derjenigen der Randbelastungen nach (796) mit $\sigma_1 = \sigma_{r1}$ und $\sigma_2 = \sigma_{r2}$ zusammen, während die rechte Seite der Beziehung in Form und Aufbau der Bedingungsgleichung (797) entspricht. Es braucht nur σ durch σ_{r2} ersetzt zu werden. So ergibt sich als zweite Grundgleichung:

$$II. \quad \left. \begin{aligned} & \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1) R_1^2 + (m-1) R_2^2] + \frac{2 \sigma_{r1} \cdot R_1^2 - \sigma_{r2} (R_1^2 + R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{\sigma_{r2}}{m} \\ & = \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(m-1) R_2^2 + (3m+1) R_0^2] + \frac{1}{R_2^2 - R_0^2} \left[\sigma_{r2} \cdot \frac{x}{b_n} (R_2^2 + R_0^2) + 2 p_0 R_0^2 \right] \\ & \quad - \frac{\sigma_{r2} \cdot x}{m \cdot b_n}. \end{aligned} \right\} (801)$$



Aus den Beziehungen (800) und (801) die Unbekannten, z. B. σ_{r1} und σ_{r2} zu ermitteln, falls die Abmessungen der Scheibe gegeben sind, führt zu sehr verwickelten Formeln. Man tut gut, die Gleichungen unter Einführen der Zahlenwerte zu vereinfachen und dann erst zu lösen.

Beispiel 9. Die Beanspruchung der Scheibe Abb. 2294 mit einem Kranz und einer Beschleunigung nach Abb. 2270 bei $n = 2400$ Umläufen in der Minute ist zu ermitteln.

Hauptmaße: $R_a = 57,8$; $R_k = 56,6$; $R_1 = 54,8$; $R_2 = 11,5$; $R_0 = 7,5$; $x = 3,0$ cm; $b_k \cdot s_k = F_k = 16$ cm²; $b_n = 14$ cm; $p_0 = 50$ kg/cm²; $m = 3,3$.

$$\omega = 251,3 \text{ /sek}; \quad \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 = \frac{7,85 \cdot 251,3^2}{4 \cdot 3,3 \cdot 1000 \cdot 981} = 0,03828.$$

$$v_k = \omega \cdot R_k = 251,3 \cdot 56,6 = 14224 \text{ cm/sek}, \quad Z_{1cm} = 402 \left(\frac{2400}{3000} \right)^2 = 357 \text{ kg/cm}.$$

Mit diesen Werten wird Gleichung I:

$$\frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 14224^2 \cdot 56,6 + \frac{257 \cdot 57,8 \cdot 56,6}{16} - \frac{\sigma_{r1} \cdot 3 \cdot 54,8 \cdot 56,6}{16} = 0,03828 (2,3 \cdot 54,8^3 + 10,9 \cdot 54,8 \cdot 11,5^2) + \frac{\sigma_{r1} (54,8^3 + 54,8 \cdot 11,5^2) - 2 \sigma_{r2} \cdot 54,8 \cdot 11,5^2}{54,8^2 - 11,5^2} - \frac{\sigma_{r1}}{3,3} \cdot 54,8,$$

$$126100 - 623,7 \sigma_{r1} + 5,04 \sigma_{r2} = 0,$$

Gleichung II:

$$0,03828 (10,9 \cdot 54,8^2 + 2,3 \cdot 11,5^2) + \frac{2\sigma_{r1} \cdot 54,8^2 - \sigma_{r2} (54,8^2 + 11,5^2)}{54,8^2 - 11,5^2} - \frac{\sigma_{r2}}{3,3}$$

$$= 0,03828 (2,3 \cdot 11,5^2 + 10,9 \cdot 7,5^2) + \frac{\sigma_{r2} \cdot \frac{3}{14} (11,5^2 + 7,5^2) + 2 \cdot 50 \cdot 7,5^2}{11,5^2 - 7,5^2} - \frac{\sigma_{r2} \cdot 3}{3,3 \cdot 14}$$

$$1156 + 2,092 \sigma_{r1} - 1,860 \sigma_{r2} = 0.$$

Aus ihnen ergibt sich: $\sigma_{r1} = 209$, $\sigma_{r2} = 857$ kg/cm². Die Spannung an der Innenfläche der Nabe setzt sich nach den Formeln (791) und (796) zusammen aus:

$$\sigma_{t0} = 0,03828 (10,9 \cdot 11,5^2 + 2,3 \cdot 7,5^2) + \frac{1}{11,5^2 - 7,5^2} \left[\frac{2 \cdot 857 \cdot 3}{14} \cdot 11,5^2 + 50 (11,5^2 + 7,5^2) \right]$$

$$= 60 + 762 = 822 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei der langen, ziemlich dünnen Nabe dürften die wirklichen Spannungen in der Mitte nicht unbeträchtlich höher liegen.

Auch im Fall der praktisch häufig benutzten hyperboloidischen Scheiben, deren Profillinien Gleichungen $x \cdot r^a = C$ folgen, lassen sich die Hauptgleichungen (762) und (768) integrieren und die Spannungen und Formänderungen rechnerisch ermitteln (XXIX, 1, 2).

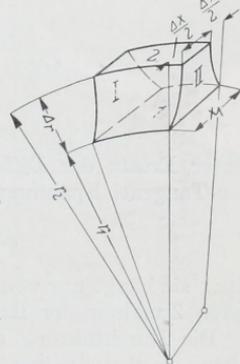
d) Berechnung einer Scheibe von gegebener Form.

Im folgenden ist ein von H. Keller [XXIX, 10] zuerst beschriebenes Verfahren erläutert, bei welchem die bei der Ableitung der Hauptgleichungen auf S. 1314 und 1315 benutzten Differentiale durch kleine endliche Differenzen ersetzt werden. Derartige Differenzenverfahren lassen sich mit Vorteil auch auf andere Fälle, z. B. die genauere Berechnung von Böden, Deckeln, Platten und einwandigen Kolben anwenden, sofern man nur die Differentialgleichungen der Spannungen an einem Körperelement aufstellen kann [XXIII, 10, XXIX, 11]. Wegen anderer rechnerischer und zeichnerischer Verfahren zur Untersuchung raschlaufender Scheiben vgl. [XXIX, 1].

Keller geht von einem Körperelement aus, Abb. 2295, das durch zwei um die Drehachse beschriebene Zylinderflächen I und 2 und zwei Radialebenen I und II begrenzt ist. Sind die Radial- und Tangentialspannungen σ_r und σ_t in der Fläche I, also im Abstand r_1 von der Drehachse bekannt und gelangt es, ihre Zunahme $\Delta\sigma_r$ und $\Delta\sigma_t$ auf der Strecke Δr zu ermitteln, so sind die auf dem Zylinder 2 herrschenden Spannungen:

$$\sigma'_r = \sigma_r + \Delta\sigma_r \quad \text{und} \quad \sigma'_t = \sigma_t + \Delta\sigma_t. \quad (802)$$

Abb. 2295.



Sie bilden die Ausgangsspannungen am nächsten Element, das außen durch einen Zylinder vom Halbmesser r_3 begrenzt ist. Von Element zu Element fortschreitend, wird die Scheibe stufenweise durchgerechnet. Das Maß Δr der einzelnen Stufen ist dort, wo die Stärke x der Scheibe oder die Spannungen größeren Änderungen unterliegen, klein, etwa 0,5 cm groß, zu nehmen, kann aber sonst 1...3 cm betragen. Am innern und äußern Rande der Scheibe müssen die Randbedingungen erfüllt sein, insbesondere die Radialspannung am innern gleich der Pressung, die zwischen der Scheibe und der Welle beim Laufen noch herrschen soll, am äußern Rande gleich der durch die Beschaufung erzeugten Spannung sein. Liegt eine Scheibe ohne Bohrung vor, so gilt für ihre Mitte: $\sigma_r = \sigma_t$.

1334
677

Bei Division der Gleichung (761) durch $x \cdot r$ findet sich die Zunahme der Radialspannung:

$$d\sigma_r = \frac{1}{r}(\sigma_t - \sigma_r)dr - \frac{\sigma_r \cdot dx}{x} - \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dr.$$

Ersetzt man die Differentiale durch die endlichen Unterschiede nach Abb. 2295, so geht die Gleichung über in die Form:

$$\Delta\sigma_r = (\sigma_t - \sigma_r) \frac{\Delta r}{r} - \sigma_r \cdot \frac{\Delta x}{x} - \frac{\gamma}{g} \omega^2 \cdot r \cdot \Delta r, \quad (803)$$

nach welcher sich die Zunahme $\Delta\sigma_r$ auf der Strecke Δr , also zwischen den beiden Zylindern 1 und 2 berechnen läßt, weil auf der rechten Seite nur in der Fläche 1 bekannte Größen sowie Δr und Δx vorkommen.

Die radiale Dehnung ε_r kann man nach den Ausführungen auf S. 1315 durch zwei Beziehungen ausdrücken. Nach (763) ist:

$$\varepsilon_r = \alpha(\sigma_r - \sigma_t/m).$$

Andrerseits gilt nach (766), (765) und (764):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{d\varrho}{dr} = \frac{d(\varepsilon_t \cdot r)}{dr} = \frac{\alpha \cdot d(\sigma_t - \sigma_r/m) \cdot r}{dr} \\ &= \alpha \left[\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} + r \left(\frac{d\sigma_t}{dr} - \frac{1}{m} \frac{d\sigma_r}{dr} \right) \right]. \end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der beiden Werte führt zu:

$$\sigma_r - \frac{\sigma_t}{m} = \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} + r \cdot \frac{d\sigma_t}{dr} - \frac{r}{m} \cdot \frac{d\sigma_r}{dr}$$

und beim Multiplizieren mit $\frac{dr}{r}$ zu:

$$\begin{aligned} d\sigma_t &= (\sigma_r - \sigma_t) \frac{dr}{r} - \frac{1}{m} (\sigma_t - \sigma_r) \frac{dr}{r} + \frac{1}{m} d\sigma_r \cdot \\ &= \frac{m+1}{m} (\sigma_r - \sigma_t) \frac{dr}{r} + \frac{1}{m} d\sigma_r. \end{aligned}$$

Unter Ersatz der Differentiale durch die endlichen Unterschiede wird die Zunahme der Tangentialspannung:

$$\Delta\sigma_t = -\frac{m+1}{m} (\sigma_t - \sigma_r) \frac{\Delta r}{r} + \frac{1}{m} \Delta\sigma_r. \quad (804)$$

Auch sie hängt nur von den Maßen des Elementes, von σ_r , σ_t und der nach (803) berechneten Zunahme der Radialspannung $\Delta\sigma_r$ ab, läßt sich also zahlenmäßig berechnen.

Die Durchführung der Untersuchung erfolgt zweckmäßig an Hand der folgenden Liste. In den Spalten 1...7 sind zunächst die in den Formeln (803) und (804) vorkommenden Größen, die sich aus den Maßen der gewählten Elemente ergeben, zusammengestellt, in den Spalten 8...13 die Spannungen und die Glieder für die Zunahme der Radialspannung und in Spalte 14 diese selbst ermittelt. Die bei der ersten Durchrechnung gefundenen Größen sind durch einen Strich von den bei der zweiten Durchrechnung erhaltenen, mit zwei Strichen versehenen Größen unterschieden. 15 und 16 enthalten die zur Berechnung von $\Delta\sigma_t'$ nötigen Glieder, Spalte 17 $\Delta\sigma_t'$ selbst. Schließlich sind in 18 und 19 die an den Außenflächen des betrachteten Elementarringes wirkenden Spannungen $\sigma_t' + \Delta\sigma_t'$ und $\sigma_r' + \Delta\sigma_r'$ eingetragen. Während Spalte 1...7 vor der Berechnung der Spannungen aufgestellt werden können, müssen Spalte 8...19 zeilenweise, von einem der Scheibenränder beginnend, entwickelt werden. In Zeile 1 ist σ_t' schätzungsweise angenommen, σ_r' aber unter Beachtung der einen Randbedingung gleich der

Spalte	Erste Durchrechnung												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Zeile	r	Δr	x	Δx	$\frac{\Delta r}{r}$	$\frac{\Delta x}{x}$	$r \cdot \Delta r$	σ'_r	σ'_t	$\sigma'_t - \sigma'_r$	$(\sigma'_t - \sigma'_r) \frac{\Delta r}{r}$	$\sigma'_{t,m}$	$\sigma'_{t,m} \cdot x_m \cdot \Delta r$
				cm			$(1) \cdot (2)$	$(4) / (3)$	$(8) - (9)$	$(10) \cdot (5)$	$(9) \cdot (6)$	g	
													$0,790 \cdot (7)$
1	10,0	0,5	10	0	0,05	0	5,0	+ 940	- 50	+ 990	+ 49,5	0	+ 3,9
2	10,5	0,5	10	0	0,0476	0	5,25	+ 889,5	+ 4,4	+ 893,9	+ 42,6	0	+ 4,2
3	11,0	0,5	10	0	0,0455	0	5,5	+ 845,7	+ 34,1	+ 811,6	+ 36,9	0	+ 4,4
4	11,5	0,5	10	0	0,0435	0	5,75	+ 807,6	+ 66,6	+ 741,0	+ 32,2	0	+ 4,5
5	12	1	10	0	0,0833	0	12	+ 774,1	+ 94,3	+ 679,8	+ 56,7	0	+ 9,5
23	40	0,5	3,14	+ 2,02	0,0125	+ 0,643	20	+ 429,7	+ 194,8	+ 234,9	+ 2,9	+ 125,2	+ 15,8
24	40,5	0,5	5,16	+ 2,04	0,0123	+ 0,396	20,25	+ 384,0	+ 56,7	+ 327,3	+ 4,0	+ 22,5	+ 16,0
25	41	0,5	7,2	0	0,0122	0	20,5	+ 368,4	+ 22,3	+ 346,1	+ 4,2	0	+ 16,2
26	41,5	0,2	7,2	0	0,0048	0	8,3	+ 359,3	+ 10,3	+ 349,0	+ 1,7	0	+ 6,6
27								+ 355,6	+ 5,4				

Spalte	Erste Durchrechnung													Nachprüfung				
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25						
Zeile	$\Delta \sigma'_r$	$-\frac{m+1}{m}(\sigma'_t - \sigma'_r)$	$\frac{1}{m} \Delta \sigma'_r$	$\Delta \sigma'_t$	$\sigma'_t + \Delta \sigma'_t$	$\sigma'_r + \Delta \sigma'_r$	x_m	$x_m \cdot \Delta r$	r_m	$x_m \cdot \Delta r \cdot r_m$	$\sigma'_{t,m}$	$\sigma'_{t,m} \cdot x_m \cdot \Delta r$						
	$(11) - (12) - (13)$		$-1,3 \cdot (11)$	kg/cm^2			$(8) + (17)$	aus (3)	$(20) \cdot (2)$	aus (1)	$(21) \cdot (22)$	aus (8)	$(24) \cdot (21)$					
													kg/cm^2	cm^3	kg			
1	+ 45,6	- 64,3	+ 13,8	- 50,5	+ 889,5	- 4,4	10	5	10,3	51,3	915	4575						
2	+ 38,4	- 55,4	+ 11,6	- 43,8	+ 845,7	+ 35,0	10	5	10,8	53,8	868	4340						
3	+ 32,5	- 48,0	+ 9,9	- 38,1	+ 807,6	+ 66,6	10	5	11,3	56,3	827	4135						
4	+ 27,7	- 41,9	+ 8,4	- 33,5	+ 774,1	+ 94,3	10	5	11,8	58,8	791	3955						
5	+ 47,2	- 73,7	+ 14,3	- 59,4	+ 714,7	+ 141,5	10	10	12,5	125	744	7440						
23	- 138,1	- 3,8	- 41,9	- 45,7	+ 384,0	+ 56,7	4,15	2,08	40,3	83,3	407	847						
24	- 34,4	- 5,2	- 10,4	- 15,6	+ 368,4	+ 22,3	6,18	3,09	40,8	126	376	1162						
25	- 12,0	- 5,5	- 3,6	- 9,1	+ 359,3	+ 10,3	7,2	3,6	41,3	148,5	364	1310						
26	- 4,9	- 2,2	- 1,5	- 3,7	+ 355,6	+ 5,4	7,2	1,44	41,6	59,8	357	514						
27								<u>160,36</u>		<u>3438,7</u>		<u>97000</u>						

Spalte	Zweite Durchrechnung						
	26	27	28	29	30	31	32
	σ'_r	σ'_t	$\sigma'_t - \sigma'_r$ (26) - (27)	$(\sigma'_t - \sigma'_r) \frac{\Delta r}{r}$ (28) · (5)	$\sigma'_t \frac{\Delta x}{x}$ (27) · (6)	$\frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \Delta r}{g}$ 0,790 · (7)	$\Delta \sigma'_t$ (29) - (30) - (31)
kg/cm ²							
1	+ 1070	- 50	+ 1120	+ 56	0	3,9	+ 52,1
2	+ 1013	- 2	+ 1015	+ 48,4	0	4,2	+ 44,2
3	+ 963,5	+ 42,2	+ 921,3	+ 41,9	0	4,4	+ 37,5
4	+ 920,4	+ 79,7	+ 840,7	+ 36,6	0	4,5	+ 32,1
5	+ 882,6	+ 111,8	+ 649,0	+ 64,3	0	9,5	+ 54,8
23	+ 533,8	+ 276,1	+ 257,7	+ 3,2	+ 177,8	15,8	- 190,4
24	+ 471,9	+ 85,7	+ 386,2	+ 4,8	+ 33,9	16,0	- 45,1
25	+ 452,0	+ 40,6	+ 411,4	+ 5,0	0	16,2	- 11,2
26	+ 442,1	+ 29,4	+ 412,7	+ 2,0	0	6,6	- 4,6
27	+ 438,1	+ 24,8					

Zusammenbauspaltung p_0 , mit der die Scheibe die Welle umschließen soll, angesetzt. Die Ergebnisse der Spalten 18 und 19 der ersten Zeile dienen als Ausgangszahlen der Zeile 2 in Spalte 8 und 9 usw.

Wäre σ'_t in Zeile 1, Spalte 8 richtig geschätzt worden, so müßte sich am Außenrand der Scheibe, also in Spalte 19 der letzten Zeile $\sigma'_r + \Delta \sigma'_r = p_s$, nämlich gleich der durch die Schaufeln erzeugten Randspaltung ergeben. Das wird selten der Fall sein. Man müßte nun die Rechnung unter neuer Schätzung von σ'_t so oft durchführen, bis genügende Übereinstimmung erreicht ist. Abgesehen von der Umständlichkeit ist aber die Ermittlung der Radialspaltungen in der Nähe des Außenrandes infolge des starken Fallens der Werte an der Übergangsstelle zum Kranz nach Abb. 2296 oft mit erheblichen Fehlern behaftet. Keller empfiehlt deshalb mit Recht, die Tangentialspaltungen zur Nachprüfung der Richtigkeit der Rechnung zu benutzen. Der Eigenfliehkraft und den Randbelastungen einer Scheibenhälfte müssen nämlich die Tangentialspaltungen in der Schnittfläche das Gleichgewicht halten. In Spalte 20 ist zunächst die mittlere Breite x_m und in 21 der Flächeninhalt $x_m \cdot \Delta r$ der einzelnen Zonenquerschnitte ermittelt. Ihre Summe liefert den Flächeninhalt F eines Radialschnittes der Scheibe. Spalte 22 und 23 dienen zur Bestimmung der auf die Drehachse bezogenen statischen Momente, deren Summe S den Abstand des Schwerpunktes $r_s = \frac{S}{F}$, damit aber nach der Guldinschen Regel das Gewicht $G/2$ sowie die Fliehkraft Z der halben Scheibe:

$$\frac{G}{2} = \gamma \cdot F \cdot \pi \cdot r_s \quad \text{und} \quad Z = \frac{G}{2g} \omega^2 \cdot r_s = \pi \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot \omega^2 \cdot r_s^2$$

zu bestimmen gestattet. Die Belastung der Scheibenhälfte durch die Beschauflung beträgt bei p_s kg/cm² der Oberfläche: $2p_s \cdot R_a \cdot b_k$, diejenige durch den Druck p_0 an der Nabeninnenfläche: $2p_0 \cdot R_0 \cdot b_n$. In Spalte 24 sind noch die mittlere Tangentialspaltung $\sigma'_{t,m}$ in den einzelnen Zonen und in den Produkten der Spalte 25 die Tangentialkräfte $\sigma'_{t,m} \cdot x_m \cdot \Delta r$ berechnet. War nun der Wert für σ'_t in Zeile 1 Spalte 8 richtig geschätzt, so muß:

$$2 \sum \sigma'_{t,m} \cdot x_m \cdot \Delta r = Z + 2(p_s \cdot R_a \cdot b_k + p_0 \cdot R_0 \cdot b_n)$$

sein. Trifft das nicht zu, so läßt sich der genauere Wert, wie unten gezeigt, ziemlich sicher schätzen, weil die Linien der Tangentialspaltungen annähernd geometrisch ähnlich verlaufen.

Beispiel 10. Die Beanspruchung der Scheibe Abb. 2296 mit einer Beschauflung nach Abb. 2270 bei $n = 3000$ Umläufen in der Minute und $p_0 = -50$ kg/cm² Zusammenbauspaltung an der Nabe ist zu untersuchen.

Zweite Durchrechnung					Nachprüfung	
33	34	35	36	37	38	39
$-\frac{m+1}{m}(\sigma'_i - \sigma'_r) \frac{\Delta r}{r}$	$\frac{1}{m} \Delta \sigma''_r$	$\Delta \sigma''_i$	$\sigma'_i + \Delta \sigma''_i$	$\sigma''_r + \Delta \sigma''_r$	σ''_{im}	$\sigma''_{im} \cdot x_m \cdot \Delta r$
- 1,3 · (29)	0,303 · (32)	(33) + (34)	(26) + (35)	(27) + (32)	aus (26)	(38) · (21)
kg/cm ²					kg/cm ²	
- 72,8	+ 15,8	- 57,0	+ 1013	- 2	1041,5	5207
- 62,9	+ 13,4	- 49,5	+ 963,5	+ 42,2	988	4941
- 54,5	+ 11,4	- 43,1	+ 920,4	+ 79,7	941,9	4710
- 47,5	+ 9,7	- 37,8	+ 882,6	+ 111,8	901,5	4507
- 83,6	+ 16,6	- 67,0	+ 815,6	+ 166,6	849,1	8491
kg/cm ²					kg	
- 4,2	- 57,7	- 61,9	+ 471,9	+ 85,7	502,9	1045
- 6,2	- 13,7	- 19,9	+ 452,0	+ 40,6	462	1428
- 6,5	- 3,4	- 9,9	+ 442,1	+ 29,4	447,1	1610
- 2,6	- 1,4	- 4,0	+ 438,1	+ 24,8	440,1	634
					112783	

Winkelgeschwindigkeit $\omega = 314/\text{sek}$, Umlaufgeschwindigkeit am mittlern Schaufelhalbmesser $v = \omega \cdot R = 314 \cdot 0,45 = 141,4 \text{ m/sek}$. Denkt man sich den Kranz der Scheibe nach der Nebenabbildung *a* zur Mitte hin zusammengesoben, so entsteht bei *A* ein Absatz, der damit eine Unstetigkeit, die man bei den Durchrechnungen ausschaltet, wenn man die Scheibe nur bis *AA* reichend annimmt und den schräg gestrichelten Teil zur Randbelastung durch die Beschauflung hinzuzählt. Das ist um so mehr berechtigt, als die Inanspruchnahme dieses Kranzteils sehr verwickelt ist und die Annahme zugunsten der Sicherheit der Rechnung wirkt. Die Scheibe wurde nach Abb. 2296 in 26 Zonen von 0,2 ... 2 cm radialer Stärke eingeteilt, deren Begrenzungsflächen den 27 Zeilen der Berechnungstafel entsprechen. Die Randbelastung ergibt sich wie folgt:

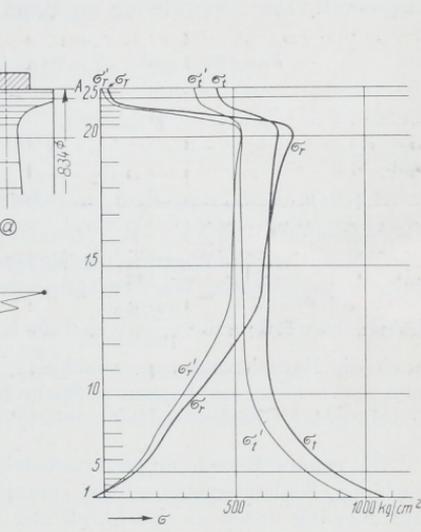
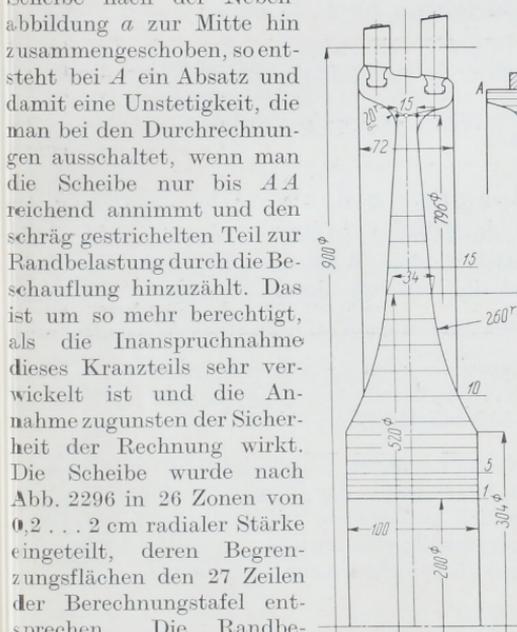


Abb. 2296. Zu Beispiel 10.

Die auf S. 1307 und 1308 ermittelte Belastung von 223 und 185 kg/cm durch die beiden Schaufelreihen vermindert sich entsprechend dem anderen mittleren Halbmesser auf das $(\frac{45}{60})^2 = 0,563$ fache, also auf 126 und 104 kg je Zentimeter Umfang.

Wirkung des Scheibenrandes. Gewicht eines Stückes von 1 cm Länge, längs des Umfangs gemessen:

$$G = \frac{3,7 \cdot 1,3 \cdot 1 \cdot 7,85}{1000} = \frac{37,8}{1000} \text{ kg/cm.}$$

Flihkraft:

$$\frac{G}{g} \cdot \omega^2 \cdot R = \frac{37,8}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 42,4 = 161 \text{ kg/cm}.$$

Insgesamt ist also der Rand mit $126 + 104 + 161 = 391 \text{ kg/cm}$ belastet. Denkt man sich diese Belastung auf der Kranzbreite von $7,2 \text{ cm}$ gleichmäßig verteilt, so entsteht eine Randspannung von:

$$p_s = \frac{391}{7,2} = 54,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Mit den weiteren Größen $\frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 = \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 = 0,709 \text{ kg/cm}^4$, $\frac{m+1}{m} = 1,30$

und $\frac{1}{m} = 0,303$ ist die Zahlentafel durchgerechnet. Dabei muß die Ermittlung der Zahlen in den Spalten 8...19 mit der größten Sorgfalt geschehen, weil ein an irgendeiner Stelle gemachter Fehler auf die ganze darauffolgende Rechnung wirkt. Es ist zweckmäßig, derartige Rechnungen zu zweien durchzuführen oder sie durch gleichzeitiges Aufzeichnen der Hauptwerte zu verfolgen, wobei wenigstens grobe Fehler hervortreten werden.

Bei der ersten Durchrechnung wurde in der ersten Zeile der Spalten 8 und 9 $\sigma'_t = 940 \text{ kg/cm}^2$ angenommen, für σ'_t aber die vorgeschriebene Pressung $p_0 = -50 \text{ kg/cm}^2$ eingesetzt. Die Nachprüfung an Hand der Spalten 20 bis 25 ergibt:

$$F = 160,4 \text{ cm}^2, \quad S = 3438,7 \text{ cm}^3, \quad r_s = \frac{S}{F} = \frac{3438,7}{160,4} = 21,42 \text{ cm};$$

$$Z = \pi \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot \omega^2 \cdot r_s^2 = \frac{\pi \cdot 785}{1000 \cdot 981} \cdot 160,4 \cdot 314^2 \cdot 21,4^2 = 183000 \text{ kg}$$

und

$$Z + 2(p_s \cdot R_a \cdot b_k + p_0 \cdot R_0 \cdot b_n) = 183000 + 2(54,2 \cdot 41,7 \cdot 7,2 + 50 \cdot 10 \cdot 10) = 225500 \text{ kg}.$$

Demgegenüber ist $2 \sum \sigma'_{tm} \cdot x_m \cdot \Delta r$ nach Spalte 25 nur $2 \cdot 97000 = 194000 \text{ kg}$, mithin sind die Tangentialspannungen zu niedrig ermittelt worden. Würde man den an der Nabenbohrung angenommenen Wert verhältnismäßig der Belastung durch die äußeren Kräfte erhöhen, so würde $940 \cdot \frac{225500}{194000} = 1090 \text{ kg/cm}^2$ zu erwarten sein. In Rücksicht darauf, daß auch die Radialspannungen zunehmen, wurde die zweite Durchrechnung mit $\sigma''_t = 1070$ und $p_0 = -50 \text{ kg/cm}^2$ begonnen, Spalte 26...37. Sie lieferte $2 \sum \sigma''_{tm} \cdot x_m \cdot \Delta r = 225566 \text{ kg}$ in sehr guter Übereinstimmung mit den äußeren Kräften.

Die genaue Berechnung unsymmetrisch zur Laufebene gestalteter Räder von Wasserturbinen, Schleudergebläsen und -pumpen bietet wegen der Inanspruchnahme derselben auf Biegung durch die Flihkraft der seitlich ausladenden Schaufeln Schwierigkeiten. Die rechnerische Behandlung wird sehr verwickelt; eher dürften sich zeichnerische oder Differenzenverfahren nach Art des vorstehend besprochenen zur Untersuchung empfehlen.