beim Rücklauf um 2900 kg auf 7650 kg zu vermindern. Er liefert, mit der senkrechten Belastung von 3650 kg zusammengesetzt, den mittleren Druck beim Hingange $\sqrt{13540^2 + 3650^2} = 13930$, beim Rückgange $\sqrt{7650^2 + 3650^2} = 8480$ kg oder im Mittel während eines Umlaufes $A_m' = 11205$ kg. Damit wird:

$$p_m' \cdot v = \frac{A_m'}{d_1 \cdot l_1} \cdot v = \frac{11205}{25 \cdot 36} \cdot 0{,}654 = 8{,}15 \frac{\text{kgm}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sek}},$$

was zulässig ist.

Beispiel 5. Stirnzapfen an einem Vorgelege, der bei $n = 250$ Umläufen in der Minute dauernd mit $P = 5000$ kg belastet ist. Werkstoff: Ungehärteter Stahl auf Weißmetall.

(An dem Zapfen ist, wie das Zahlenbeispiel 8 erkennen und auch die später näher erläuterte Abb. 1117 erwarten läßt, ohne Schwierigkeit flüssige Reibung zu erzielen; er werde hier jedoch in der früher üblichen Art berechnet.)

Der erfahrene Ingenieur sieht, daß die Zapfenmaße auf Grund der Sicherheit gegen Warmlaufen gewählt werden müssen; aber auch der oben beschriebene Rechnungsgang führt rasch zur gleichen Erkenntnis und kann deshalb Anfängern empfohlen werden.

Ausgehend von einem zulässigen Flächendruck von $p_{\max} = 60$ kg/cm² wird die Auflagefläche: $f' = \frac{P}{p} = \frac{5000}{60} = 83{,}3$ cm² und unter Schätzen des Durchmessers:

$$\begin{array}{llll}
d = & 7 & 8 & 9 \text{ cm}, \\
l = \frac{f'}{d} = & 12 & 10{,}4 & 9{,}3 \text{ cm}, \\
\sigma_b = \frac{32\, P \cdot l}{2\,\pi d^3} = 25500 \frac{l}{d^3} = & 893 & 518 & - \text{ kg/cm}^2, \\
v = \frac{\omega \cdot d}{2} = 13{,}09 \cdot d = & & 1{,}047 & - \text{ m/sek}, \\
p \cdot v = & & 62{,}8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sek}}. & \text{Unzulässig.}
\end{array}$$

Der hohe Wert von $p \cdot v$ weist darauf hin, daß der Zapfen gegen Warmlaufen zu berechnen ist. Mit der an Triebwerkwellen üblichen Größe $(p \cdot v)' = 20$ wird die nötige Zapfenlänge:

$$l' = \frac{l \cdot p \cdot v}{(p \cdot v)'} = \frac{10{,}4 \cdot 62{,}8}{20} = 32{,}7 \text{ cm}.$$

Gewählt: $l' = 330$ mm.

Mit $k_b = 600$ kg/cm² folgt:

$$W = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 = \frac{P \cdot l'}{2\, k_b} = \frac{5000 \cdot 33}{2 \cdot 600} = 137{,}5 \text{ cm}^3; \qquad d = 11{,}2 \text{ cm}.$$

Gewählt $d = 115$ mm.

Dabei sinkt der Flächendruck auf: $p = \frac{P}{d \cdot l} = \frac{5000}{11{,}5 \cdot 33} = 13{,}2$ kg/cm².

B. Berechnung der Tragzapfen auf hydrodynamischer Grundlage.

Voraussetzung ist, daß der Zapfen unter flüssiger Reibung läuft, daß also das zur Bildung einer tragfähigen, keiligen Schmierschicht notwendige Spiel bei zylindrischer Form des Zapfens und der Schale und die nötige Umfanggeschwindigkeit vorhanden sind. Im allgemeinen werden die Bedingungen nur bei ständig in einer Richtung umlaufenden und gleichmäßig oder doch nur unter mäßigen Schwankungen belasteten Zapfen erfüllt sein. Die nur eine kippende Bewegung ausführenden Gabelzapfen scheiden ganz aus.

Daß die Stärke der Schmierschicht vom Grunde der Vertiefungen der Schalenoberfläche aus gerechnet werden muß, wie schon auf Seite 619 ausgeführt wurde, berücksichtigt man bei den Rechnungen am einfachsten dadurch, daß man das Zapfen- oder Lagerspiel aus der Lagerbohrung D und dem Zapfendurchmesser d als $D - d$ ermittelt oder im Scheitel des im Lager ruhenden Zapfens mißt und dasselbe um den doppelten Betrag der Summe der Unebenheiten der aufeinanderlaufenden Flächen vermehrt, so daß das Zapfenspiel in den folgenden Rechnungen:

$$s = D - d + 2\,(\delta_1 + \delta_2) \tag{337}$$

zu setzen ist.

Berechnungsbeispiel 6. Das auf Seite 630 unter Voraussetzung völlig glatter Flächen durchgerechnete Beispiel ergibt bei Berücksichtigung der Unebenheiten von $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}0005$ cm die Werte:

Zapfenspiel $s = D - d + 2\,(\delta_1 + \delta_2) = 10{,}02 - 10{,}0 + 2\,(0{,}0005 + 0{,}0005) = 0{,}022$ cm und:

$$\Phi = \frac{191\,000\,p \cdot s^2}{\eta \cdot n \cdot d^2}\left(\frac{d+l}{l}\right) = \frac{191\,000 \cdot 17{,}9 \cdot 0{,}022^2}{0{,}0025 \cdot 500 \cdot 10^2} \cdot \left(\frac{10+14}{14}\right) = 22{,}8\,.$$

Nach Abb. 1096 wird beim Ziehen des Strahles durch M und $\Phi = 22{,}8$:

$$h = 0{,}091 \cdot \frac{s}{2} = 0{,}091 \cdot \frac{0{,}022}{2} = 0{,}001 \text{ cm.}$$

Der Zapfen läuft mithin im Ausklinkzustand; flüssige Reibung ist gerade noch sichergestellt.

Zunächst sind die grundlegenden Beziehungen zur Bestimmung

1. des Lagerspiels und der Stärke der Schmierschicht an der engsten Stelle, 2. der Reibungsarbeit und 3. der Lagertemperatur entwickelt. Diesen Gesichtspunkten gegenüber tritt namentlich an kleinen Zapfen und bei mäßigen Belastungen die unter 4. kurz behandelte Berechnung der Zapfen auf Festigkeit zurück. Die auf Grund derselben ermittelten Durchmesser stellen oft Mindestwerte dar, die vergrößert werden müssen, um in das Gebiet der flüssigen Reibung zu kommen. Es empfiehlt sich daher häufig, den Durchmesser zunächst nach den unter 1. bis 3. entwickelten Gleichungen zu bestimmen und die Beanspruchungen auf Biegung und Drehung lediglich nachzuprüfen. Dagegen sind die unter 5. behandelten Wirkungen der Formänderungen der Zapfen äußerst wichtig; sie sind sorgfältig zu beachten.

1. Ermittlung des Lagerspiels und der Stärke der Schmierschicht an der engsten Stelle.

Die Stärke h der Schmierschicht an der engsten Stelle war auf Seite 629 an Hand der Größe Φ und der Abb. 1096 ermittelt worden. Trägt man nun Φ nach der Zusammenstellung 115 abhängig von dem Verhältnis $\frac{h}{s/2}$ in einem Liniennetz auf, so erhält man eine Kurve, die sich innerhalb des praktisch wichtigen Gebiets $\frac{h}{s/2} = 0{,}05$ bis $0{,}5$ genügend genau durch eine gleichseitige Hyperbel:

$$\frac{h}{s/2} \cdot \Phi = 2{,}08 \quad \text{oder} \quad \Phi = 1{,}04\,\frac{s}{h} \tag{338}$$

ersetzen läßt. Wird diese Beziehung in Gleichung (312) eingeführt, so folgt:

$$\text{a)}\quad s = \frac{\eta \cdot n \cdot d^2}{183600 \cdot h \cdot p} \cdot \frac{l}{d+l} \quad \text{oder} \quad \text{b)}\quad h = \frac{\eta \cdot n \cdot d^2}{183\,600 \cdot s \cdot p} \cdot \frac{l}{d+l} \tag{339}$$

(gültig für $h = 0{,}025 \;...\; 0{,}25\,s$).

Diese Formeln gestatten die wechselweise Berechnung von s und h an einem Zapfen vom Durchmesser d und der Länge l unter bestimmten, durch p, η und n gekennzeichneten Betriebsbedingungen, ohne Φ bestimmen zu müssen. (Liegt aber der betrachtete Fall außerhalb der angeführten Grenzen, so muß man die Größe Φ, wie auf Seite 630 angegeben, bei der Ermittlung heranziehen.) Sind s und h gegeben, so läßt sich je nach Umständen n oder p ermitteln.

Die geringste Zapfenreibungszahl $\mu_{1\,\mathrm{min}}$ und damit die kleinste Reibungsarbeit, die sowohl wegen Erhöhung des Wirkungsgrades des Getriebes wie auch wegen Beschränkung der Erwärmung des Lagers anzustreben ist, stellt sich nun, wie auf Seite 631 an Hand des Verlaufes von $\varkappa$ gezeigt wurde, bei $h = \frac{s}{4}$ ein. Indem man diesen Wert in Gleichung (339a) einsetzt, findet man das vorteilhafteste Spiel:

$$s_{best} = \sqrt{\frac{4 \cdot \eta \cdot n d^2}{183600 p} \cdot \frac{l}{d+l}} \approx 0{,}00467\, d \sqrt{\frac{\eta \cdot n}{p} \cdot \frac{l}{d+l}}. \tag{340}$$

Hervorgehoben sei noch, daß nach Formel (339b) die Ölschichtdicke h um so größer wird, mithin um so mehr Sicherheit gegen Auftreten halbflüssiger Reibung bietet, je kleiner s ist. h nimmt nach der gleichen Beziehung verhältnisgleich der Drehzahl n und dem Quadrat des Durchmessers d zu, so daß größere Durchmesser die Ausbildung flüssiger Reibung unterstützen; mit zunehmender Pressung wird h geringer.

Dem Lagerspiel $D - d$ sind nun untere Grenzen durch die Ausführbarkeit, der Stärke der Schmierschicht h aber durch den Ausklinkzustand gezogen. Die Ausführung der Zapfen und Lager erfolgt in neuzeitlichen Betrieben nach den Passungen der Dinormen. Im allgemeinen Maschinenbau werden für Lager, an die höhere Ansprüche gestellt werden, in erster Linie die Lehren der Laufsitz-Feinpassung des Einheitsbohrungssystems benutzt. Das u. a. im Triebwerkbau angewandte Einheitswellensystem hat annähernd die gleichen Spiele. Seltener wird man an genügend kurzen Zapfen zum engen Laufsitz greifen. Dagegen muß man bei mehrfach gelagerten Wellen häufig wegen der Schwierigkeit, mehrere Lagerstellen genügend übereinstimmend herzustellen, leichten Laufsitz oder Schlichtlaufsitz ausführen. Auch bei großen Durchmessern kann es sich empfehlen, diese weiteren Sitze anzuwenden.

Neben dem Einhalten des Lagerspiels ist aber wichtig, daß die Flächen genau zylindrisch, die Achsen der Zapfen und Schalen also genau gerade sind. Nicht selten kommt es vor, daß sich die Werkzeuge infolge verschiedener Härte des Werkstoffes verlaufen und demzufolge z. B. die Mittellinien der Schalen unregelmäßig ausfallen. So lassen sich erfahrungsgemäß lange, ungeteilte Büchsen mit engem Laufsitz meist schwer und nicht ohne Klemmen mit ihren Zapfen zusammenstecken. Das richtige Spiel ist aber nicht allein bei der Herstellung einzuhalten, sondern auch beim Zusammenbau; dieser wird um so schwieriger, je mehr die Schalen unterteilt sind. Und schließlich verändern namentlich geteilte Schalen ihre Form durch die Wirkung der Belastung, falls sie nicht kräftig genug gehalten oder hinreichend unterstützt sind, oder sie werfen und verziehen sich infolge der Erwärmung beim Betriebe. Kleinere Verzerrungen können durch richtig geleitetes Einlaufen beseitigt, größere müssen durch besonderes Nacharbeiten ausgeglichen werden.

Die Wirkung des Spiels werde zunächst an einigen Zahlenbeispielen der Laufsitzpassung nach der Einheitsbohrung gezeigt.

Beispiel 7. Bei Durchmessern von 32 bis zu 50 mm beträgt nach DIN 777 und 773 das Kleinstspiel 0,025, das Größtspiel 0,075 mm. Sorgfältige Bearbeitung des Zapfens durch Schleifen und der Schale durch Aufreiben vorausgesetzt, darf man die Unebenheiten mit $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}005$ mm annehmen und muß daher in die Rechnungen:

als Kleinstspiel

$$s_{\min} = (D - d)_{\min} + 2\,(\delta_1 + \delta_2) = 0{,}025 + 0{,}02 = 0{,}045 \text{ mm},$$

als Größtspiel

$$s_{\max} = (D - d)_{\max} + 2\,(\delta_1 + \delta_2) = 0{,}075 + 0{,}02 = 0{,}095 \text{ mm}$$

einführen. Aus der Mindeststärke der Schmierschicht an der engsten Stelle läßt sich nun bei gegebener Pressung p und Zähigkeit des Schmiermittels η die **Mindestdrehzahl** berechnen, die ein Zapfen haben muß, wenn flüssige Reibung auftreten soll, sofern die später besprochenen Formänderungen der Zapfen und der Schale unberücksichtigt bleiben können. Löst man die Gleichung (339) nach n auf, so erkennt man an:

$$n = \frac{183\,600 \cdot s \cdot h \cdot p}{\eta \cdot d^2} \cdot \frac{d + l}{l},$$

daß die erforderliche Drehzahl um so höher liegt, je größer p ist.

Des leichteren Vergleichs wegen sei p durchweg mit 10 kg/cm², $\eta = 0{,}003 \frac{\text{kg/sek}}{\text{m}^2}$ und $h = \delta_1 + \delta_2 = 0{,}001$ cm angenommen. Damit wird die Mindestdrehzahl für den Zapfen von $d = 32$ mm Durchmesser bei $l = 1{,}5\,d = 48$ mm Länge, für den Fall, daß Kleinstspiel vorliegt:

$$n' = \frac{183\,600 \cdot 0{,}0045 \cdot 0{,}001 \cdot 10}{0{,}003 \cdot 3{,}2^2} \cdot \frac{3{,}2 + 4{,}8}{4{,}8} = 448\,,$$

im zweiten Grenzfall, beim Größtspiel:

$$n'' = \frac{183\,600 \cdot 0{,}0095 \cdot 0{,}001 \cdot 10}{0{,}003 \cdot 3{,}2^2} \cdot \frac{3{,}2 + 4{,}8}{4{,}8} = 946 \text{ Umdrehungen in der Minute.}$$

Dieser beträchtliche, durch die Spielgrenzen gegebene Unterschied in den Drehzahlen wird dadurch gemildert, daß die angenommenen äußersten Fälle, bei denen ein **dickster** Zapfen mit einer **engsten** Bohrung oder umgekehrt zusammentrifft, kaum vorkommen werden, sowie dadurch, daß das Einlaufen des Zapfens ausgleichend wirkt.

Zur Beurteilung des Einflusses verschiedener Zapfendurchmesser kann daher das **mittlere** Spiel von 0,070 mm und der entsprechende Wert $n_m = 697$ dienen.

Für den größten Durchmesser $d = 500$ mm, bis zu dem die Laufsitzpassung genormt worden ist, gelten die folgenden Spiele:

$$(D - d)_{\min} = 0{,}06, \quad s_{\min} = 0{,}08 \text{ mm};$$
$$(D - d)_{\max} = 0{,}18, \quad s_{\max} = 0{,}20 \text{ mm}.$$

Nimmt man ferner, da die Länge solcher starken Zapfen verhältnismäßig kleiner gehalten zu werden pflegt, $l = d = 500$ mm an, so werden die Grenzdrehzahlen, bei denen flüssige Reibung einsetzt:

$$n' = \frac{183\,600 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}001 \cdot 10}{0{,}003 \cdot 50^2} \cdot \frac{50 + 50}{50} = 3{,}9\,,$$

$$n'' = \frac{183\,600 \cdot 0{,}020 \cdot 0{,}001 \cdot 10}{0{,}003 \cdot 50^2} \cdot \frac{50 + 50}{50} = 9{,}7 \text{ in der Minute.}$$

Die Werte zeigen deutlich, daß, gleiche Zähigkeit der Schmiermittel und gleiche spezifische Belastung vorausgesetzt,

a) kleine Zapfen erst bei großen Umdrehzahlen, große dagegen schon bei sehr niedrigen so weit angehoben werden, daß die Unebenheiten ausklinken und somit flüssige Reibung eintritt,

b) daß die durch die Toleranzen der Laufsitzpassung gegebenen Grenzwerte von n an größeren Zapfen näher beieinander liegen. Zapfen größeren Durchmessers bieten mithin eine viel sichere Gewähr für die Entstehung flüssiger Reibung. Manchmal sind bei ihnen sogar größere Spiele, als der genannten Passung entsprechen, möglich und sogar zweckmäßig, wie Berechnungsbeispiel 13 zeigt.

In Abb. 1117 sind die Grenzdrehzahlen n für die normalen Durchmesser von 32 bis 500 mm dargestellt, indem über den Durchmessern als Abszissen die Kleinst- und Größtspiele unter Berücksichtigung der Unebenheiten und die zugehörigen Drehzahlen als Ordinaten aufgetragen wurden. Dabei ist angenommen, daß die Zapfenlänge $l = 1{,}5\,d$ bei kleinen Durchmessern auf $1{,}0\,d$ bei großen nach folgender Reihe sinkt:

$d =$	32—50	52—80	82—120	125—180	185—260	270—360	370—500 mm
$l =$	$1{,}5d$	$1{,}5d$	$1{,}4d$	$1{,}3d$	$1{,}2d$	$1{,}1d$	$1d$

wie auch über den einzelnen Durchmessergruppen angegeben ist. Übrigens gestatten die Kurven auch, die Grenzdrehzahlen n' bei beliebig anderem Flächendruck p' und anderer Zähigkeit η' nach:

$$n' = \frac{0{,}003 \cdot n_{\min} \cdot p'}{10 \cdot \eta'} = 0{,}0003\,\frac{n_{\min} \cdot p'}{\eta'} \qquad (341)$$

zu bestimmen und lassen sich daher namentlich bei Überschlagrechnungen vorteilhaft verwenden. Läuft beispielweise ein Zapfen von 150 mm Durchmesser und $l = 1{,}3\,d$ $= 195$ mm Länge unter $p' = 12\ \text{kg/cm}^2$ Flächendruck oder 3510 kg Belastung bei Schmierung mit Normalöl 16 (schwerem Maschinenöl) und einer Temperatur von 50^0, so wird nach der Zusammenstellung 114, Seite 626, $\eta' = 0{,}0107$, während die Drehzahlen für den Ausklinkzustand:

beim kleinsten Spiel $(D - d)_{\min} = 0{,}04$ mm von 29 auf

$$n' = \frac{0{,}0003 \cdot 29 \cdot 12}{0{,}0107} = 9{,}8$$

und beim Größtspiel $(D - d)_{\max} = 0{,}12$ mm von 67 auf

$$n'' = \frac{0{,}0003 \cdot 67 \cdot 12}{0{,}0107} = 23 \text{ in der Minute}$$

sinken.

Mit der Schmierschichtstärke h an der engsten Stelle bei dauerndem Laufen an den Grenzwert im Ausklinkzustand $\delta_1 + \delta_2$ heranzugehen, ist betriebstechnisch bedenklich, weil bei Störungen sofort halbflüssige Reibung mit rasch steigendem Widerstand eintritt. Zugunsten einer größeren Sicherheit, im Gebiet der flüssigen Reibung zu sein, empfiehlt es sich, größere Schmierschichtstärken anzustreben, selbst unter Inkaufnahme von etwas mehr Reibung. Nach Falz soll man, frei einstellbare Lager vorausgesetzt, bei dünnen raschlaufenden Wellen mindestens $h = 0{,}02$, bei mittleren 0,025, bei starken 0,03 bis 0,035 mm fordern. Nur an langsam laufenden Wellen wird man auf geringere Werte gehen müssen.

Ist das Spiel gegeben, so kann die Berechnung der Zähigkeit des geeigneten Schmiermittels in Frage kommen.

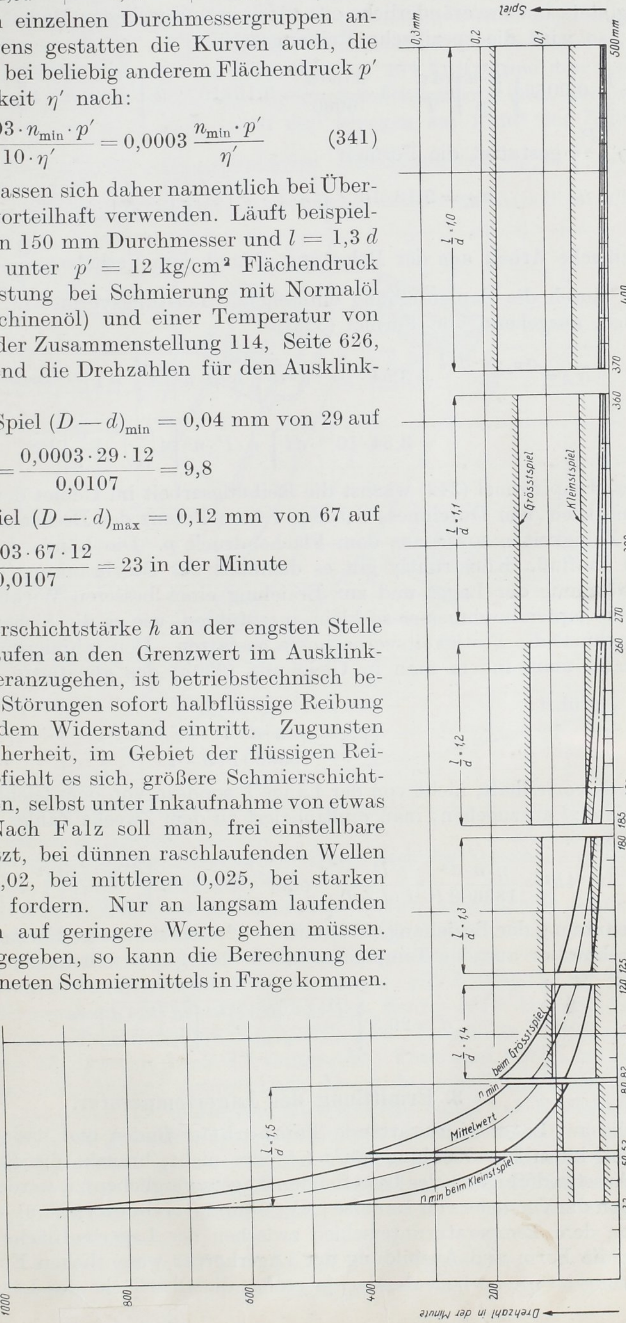

Abb. 1117. Grenzdrehzahlen von Zapfen mit Laufsitz-Feinpassung des Einheitsbohrungssystems von 32 bis 500 mm Durchmesser bei $p = 10\ \text{kg/cm}^2$ mittlerem Flächendruck und $\eta = 0{,}003\ \frac{\text{kg.sek}}{\text{m}^2}$ Zähigkeit des Schmiermittels.

2. Berechnung der Reibungsarbeit.

Setzt man in der Grundgleichung (322)

$$a_{R_0} = \frac{p_m \cdot \mu_1 \cdot v}{\pi}$$

$v = \dfrac{\pi \cdot d \cdot n}{6000}$ (der Nenner ist 6000, wenn d, wie üblich, in cm eingeführt wird), sowie μ_1 nach Formel (315) ein und schreibt zur Vereinfachung p und P statt p_m und P_m, da es sich bei Zapfen unter flüssiger Reibung stets um unveränderliche oder doch in nur geringem Maße schwankende Drucke handelt, so wird die spezifische Reibungsarbeit:

$$a_{R_0} = \frac{p}{\pi} \cdot 0{,}0055 \sqrt{\frac{\eta \cdot n}{p}} \sqrt{\frac{4\,d}{l} + 1} \cdot \frac{\pi \cdot d \cdot n}{6000} = 9{,}16 \cdot 10^{-7} \cdot d \sqrt{\eta \cdot p \cdot n^3 \left(4\frac{d}{l} + 1\right)} \,\frac{\text{kg m}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2}. \quad (342)$$

Mit $p = \dfrac{P}{d \cdot l}$ gestattet die Formel:

$$a_{R_0} = 9{,}16 \cdot 10^{-7} \sqrt{\eta \cdot P \cdot n^3 \left[4\left(\frac{d}{l}\right)^2 + \frac{d}{l}\right]} \,\frac{\text{kg m}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2} \quad (343)$$

die spezifische Arbeit aus der Belastung P und dem Verhältnis $\dfrac{d}{l}$ zu berechnen. Der gesamte, durch die Zapfenreibung entstehende Leistungsverlust in Pferdestärken wird schließlich, ausgehend von Formel (323):

$$\begin{aligned} N_R &= \frac{a_{R_0} \cdot \pi \cdot d \cdot l}{75} = 3{,}84 \cdot 10^{-8}\, d^2 \cdot l \sqrt{\eta \cdot p \cdot n^3 \left(4\frac{d}{l} + 1\right)} \\ &= 3{,}84 \cdot 10^{-8} \cdot d\,l \sqrt{\eta \cdot P \cdot n^3 \left[4\left(\frac{d}{l}\right)^2 + \frac{d}{l}\right]} \;\text{PS}. \end{aligned} \quad (344)$$

Nach der Hauptformel (342) wächst die Reibungsarbeit im Gebiet der flüssigen Reibung verhältnisgleich dem Durchmesser d, der 1,5ten Potenz der Drehzahl n und der Wurzel aus der Zähigkeit η sowie aus dem Flächendruck p. Die Länge des Zapfens hat nur geringen Einfluß. Konstruktiv gilt es demnach zur Beschränkung der Reibungsarbeit und Erwärmung der Lager und zur Erzielung eines besseren Wirkungsgrades des Getriebes die Zapfendurchmesser so klein auszuführen, wie es die Sicherheit des Betriebes und manchmal die Festigkeitsverhältnisse gestatten. Den schmierungstechnisch besten Wert findet man, indem man in Gleichung (339a) das günstigste Spiel $s = 4\,h$ und $p = \dfrac{P}{d \cdot l}$ einführt:

$$4h^2 = \frac{\eta \cdot n \cdot d^3 \cdot l}{183600\,P} \cdot \frac{l}{d + l}.$$

Meist ist es vorteilhaft, nicht von der Länge l, sondern von dem leichter zu schätzenden Verhältnis $d : l$ auszugehen; man multipliziert zu dem Zwecke Zähler und Nenner mit d und erhält:

$$4h^2 = \frac{\eta \cdot n \cdot d^4}{183600\,P} \cdot \frac{l^2}{d\,(d + l)} \quad \text{oder} \quad d = 29{,}3 \sqrt[4]{\frac{P\,h^2}{\eta \cdot n} \left[\left(\frac{d}{l}\right)^2 + \frac{d}{l}\right]}. \quad (345)$$

Unter Benutzung der Beziehung (310) mit $z = 2{,}6$ entsteht eine Formel, die den günstigsten Durchmesser aus der Temperatur t, die das Lager annehmen soll, zu berechnen gestattet:

$$d = 29{,}3 \sqrt[4]{\frac{P \cdot h^2 \cdot (0{,}1\,t)^{2{,}6}}{i \cdot n} \left[\left(\frac{d}{l}\right)^2 + \frac{d}{l}\right]}. \quad (346)$$

3. Ermittlung der Lagertemperatur.

Um die am Lager zu erwartende Temperatur finden und dadurch beurteilen zu können, ob künstliche Kühlung nötig ist oder nicht, braucht die Reibungsarbeit nur mit der Ausstrahlfähigkeit des betreffenden Lagers verglichen zu werden. Anhaltpunkte dafür geben die Versuche von Lasche [XV, 9] und Stribeck [XV, 8], die gezeigt haben, daß neben dem Temperaturunterschied zwischen der Lagerlauffläche und der Außenluft auch die Form und Ausbildung der Lagerkörper wesentlichen Einfluß haben. Die Ausstrahlung ist um so bedeutender, je größer die Oberfläche des Lagers im Verhältnis zu der des Zapfens ist. Aber auch den inneren Bau der Lager muß man in bezug auf die Wärmeleitfähigkeit beachten. Luft- oder gar Ölschichten, die durch Aussparungen der Schalen an ihrer Auflagefläche im Lagerkörper entstehen, wirken ungünstig; es ist vorteilhafter, die Schalen in ihrer vollen Breite zu bearbeiten und aufliegen zu lassen. Lasche gibt für die Beurteilung der Ausstrahlung bei 20° Luftwärme drei Kurven *I*, *II* und *III*, Abb. 1118. Als Abszissen dienen die Schalentemperaturen, als Ordinaten die Ausstrahlungen, umgerechnet in mkg/sek und bezogen auf 1 cm² der Zapfenoberfläche, um einen Vergleich mit der spezifischen Reibungsarbeit $a_{R_0} = \frac{p_m \cdot \mu_1 \cdot v}{\pi}$ zu ermöglichen. Linie *I* gibt die nach Dulong und Petit berechnete Arbeit an, die durch

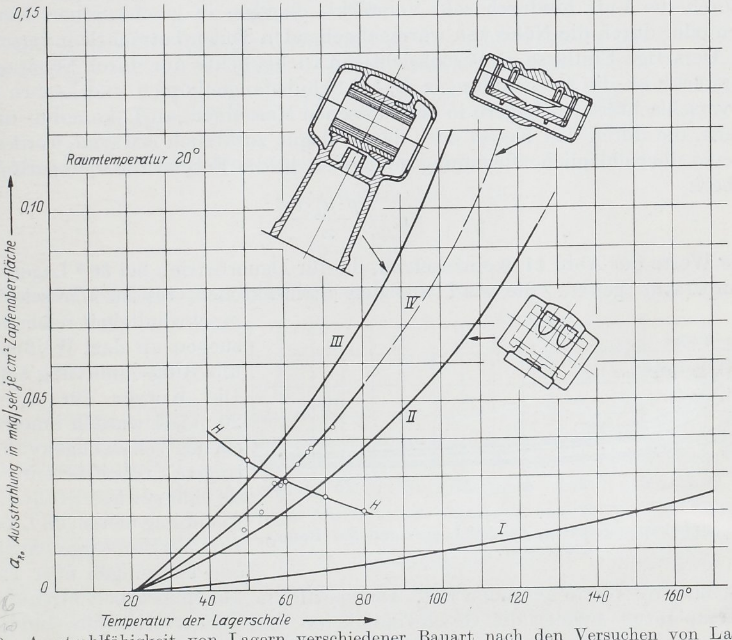

Abb. 1118. Ausstrahlfähigkeit von Lagern verschiedener Bauart nach den Versuchen von Lasche und Stribeck.

die Oberfläche des Zapfens allein in Form von Wärme ausgestrahlt werden kann. *I* darf als untere Grenzkurve betrachtet werden, da die Ausstrahlung durch das den Zapfen umgebende Lager sicher vergrößert wird. Für gedrängt gebaute Lager an Triebwerken, Dampfturbinen, rasch laufenden Dynamos usw. gilt Kurve *II*, für Lager, die besonders große Eisenmassen und Oberflächen haben, Kurve *III*. Aus den Versuchen von Stribeck an dem Sellersringschmierlager, Abb. 1097, errechnete Werte, sind durch die zwischen *II* und *III* liegende Linie *IV* dargestellt. Form und Größe im Verhältnis zu den Abmessungen des Zapfens kennzeichnen die an den einzelnen Linien stehenden Skizzen der Lager, an denen die Werte ermittelt wurden, wobei zur Erleichterung des Vergleichs die Maßstäbe so gewählt wurden, daß die Zapfenoberflächen gleichgroß ausfielen. Daß bei dieser Darstellung das Sellerslager mit einer im Verhältnis zum Zapfen kleinen Außenfläche zwischen die Kurven *II* und *III* zu liegen kommt, ist auf die dünnwandige, geräumige Ölkammer zurückzuführen, die, ringsum von Luft umspült, die Wärmeabgabe sehr begünstigt.

Nach Kurve *III* können durch ein reichlich groß gehaltenes Lager bei 80° Schalen- und 20° Raumtemperatur 0,07, durch ein Sellersringschmierlager nach Kurve *IV* 0,054, durch ein gedrängt gebautes Lager nach Kurve *II* 0,037 kgm/sek, bezogen auf je 1 cm² der Zapfenoberfläche ausgestrahlt werden. Dagegen könnte der Zapfen allein nach Kurve *I* nur 0,007 $\frac{\text{kgm}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2}$ abgeben. Für Kurbel- und Schwungradwellenlager an Kolbenmaschinen liegen noch keine Untersuchungen vor. Schätzungsweise dürften die Werte wegen der meist großen Eisenmassen, welche die Wärme weiterleiten und ausstrahlen, nahe der Kurve *III* liegen.

Die Abführung der Wärme kann durch Luftzug, erzeugt durch Temperaturunterschiede oder durch nahe am Lager sitzende Kurbeln, Scheiben oder Räder, gelegentlich auch durch Anblasen mittels besonderer Ventilatoren oder durch Bewegung der Lager durch die Luft hindurch sehr verstärkt, dagegen in geschlossenen Räumen, in Gehäusen oder durch die Nähe von wärmeabgebenden Teilen beträchtlich verschlechtert werden. Derartige Einflüsse zu berücksichtigen ist bis heute nur durch Schätzung möglich. Verstärkt ist die Ausstrahlung z. B. bei Schubstangenköpfen und Lagern an Fahrzeugen, verschlechtert bei Lagern in geschlossenen Maschinen, an Lokomobil- und Walzwerklagern, die durch den Kessel oder das Walzgut zusätzlich erwärmt werden.

Für eine überschlägliche Rechnung genügt es, in die Formel für die spezifische Reibungsarbeit:

$$a_{R_0} = \frac{p \cdot \mu_1 \cdot v}{\pi}$$

für μ_1 die Werte der Abb. 1119 einzusetzen, die für Dauerbetrieb bei 50° Lager- und 20° Raumtemperatur gelten. Sie sind aus den Stribeckschen, bis zu 4 m/sek Umfanggeschwindigkeit reichenden Versuchen an dem Weißmetallager mit Ringschmierung hergeleitet. Die Kurven für 5, 10 und 20 m/sek wurden ihnen entsprechend schätzungsweise eingetragen, wobei betont sei, daß sie eine gewisse Sicherheit der Rechnung bieten, da Lasche bei 10 m/sek Umfanggeschwindigkeit und Pressungen über 15 kg/cm² durchweg kleinere Werte gefunden hat. Die spezifische Reibungsarbeit sinkt mit steigender Temperatur, solange die Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse unverändert bleiben, gemäß den Zapfenreibungszahlen, also nach Kurven der Art, wie sie die Abb. 1103 und 1104 zeigen. Nähert man deren Verlauf durch gleichseitige Hyperbeln:

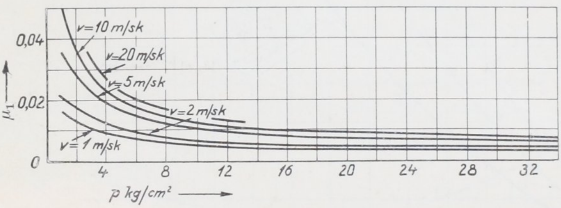

Abb. 1119. Zapfenreibungszahl μ_1 bei 50° Lager- und 20° Raumtemperatur.

$$a_{R_0} \cdot t = \text{const} = a'_{R_0} \cdot t' \tag{347}$$

an, so erhält man in den Schnittpunkten mit den Kurven, Abb. 1118, die bei den verschiedenen Lagerbauarten zu erwartenden Beharrungstemperaturen, wie die unten folgenden Beispiele erläutern.

Allgemein ist noch zu beachten, daß die Reibungszahlen der Abb. 1119 an sorgfältig behandelten Lagern gefunden sind, daß aber durch Ausführungs- und Aufstellungsfehler ungenügendes Einlaufen, Unreinigkeiten im Öl usw. die Reibung sehr erhöht werden kann und daher Vorsicht geboten erscheint, wenn die zu erwartenden Wärmegrade hoch sind. An mehrfach gelagerten Wellen hängt die Verteilung der Auflagedrucke von der Ausführung und dem Einbau ab; beim Lauf kann daher leicht Überlastung und Warmlaufen einzelner Lager eintreten.

Als zulässig dürfen 70 bis 80° Öl- oder Lagerschalentemperatur erachtet werden. Bei einer Raumtemperatur t_r, die mehr als 20° beträgt, ist naturgemäß die Gefahr des Heißlaufens größer; die zu erwartende Temperatur am Lager wird um (t_r — 20) Grad höher sein, als die auf die beschriebene Weise ermittelte. Wichtige Lager sollten stets, wie schon erwähnt, eine Bohrung für ein Thermometer zur Überwachung der Schalen- oder Öltemperatur bekommen.

Beispiel 8. Die Beharrungstemperatur, die ein Zapfen von 120 mm Durchmesser und 240 mm Länge annimmt, der dauernd unter einem Druck von $P = 5000$ kg bei $n = 250$ Umdrehungen in der Minute läuft, soll angenähert ermittelt werden.

Mittlerer Auflagedruck:

$$p_m = \frac{P}{d \cdot l} = \frac{5000}{12 \cdot 24} = 17{,}4 \text{ kg/cm}^2,$$

Umfanggeschwindigkeit:

$$v = \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot 250}{30} \cdot 0{,}06 = 1{,}57 \text{ m/sek.}$$

Dafür findet sich die Zapfenreibungszahl μ_1 aus Abb. 1119 zu 0,004. Die spezifische Reibungsarbeit bei $t = 50^0$ Lager- und 20^0 Raumwärme ist also:

$$a_{R_0} = \frac{p_m \cdot \mu_1 \cdot v}{\pi} = \frac{17{,}4 \cdot 0{,}004 \cdot 1{,}57}{\pi} = 0{,}0348 \frac{\text{mkg}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2}.$$

Zur Aufzeichnung der gleichseitigen Hyperbel dient der Grundwert:

$$a_{R_0} \cdot t = 0{,}0348 \cdot 50 = 1{,}74\,.$$

$$a'_{R_0} = \frac{a_{R_0} \cdot t}{t'} = \frac{1{,}74}{t'}$$

liefert dann durch Einsetzen verschiedener Zahlen für die Temperatur:

$$\begin{array}{llll} t' = & 60 & 70 & 80^0 \\ a'_{R_0} = & 0{,}029 & 0{,}025 & 0{,}022 \dfrac{\text{mkg}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2}. \end{array}$$

Das Eintragen dieser Werte in Form der Linie H—H in Abb. 1118 ergibt nach Kurve *II*, also bei Ausführung des Lagers entsprechend Bauart *II*, 66^0, bei den günstigeren Ausstrahlungsverhältnissen nach Art *III* rund 54^0 Beharrungstemperatur.

Zur genaueren Berechnung der Wärmeverhältnisse von Lagern und Zapfen auf Grund der hydrodynamischen Theorie der flüssigen Reibung braucht man nur an einem gegebenen Zapfen die spezifische Reibungsarbeit a_{R_0} nach Formel (342) zu ermitteln und unter Beachtung der Durchbildung des Lagers und etwaiger besonderer, die Wärmeableitung unterstützender oder hindernder Umstände die zu erwartende Temperatur an Hand der Kurven, Abb. 1118, zu bestimmen.

Wird die so gefundene Temperatur zu hoch, so muß der Zapfen oder das Lager umgestaltet oder die überschüssige Wärme künstlich abgeführt, das Lager gekühlt werden. Die abzuleitende Wärme Q in kcal/sek ergibt sich aus dem Unterschied der am Zapfen entwickelten Reibungswärme a_{R_0} und der Ausstrahlung, die mit a_s in $\frac{\text{kgm}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2}$ bezeichnet sei, zu:

$$Q = \frac{(a_{R_0} - a_s)\, \pi \cdot d \cdot l}{427} \text{ kcal/sek}\,. \tag{348}$$

Die zur Kühlung nötigen Wasser- oder Ölmengen q in l/sek folgen bei einer Zuflußtemperatur des Kühlmittels von t_1^0, einer Abflußtemperatur von t_2^0, einem Einheitsgewicht γ kg/dm³ und einer spezifischen Wärme c aus:

$$Q = \frac{q}{\gamma} c \cdot (t_2 - t_1) \quad \text{oder} \quad q = \frac{\gamma \cdot Q}{c\,(t_2 - t_1)} = \frac{\gamma\,(a_{R_0} - a_s)\, \pi \cdot d \cdot l}{427\, c \cdot (t_2 - t_1)}\,. \tag{349}$$

Für Öl ist γ im Durchschnitt 0,9, $c = 0{,}4$, für Wasser $\gamma = 1$, $c = 1$.

Beispiel 9. Die Wärmeverhältnisse am Zapfen des Beispiels 8 sind bei Schmierung mit Motorenöl der Gasmotorenfabrik Deutz genauer zu untersuchen. Nach Abb. 1094 nimmt das Öl bei verschiedenen Wärmegraden, die in der folgenden Zusammenstellung angegebenen Zähigkeiten an, mit denen sich an Hand der Formel (342) die darunter angeführten spezifischen Reibungsarbeiten ergeben.

Öltemperatur t		30	40	50	60	70^0
Zähigkeit	nach Engler E	20	11,3	6,8	4,4	3,1
	absolut η	0,0134	0,0076	0,0045	0,0028	0,0019 $\frac{\text{kg} \cdot \text{sek}}{\text{m}^2}$
Spezifische Reibungsarbeit a_{R_0}		0,0364	0,0273	0,0211	0,0166	0,0137 $\frac{\text{mkg}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2}$

Beispielweise hat das Öl bei $t = 30^0$ Temperatur eine Zähigkeit von $E = 20$ Englergraden, aus der sich bei einem spezifischen Gewicht $\gamma = 0{,}9\ \text{kg/dm}^3$ nach (309) eine absolute Zähigkeit:

$$\eta = \gamma\left(0{,}00074\,E - \frac{0{,}00064}{E}\right) = 0{,}9\left(0{,}00074 \cdot 20 - \frac{0{,}00064}{20}\right) = 0{,}0134\,\frac{\text{kg} \cdot \text{sek}}{\text{m}^2}$$

errechnet. Aus Abb. 1095 kann dieser Wert unmittelbar abgelesen werden. Damit wird:

$$a_{R_0} = 9{,}16 \cdot 10^{-7}\,d\sqrt{\eta \cdot p \cdot n^3\left(\frac{4d}{l} + 1\right)} = 9{,}16 \cdot 10^{-7} \cdot 12\sqrt{\eta \cdot 17{,}4 \cdot 250^3\left(\frac{4 \cdot 12}{24} + 1\right)}$$

$$= 0{,}314\sqrt{\eta} = 0{,}314\sqrt{0{,}0134} = 0{,}0364\,\frac{\text{mkg}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2}.$$

Trägt man die Werte von a_{R_0} in Abhängigkeit von t auf einem über Abb. 1118 gelegten Stück Pauspapier auf, so ist an Hand des Schnittes mit Kurve *III* bei Ausführung des Lagers mit größeren Außenmaßen eine Beharrungstemperatur von 46^0, bei der gedrängten Ausführung nach *II* von 55^0 zu erwarten. Sie liegen, wie vorauszusehen war, etwas niedriger als bei der oben durchgeführten angenäherten Berechnung.

Für den Fall *II* mögen noch die übrigen wichtigen Werte ermittelt werden. Das Öl hat bei 55^0 5,3 Englergrade oder eine absolute Zähigkeit $\eta = 0{,}0035\,\frac{\text{kg} \cdot \text{sek}}{\text{m}^2}$, wobei $a_{R_0} = 0{,}0186\ \frac{\text{mkg}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2}$ wird. Wie groß ist die zu erwartende geringste Stärke der Schmierschicht, wenn Zapfen und Lager nach der Laufsitzpassung der Dinormen mit einem mittleren Spiel von $D - d = 0{,}07$ mm bei einer Größe der Unebenheiten von $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}005$ mm hergestellt werden?

Der Berechnung zugrunde zu legendes Spiel nach (337):

$$s = D - d + 2\,(\delta_1 + \delta_2) = 0{,}07 + 2\,(0{,}005 + 0{,}005) = 0{,}09\ \text{mm}.$$

Daraus Stärke der Schmierschicht nach Formel (339b):

$$h = \frac{\eta \cdot n \cdot d^2}{183\,600 \cdot s \cdot p} \cdot \frac{l}{d + l} = \frac{0{,}0035 \cdot 250 \cdot 12^2}{183\,600 \cdot 0{,}009 \cdot 17{,}4} \cdot \frac{24}{12 + 24} = 0{,}0029\ \text{cm oder } 0{,}03\ \text{mm}.$$

Diese im Verhältnis zum Spiel beträchtliche Stärke der Schmierschicht macht die Nachprüfung erforderlich, ob die Gültigkeitsgrenzen der benutzten Formel eingehalten sind. Da $h = 0{,}322\,s$ ist, trifft das tatsächlich nicht zu und damit wird die Nachrechnung unter Ermittlung des Wertes Φ nach Formel (312) notwendig. Es ergibt sich:

$$\Phi = \frac{191\,000 \cdot p \cdot s^2}{\eta \cdot n \cdot d^2} \cdot \frac{d + l}{l} = \frac{191\,000 \cdot 17{,}4 \cdot 0{,}009^2}{0{,}0035 \cdot 250 \cdot 12^2} \cdot \frac{12 + 24}{24} = 3{,}20\,.$$

Aus Zusammenstellung 115 oder an Hand der Kurve Abb. 1096 folgt aus dem Schnitt des Polstrahles durch M und den Punkt $\Phi = 3{,}20$ mit der Linie ABM:

$$h' = 0{,}60 \cdot \frac{s}{2} = 0{,}60 \cdot \frac{0{,}09}{2} = 0{,}027\ \text{mm}\,.$$

Flüssige Reibung ist demnach mit großer Sicherheit verbürgt. Fragt man nach dem günstigsten Spiel, so führt Formel (340) zu:

$$s_{best} = 0{,}00467 \cdot d \sqrt{\frac{\eta \cdot n}{p} \cdot \frac{l}{d+l}} = 0{,}00467 \cdot 12 \sqrt{\frac{0{,}0035 \cdot 250}{17{,}4} \cdot \frac{24}{12+24}} = 0{,}0103\,\text{cm oder } 0{,}1\,\text{mm}$$

und einer Schmierschichtstärke an der engsten Stelle von:

$$h = \frac{s}{4} = 0{,}025 \text{ mm}.$$

Schließlich beziffert sich die gesamte am Zapfen verloren gehende Leistung nach (344) auf:

$$N_R = \frac{a_{R_0} \cdot \pi \cdot d \cdot l}{75} = \frac{0{,}0186 \cdot \pi \cdot 12 \cdot 24}{75} = 0{,}224 \text{ PS}.$$

4. Berechnung der Zapfen auf Festigkeit.

Bei Stirnzapfen ist die Beanspruchung auf Biegung gemäß den Formeln (327) oder (328) maßgebend. Da es in Rücksicht auf die weitere Berechnung vielfach zweckmäßig ist, das Verhältnis $\frac{l}{d}$ anzunehmen, kann Formel (328) auch in der Form:

$$d = \sqrt[2]{\frac{5\,P}{k_b} \cdot \frac{l}{d}} \tag{350}$$

benutzt werden. Bei mitten in einer Welle sitzenden Halszapfen ist von den an der Stelle auftretenden größten Biege- und Drehmomenten auszugehen.

5. Wirkung der Formänderung der Zapfen.

In Betracht kommen die Durchbiegung, Krümmung und Schiefstellung, denen die Zapfen durch die äußeren Kräfte unterliegen, Formänderungen, die von der gleichen Größenordnung sind, wie die Schmierschichtstärke und deshalb sorgfältig berücksichtigt werden müssen. Da sich nun die Durchbiegungen aus einem Schiefstehen, entsprechend der mittleren Neigung der elastischen Linie der Welle und einer Krümmung des Zapfens selbst zusammensetzen lassen, genügt es, die Wirkung dieser beiden Formänderungsarten zu untersuchen. Schiefe Lage eines Zapfens zu seiner Schale erzeugt Kantenpressung, läßt sich aber, wenn die Neigung dauernd dieselbe bleibt, durch richtigen Zusammenbau oder durch Einlaufenlassen unschädlich machen. Ändert sich aber die Neigung, so müssen selbsteinstellbare Schalen verwendet oder die Wirkungen durch Verkürzen oder Verstärken des Zapfens gemildert werden. Die Notwendigkeit sich selbst einstellender Schalen in Fällen, wo flüssige Reibung erzielt werden soll, wird vielfach noch nicht genügend beachtet. Verhältnismäßig lange, hochbelastete Schalen ($l \geq 2{,}6$, selbst $2\,d$) sollten, namentlich wenn sie veränderlicher Belastung ausgesetzt sind, stets selbsteinstellbar gemacht werden.

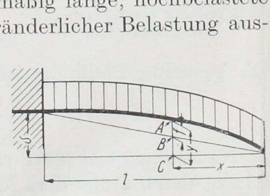

Abb. 1120. Zur Berechnung der Pfeilhöhe der elastischen Linie an Stirnzapfen.

Die Krümmung eines Zapfens oder der elastischen Linie von Wellen ruft, je nachdem, ob sie an der Stelle der dünnsten Schmierschicht erhaben oder hohl verläuft, Verminderungen der Schmierschichtstärke oder Kantenpressungen hervor, Wirkungen, die nur durch genügend kräftige und kurze Zapfen beschränkt werden können.

An Stirnzapfen errechnet sich die größte Pfeilhöhe f der elastischen Linie unter der etwas zu ungünstigen Annahme gleichmäßiger Verteilung des Flächendrucks an der Lauffläche nach Abb. 1120 wie folgt. In der Entfernung x vom Zapfenende ist nach der Gleichung der elastischen Linie:

$$f = \overline{AC} - \overline{BC} = y - \frac{\delta \cdot x}{l} = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{J}\left(\frac{x}{6\,l} - \frac{x^4}{24\,l^4} - \frac{1}{8}\frac{x}{l}\right) = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{24\,J}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^4}{l^4}\right).$$

Setzt man den Differentialquotienten $\frac{df}{dx} = 0$, so ergibt sich der größte Wert von f bei $x = 0{,}63\,l$ und zwar zu:

$$f_{\max} = 0{,}02\,\frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{J} \quad \text{oder} \quad 0{,}08\,\alpha \cdot \sigma_b \cdot \frac{l^2}{d}\,. \tag{351}$$

Der Einfluß auf die Stärke der Schmierschicht an der engsten Stelle dürfte hinreichend berücksichtigt sein, wenn man zur Summe der Unebenheiten $\frac{f_{\max}}{2}$ hinzuzählt, also mit:

$$h_{\min} = \delta_1 + \delta_2 + \frac{f_{\max}}{2} \tag{352}$$

rechnet, namentlich, da die Ebenen der größten Durchbiegung und der engsten Stelle nicht ganz zusammenfallen.

Zahlenbeispiel 10. Läßt man an einem Stirnzapfen von $d = 20$ cm Durchmesser und $l = 30$ cm Länge eine Biegebeanspruchung von $\sigma_b = 700$ kg/cm² zu, so wird bei Flußstahl mit einer Elastizitätszahl $\alpha = \frac{1}{2\,200\,000}$ cm²/kg:

$$f_{\max} = 0{,}08 \cdot \alpha \cdot \sigma_b \cdot \frac{l^2}{d} = \frac{0{,}08 \cdot 700}{2\,200\,000} \cdot \frac{30^2}{20} = \frac{1{,}15}{1000}\ \text{cm}\,.$$

Bei $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}0005$ cm steigt $h_{\min}$ von $0{,}001$ nach Gleichung (352) immerhin auf:

$$h_{\min} = \delta_1 + \delta_2 + \frac{f_{\max}}{2} = 0{,}0005 + 0{,}0005 + \frac{0{,}00115}{2} = 0{,}0016\ \text{cm}\,.$$

An kleineren Zapfen ist der Einfluß naturgemäß geringer. Z. B. wird an einem geometrisch ähnlichen von 50 mm Durchmesser und 75 mm Länge unter den gleichen Verhältnissen $f_{\max} = \frac{3}{10\,000}$ cm.

An den Halszapfen durchlaufender Wellen läßt sich die Pfeilhöhe an Hand der Biegemomentenfläche ermitteln. Bedeuten in Abb. 1121 F_1 und F_2 die Inhalte der Momentenflächen links und rechts der Zapfenmitte in cmkg · cm und ξ_1 und ξ_2 ihre Schwerpunktabstände von den Zapfenenden in cm, so sind die Durchbiegungen δ_1 und δ_2 der elastischen Linie im Abstande $\frac{l}{2}$ von der Zapfenmitte, bezogen auf die dort angelegte Tangente nach Formel (32) dargestellt durch:

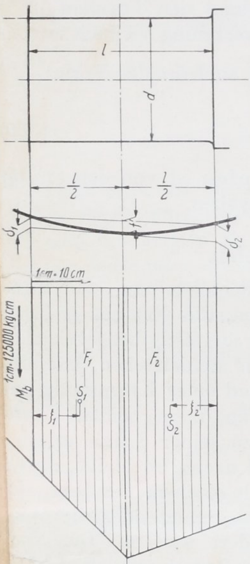

Abb. 1121. Zur Ermittlung der Pfeilhöhe der elastischen Linie an Halszapfen.

$$\delta_1 = \alpha \int \frac{M_x \cdot x \cdot d_x}{J_x} \approx \frac{20 \cdot \alpha \cdot F_1 \cdot \xi_1}{d^4} \quad \text{und} \quad \delta_2 = \frac{20 \cdot \alpha \cdot F_2 \cdot \xi_2}{d^4}\,.$$

Die gesuchte Pfeilhöhe ist dann:

$$f' = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \frac{10\,\alpha}{d^4}\,(F_1 \xi_1 + F_2 \xi_2)\,. \tag{353}$$

Näherungsweise darf man die Trapeze der Momentenflächen durch Rechtecke ersetzen, deren Höhe dem Moment in der Zapfenmitte entspricht. Dann werden die Abstände ξ_1 und $\xi_2 = \frac{l}{4}$ und:

$$f' = \frac{10 \cdot \alpha}{d^4}\left(M_b \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + M_b \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}\right) = \frac{2{,}5\,\alpha \cdot M_b \cdot l^2}{d^4}$$

oder unter Ersatz von $\frac{10\,M_b}{d^3}$ durch σ_b:

$$f' = 0{,}25\,\alpha \cdot \sigma_b \cdot \frac{l^2}{d}\,. \tag{354}$$

Der Vergleich der Formeln (351) und (354) zeigt, daß die größte Pfeilhöhe am Halszapfen gleicher Abmessung und gleicher Beanspruchung rund 3,1mal größer ist als am Stirnzapfen. Die bekannte Neigung von Mittellagern zum Heißlaufen ist eben auf die bedeutenderen Formänderungen zurückzuführen, die höhere Kantenpressung oder stärkere Verminderung der Schmierschichtdicke in der Lagermitte zur Folge haben. Sie läßt sich, wie Formel (354) lehrt, in erster Linie durch Verringern der Lagerlänge oder durch Niedrighalten der Biegespannung bekämpfen.

Zahlenbeispiel 11. Würde der Zapfen des Beispiels 10 von $d = 20$ cm Durchmesser und $l = 30$ cm Länge als Halszapfen einem größten Biegemoment von 549800 cmkg, entsprechend $\sigma_b = 700$ kg/cm², ausgesetzt sein und würde die Momentenfläche nach Abb. 1121 verlaufen, so ergibt sich folgender Rechnungsgang: Da der Längenmaßstab 1 : 10 ist und 1 cm² $125000 \cdot 10 = 1250000$ cmkg · cm bedeutet, die Flächen $F_1 = 5{,}48$ und $F_2 = 6{,}18$ cm² Inhalt haben und die Abstände $\xi_1 = 0{,}77$, $\xi_2 = 0{,}76$ cm sind, so wird:

$$f' = \frac{10\,\alpha}{d^4}(F_1\xi_1 + F_2\xi_2) = \frac{10}{2\,200\,000 \cdot 20^4}(5{,}48 \cdot 1\,250\,000 \cdot 0{,}77 \cdot 10 + 6{,}18 \cdot 1\,250\,000 \cdot 0{,}76 \cdot 10)$$

$$= \frac{3{,}21}{1000}\,\text{cm}.$$

Die Näherungsformel (354) liefert:

$$f' = 0{,}25\,\alpha \cdot \sigma_b \frac{l^2}{d} = \frac{0{,}25 \cdot 700 \cdot 30^2}{2\,200\,000 \cdot 20} = \frac{3{,}58}{1000}\,\text{cm},$$

einen etwas zu großen Wert, wie im vorliegenden Falle nach der Form der Momentenfläche in Abb. 1121 zu erwarten war.

6. Berechnung von Zapfen mit Laufsitzpassung, die unter flüssiger Reibung laufen.

Den Weg, den zweckmäßigsten Durchmesser d bei Laufsitzpassung zu berechnen, wenn die Belastung P und die Umdrehzahl n in der Minute gegeben sind, hat Falz zuerst angegeben [XV, 20]. Die folgenden Formeln sind auf dem gleichen Wege, aber so aufgestellt, daß sie ein beliebiges Verhältnis $\frac{l}{d}$ und die Ausstrahlfähigkeit der Lager anschaulich an Hand der Abb. 1118 zu berücksichtigen gestatten. Das mittlere Spiel der Laufsitzpassung unter Einschluß der gewöhnlichen Beträge für die Oberflächenrauhigkeit läßt sich genügend genau durch die empirische Gleichung:

$$s = \frac{\sqrt[3{,}3]{d}}{224} = \frac{d^{0{,}303}}{224} \tag{355}$$

ausdrücken. In Formel (340) eingeführt, wird:

$$\frac{4\,\eta \cdot n \cdot d^2}{183\,600\,p} \cdot \frac{l}{d + l} = s_{best}^2 = \frac{d^{0{,}606}}{224^2}$$

oder die Zähigkeit:

$$\eta = 0{,}915\,\frac{p}{n \cdot d^{1{,}4}}\left(\frac{d}{l} + 1\right). \tag{356}$$

Bei dieser Zähigkeit stellt sich eine Stärke der Ölschicht an der engsten Stelle:

$$h = \frac{s}{4} = \frac{d^{0{,}303}}{900} \tag{357}$$

ein. Dadurch wird auch der schmierungstechnisch günstigste Wert für d nach Formel (345) gewährleistet, wie man sich überzeugt, wenn man η und h dort einsetzt.

Durch Einführung von η in die Formel (343) entsteht eine Beziehung zur Reibungsarbeit oder Ausstrahlfähigkeit an Lagern mit Laufsitzpassung:

$$a_{R_0} = 8{,}75 \cdot 10^{-7} \frac{P \cdot n}{d^{1,7}} \cdot \frac{d}{l} \sqrt{4\left(\frac{d}{l}\right)^2 + 5\frac{d}{l} + 1},$$

aus der die Formel:

$$d = C \sqrt[1,7]{\frac{P \cdot n}{a_{R_0}}} \tag{358}$$

zur Bestimmung von d folgt, wenn P und n gegeben sind, die zulässige spezifische Reibungsarbeit a_{R_0} aber, je nach der Bauart der Lager an Abb. 1118 geschätzt wird. C ist eine nur vom Verhältnis $\frac{l}{d}$ abhängige Größe:

$$C = 2{,}73 \cdot 10^{-4} \sqrt[1,7]{\frac{d}{l} \sqrt{4\left(\frac{d}{l}\right)^2 + 5\frac{d}{l} + 1}}, \tag{359}$$

deren Werte Zusammenstellung 122 zu entnehmen sind.

Zusammenstellung 122. **Werte von C und $C^{1,7}$ in der Falzschen Formel für verschiedene Verhältnisse $\frac{l}{d}$.**

$\frac{l}{d}$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
C	$8{,}97 \cdot 10^{-4}$	$7{,}67 \cdot 10^{-4}$	$6{,}70 \cdot 10^{-4}$	$5{,}97 \cdot 10^{-4}$	$5{,}38 \cdot 10^{-4}$	$4{,}91 \cdot 10^{-4}$	$4{,}52 \cdot 10^{-4}$
$\log C$	0,9528 — 4	0,8845 — 4	0,8263 — 4	0,7756 — 4	0,7310 — 4	0,6910 — 4	0,6550 — 4
$C^{1,7}$	$6{,}60 \cdot 10^{-6}$	$5{,}06 \cdot 10^{-6}$	$4{,}02 \cdot 10^{-6}$	$3{,}30 \cdot 10^{-6}$	$2{,}77 \cdot 10^{-6}$	$2{,}37 \cdot 10^{-6}$	$2{,}06 \cdot 10^{-6}$
$\log C^{1,7}$	0,8197 — 6	0,7037 — 6	0,6047 — 6	0,5186 — 6	0,4426 — 6	0,3747 — 6	0,3135 — 6

$\frac{l}{d}$	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0
C	$4{,}19 \cdot 10^{-4}$	$3{,}91 \cdot 10^{-4}$	$3{,}65 \cdot 10^{-4}$	$3{,}46 \cdot 10^{-4}$	$3{,}11 \cdot 10^{-4}$	$2{,}83 \cdot 10^{-4}$
$\log C$	0,6222 — 4	0,5922 — 4	0,5621 — 4	0,5388 — 4	0,4926 — 4	0,4519 — 4
$C^{1,7}$	$1{,}81 \cdot 10^{-6}$	$1{,}61 \cdot 10^{-6}$	$1{,}43 \cdot 10^{-6}$	$1{,}31 \cdot 10^{-6}$	$1{,}09 \cdot 10^{-6}$	$9{,}29 \cdot 10^{-7}$
$\log C^{1,7}$	0,2577 — 6	0,2067 — 6	0,1556 — 6	0,1159 — 6	0,0375 — 6	0,9682 — 7

Zahlenbeispiel 12. Der Zapfen und das Lager des Beispiels 8 für $P = 5000$ kg Dauerbelastung bei $n = 250$ Umdr./min. sollen zwecks Ausführung nach den Normen der Laufsitzpassung (Einheitsbohrung) berechnet werden. Das Lager werde nach Bauart *II* der Abb. 1118 durchgebildet.

Um den Einfluß verschiedener Zapfenlängen im Verhältnis zum Durchmesser zu zeigen, sei die Rechnung für $\frac{l}{d} = 1$, 1,5 und 2 durchgeführt. Nach Kurve *II* der Abb. 1118 ist die Ausstrahlfähigkeit a_{R_0} bei 20° Luft- und 70° Öltemperatur am Lager zu 0,029 mkg/sek · cm² anzunehmen. Man ermittelt zunächst den Zapfendurchmesser nach Formel (358) und an Hand des angenommenen Verhältnisses $\frac{l}{d}$ die Zapfenlänge l. Das Ausführungsmaß des Durchmessers wird man der Reihe der Normaldurchmesser der DIN 3 anpassen, die Länge aber auf 5 oder 10 mm abrunden, wenn man sich nicht sogar an die Normalzahlen der DIN 323 halten will. Die unten eingetragene Beanspruchung auf Biegung σ_b gilt für Stirnzapfen. Wichtig ist die Berechnung der Zähigkeit η, um das für den Betrieb bei 70° zweckmäßige Öl an Hand der Zusammenstellung 114 aussuchen zu können. Schließlich dient Formel (344) zur Bestimmung des Reibungsverlustes in Pferdestärken. Die Werte s, h, μ_1 und v sind nur der besseren Veranschaulichung wegen ermittelt worden. Neben denjenigen von s nach Formel (355) sind eingeklammert die an den Normen der Laufsitzfeinpassung nach dem Einheitsbohrungssystem ermittelten

Spiele eingetragen. p, μ_1 und v müssen, in Formel (322) eingesetzt, angenähert den angenommenen Wert a_{R_0} ergeben und können so zur Nachprüfung der Rechnung dienen.

Zapfen Nr.	1	2	3
$l:d$	1	1,5	2
$d = C\sqrt[1,7]{\frac{P\cdot n}{a_{R_0}}} = C\sqrt[1,7]{\frac{5000\cdot 250}{0,029}}$	16,67	11,3	8,77 cm
l	16,67	16,95	17,54 cm
Gewählt $d\cdot l$	16,5 · 16,5	11,5 · 17,0	9,0 · 17,5 cm
Flächendruck $p = \frac{P}{d\cdot l}$	18,4	25,6	31,8 kg/cm²
Beanspruchung auf Biegung $\sigma_b = \frac{5\,P\cdot l}{d^3}$	91,8	279	600 kg/cm²
Zähigkeit $\eta = 0{,}915\,\frac{p}{n\cdot d^{1,4}}\left(\frac{d}{l}+1\right)$	0,00266	0,00514	0,00800 $\frac{\text{kg}\cdot\text{sek}}{\text{m}^2}$
Ölsorte nach Zusammenstellung 114	NÖ 12	NÖ 16	NÖ 24
Reibungsleistung $N = \frac{a_{R_0}\cdot\pi\cdot d\cdot l}{75}$	0,331	0,238	0,175
Mittleres Spiel $s = \frac{\sqrt[3,3]{d}}{224}$	0,0104 (0,01)	0,00936 (0,009)	0,00869 (0,009) cm
Schmierschichtstärke $h = \frac{s}{4}$	0,0026	0,00234	0,00217 cm
Zapfenreibungszahl $\mu_1 = 0{,}0055\sqrt{\frac{\eta\cdot n}{p}\left(4\,\frac{d}{l}+1\right)}$ . .	0,00234	0,00237	0,00241
Umfanggeschwindigkeit $v = \frac{\pi\cdot n\cdot d}{6000}$	2,16	1,51	1,18 m/sek

Beim Vergleich mit dem im Beispiel 5 nach der bisherigen Art berechneten Zapfen zeigt sich, daß die hydrodynamische Theorie im vorliegenden Falle auf wesentlich günstigere und namentlich kürzere Zapfen führt.

Ob aber die Rechnungsergebnisse praktisch anwendbar sind, ist von der Höhe der Biegebeanspruchung σ_b, der Zähigkeit η der zu benutzenden Öle und den Formänderungen, denen die Zapfen durch die Belastung ausgesetzt sind, abhängig. Während die Werte von σ_b in allen drei Fällen an Stirnzapfen zulässig sind, ergeben sich für den zweiten und namentlich den dritten Zapfen Öle, die sehr zähflüssig sind und die unter Druck zugeführt werden müßten, nicht aber für Tropf- oder selbsttätige Schmierung geeignet wären. Schmierringe würden in solchem Öl, wenn es nach längerem Stillstande kalt geworden ist, zu großen Widerstand finden und versagen. Will man etwas leichtflüssigere Öle verwenden, so bietet die Formel (339), die Möglichkeit, die Wirkung nachzurechnen, wie am Beispiel 9 auf Seite 663 gezeigt ist. Verwendet man am Zapfen 2 ein Öl von etwa den Eigenschaften des Normalöles 8 der Zusammenstellung 114, so ergibt sich eine Beharrungstemperatur von 62°. Die Schmierschichtstärke sinkt aber bei der zugehörigen Zähigkeit $\eta = 0{,}00305\,\frac{\text{kg}\cdot\text{sek}}{\text{m}^2}$ auf 0,00142 cm und damit auch die Sicherheit gegen den Eintritt halbflüssiger Reibung.

Etwas vorteilhafter werden die Verhältnisse, wenn man das günstigste Spiel nach der Formel (340):

$$s_{best} = 0{,}00467\,d\sqrt{\frac{\eta\cdot n}{p}\cdot\frac{l}{d+l}} = 0{,}00467\cdot 11{,}5\sqrt{\frac{0{,}00305\cdot 250}{25{,}6}\cdot\frac{17}{11{,}5+17}} = 0{,}00716\ \text{cm}$$

zugrunde legt, da dann die Schmierschichtstärke an der engsten Stelle auf $\frac{s_{best}}{4} = 0{,}0018$ cm steigt. Die genaue Einhaltung dieses sehr kleinen Spiels ist aber nicht leicht.

Sorgfältig sind die Formänderungen an den längeren Zapfen zu beachten. Wird Zapfen Nr. 3 als Stirnzapfen verwandt, so wird die größte Pfeilhöhe nach Formel (351):

$$f_{max} = 0{,}08\,\alpha\cdot\sigma_b\cdot\frac{l^2}{d} = \frac{0{,}08\cdot 600\cdot 17{,}5^2}{2\,200\,000\cdot 9} = \frac{7{,}42}{10\,000}\ \text{cm},$$

die unter Berücksichtigung der Unebenheiten der Zapfen- und Schalenoberfläche zu einer Mindeststärke der Ölschicht nach Formel (352)

$$h_{\min} = \delta_1 + \delta_2 + \frac{f_{\max}}{2} = 0{,}0005 + 0{,}0005 + 0{,}00037 = 0{,}0014 \text{ cm}$$

führt. Die oben berechnete Stärke von 0,00217 cm bietet jedoch bei zähem Zylinderöl noch völlig ausreichende Sicherheit gegen Störungen.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn der Zapfen mitten in einer Welle sitzt und vergleichweise derselben Biegebeanspruchung $\sigma_b = 600$ kg/cm² ausgesetzt ist. Dann wird die Pfeilhöhe nach der Näherungsformel (354) 3,1 mal so groß, erreicht also 0,0026 cm und verlangt eine Mindeststärke der Ölschicht von 0,0023 cm, während nach der Berechnung nur 0,00217 cm vorhanden sind, so daß flüssige Reibung nicht möglich ist. Der Zapfen dürfte also nur an Stellen, wo mäßige Biegemomente auftreten, verwendet werden.

Dagegen ist der Zapfen mit $\frac{l}{d} = 1{,}5$ auch als Halszapfen brauchbar. Er bietet etwa die gleiche Sicherheit, wie der Stirnzapfen mit $\frac{l}{d} = 2$, da die Pfeilhöhe $f_{\max} = 0{,}00189$ und die Größen $h_{\min} = 0{,}00195$ cm, $h - h_{\min}$ aber 0,00039 gegenüber 0,00035 cm am Stirnzapfen werden.

Bei der Verwendung des dünnflüssigeren Normalöls 8 reicht die Schmierschicht selbst bei genauer Einhaltung des günstigsten Spiels nicht mehr aus. Die Benutzung eines genügend dickflüssigen Öles ist also geboten.

Berechnungsbeispiel 13. Die Wärme- und Reibungsverhältnisse an dem Zapfen einer Turbodynamo von 120 mm Durchmesser und 300 mm Länge für 1800 kg Belastung bei $n = 3000$ Umdr./min. sind zu untersuchen. Als Öl soll Normalöl 3 verwendet und eine Temperatur des Lagers von 50° zugelassen werden.

Ölzähigkeit bei 50° nach Zusammenstellung 114:

$$\eta = 0{,}0152\, i = 0{,}0152 \cdot 0{,}119 = 0{,}00181 \; \frac{\text{kg} \cdot \text{sek}}{\text{m}^2}.$$

Bei $\frac{d}{l} = \frac{120}{300} = 0{,}4$ wird die spezifische Reibungsarbeit nach Formel (343):

$$a_{R_0} = 9{,}16 \cdot 10^{-7} \sqrt{\eta \cdot P \cdot n^3 \left[4\left(\frac{d}{l}\right)^2 + \frac{d}{l}\right]}$$

$$= 9{,}16 \cdot 10^{-7} \sqrt{0{,}00181 \cdot 1800 \cdot 3000^3 \left[4 \cdot 0{,}4^2 + 0{,}4\right]} = 0{,}277 \; \frac{\text{m} \cdot \text{kg}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2}.$$

Sie ist so groß, daß sie keinesfalls durch Ausstrahlung abgegeben werden kann; das Lager muß künstlich gekühlt werden. Ein Lager von gedrängter Bauart kann nach Kurve *II* der Abb. 1118, bei 50° 0,015, ein solches von schwerer Bauart nach Kurve *III* 0,029 mkg/sek · cm² ausstrahlen. Legt man der weiteren Rechnung vorsichtigerweise den niedrigeren Wert zugrunde, so müssen am ganzen Lager nach Formel (348):

$$Q = \frac{(a_{R_0} - a_s)\,\pi \cdot d \cdot l}{427} = \frac{(0{,}277 - 0{,}015) \cdot \pi \cdot 12 \cdot 30}{427} = 0{,}694 \; \frac{\text{kcal}}{\text{sek}}$$

künstlich abgeleitet werden.

Die dazu nötige Kühlwassermenge beträgt bei $t_1 = 20°$ Zufluß- und $t_2 = 40°$ Abflußtemperatur nach (349):

$$q = \frac{\gamma \cdot Q}{c\,(t_2 - t_1)} = \frac{1 \cdot 0{,}694}{1\,(40 - 20)} = 0{,}035 \text{ kg/sek} \quad \text{oder} \quad 2{,}1 \text{ l/min}.$$

An Öl mit $\gamma = 0{,}9$ und $c = 0{,}4$ würden:

$$q' = \frac{q}{\gamma \cdot c} = \frac{2{,}1}{0{,}9 \cdot 0{,}4} = 5{,}8 \text{ l/min}$$

notwendig sein.

Vgl. hierzu das Turbodynamolager, Abb. 1500, bei dem das Kühlwasser durch die hohlgegossenen Lagerschalen geleitet wird. Zur Schmierung dient bei der dargestellten älteren Ausführung noch Preßöl; es wird nahe der tiefsten Stelle durch eine breite Nut zugeführt, umspült den Zapfen und fließt oben im Scheitel ab, um in einem Ölkühler zurückgekühlt und wieder in Umlauf gesetzt zu werden. Flächendruck am Zapfen:

$$p = \frac{P}{d \cdot l} = \frac{1800}{12 \cdot 30} = 5 \text{ kg/cm}^2 .$$

Beanspruchung auf Biegung im Falle der Verwendung als Stirnzapfen:

$$\sigma_b = \frac{5\,P \cdot l}{d^3} = \frac{5 \cdot 1800 \cdot 30}{12^3} = 156 \text{ kg/cm}^2 .$$

Das schmiertechnisch günstigste Zapfenspiel ist nach (340):

$$s_{best} = 0{,}00467 \cdot d \sqrt{\frac{\eta \cdot n}{p} \cdot \frac{l}{d+l}} = 0{,}00467 \cdot 12 \sqrt{\frac{0{,}00181 \cdot 3000}{5} \cdot \frac{30}{12+30}} = 0{,}0494 \text{ cm} .$$

Zieht man den üblichen Betrag für die Oberflächenrauhigkeit von 0,002 cm ab, so bleibt als zweckmäßiger Unterschied des Bohrungs- und Zapfendurchmessers 0,0474 cm, ein Spiel, das beträchtlich größer ist als das mittlere der Laufsitzpassung von nur 0,007 cm. Auch die Schmierschichtstärke $h = \frac{s}{4} = 0{,}012$ cm gewährleistet flüssige Reibung mit großer Sicherheit.

C. Berechnung kegeliger und kugeliger Tragzapfen.

Diese seltener benutzten Formen werden kaum für wichtige Zapfen unter flüssiger Reibung verwendet werden. Deshalb ist im folgenden nur auf ihre Berechnung für halbflüssige Reibung ähnlich den zylindrischen Tragzapfen im Abschnitt IV A eingegangen.

An kegeligen Tragzapfen, Abb. 1079, besteht der Unterschied nur darin, daß bei der Bestimmung des Auflagedrucks und der Reibungsarbeit der mittlere Durchmesser zugrunde gelegt wird. Bei der Berechnung auf Biegung könnte die Mittelkraft etwas näher am dickeren Ende angenommen werden; meist wird jedoch als Hebelarm, an dem die Auflagekraft wirkt, $\frac{l}{2}$ eingesetzt.

An kugeligen Tragzapfen, Abb. 1122, darf die Auflagebreite b annähernd zu 0,7 d gewählt, der mittlere Durchmesser zu 0,9 d geschätzt und dann der mittlere Flächendruck p aus:

$$p = \frac{P}{f'} = \frac{P}{0{,}9 \cdot b \cdot d} = \frac{P}{0{,}63\,d^2} \qquad (360)$$

bestimmt werden. p sollte, wenn möglich niedriger sein, wie auf S. 644 angegeben ist.

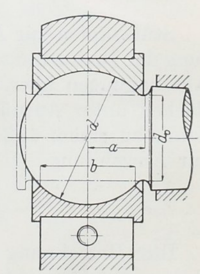

Abb. 1122. Kugelzapfen.

Die verhältnismäßig geringe Länge der Lagerschalen führt zu großen Zapfendurchmessern und Lagermaßen, die schwierige Herstellung der kugeligen Flächen an den Zapfen und in den Schalen macht die Ausführung teuer; Umstände, die begründen, daß man kugelige Zapfen tunlichst vermeiden soll. Sie finden sich als Kurbelzapfen an Sägegattern und an Lokomotiven, um geringe seitliche Ausweichungen oder Schwingungen der Schubstangen zu ermöglichen.

Die Beanspruchung des Halses auf Biegung verlangt ein Widerstandsmoment:

$$W \approx \frac{d_0^3}{10} = \frac{P \cdot a}{k_b} ,$$