

feitigen und des achtseitigen Thurm-Fachwerkes in dieser Hinsicht besprochen werden.

119.
Vierseitige
Thurm-
pyramide.

δ) Vierseitige Thurmpyramide. Die vier Fußpunkte derselben seien A, B, C, D (Fig. 350); einer davon, etwa A , sei fest, ein zweiter, B , sei in einer Linie, etwa XX , die beiden anderen in der Ebene $ABCD$ beweglich. Die Auflagerdrücke enthalten also $n = 3 + 2 + 1 + 1 = 7$ Unbekannte. Geht man wieder vom Tetraëder aus und legt das Dreieck ABC zu Grunde, wobei A mit 3, B mit 2 und C zunächst mit einer Auflagerbedingung, so sind alle drei Punkte in der Ebene genau durch die Auflagerbedingungen und die Längen der Dreiecksseiten bestimmt, wenn nicht etwa die Auflagerbahn XX des Punktes B senkrecht zu AB gerichtet ist. Der Punkt I in einer über ABC liegenden Ebene wird nunmehr durch die drei Stäbe AI, BI und CI geometrisch bestimmt. Das erhaltene Tetraëder ist geometrisch und statisch bestimmt. Verbindet man nunmehr den vierten Fußpunkt D mit 2 Punkten, etwa mit B und C , in derselben Ebene, so wird auch D geometrisch fest gelegt, da dieser Punkt in der Ebene ABC bleiben muß; der dritte Stab, welcher eigentlich erforderlich wäre, um C fest zu legen, wird durch die Auflagerbedingung bei D ersetzt. Daraus folgt, daß, wie die Spannung dieses (nicht angeordneten) Stabes stets bekannt wäre, wenn D kein Auflagerpunkt wäre, so auch der Auflagerdruck bei D stets nach statischen Gesetzen ermittelt werden kann. D ist als in der Ebene $ABCD$ beweglich zu construieren. (Man kann auch, wie dies mehrfach geschehen ist, für die Untersuchung den Auflagerdruck durch einen gedachten Stab ersetzen). Für das Fachwerk mit 4 Stützpunkten nach Fig. 350 ist also die Zahl der Auflagerunbekannten $n = 7$, die Zahl der Stäbe s und die Zahl der Knotenpunkte k ; also muß für den Fall statischer Bestimmtheit

$$s + 7 = 3k \quad \text{oder} \quad s = 3k - 7$$

sein. Man kann nun Knotenpunkt 2 mit I, B, D , Punkt 3 mit $2, D, C$ und Punkt 4 mit $3, C, I$ verbinden und erhält so das in Fig. 350 gezeichnete Fachwerk, welches geometrisch und auch statisch bestimmt ist.

Bislang war angenommen, daß ein Stab BC vorhanden sei; dieser Stab ist unter Umständen un bequem und für die Benutzung störend. Es fragt sich, ob derselbe fortgelassen werden, bezw. unter welchen Bedingungen dies geschehen kann. Stab BC war angeordnet, um Punkt C in der Auflagerebene geometrisch fest zu legen. Man kann dies auch dadurch erreichen, daß man für C , wie für B , eine Auflagerbahn, etwa YY (Fig. 351) vor-

Fig. 350.

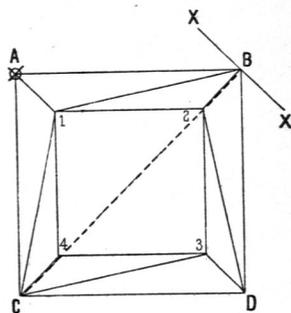
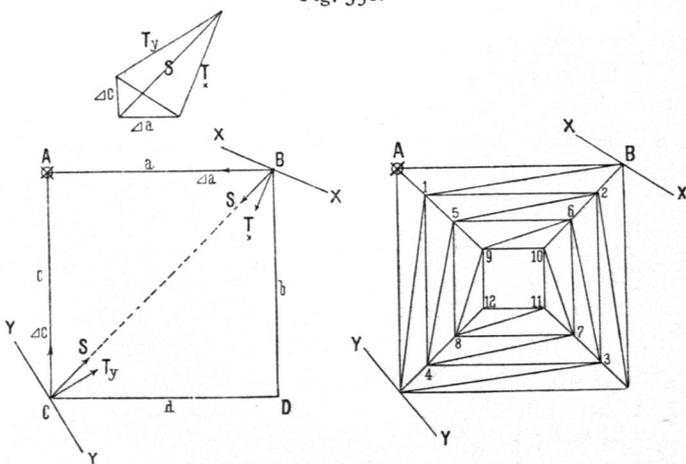


Fig. 351.



schreibt; dieselbe kann beliebige Richtung haben; nur darf sie nicht senkrecht zu AC stehen, da sonst eine sehr kleine Bewegung des Punktes C , nämlich eine Drehung um A , möglich wäre. Da nun Punkt C ohne Stab BC fest gelegt ist, so kann dieser fortfallen; das Fachwerk wird also nunmehr durch Fortlassen des Stabes BC nicht labil.

Man kann sich dies auch dadurch klar machen, daßs man zunächst den Stab BC als vorhanden annimmt und nun untersucht, ob die Spannung desselben durch das wirklich vorhandene Fachwerk, d. h. nach Fortnahme von BC geleistet werden kann. Ist die Spannung des Stabes BC gleich S_c , so zerlegt sich S_c in zwei Seitenkräfte, deren eine senkrecht zur Auflagerbahn YY , deren andere in die Linie AC fällt; in die Linie CD kann kein Theil der Kraft fallen, weil er in D (dort ist ein bewegliches Flächenlager) nicht aufgenommen werden kann. Eben so wird die in B angreifende Kraft $S_B = S_c$ durch den Gegenruck der Auflagerbahn XX und die hinzukommende Spannung in BA geleistet. Die beiden Kräfte Δa in AB und Δc in CA werden dann im festen Punkte A in das Mauerwerk geleitet. Der Thurm mit vier Fußpunkten kann also als statisch bestimmtes Fachwerk hergestellt werden, wenn ein Auflager fest, ein zweites Auflager in der Auflagerebene, die beiden weiteren Auflager in geraden Linien beweglich gemacht sind und an diese vier Auflagerpunkte weitere Punkte nach der allgemeinen Regel (je 1 Knotenpunkt und 3 Stäbe) angeschlossen werden. Grundbedingung für die Stabzahl ist hier, weil $n = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$ ist,

$$s = 3k - 8.$$

Eine solche Anordnung zeigt Fig. 351, bei welcher die Spitze des Thurmhelms nicht gezeichnet ist. Durch diese wird, weil hier ein Knotenpunkt mit 4 Stäben hinzukommt,

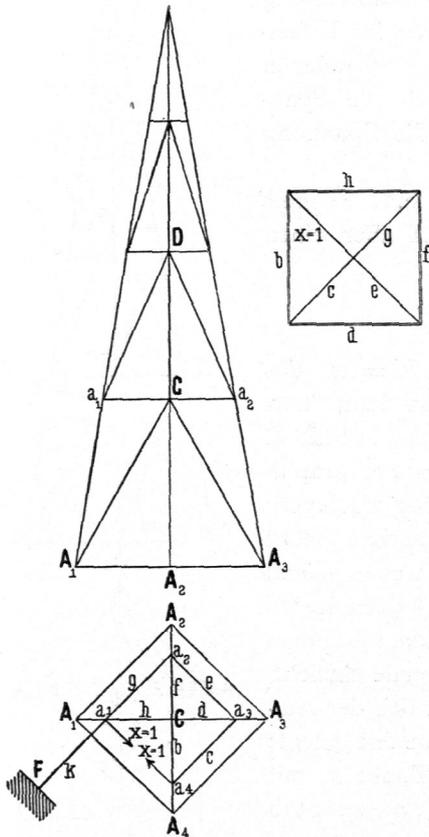
das Fachwerk statisch unbestimmt; es bleibt aber geometrisch bestimmt.

Es liegt nahe, die vierseitige Thurmpyramide dadurch zu versteifen, daßs man in die beiden lothrechten Diagonalebene Dreieckverband legt. Diese Anordnung ist von den Alten vielfach ausgeführt und hat sich bewährt; außer dieser Versteifung ist aber noch eine solche in den Seitenebenen anzubringen, worauf bereits *Moller*¹⁷⁶⁾ aufmerksam gemacht hat. Fig. 352 zeigt den Grundriß und den Diagonalschnitt eines solchen Thurmdaches; die Helmstange reicht bis zum zweiten Stockwerk hinab; die Diagonalebene sollen durch die Schrägstäbe A_1C , A_2C , A_3C , A_4C , a_1D , a_2D , a_3D , a_4D , u. f. w. versteift werden.

Um die Stabilität des Fachwerkes zu untersuchen, bauen wir von den vier

¹⁷⁶⁾ A. a. O., Heft 4.

Fig. 352.



festen Auflagern A_1, A_2, A_3, A_4 aus auf. Zunächst wird C mit allen vier Auflagern durch Stäbe verbunden; es genügte schon drei Stäbe, um C im Raume geometrisch fest zu legen; der vierte Stab macht die Construction statisch unbestimmt, aber nicht labil. Nun verbinden wir a_1 durch Stäbe mit A_1C und einem außerhalb gelegenen festen Punkte F ; wegen des letzteren, des sog. Ersatzstabes k , ist noch eine weitere Untersuchung vorzunehmen. Ferner wird verbunden: Punkt a_2 mit A_2, a_1, C , Punkt a_3 mit A_3, a_2, C und Punkt a_4 mit A_4, a_3, C . Es fragt sich nun, ob an Stelle des Ersatzstabes a_1F der Stab a_1a_4 treten kann, d. h. ob mit Stab a_1a_4 , aber ohne Stab k die Construction stabil ist. Zieht man den Stab a_1a_4 ein, so möge bei beliebiger äußerer Belastung darin die Spannung X entstehen, welche bei a_4 und bei a_1 je in der Stabrichtung wirkt. Wäre der Stab nicht vorhanden, so würde im Ersatzstab die Spannung \mathfrak{S}_{0k} auftreten; die außerdem vorhandenen Kräfte X im Stabe a_1a_4 erzeugen im Ersatzstab die Spannung $X S_k'$; es ist also im Ganzen im Stabe k die Spannung

$$S_k = \mathfrak{S}_{0k} + X S_k'.$$

Soll ohne Ersatzstab k die Construction stabil sein, so muß für beliebige Belastung S_k gleich Null sein, X aber einen reellen Werth haben; d. h. es muß

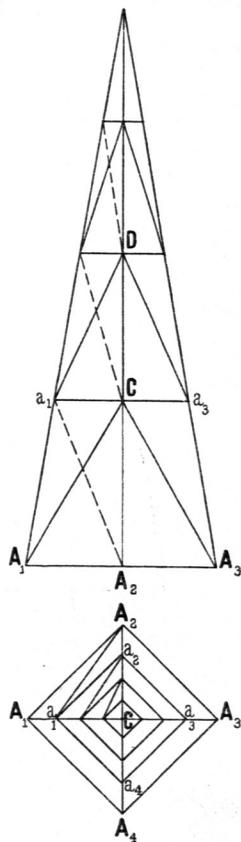
$$0 = \mathfrak{S}_{0k} + X S_k' \quad \text{und} \quad X = - \frac{\mathfrak{S}_{0k}}{S_k'}$$

sein. Ergibt sich $S_k' = 0$, so ist nur bei $X = \infty$ das Gleichgewicht möglich, d. h. das Gleichgewicht ist dann überhaupt nicht möglich. S_k' ist die Spannung, welche in Stab K durch $X = 1$ erzeugt wird. Man sieht leicht aus der graphischen Zerlegung in Fig. 352, daß $S_k' = 0$, das Fachwerk also nicht brauchbar ist. Ist aber dieser Unterbau nicht stabil, so ist es auch der weitere Aufbau eben so wenig, zumal sich die Anordnung in den oberen Gefchoßen wiederholt¹⁷⁷.

Zweifellos brauchbar wird aber die Construction, wenn man in eines der trapezförmigen Seitenfelder eine Diagonale einzieht, z. B. die Diagonale a_1A_2 (Fig. 353). Dann ergibt sich der Aufbau wie folgt: Zunächst wird C wie oben im Raume fest gelegt; nun wird verbunden: Punkt a_1 mit A_1, A_2, C , Punkt a_2 mit A_2, a_1, C , Punkt a_3 mit A_3, a_2, C und Punkt a_4 mit A_4, a_3, a_1 . Stab a_4C wird gewöhnlich zugefügt; er ist überzählig, macht aber die Construction nicht labil. In gleicher Weise kann man weiter gehen. Die Helmstange dient nur dazu, die Bildung der Knotenpunkte C, D u. f. w. zu erleichtern. In der Ansicht (Fig. 353) sind die in den Seitenfeldern liegenden Diagonalen punktiert. — Gewöhnlich wird man statt einer Diagonale Andreaskreuz oder gekreuzte Zugdiagonalen, und zwar nicht nur in einem Felde, sondern in mehreren Feldern anordnen.

Dieses Fachwerk ist nicht so klar, wie das zuerst (Fig. 351) besprochene, bei welchem nur in den Seitenebenen Stäbe liegen; die praktische Construction ist aber sehr bequem: Doppelzangen in jeder Balkenlage verbinden die diagonal einander gegenüberstehenden Gratparren und nehmen die Helmstange zwischen sich; gegen diese setzen

Fig. 353.



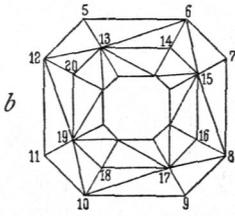
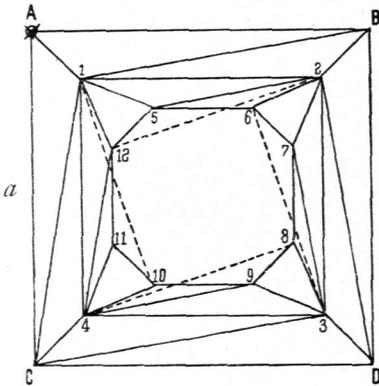
¹⁷⁷) Das vorstehend angewendete Verfahren, welches stets zum Ziele führt und in der Folge noch mehrfach benutzt werden wird, ist angegeben in: MÜLLER-Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. 2. Aufl. Leipzig 1893. S. 4 u. 5.

sich die in den sich kreuzenden Mittelebenen angeordneten Diagonalen. Die herumlaufenden Balken dienen als Pfetten; in diese setzen sich die Andreaskreuze.

e) Achtseitige Thurmpyramide. Bei dieser sind verschiedene Arten des Aufbaues möglich. Man kann die 8 Grate bis zu den Auflagern hinabführen; man kann ferner 4 Grate zu der Auflagerebene hinabgehen lassen und die 4 zwischen diesen liegenden Grate auf Giebelspitzen setzen lassen (Fig. 356); endlich kann man von den 8 Graten im untersten Stockwerk je 2 zu einer Ecke des Grundquadrats zusammenführen. Bei den letzten beiden Anordnungen sind nur 4 Auflager vorhanden; die Ueberführung vom Viereck in das Achteck ist besonders zu untersuchen.

121.
Achtseitige
Thurm-
pyramide
mit 4 Lager-
punkten

Fig. 354.



a) Achtseitige Thurmpyramide mit vier Lagerpunkten. Fig. 354 zeigt diese Lösung, wobei der größeren Allgemeinheit halber unter die achtseitige Pyramide noch eine vierseitige, ein Stockwerk hohe, abgestumpfte Pyramide ($ABCD1234$) gefetzt ist. Dieselbe kann man auch fortlassen; alsdann sind $1, 2, 3, 4$ die Auflager. Da dieses untere Stockwerk nach Vorstehendem geometrisch und statisch bestimmt ist, so bleibt auch das Ganze eben so, falls der hinzukommende, oberhalb 1234 befindliche Theil geometrisch und statisch bestimmt ist. Die zu führende Untersuchung gilt also auch für den in 1234 aufgelagerten Thurm. Das achtseitige Thurmdach soll nunmehr aus dem Unterbau dadurch entwickelt werden, daß jeder neue Knotenpunkt durch drei Stäbe an drei bereits vorhandene Knotenpunkte angeschlossen wird, welche mit ihm nicht in derselben Ebene liegen dürfen. Punkt 12 ist mit $1, 4, 2$ verbunden. Die Stäbe 121 und 124 liegen in begrenzenden Ebenen, 122 aber nicht. Ferner sind angegliedert: Punkt 5 an $12, 1, 2$, Punkt 6 an $2, 5, 3$ und so weiter. Die weiteren Stockwerke ergeben sich einfach; sie sind der größeren

Deutlichkeit halber in einer besonderen Abbildung (Fig. 354b) gezeichnet. Bei diesen liegen alle Stäbe in den begrenzenden Ebenen; das Innere bleibt frei. In Fig. 354a sind 16 Knotenpunkte und 40 Stäbe, also thatfächlich

$$s = 3k - 8.$$

Die vier in Fig. 354a punktirten Stäbe ($122, 63, 84, 101$), welche weder in Seitenflächen der Pyramiden noch in wagrechten Ebenen liegen, können un bequem sein; man kann sie vermeiden. Man lege das tieffliegende Achteck (56789101112) gegen den unteren vierseitigen Theil geometrisch fest, indem man die Punkte $1, 2, 3, 4$ als feste Punkte betrachtet (was sie ja sind) und die 8 hinzukommenden Knotenpunkte durch $3 \cdot 8 = 24$ Stäbe anschließt. Dabei sind verschiedene Stabanordnungen möglich; eine solche ist in Fig. 355 angegeben. Man verbinde zunächst Punkt 5 durch Stab 51 und 52 mit bezw. 1 und 2 ; alsdann fehlt zunächst für die Bestimmung von 5 noch ein Stab, was vorläufig bemerkt werde.