IV.

Vorschriften, um aus der geocentrischen Länge und Breite eines Himmelskörpers, dem Orte seines Knotens, der Neigung der Bahn, der Länge der Sonne und ihrem Abstande von der Erde abzuleiten: des Himmelskörpers *heliocentrische Länge in der Bahn, wahren Abstand von der Sonne* und *wahren Abstand von der Erde.* Von Dr. Gauss in Braunschweig.

(Vergl. Art. 74 der Theoria motus.)

Bedeutung der Zeichen.

Gegeben:

- Ω Länge des aufsteigenden Knotens.
- V Länge der Sonne.
- α Geocentrische Länge des Himmelskörpers.
- β Geocentrische Breite.
- i Neigung der Bahn.
- R Abstand der Sonne von der Erde.

Gesucht:

- v heliocentrische Länge des Himmelskörpers in der Bahn.
- r Wahrer Abstand von der Sonne.
- Δ Wahrer Abstand von der Erde.
- A, B, C etc. } Hülfswinkel.

I.

$$1^0 \quad \frac{\cos(V-\Omega)\operatorname{tang}\beta}{\sin(V-\alpha)} = \operatorname{tang} A; \qquad \frac{\sin A \operatorname{tang}(V-\Omega)}{\sin(A+i)} = \operatorname{tang}(v-\Omega)$$

$$2^0 \quad \frac{\sin(V-\alpha)\operatorname{tang} i}{\cos(V-\Omega)} = \operatorname{tang} B; \qquad \frac{\cos B \sin\beta \operatorname{tang}(V-\Omega)}{\sin(B+\beta)\cos i} = \operatorname{tang}(v-\Omega)$$

$$3^0 \quad \frac{\sin(V-\Omega)\operatorname{tang}\beta}{\sin(V-\alpha)\operatorname{tang} i} = \operatorname{tang} C; \qquad \frac{\sin C \sin(V-\Omega)}{\sin(C+V-\Omega)\cos i} = \operatorname{tang}(v-\Omega)$$

$$4^0 \quad \frac{\cos(V-\Omega)\operatorname{tang}\beta}{\cos(V-\alpha)\operatorname{tang} i} = \operatorname{tang} D; \qquad \frac{\sin D \operatorname{tang}(V-\Omega)\cos(V-\alpha)}{\sin(D+V-\alpha)\cos i} = \operatorname{tang}(v-\Omega)$$

Anmerkung. Da Winkel, die um 180^0 verschieden sind, einerlei Tangenten haben, so ist hier noch eine Vorschrift nöthig, wie die durch ihre Tangenten bestimmten Winkel A, B, C etc. und $v-\Omega$ angesetzt werden müssen. Den Winkel $v-\Omega$ hat man allezeit zwischen 0 und 180^0 anzunehmen, wenn β positiv (nördlich) ist; ist hingegen die Breite südlich, so muss $v-\Omega$ zwischen 180^0 und 360^0, oder, welches einerlei ist, zwischen -180^0 und 0 fallen. Ist $\beta = 0$, so ist der Himmelskörper in einem Knoten, und man wird nie zweifelhaft sein, ob es Ω oder $\mho$ ist. Der analytischen Vollständigkeit wegen bemerke ich, dass in diesem Falle der Himmelskörper in $\left\{\begin{matrix}\Omega\\ \mho\end{matrix}\right\}$ ist, nachdem $\sin(V-\alpha)$ und $\sin(\alpha-\Omega)$ $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{entgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ Zeichen haben. Die Hülfswinkel A, B, C, D aber, so wie die folgenden E, F etc. kann man in dieser Hinsicht ganz nach Belieben ansetzen; wobei es sich jedoch von selbst versteht, dass man auf die Zeichen $\pm$ gehörige Rücksicht nehme; ich habe sie in folgendem Beispiele immer zwischen -90^0 und $+90^0$ genommen.

II.

$$5^0 \quad \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin(\alpha-\Omega)} = \operatorname{tang} E; \qquad \frac{\sin E \sin(V-\Omega)}{\sin(i-E)\sin(v-\Omega)} = \frac{r}{R}$$

$$6^0 \quad \operatorname{tang} i \sin(\alpha-\Omega) = \operatorname{tang} F; \qquad \frac{\cos F \sin(V-\Omega)\sin\beta}{\sin(F-\beta)\sin(v-\Omega)\cos i} = \frac{r}{R}$$

$$7^0 \quad \cos i \operatorname{tang}(v-\Omega) = \operatorname{tang} G; \qquad \frac{\cos G \sin(V-\alpha)}{\sin(\alpha-\Omega-G)\cos(v-\Omega)} = \frac{r}{R}$$

$$8^0\quad \frac{\operatorname{tang}(\alpha-☊)}{\cos i}=\operatorname{tang}H;\qquad \frac{\sin H\sin(V-\alpha)}{\sin(H-(v-☊)\sin(\alpha-☊)}=\frac{r}{R}$$

$$9^0\quad \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin i\cos(\alpha-☊)}=\operatorname{tang}I;\qquad \frac{\sin I\cos(V-☊)}{\sin(v-☊-I)}=\frac{r}{R}$$

$$10^0\quad \sin i\cos(\alpha-☊)\operatorname{tang}(v-☊)=\operatorname{tang}K;\qquad \frac{\cos K\sin\beta\cos(V-☊)}{\sin(K-\beta)\cos(v-☊)}=\frac{r}{R}$$

$$11^0\quad \frac{\sin C\sin(V-\alpha)}{\cos(C+V-\alpha)\operatorname{tang}(V-☊)\cos i}=\operatorname{tang}L;\qquad \frac{\sin L}{\sin(v-☊-L)\cos(V-☊)}=\frac{r}{R}$$

$$12^0\quad \frac{\sin D\cos(V-☊)}{\cos(D+V-☊)\cos i}=\operatorname{tang}M;\qquad \frac{\sin M}{\sin(v-☊-M)\cos(V-☊)}=\frac{r}{R}$$

III.

$$13^0\quad \frac{r\sin(v-☊)\sin i}{\sin\beta}=\varDelta$$

$$14^0\quad \frac{R\sin E\sin(V-☊)\sin i}{\sin(i-E)\sin\beta}=\frac{R\cos E\sin(V-☊)\sin i}{\sin(i-E)\sin(\alpha-☊)\cos\beta}=\varDelta$$

$$15^0\quad \frac{R\cos F\sin(V-☊)\operatorname{tang}i}{\sin(F-\beta)}=\frac{R\sin F\sin(V-☊)\sin(\alpha-☊)}{\sin(F-\beta)}=\varDelta$$

Und so lassen sich noch mehrere Ausdrücke für $\varDelta$ aus der Verbindung von 13^0 mit allen Formeln II ableiten.

Beispiel.

$☊ = 80^0\ 59'\ 12''07$
$V = 281\ \ 1\ \ 34{,}99$
$\alpha = 53\ \ 23\ \ 2{,}46$
$i = 10\ \ 37\ \ 9{,}55$
$\log\operatorname{tang}\beta = 8{,}734\,9698\,n$
$\log R = 9{,}992\,6158$
$\beta = -3^0\ 6'\ 33''561$
negativ oder südlich

Folglich $V-☊ = 200^0\ 2'\ 22''92$
$V-\alpha = 227\ \ 38\ \ 32{,}53$
$\alpha-☊ = -27\ \ 36\ \ 9{,}61$

1^0.

$\log\operatorname{tang}\beta$	$8{,}734\,9698\,n$
$\log\cos(V-☊)$	$9{,}972\,8762\,n$
Compl. $\log\sin(V-\alpha)$	$0{,}131\,3827\,n$
$\log\operatorname{tang}A$	$8{,}839\,2287\,n$
$\log\sin A$	$8{,}838\,1955\,n$
$\log\operatorname{tang}(V-☊)$	$9{,}562\,0014$
Compl. $\log\sin(A+i)$	$0{,}935\,0608$
$\log\operatorname{tang}(v-☊)$	$9{,}335\,2577$

Folglich
$A = -3^0\ 57'\ 2''\ 136$
$A+i = 6\ \ 40\ \ 7{,}414$
Ferner
$v-☊ = -12^0\ 12'\ 37''\ 942$
also $v = 68^0\ 46'\ 34''\ 128$

2^0.

$\log\sin(V-\alpha)$	$9{,}868\,6173\,n$
$\log\operatorname{tang}i$	$9{,}272\,9872$
Compl. $\log\cos(V-☊)$.	$0{,}027\,1238\,n$
$\log\operatorname{tang}B$	$9{,}168\,7283$
$\log\cos B$	$9{,}995\,3277$
$\log\sin\beta$	$8{,}734\,3300\,n$
$\log\operatorname{tang}(V-☊)$	$9{,}562\,0014$
Compl. $\log\sin(B+\beta)$.	$1{,}036\,0961$
Compl. $\log\cos i$	$0{,}007\,5025$
$\log\operatorname{tang}v(-☊)$	$9{,}335\,2577\,n$ wie oben.

Folglich
$B = 8^0\ 23'\ 21''\ 888$
$B+\beta = 5\ \ 16\ \ 48{,}327$

3^0.

$\log\sin(V-☊)$	$9{,}534\,8776\,n$
$\log\operatorname{tang}\beta$	$8{,}734\,9698\,n$
Compl. $\log\sin(V-\alpha)$.	$0{,}131\,3827\,n$
Compl. $\log\operatorname{tang}i$	$0{,}727\,0128$
$\log\operatorname{tang}C$	$9{,}128\,2429\,n$
$\log\sin C$	$9{,}124\,3583\,n$
$\log\sin(V-☊)$	$9{,}534\,8776\,n$
Cpl. $\log\sin(C+V-☊)$	$0{,}668\,5194\,n$
Compl. $\log\cos i$	$0{,}007\,5025$
$\log\operatorname{tang}(v-☊)$	$9{,}335\,2578\,n$ wie vorhin.

Also
$C = -7^0\ 39'\ 7''\ 056$
$C+V-☊ = 192\ \ 23\ \ 15{,}864$

4°.

log cos (V — ☊)	9,972 8762 n
log tang β	8,734 9698 n
Compl. log cos (V — α) .	0,171 4973 n
Compl. log tang i	0,727 0128
log tang D	9,606 3561 n
log sin D	9,573 5295 n
log tang (V — ☊)	9,562 0014
log cos (V — α)	9,828 5027 n
Cpl. log sin ($D + V - \alpha$)	0,363 7217 n
Compl. log cos i	0,007 5025
log tang (v — ☊)	9,335 2578 n wie oben.

Also

$$D = -\ 21^0\,59'\,51''182$$
$$D + V - \alpha = \ 205\ \ 38\ \ 41,348$$

5°.

log tang β	8,734 9698 n
log sin (α — ☊)	9,665 8973 n
log tang E	9,069 0725
log sin E	9,066 1081 n
log sin (V — ☊)	9,534 8776 n
Compl. log sin ($i - E$) .	1,163 7907
Compl. log sin (v — ☊) .	0,674 6802 n
$\log \frac{r}{R}$	0,439 4566

Also

$$E = 6^0\,41'\,12''412$$
$$i - E = 3\ \ 55\ \ 57,138$$

Ferner

$$\log r = \log R + \log \frac{r}{R} = 0{,}432\,0724$$

6°.

log tang i	9,272 9872
log sin (α — ☊)	9,665 8973 n
log tang F.	8,938 8845 n
log cos F	9,998 3674
log sin β	8,734 3300 n
log sin (V — ☊)	9,534 8776 n
Compl. log sin ($F - \beta$) .	1,489 6990 n
Compl. log sin (v — ☊) .	0,674 6802 n
Compl. log cos i	0,007 5025 n
$\log \frac{r}{R}$	0,439 4567 { Nahe wie vorher.

Daher

$$F = -4^0\,57'\,53''955$$
$$F - \beta = -1\ \ 51'\,20,394$$

7°.

log cos i	9,992 4975
log tang (v — ☊)	9,335 2577 n
log tang G	9,327 7552 n
log cos G	9,990 3922
log sin (V — α)	9,868 6173 n
Cpl. log sin (α — ☊ — G)	0,570 5092 n
Compl. log cos (v — ☊) .	0,009 9379
$\log \frac{r}{R}$	0,439 4566 wie oben.

Also

$$G = -12^0\ \ 0'\,27''118$$
$$\alpha - ☊ - G = -15\ \ 35\ \ 42,492$$

8°.

log tang (α — ☊)	9,718 3744 n
log cos i.	9,992 4975
log tang H	9,725 8769 n
log sin H	9,671 7672 n
log sin (V — α)	9,868 6173 n
Cpl. log sin (H — (v — ☊))	0,564 9695 n
Compl. log sin (α — ☊) .	0,334 1027 n
$\log \frac{r}{R}$	0,439 4567 wie vorher.

Folglich

$$H = -28^0\ \ 0'\,39''879$$
$$H - (v - ☊) = -15\ \ 48'\ \ 1,937$$

9°.

log tang β	8,734 9698 n
Compl. log sin i	0,734 5153
Compl. log cos (α — ☊) .	0,052 4771
log tang I	9,521 9622 n
log sin I	9,499 1749 n
log cos (V — ☊)	9,972 8762 n
Cpl. log sin (v — ☊ — I)	0,967 4054
$\log \frac{r}{R}$	0,439 4565 wie vorhin.

Hieraus

$$I = -18^0\,23'\,55''334$$
$$v - ☊ - I = 6\ \ 11\ \ 17,392$$

10°.

In der Nähe des Knotens weniger scharf.

log sin i	9,265 4847
log cos (α — ☊)	9,947 5229
log tang (v — ☊)	9,335 2577 n
log tang K	8,548 2653 n
log cos K	9,999 7290
log sin β	8,734 3300 n
log cos (V — ☊)	9,972 8762 n
Compl. log sin (K — β) .	1,722 5836
Compl. log cos (v — ☊) .	0,009 9379
log $\frac{r}{R}$	0,439 4567 wie vorhin.

Also

$$K = -2^0\, 1'\, 26''344$$
$$K-\beta = 1\;\; 5\;\; 7,217$$

12°.

$$D + V - ☊ = 178^0\, 2'\, 31''738$$

log sin D	9,573 5295 n
log cos (V — ☊)	9,972 8762 n
Cpl. log cos ($D + V$ — ☊)	0,000 2536 n
Compl. log cos i	0,007 5025
log tang ($M = L$) . . .	9,554 1618 n

Wie oben in 11°.

Der übrige Theil der Rechnung eben so wie dort.

11°.

$$C + V - \alpha = 219^0\, 59'\, 25''474$$

log sin C	9,124 3583 n
log sin (V — α)	9,868 6173 n
Cpl. log cos ($C + V$ — α)	0,115 6850 n
Compl. log tang (V — ☊)	0,437 9986
Compl. log cos i	0,007 5025
log tang L	9,554 1617 n
log sin L	9,527 9439 n
Comp. log sin (v — ☊ — L)	0,884 3888
Compl. log cos (V — ☊)	0,027 1238 n
log $\frac{r}{R}$	0,439 4565 wie zuvor.

Also

$$L = -19^0\, 42'\, 32''533$$
$$v - ☊ - L = 7\;\; 29\;\; 54,591$$

13°.

log r	0,432 0724
log sin (v — ☊)	9,325 3198 n
log sin i	9,265 4847
Compl. log sin β	1,265 6700 n
log Δ = ...	0,288 5469

V.

Zusatz zu Art. 90 und 100 der Theoria motus corporum coelestium.

(Vergleiche Berliner Jahrbuch für 1814).

Zur Auflösung der wichtigen Aufgabe, aus zweien radiis vectoribus und dem eingeschlossenen Winkel die elliptischen oder hyperbolischen Elemente zu bestimmen, habe ich mich mit grossem Vortheil einer Hülfsgrösse ξ bei der Ellipse, ζ bei der Hyperbel bedient, für welche ich jenem Werke eine Tafel angehängt habe. Berechnet ist diese Tafel nach einem dort angeführten continuirten Bruche, dessen vollständige Ableitung aber dort nicht gegeben ist, und zu dessen theoretischer Entwickelung, die mit andern Untersuchungen zusammenhängt, ich bisher noch nicht Gelegenheit gefunden habe. Es wird daher Manchem lieb sein, hier einen andern Weg angezeigt zu finden, auf welchem man jene Hülfsgrösse ebenso bequem hätte berechnen können.

Wir haben (Art. 90)

$$\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{10}{9X} = \frac{xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9}}{X}$$

Der Zähler des Bruchs verwandelt sich leicht, wenn man für x die dort gegebene Reihe substituirt, in

$$\frac{8}{105}xx(1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{3.8.10}{9.11}xx + \frac{4.8.10.12}{9.11.13}x^3 + \frac{5.8.10.12.14}{9.11.13.15}x^4 + \text{etc.})$$

Setzt man also die Reihe

$$1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{3.8.10}{9.11}xx + \text{etc.} = A,$$

so wird

$$xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9} = \frac{8}{105}Axx$$

$$X = \frac{\frac{4}{3}(1 - \frac{12}{175}Axx)}{1 - \frac{6}{5}x}$$

$$\xi = \frac{\frac{2}{35}Axx(1 - \frac{6}{5}x)}{1 - \frac{12}{175}Axx},$$

nach welcher Formel man ξ immer bequem und sicher berechnen kann. Für ζ (Art. 100) braucht man nur z statt x zu setzen.

Ich bemerke nur noch, dass man A noch bequemer nach folgender Formel berechnen kann

$$A = (1 - x)^{-\frac{3}{2}}(1 + \frac{1.5}{2.9}x + \frac{1.3.5.7}{2.4.9.11}xx + \frac{1.3.5.5.7.9}{2.4.6.9.11.13}x^3 + \text{etc.})$$

allein die Ableitung dieser Reihe aus der vorigen beruht auf Gründen, die hier nicht angeführt werden können.

VI.

Auszug aus Zach's Monatlicher Correspondenz, Band 28, p. 501 folgende.

Beobachtungen des zweiten Cometen vom Jahre 1813, angestellt auf der Sternwarte zu Göttingen, nebst einigen Bemerkungen über die Berechnung parabolischer Bahnen, von Carl Friedrich Gauss (vorgelegt der königl. Gesellschaft der Wissenschaften am 10. September 1813). Aus dem Lateinischen übersetzt.

Den Cometen, welchen mein würdiger und geliebter College, Herr Professor Harding, am dritten April dieses Jahres im Sternbilde des Poniatowskyschen Stieres entdeckte, beobachtete ich selbst seit dem 7ten April auf hiesiger Sternwarte. Folgendes sind die Bestimmungen, welche ich mit dem Kreis-Mikrometer des zehnfüssigen Teleskops erhielt:

1813	Mittlere Zeit in Göttingen.	Scheinbare gerade Aufsteigung.	Scheinbare Abweichung.
April 7	$13^h\ 12^m\ 2^s$	$271^0\ 7'\ 19''3$	$5^0\ 34'\ 36''7$ N.
9	13 35 40	270 10 33,5	4 11 3,4
11	13 17 43	269 1 19,9	2 33 0,7
14	13 7 36	266 44 5,5	0 33 0,8 S.
21	14 23 0	256 39 19,3	12 57 56,0