(125)

Vierter Abschnitt.

Relationen zwischen mehren Orten im Raume.

110.

Die in diesem Abschnitte zu betrachtenden Relationen sind von dem Naturell der Bahn unabhängig und stützen sich lediglich auf die Voraussetzung, dass alle Punkte der Bahn in derselben Ebene mit der Sonne liegen. Wir wollen hier nur die einfachsten dieser Relationen berühren, und die complicirteren und specielleren zum zweiten Buche aufsparen.

Die Lage der Bahnebene ist durch zwei Orte des Himmelskörpers im Raume völlig bestimmt, sobald nur diese Orte nicht in derselben geraden Linie mit der Sonne liegen. Da sich nun der Ort eines Punktes im Raume vorzüglich auf zwei Arten angeben lässt, so bieten sich daraus zwei Aufgaben zur Lösung dar.

Setzen wir zuerst voraus, dass zwei Orte durch die mit resp. λ, λ', β, β' bezeichneten heliocentrischen Längen und Breiten gegeben seien; die Abstände von der Sonne gehen nicht in die Rechnung ein. Wenn dann die Länge des aufsteigenden Knotens mit Ω, und die Neigung der Bahn gegen die Ecliptik mit i bezeichnet wird, so ist

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega)$$
$$\operatorname{tang}\beta' = \operatorname{tang} i \sin(\lambda' - \Omega).$$

Die Bestimmung der Unbekannten Ω und $\operatorname{tang} i$ wird hier auf die in Art. 78 II. betrachtete Aufgabe zurückgeführt. Man hat daher nach Anleitung der ersten Auflösung

$$\operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega) = \operatorname{tang}\beta$$
$$\operatorname{tang} i \cos(\lambda - \Omega) = \frac{\operatorname{tang}\beta' - \operatorname{tang}\beta\cos(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda' - \lambda)}.$$

Zufolge der dritten Auflösung aber findet sich der Ω durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}\lambda'-\Omega\right)=\frac{\sin(\beta'+\beta)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)}{\sin(\beta'-\beta)},$$

und noch etwas bequemer, wenn die Winkel β, β' unmittelbar, nicht aber durch die Logarithmen der Tangenten gegeben sind. Zur Bestimmung von i muss man jedoch auf eine der Formeln

$$\operatorname{tang} i=\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin(\lambda-\Omega)}=\frac{\operatorname{tang}\beta'}{\sin(\lambda'-\Omega)}$$

recurriren. Im Uebrigen ist die Zweideutigkeit bei Bestimmung des Winkels $\lambda-\Omega$, oder $\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\lambda'-\Omega$ durch die Tangente so zu entscheiden, dass $\operatorname{tang} i$ positiv oder negativ wird, je nachdem die auf die Ecliptik projicirte Bewegung eine directe oder rückläufige ist. — Diese Ungewissheit kann daher nur dann gehoben werden, falls es bekannt, von welcher Seite her der Himmelskörper vom (126) ersten zum zweiten Orte gelangt ist; wenn man dies daher nicht wüsste, so würde es in der That unmöglich sein, den aufsteigenden Knoten vom niedersteigenden zu unterscheiden.

Nach Auffindung der Winkel Ω und i werden die Argumente der Breite u, u' durch die Formeln

$$\operatorname{tang} u=\frac{\operatorname{tang}(\lambda-\Omega)}{\cos i},\quad \operatorname{tang} u'=\frac{\operatorname{tang}(\lambda'-\Omega)}{\cos i}$$

ermittelt, die im ersten oder zweiten Halbzirkel zu nehmen, je nachdem die entsprechenden Breiten nördlich oder südlich sind. Diesen Formeln füge ich noch die folgenden hinzu, von denen man, falls es beliebt, die eine oder andere zur Prüfung der Rechnung brauchen kann:

$$\cos u=\cos\beta\cos(\lambda-\Omega),\qquad \cos u'=\cos\beta'\cos(\lambda'-\Omega);$$

$$\sin u=\frac{\sin\beta}{\sin i},\qquad \sin u'=\frac{\sin\beta'}{\sin i};$$

$$\sin(u'+u)=\frac{\sin(\lambda+\lambda'-2\Omega)\cos\beta\cos\beta'}{\cos i},\qquad \sin(u'-u)=\frac{\sin(\lambda'-\lambda)\cos\beta\cos\beta'}{\cos i}.$$

111.

Nehmen wir zweitens an, dass die beiden Orte gegeben seien durch ihre Abstände von drei, in der Sonne unter rechten Winkeln sich schneidenden

Ebenen. Bezeichnen wir diese Abstände für den ersten Ort mit x, y, z, für den zweiten mit x', y', z', und setzen voraus, dass die dritte Ebene die Ecliptik selbst sei, dass aber die positiven Pole der ersten und zweiten Ebene in der Länge N und $90^\circ + N$ liegen. Dann wird nach Art. 53, wenn man die beiden Radien Vectoren mit r, r' bezeichnet, sein:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos u\cos(N - \Omega) + r\sin u\sin(N - \Omega)\cos i \\
y &= r\sin u\cos(N - \Omega)\cos i - r\cos u\sin(N - \Omega) \\
z &= r\sin u\sin i \\
x' &= r'\cos u'\cos(N - \Omega) + r'\sin u'\sin(N - \Omega)\cos i \\
y' &= r'\sin u'\cos(N - \Omega)\cos i - r'\cos u'\sin(N - \Omega) \\
z' &= r'\sin u'\sin i.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
zy' - yz' &= rr'\sin(u' - u)\sin(N - \Omega)\sin i \\
xz' - zx' &= rr'\sin(u' - u)\cos(N - \Omega)\sin i \\
xy' - yx' &= rr'\sin(u' - u)\cos i.
\end{aligned}
$$

Aus Combination der ersten mit der zweiten Formel bekommt man $N - \Omega$, und $rr'\sin(u' - u)\sin i$. Hieraus und aus der dritten Formel erhält man i, und $rr'\sin(u' - u)$.

Insofern der Ort, dem die Coordinaten x', y', z' entsprechen, als der der Zeit nach spätere angenommen wird, muss u' grösser als u werden. Falls
(127) es deshalb überher bekannt ist, ob der zwischen dem ersten und zweiten Orte um die Sonne beschriebene Winkel kleiner oder grösser ist, als zwei rechte, so müssen $rr'\sin(u' - u)\sin i$ und $rr'\sin(u' - u)$ im ersten Falle positive, im zweiten negative Grössen sein. Es lässt sich daher dann $N - \Omega$ ohne Zweideutigkeit bestimmen, und zugleich aus dem Zeichen der Grösse $xy' - yx'$ entscheiden, ob die Bewegung recht- oder rückläufig ist. Umgekehrt lässt sich, falls die Richtung der Bewegung bekannt ist, aus dem Zeichen der Grösse $xy' - yx'$ entscheiden, ob $u' - u$ kleiner oder grösser als 180° genommen werden muss. Wenn aber sowohl die Richtung der Bewegung, als die Beschaffenheit des um die Sonne beschriebenen Winkels gänzlich unbekannt ist, so kann man offenbar zwischen dem aufsteigenden und niedersteigenden Knoten nicht unterscheiden.

Uebrigens sieht man leicht, dass, sowie $\cos i$ der Cosinus der Neigung der Bahnebene gegen die dritte Ebene ist, so $\sin(N - \Omega)\sin i$ und $\cos(N - \Omega)\sin i$ respective die Cosinus der Neigungen der Bahnebene gegen die erste und zweite Ebene sind; sowie dass $rr'\sin(u' - u)$ die doppelte Fläche des zwischen den beiden Radien Vectoren eingeschlossenen Dreiecks, und dass endlich $zy' - yz'$, $xz' - zx'$, $xy' - yx'$ die doppelte Fläche der Projectionen desselben Dreiecks auf die einzelnen Ebenen ausdrückt.

Schliesslich kann offenbar die dritte Ebene statt der Ecliptik auch jedwede andere Ebene sein, wenn nur alle Grössen, die durch ihre Beziehungen auf die Ecliptik definirt sind, ebenso auf diese dritte beliebige Ebene bezogen werden.

112.

Es seien x'', y'', z'' die Coordinaten eines dritten Orts, u'' dessen Argument der Breite, r'' der Radius Vector. — Dabei sollen die Grössen $r'r''\sin(u'' - u')$, $rr''\sin(u'' - u)$, $rr'\sin(u' - u)$, welche die doppelten Dreiecksflächen zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Radius Vector sind, resp. mit n, n', n'' bezeichnet werden. Man wird daher für x'', y'', z'' ähnliche Ausdrücke haben, wie die in dem vorangehenden Artikel für x, y, z und x', y', z' gegebenen, woraus sich mit Hülfe des Satzes I, Art. 78 leicht folgende Gleichungen ableiten lassen:

$$0 = nx - n'x' + n''x''$$
$$0 = ny - n'y' + n''y''$$
$$0 = nz - n'z' + n''z''.$$

Es seien nun die jenen drei Orten des Himmelskörpers entsprechenden geocentrischen Längen α, α', α'' und die geocentrischen Breiten β, β', β''; die auf die Ecliptik projicirten Abstände von der Erde δ, δ', δ''; ferner die entsprechenden heliocentrischen Längen der Erde L, L', L''; die Breiten B, B', B'', die ich nicht $= 0$ setze, sowohl um auf die Parallaxe Rücksicht nehmen, als um, falls es beliebt, statt der Ecliptik irgend eine andere Ebene wählen zu können. Endlich seien D, D', D'' die auf die Ecliptik projicirten (128)

Abstände der Erde von der Sonne. Wenn man sodann x, y, z durch L, B, D, α, β, δ ausdrückt, und in ähnlicher Weise die auf den zweiten und dritten Ort sich beziehenden Coordinaten, so nehmen die vorangehenden Gleichungen folgende Gestalt an:

[1] $0 = n(\delta\cos\alpha + D\cos L) - n'(\delta'\cos\alpha' + D'\cos L') + n''(\delta''\cos\alpha'' + D''\cos L'')$

[2] $0 = n(\delta\sin\alpha + D\sin L) - n'(\delta'\sin\alpha' + D'\sin L') + n''(\delta''\sin\alpha'' + D''\sin L'')$

[3] $0 = n(\delta\,\mathrm{tang}\,\beta + D\,\mathrm{tang}\,B) - n'(\delta'\,\mathrm{tang}\,\beta' + D'\,\mathrm{tang}\,B') + n''(\delta''\,\mathrm{tang}\,\beta'' + D''\,\mathrm{tang}\,B'')$.

Falls hier α, β, D, L, B und die analogen Grössen für die beiden übrigen Orte als bekannt angesehen, und die Gleichungen mit n, oder n', oder n'' dividirt werden, so bleiben fünf Unbekannte übrig, von denen man also zwei eliminiren, oder durch zwei beliebige die übrigen drei bestimmen kann. Auf diese Weise bahnen jene drei Gleichungen den Weg zu sehr vielen wichtigen Ableitungen, von denen ich einige der vorzüglichsten hier entwickeln will.

113.

Um nicht durch die Länge der Formeln überladen zu werden, gebrauche ich die nachfolgenden Abkürzungen. Zuerst bezeichne ich die Grösse

$$\mathrm{tang}\,\beta\sin(\alpha''-\alpha') + \mathrm{tang}\,\beta'\sin(\alpha-\alpha'') + \mathrm{tang}\,\beta''\sin(\alpha'-\alpha)$$

mit $(0.1.2)$. Wenn in jenen Ausdruck für die einem jeden geocentrischen Orte entsprechende Länge und Breite, diejenige Länge und Breite substituirt wird, welche einem jeden der drei heliocentrischen Orte der Erde entspricht, so werde ich in dem Zeichen $(0.1.2)$ die dem ersteren entsprechende Zahl mit derjenigen römischen Zahl vertauschen, welche dem zweiten entspricht. So z. B. soll das Merkzeichen $(0.1.\mathrm{I})$ die Grösse

$$\mathrm{tang}\,\beta\sin(L'-\alpha') + \mathrm{tang}\,\beta'\sin(\alpha-L') + \mathrm{tang}\,B'\sin(\alpha'-\alpha)$$

ausdrücken, und das Merkzeichen $(0.\mathrm{O}.2)$ folgende:

$$\mathrm{tang}\,\beta\sin(\alpha''-L) + \mathrm{tang}\,B\sin(\alpha-\alpha'') + \mathrm{tang}\,\beta''\sin(L-\alpha).$$

Auf ähnliche Weise verändere ich das Merkzeichen, falls in den ersten Ausdruck statt zweier geocentrischen Längen und Breiten irgend zwei heliocentrische der Erde substituirt werden. Wenn zwei Längen und Breiten in denselben Ausdruck eingehen und nur unter sich vertauscht werden, so muss man auch in dem Merkzeichen die entsprechenden Zahlen vertauschen. Dadurch wird aber der Werth selbst nicht verändert, sondern es wird nur aus dem positiven ein negativer, aus dem negativen ein positiver. So z. B. wird

$$(0\,.\,1\,.\,2) = -(0\,.\,2\,.\,1) = (1\,.\,2\,.\,0) = -(1\,.\,0\,.\,2) = (2\,.\,0\,.\,1) = -(2\,.\,1\,.\,0).$$

Alle so entstehenden Grössen lassen sich also auf folgende neunzehn zurückführen:

(0 . 1 . 2), (0 . 1 . O), (0 . 1 . I), (0 . 1 . II), (0 . O . 2), (0 . I . 2), (0 . II . 2), (129)
(O . 1 . 2), (I . 1 . 2), (II . 1 . 2), (0 . O . I), (0 . O . II), (0 . I . II), (1 . O . I), (1 . O . II), (1 . I . II), (2 . O . I), (2 . O . II), (2 . I . II), welchen als zwanzigste hinzutritt (O . I . II).

Uebrigens lässt sich leicht zeigen, dass diese einzelnen Ausdrücke, wenn man sie mit dem Producte aus den drei Cosinussen der eingehenden Breiten multiplicirt, dem sechsfachen Volum einer Pyramide gleich werden, deren Scheitel in der Sonne liegt, deren Basis aber das Dreieck ist, welches von denjenigen drei Punkten der Himmelskugel gebildet wird, die den in jenen Ausdruck eingehenden Orten entsprechen, wobei der Halbmesser der Kugel $= 1$ gesetzt wird. So oft daher diese drei Orte in demselben grössten Kreise liegen, muss der Werth des Ausdrucks $= 0$ werden. Da dies nun bei den drei heliocentrischen Orten der Erde immer Statt findet, wenn man auf die Parallaxen und die durch Störungen entstandenen Breiten der Erde keine Rücksicht nimmt, d. h. wenn man die Erde in die Ebene der Ecliptik selbst setzt, so wird unter dieser Voraussetzung stets (O . I . II) $= 0$, welche Gleichung identisch ist, falls als dritte Ebene die Ecliptik selbst genommen wird. Sobald übrigens sowohl B, als B', als $B'' = 0$, so werden alle jene Ausdrücke, mit Ausnahme des ersten, viel einfacher; denn dieselben werden vom zweiten bis zum zehnten aus je zwei Theilen zusammengesetzt sein, vom elften bis zum neunzehnten aber aus einem einzigen Gliede bestehen.

114.

Multiplicirt man die Gleichung [1] mit $\sin\alpha''\operatorname{tang}B''-\sin L''\operatorname{tang}\beta''$, die Gleichung [2] mit $\cos L''\operatorname{tang}\beta''-\cos\alpha''\operatorname{tang}B''$, die Gleichung [3] mit $\sin(L''-\alpha'')$, und addirt die Producte, so erhält man:

$$[4]\quad 0=n\left\{(0.2.\mathrm{II})\delta+(\mathrm{O}.2.\mathrm{II})D\right\}-n'\left\{(1.2.\mathrm{II})\delta'+(\mathrm{I}.2.\mathrm{II})D'\right\},$$

und auf ähnliche Weise, oder bequemer durch alleinige Vertauschung der Orte unter sich:

$$[5]\quad 0=n\left\{(0.1.\mathrm{I})\delta+(\mathrm{O}.1.\mathrm{I})D\right\}+n''\left\{(2.1.\mathrm{I})\delta''+(\mathrm{II}.1.\mathrm{I})D''\right\}$$

$$[6]\quad 0=n'\left\{(1.0.\mathrm{O})\delta'+(\mathrm{I}.0.\mathrm{O})D'\right\}-n''\left\{(2.0.\mathrm{O})\delta''+(\mathrm{II}.0.\mathrm{O})D''\right\}.$$

Wenn daher das Verhältniss der Grössen n, n' gegeben ist, so lässt sich mit Hülfe der Gleichung [4] aus δ die Grösse δ' bestimmen, oder δ aus δ', und so in ähnlicher Weise aus den Gleichungen [5] und [6]. Aus Combination der Gleichungen [4], [5] und [6] entsteht folgende:

$$[7]\quad \frac{(0.2.\mathrm{II})\delta+(\mathrm{O}.2.\mathrm{II})D}{(0.1.\mathrm{I})\delta+(\mathrm{O}.1.\mathrm{I})D}\times\frac{(1.0.\mathrm{O})\delta'+(\mathrm{I}.0.\mathrm{O})D'}{(1.2.\mathrm{II})\delta'+(\mathrm{I}.2.\mathrm{II})D'}\times\frac{(2.1.\mathrm{I})\delta''+(\mathrm{II}.1.\mathrm{I})D''}{(2.0.\mathrm{O})\delta''+(\mathrm{II}.0.\mathrm{O})D''}=-1,$$

mittelst welcher man aus zwei Abständen des Himmelskörpers von der Erde den dritten bestimmen kann. Es lässt sich aber auch zeigen, dass diese Gleichung [7] identisch, und daher zur Bestimmung eines Abstandes aus den beiden übrigen unbrauchbar werde, sobald

$$B=B'=B''=0$$

und

(130)
$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tang}\beta'\operatorname{tang}\beta''\sin(L-\alpha)\sin(L''-L')\\+&\operatorname{tang}\beta''\operatorname{tang}\beta\ \sin(L'-\alpha')\sin(L-L'')\\+&\operatorname{tang}\beta\ \operatorname{tang}\beta'\sin(L''-\alpha'')\sin(L'-L)\end{aligned}\right\}=0.$$

Von dieser Unzuträglichkeit frei ist folgende Formel, die sich leicht aus den Gleichungen [1], [2], [3] herleitet:

$$[8]\quad (0\,.\,1\,.\,2)\delta\delta'\delta'' + (\mathrm{O}\,.\,1\,.\,2)D\delta'\delta'' + (0\,.\,\mathrm{I}\,.\,2)D'\delta\delta'' + (0\,.\,1\,.\,\mathrm{II})D''\delta\delta' + (0\,.\,\mathrm{I}\,.\,\mathrm{II})D'D''\delta + (\mathrm{O}\,.\,1\,.\,\mathrm{II})DD''\delta' + (\mathrm{O}\,.\,\mathrm{I}\,.\,2)DD'\delta'' + (\mathrm{O}\,.\,\mathrm{I}\,.\,\mathrm{II})DD'D'' = 0.$$

Multiplicirt man Gleichung [1] mit $\sin\alpha' \operatorname{tang}\beta'' - \sin\alpha'' \operatorname{tang}\beta'$, die Gleichung [2] mit $\cos\alpha'' \operatorname{tang}\beta' - \cos\alpha' \operatorname{tang}\beta''$, die Gleichung [3] mit $\sin(\alpha'' - \alpha')$ und addirt die Producte, so erhält man:

$$[9]\quad 0 = n\left\{(0\,.\,1\,.\,2)\delta + (\mathrm{O}\,.\,1\,.\,2)D\right\} - n'(\mathrm{I}\,.\,1\,.\,2)D' + n''(\mathrm{II}\,.\,1\,.\,2)D''$$

und ebenso

$$[10]\quad 0 = n(0\,.\,\mathrm{O}\,.\,2)D - n'\left\{(0\,.\,1\,.\,2)\delta' + (0\,.\,\mathrm{I}\,.\,2)D'\right\} + n''(0\,.\,\mathrm{II}\,.\,2)D''$$

$$[11]\quad 0 = n(0\,.\,1\,.\,\mathrm{Q})D - n'(0\,.\,1\,.\,\mathrm{I})D' + n''\left\{(0\,.\,1\,.\,2)\delta'' + (0\,.\,1\,.\,\mathrm{II})D''\right\}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich aus dem bekannten Verhältnisse zwischen den Grössen n, n', n'' die Abstände δ, δ', δ'' bestimmen. Dieser Schluss gilt jedoch nur im Allgemeinen gesprochen und leidet eine Ausnahme, sobald $(0\,.\,1\,.\,2) = 0$ wird. Denn es lässt sich zeigen, dass in diesem Falle aus den Gleichungen [8], [9], [10] nichts anderes folgt, als die nothwendige Relation unter den Grössen n, n', n'', und zwar aus den einzelnen dreien die nämliche. Analoge Einschränkungen in Beziehung auf die Gleichungen [4], [5], [6] werden dem erfahrenen Leser sich von selbst darbieten.

Uebrigens sind alle diese hier entwickelten Schlussfolgerungen unbrauchbar, sobald die Ebene der Bahn mit der Ecliptik zusammenfällt; denn wenn β, β', β'', und B, B', B'' alle $= 0$ sind, so ist die Gleichung [3] identisch, und mithin auch alle folgenden.