Rücksicht verlangen, darüber klar zu werden, ob es überhaupt erforderlich ist, die immerhin etwas umständliche (für Anfänger aber sehr lehrreiche) Bestimmung von ΔA mittels Triebkraft- und Drehkraftdiagramm durchzuführen.

Auch wenn die Anforderungen an den Gleichförmigkeitsgrad $1/\delta$ ausschlaggebend sind, wird bei der Unsicherheit und Willkürlichkeit in der Festsetzung von δ das Verfahren mit der Verhältniszahl oft genügen, besonders wenn man sich der genauer spezifizierten Werte in dem Tolleschen Werk bedient. Vorsicht ist jedoch bei vertraglich festgesetztem δ geboten. Für Verbundmaschinen mit 90^0 Kurbelversatz ist für wechselnde Belastung und unveränderte Füllung des Niederdruckzylinders die Verhältniszahl unsicher (0,15 bis 0,3).

Einschaltung über Maßverhältnisse von Schwungrädern für ein gegebenes E.

162. Da sich in die Literatur über die Berechnung der Schwungradabmessungen manche Unklarheiten eingeschlichen haben, indem besonders der Begriff des Trägheitsradius und des Schwerkreisradius des Kranzes und des ganzen Rades nicht immer auseinander gehalten werden und auch die Reduktion der Massen auf den einen oder anderen Radius nicht immer richtig durchgeführt ist, soll hier noch einmal die Sache entwickelt werden.

Der am einfachsten zu übersehende Fall ist der, daß ein Schwungrad mit allen Maßen und dem spezifischen Gewicht des Materials gegeben ist und das sogenannte Trägheitsmoment[1]) bestimmt werden soll.

Die Wucht (lebendige Kraft) eines kleinen Massenteiles m ist $m\frac{v^2}{2}$. Bei einem rotierenden Körper stehen die v sämtlicher Massenteile in einer festen Beziehung zueinander durch die für alle gleiche Winkelgeschwindigkeit ω. Es ist $v = \omega x$, wenn x die Entfernung des Massenteils von der Drehachse ist, und somit

$$m\frac{v^2}{2} = m\frac{\omega^2}{2}x^2.$$

Die Wucht des ganzen mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Körpers ist also

$$E = \frac{\omega^2}{2}(m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \ldots\ldots) = \frac{\omega^2}{2}\Sigma m x^2, \qquad (\mathbf{8})$$

[1]) Ein guter Ersatz für den Namen Trägheitsmoment wäre Wuchtvermögen oder Drehwuchtvermögen.

oder, wenn die Beziehung von m und x in analytischer Form gegeben ist und man die Massenteile m mit d M bezeichnet:

$$E = \frac{\omega^2}{2} \int d\,M\,x^2. \tag{9}$$

Meist ist man genötigt, die Formel 8 zu benutzen und den Summenwert durch Addition kleiner endlicher Größen zu bilden.

Die Größe $\Sigma\, m\, x^2$ oder $\int d\,M\,x^2$ nennt man das Trägheitsmoment des Körpers und bezeichnet sie in der Regel mit J. Es ist also

$$E = \frac{\omega^2}{2} J. \tag{10}$$

163. Wenn der Stoff des Körpers homogen ist, kann man γ/g, die Masse der Raumeinheit, vor die Summe nehmen und erhält, wenn man den Raum der kleinen Körperteile mit ΔV oder $d\,V$ bezeichnet:

$$E = \frac{\omega^2}{2} \frac{\gamma}{g} \Sigma\, \Delta V\, x^2 \text{ und } E = \frac{\omega^2}{2} \frac{\gamma}{g} \int d\,V\,x^2.$$

Zuweilen bezeichnet man auch die Größe $\Sigma\, \Delta V\, x^2$ oder $\int d\,V\,x^2$ allein, ohne den Faktor γ/g, als Trägheitsmoment. Jedenfalls ist es zweckmäßig, die Multiplikation mit γ/g erst nach Ausführung der Summation vorzunehmen. Im Nachstehenden soll unter Trägheitsmoment stets das wirkliche Massenträgheitsmoment verstanden werden, also einschließlich des Faktors γ/g. Die Unsicherheit in der Begriffsbestimmung verschwindet übrigens bei Einführung des Trägheitsradius. Das Trägheitsmoment ist also

$$J = \frac{\gamma}{g} \Sigma\, \Delta V\, x^2 \text{ oder } J = \frac{\gamma}{g} \int d\,V\,x^2. \tag{11}$$

164. Erweitert man die Gleichung 10

$$E = \frac{\omega^2}{2} J \text{ mit } r^2, \text{ so erhält man } E = \frac{J}{r^2} \frac{(\omega\, r)^2}{2};$$

r sei hierin zunächst ein beliebiger, nach irgendwelchen Zweckmäßigkeitsrücksichten gewählter Radius. Nennt man $\frac{J}{r^2}$ die auf r reduzierte Masse und bezeichnet sie mit M_r, setzt also $\frac{J}{r^2} \equiv M_r$, so hat man, wenn man noch die Geschwindigkeit im Abstande r mit v_r und das Gewicht der Masse M_r mit G_r bezeichnet:

$$E = M_r \frac{v_r^2}{2} = \frac{G_r}{g} \frac{v_r^2}{2}. \tag{12}$$

Bei den Schwungradermittelungen wird die Masse des Kranzes vielfach auf den Abstand des Schwerpunktes des Kranzquerschnittes reduziert. Die so reduzierte Masse des Kranzes stimmt mit der wirklichen Masse nicht überein.

165. Man kann aber offenbar den Arm auch so bestimmen, daß die reduzierte Masse gerade gleich der wirklichen wird. Bezeichnet man den Arm, welcher dieser Bedingung genügt, mit ρ und nennt ihn, wie üblich, Trägheitsarm, Trägheitsradius, Trägheitshalbmesser, so wird

$$E = \frac{J}{\varrho^2}\frac{(\omega\varrho)^2}{2} = M\frac{(\omega\varrho)^2}{2} = M\frac{v_0^2}{2}; \quad \text{aus } \frac{J}{\varrho^2} = M$$

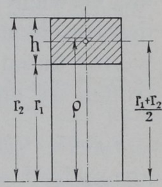
bestimmt sich der Trägheitsarm

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{M}}. \tag{13}$$

v_0 bedeutet die Geschwindigkeit im Abstande ρ.

Für gewisse einfache Körperformen hat man den Trägheitsradius analytisch als Funktion der Körpermaße berechnet und in Formelform gebracht. Indem man kompliziertere Körper aus solchen einfachen Formen sich zusammengesetzt denkt, wird die Rechnung wesentlich vereinfacht und die Zahl der Summanden in $\Sigma\Delta V r^2$ vermindert.

Fig. 65.



In der Hütte sind solche Formeln zusammengestellt. Für die Berechnung des Trägheitsmomentes von Schwungrädern ist Nr. 17 (Hütte 21. Aufl. Bd. I S. 239) von Bedeutung. Danach ist mit den Bezeichnungen in nebenstehender Figur 65 (welche von denen in der Hütte etwas abweichen)

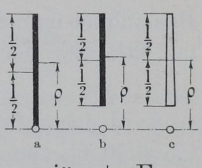
$$\rho^2 = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}h^2,$$

woraus man erkennt, daß Schwerpunktradius und Trägheitsradius nicht identisch sind.

Die Nabe wird man ähnlich wie den Kranz aus Hohlzylindern sich zusammengesetzt denken und sich bei Rundungen ohne große Fehler einen Flächenausgleich gestatten dürfen.

Für die Arme beachte man, daß für eine Gerade, welche senkrecht auf der Drehachse steht und bis an die Drehachse heranreicht, ist

Fig. 66.



$$\rho^2 = {}^1/_3 \cdot l^2 = (\sqrt{{}^1/_3} \cdot l)^2 = (0{,}5774 \cdot l)^2, \quad \rho = 0{,}5774 \cdot l,$$

also nicht unbedeutend über die Mitte hinausreicht (Fig. 66a). Für die Arme, welche nur bis zur Nabe heranreichen, ist der Abstand des Endpunktes des Trägheitsradius von der Armmitte etwas kleiner (unverjüngte Form vorausgesetzt; Fig. 66b).

Bei der üblichen Verjüngung der Arme nach dem Kranz zu (Fig. 66c) wird man für Überschlagsrechnungen den Trägheitsradius etwa bis Mitte Radarm reichend annehmen können.

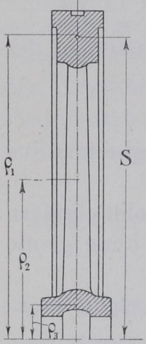
Das Trägheitsmoment des ganzen Rades ist dann

$$J = M_1\,\rho_1^2 + M_2\,\rho_2^2 + M_3\,\rho_3^2 \ldots = \frac{\gamma}{g}(V_1\,\rho_1^2 + V_2\,\rho_2^2 + V_3\,\rho_3^2 \ldots), \quad \textbf{(14)}$$

worin $M_1, M_2, M_3 \ldots$ die Massen, $V_1, V_2, V_3 \ldots$ die Volumina größerer zusammenhängender Teile, ρ_1, ρ_2, ρ_3 die zugehörigen Trägheitsradien sind.

166. Wenn ein Schwungrad für ein bestimmtes Trägheitsmoment entworfen werden soll, so bestehen für den Entwurf natürlich unendlich viele Möglichkeiten; es gibt unendlich viele sehr ungleich gestaltete Schwungräder, welche alle dasselbe Trägheitsmoment haben. Es wird darauf ankommen, die Abmessungsverhältnisse zweckmäßig zu wählen. Den größten Einfluß auf die Maßverhältnisse von Kranz und Armstern sowohl wie auf das Gewicht des Rades bei einem gegebenen Trägheitsmoment hat der Durchmesser des Rades. Über die Wahl des Durchmessers wird weiter unten noch einiges gesagt werden. Nachdem die Wahl getroffen ist, entwirft man zunächst das Kranzprofil unter der Annahme, daß der Kranz den weitaus größten Teil des Trägheitsmomentes des Rades ausmacht. Man wird den Anteil, welchen Nabe und Armstern an dem Trägheitsmoment haben, nur ganz roh schätzungsweise auf Grund von Ausführungen ähnlicher Räder annehmen können.

Fig. 67.



167. Bei Berechnung des erforderlichen Kranzquerschnittes bezieht man sich in der Regel nicht auf den Trägheitsradius des Kranzes, sondern (der bequemen Anwendung der Guldinschen Regel wegen) auf den Radius des Schwerpunktkreises des Kranzquerschnittes, der, wie oben bemerkt, etwas kleiner ist wie der Trägheitsradius des Kranzes, so daß auch für den Kranz eine (häufig unterbleibende) Reduktion vorzunehmen ist. Bezeichnet man das Gewicht des ganzen Rades mit G, das des Kranzes mit G_1, das der Arme mit G_2, das der Nabe mit G_3, womit wird

$$G = G_1 + G_2 + G_3,$$

so wird das auf den Halbmesser S des Schwerpunktkreises reduzierte Gewicht G_s sein

$$G_s = a\,G_1 + b\,G_2 + c\,G_3,$$

worin a, b, c Reduktionsfaktoren sind, welche sich aus dem Verhältnis der Trägheitsradien zu S bestimmen. Es ist (Fig. 67)

$$a = \left(\frac{\rho_1}{S}\right)^2; \quad b = \left(\frac{\rho_2}{S}\right)^2; \quad c = \left(\frac{\rho_3}{S}\right)^2.$$

Im Durchschnitt kann man setzen

$$a = 1{,}01; \quad b = 0{,}27; \quad c = 0{,}035;$$

bei Treibschwungrädern (Seil- und Riemenschwungrädern) kann genau genug $a = 1{,}00$ gesetzt werden.

168. Die Verteilung des Gesamtgewichtes auf den Kranz, die Arme und die Nabe ist ziemlich verschieden, je nachdem das Rad mehr oder weniger gedrungen gebaut ist. Die nachstehende Tabelle gibt zur Schätzung der Gewichtsverteilung Anhaltswerte.

Bauart	$\frac{S^2}{F} = \beta$	in Teilen des Gesamtgewichts: Kranz	Arme	Nabe	$\frac{G}{G_1}$	$\frac{G_s}{G}$	$\frac{G_s}{G_1}$	$\frac{G_1}{G_s} \equiv \varphi$
Gedrungen .	12	0,85	0,07	0,08	1,175	0,878	1,033	0,968
Mittel . . .	20	0,76	0,12	0,12	1,315	0,804	1,059	0,945
Luftig a . .	50	0,67	0,20	0,13	1,500	0,730	1,09	0,918
Luftig b . .	53	0,61	0,25	0,14	1,650	0,688	1,13	0,885

β bedeutet hierin das Verhältnis des Quadrates des Schwerpunktkreishalbmessers zur Querschnittsfläche des Kranzes $S^2 : F$ und kann als ein Maß der Gedrungenheit angesehen werden. Luftig werden die Räder gebaut, wenn bei nur mäßiger Tourenzahl hohe Umfangsgeschwindigkeiten verlangt werden. Die Reihe a gilt in solchen Fällen für Treibschwungräder (Riemenscheiben, Seilscheiben), die Reihe b für Massenschwungräder von Gasmaschinen, Dieselmotoren usw.

169. Die Ziffern der Spalten 2, 3, 4 stellen die Faktoren dar, mit welchen das Gesamtgewicht zu multiplizieren ist, um das Gewicht des Teils zu erhalten. Wenn v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Kranzquerschnittes ist, auf welchen alle Massen bezogen werden sollen, so ist

$$E = \frac{v^2}{2}\frac{1}{g}(a\,G_1 + b\,G_2 + c\,G_3),$$

also für Räder mittlerer Gedrungenheit

$$E = \frac{v^2}{2}\frac{1}{g}\,G\,(1{,}01 \cdot 0{,}76 + 0{,}27 \cdot 0{,}12 + 0{,}035 \cdot 0{,}12) = \frac{v^2}{2}\frac{G}{g}\,0{,}8042.$$

Da zunächst der Kranzquerschnitt für ein gefordertes E bestimmt werden soll, bezieht man sich besser auf G_1 und ersetzt G durch $(G/G_1)\,G_1$, dann wird für ein Rad mittlerer Gedrungenheit mit $G_1/G = 0{,}76$ oder $G/G_1 = 1{,}315$

$$E = \frac{v^2}{2}\frac{G_1}{g}\,1{,}315 \cdot 0{,}8042 = \frac{v^2}{2}\frac{G_1}{g}\,1{,}059;$$

$$G_1 = 0{,}945\,\frac{2g}{v^2}\,E.$$

Der Zahlenfaktor der rechten Seite, welcher in der Zusammenstellung mit φ bezeichnet ist, wird in der Literatur fast allgemein $= 0{,}9$ angegeben, bei der gleichzeitigen Angabe, daß Arme und Nabe etwa $^1/_3$ des Kranzgewichts ausmachen, d. h. $G/G_1 = 1{,}333$. Mit Einführung von φ wird allgemein

$$G_1 = \varphi \frac{2g}{v^2} E. \tag{15}$$

Die Zusammenstellung, welche sich auf die Nachrechnung einer größeren Anzahl von Rädern stützt, zeigt, daß der Anteil des Radsterns, $1 - \varphi$, an der Schwungwirkung relativ viel kleiner ist wie gewöhnlich angenommen wird und daß ein 10prozentiger Anteil erst erreicht wird bei einem G/G_1 von mehr wie 1,5.

170. Die Gleichung 15, in welcher v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Kranzquerschnittes, E die für die besondere Maschinenart und die besonderen Betriebsbedingungen als erforderlich gefundene lebendige Kraft bedeutet, hat ganz allgemeine Geltung sowohl für Dampfmaschinen wie für Gasmaschinen, gleichviel, ob das erforderliche E mit Rücksicht auf Außenschwankungen oder durch Forderung eines bestimmten periodischen Gleichförmigkeitsgrades ermittelt ist. Auch für Werkzeugmaschinen (Walzenzugmaschinen, Lochwerke, Scheren usw.) hat sie Gültigkeit. Verschieden sind nur die Grundsätze und Verfahren zur Bestimmung von E und später die Berechnung der Arme. Deshalb sollte die Formel bei der allgemeinen Behandlung der Schwungräder nicht, wie es vielfach geschieht, unmittelbar mit der Gleichung für den Ungleichförmigkeitsgrad verbunden werden durch die Gleichung $\Delta A = M v^2 \delta$.

Auch die nunmehr zu besprechenden Grundsätze für die Wahl des Raddurchmessers oder der Radgeschwindigkeit haben allgemeinere Gültigkeit.

Wahl des Raddurchmessers.

171. Für die Wahl des Raddurchmessers kommen die verschiedensten Rücksichten in Frage; zunächst ist der Durchmesser begrenzt durch die zulässig höchste Geschwindigkeit (man überschreitet bei Gußeisen nicht gern 35 m). Wenn auch das Rad um so leichter wird, je größer sein Durchmesser wird, so gibt es doch eine Grenze, bei welcher der Preis nicht mehr abnimmt, weil die Modellkosten für den großen Armstern zu groß werden, auch der an der Schwungwirkung nur wenig beteiligte Radstern relativ um so schwerer wird, je größer der Raddurchmesser gewählt wird (vgl. die Aufstellung S. 93).