VI.

Chronometrische Längenbestimmungen.

(Auszug aus einem Schreiben an *H. C. Schumacher*. *Astronomische Nachrichten*, Bd. V, S. 227. 1826.)

Es seien Θ, Θ', Θ'' etc. die Zeiten (zusammen an der Zahl n), wo der Chronometer vor den Zeiten der Oerter, deren Längen x, x', x'' etc. sind, um die Unterschiede a, a', a'' etc. voraus war. Die Angaben Θ, Θ', Θ'' etc. setze ich schon auf einen Ort reducirt voraus. Ist also der tägliche Gang des Chronometers $= u$, so würde man, wenn der Chronometer vollkommen wäre, die $n-1$ Gleichungen haben:

$$\begin{aligned} a - \Theta u - x = a' - \Theta' u - x' &= a'' - \Theta'' u - x'' \\ &= a''' - \Theta''' u - x''' = \text{etc.} \end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen zureichen, um die unbekannten Grössen u, x, x', x'' etc. zu bestimmen, wird theils eine der Grössen x, x', x'' etc. als gegeben angesehen, theils vorausgesetzt, dass wenigstens an einem Orte zweimal beobachtet ist, also zwei der Grössen x, x', x'' etc. identisch sind. Falls nun nicht mehr als zwei identisch sind, wird die Aufgabe ganz bestimmt sein. Im entgegengesetzten Fall ist sie überbestimmt; und man wird dann die unbekannten Grössen so bestimmen müssen, dass den $n-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a - a' + (\Theta' - \Theta) u - x + x' \\ 0 &= a' - a'' + (\Theta'' - \Theta') u - x' + x'' \\ 0 &= a'' - a''' + (\Theta''' - \Theta'') u - x'' + x''' \text{ etc.} \end{aligned}$$

so genau wie möglich Genüge geleistet werde, da die immer stattfindenden Unvollkommenheiten aller Chronometer nicht verstatten werden, allen genau Genüge zu leisten. Offenbar aber darf diesen

Gleichungen nicht gleiches Gewicht beigelegt werden; denn in der That drücken die Grössen

$$a - a' + (\Theta' - \Theta)\,u - x + x'$$
$$a' - a'' + (\Theta'' - \Theta')\,u - x' + x'' \text{ etc.}$$

bloss die Aggregate aller Abweichungen vom mittleren Gange aus, die der Chronometer in den Zwischenzeiten $\Theta' - \Theta$, $\Theta'' - \Theta'$ etc. gehabt hat, und wenn von einem guten Chronometer die Rede ist, dem man wirklich einen mittleren, keinen allmählich in einerlei Sinn zunehmenden Aenderungen unterworfenen Gang beilegen kann, so wird der mittlere zu befürchtende Werth eines solchen Aggregats der Quadratwurzel der Zwischenzeit proportional gesetzt werden müssen.

Demzufolge wird man also den obigen Gleichungen, indem man sie den Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate gemäss behandelt, ungleiche Gewichte, die den Zwischenzeiten $\Theta' - \Theta$, $\Theta'' - \Theta'$, $\Theta''' - \Theta''$ etc. umgekehrt proportional sind, beilegen müssen.

Die Auflösung hat dann keine Schwierigkeit, und man erhält sowohl die plausibelsten Werthe von u, x, x', x'' etc. als ihre relative Zuverlässigkeit. Hierbei mache ich noch ein paar Bemerkungen.

1) Wenn die erste und letzte Beobachtung an einerlei Orte gemacht sind, so ist der plausibelste Werth von u genau derselbe, der bloss aus der Vergleichung der beiden äussersten Beobachtungen folgt. Die Rechnung wird dann ausserordentlich einfach, da es nach einem leicht zu beweisenden Lehrsatz erlaubt ist, diesen plausibelsten Werth von u sogleich in den Gleichungen zu substituiren, oder, was dasselbe ist, die sämmtlichen beobachteten Chronometerzeiten auf die eines fingirten zu reduciren, dessen Voreilung $= 0$ wäre.

2) Hat man den Gleichungen schlechtweg die Gewichte

$$\frac{1}{\Theta' - \Theta},\ \frac{1}{\Theta'' - \Theta'} \text{ etc.}$$

beigelegt, so liegt den Gewichten, welche man für die Endresultate der Längenbestimmungen findet, als Einheit die Genauigkeit zu Grunde, die man mit d i e s e m Chronometer zu erwarten hätte, wenn man, bei bekanntem Gange, einen Längenunterschied nach einem Zeitintervall von einem Tage bestimmte (insofern die Zeiten

Θ, Θ', Θ'' etc. in Tagen ausgedrückt sind). Allein damit man die Resultate verschiedener Chronometer von ungleicher Güte vergleichen kann, muss noch ein Faktor hinzukommen, der von der Güte jedes einzelnen Chronometers abhängig ist. Diesen zu finden, setze man die Werthe der Grössen

$$\begin{aligned} &a - a' + (\Theta' - \Theta)u - x + x' \\ &a' - a'' + (\Theta'' - \Theta')u - x' + x'' \\ &a'' - a''' + (\Theta''' - \Theta'')u - x'' + x''' \text{ etc.}, \end{aligned}$$

indem man für u, x, x', x'' etc. die gefundenen plausibelsten Werthe substituirt,

$$= \lambda, \lambda', \lambda'' \text{ etc. und } \frac{\lambda^2}{\Theta' - \Theta} + \frac{\lambda'^2}{\Theta'' - \Theta'} + \frac{\lambda''^2}{\Theta''' - \Theta''} + \text{etc.} = \mathrm{S}.$$

Es sei ferner ν die Anzahl der sämmtlichen unbekannt gewesenen Grössen, und $m = \sqrt{\frac{\mathrm{S}}{n - \nu - 1}}$, dann ist jener specifische Faktor für jeden einzelnen Chronometer der Grösse $\frac{1}{m^2}$ oder $\frac{n - \nu - 1}{\mathrm{S}}$ proportional. Man kann m als die mittlere zu befürchtende Abweichung vom mittleren Gange nach einem Tage Zwischenzeit ansehen.

3) Die obigen Vorschriften gelten für einen Chronometer, der keine erhebliche progressive Abänderung seines Ganges zeigt. Wo das Gegentheil eintritt, kann man, insofern die Reihe der Beobachtungen nicht übermässig lang ist, sich damit begnügen, eine der Zeit proportionirte Abänderung des täglichen Ganges anzunehmen, so dass noch eine unbekannte Grösse mehr einzuführen ist, und die Gleichungen diese Gestalt haben:

$$\begin{aligned} 0 &= a - a' + (\Theta' - \Theta)u + (\Theta'^2 - \Theta^2)v - x + x' \\ 0 &= a' - a'' + (\Theta'' - \Theta')u + (\Theta''^2 - \Theta'^2)v - x' + x'' \\ 0 &= a'' - a''' + (\Theta''' - \Theta'')u + (\Theta'''^2 - \Theta''^2)v - x'' + x''' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

3) Dieses noch weiter zu treiben, und also noch eine unbekannte Grösse mehr und Glieder der Form $(\Theta'^3 - \Theta^3)w$ einzuführen, möchte kaum rathsam sein. Chronometer, die starke entschiedene Abänderungen des mittleren Ganges zeigen, die aber selbst wieder unregelmässig sind, würde ich, neben anderen, lieber ganz ausschliessen, da ihre Resultate theils viel weniger genau werden, theils die Genauigkeit sich viel schwerer in Zahlen zur

Vergleichung angeben lässt. Ich halte mich daher hier bei der viel verwickelteren Theorie solcher Fälle nicht auf, da in dem vorliegenden Fall das obige zureichend sein wird.

4) Was die Auflösung der Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate betrifft, so ist vielleicht nicht überflüssig in Erinnerung zu bringen, dass man in den meisten Fällen wohl thut, die unbekannten Grössen aus einem bekannten (möglichst genäherten) und einem unbekannten (also sehr kleinen) Theile zusammenzusetzen. Dieser Rath ist zwar theils sonst schon wiederholt gegeben, theils ist der Vortheil dieser Manier von selbst einleuchtend, allein es schien gut, ihn wieder in Erinnerung zu bringen, da ich sehe, dass er so häufig vergessen wird, wodurch die numerischen Rechnungen unnöthigerweise erschwert, und Fehler leichter möglich werden.

Von den 36 Chronometern habe ich folgende 5 berechnet.

			Nr. 1.	Nr. 4.	*Breguet* 3056.	*Kessels* 1252.	*Barraud* 904.
Greenwich,	Juni 30.	$3^h\ 22^m$	$-\ 8^m\ 17{,}14^s$	$+\ 1^m\ 2{,}37^s$			
	Juli 25.	2 15	10 44,39	1 32,15	$+30^m\ 59{,}75^s$	$+50^m\ 29{,}31^s$	$+48^m\ 29{,}20^s$
	„ 28.	3 13	11 0,69	1 36,96	30 50,07	50 39,69	48 40,24
	Aug. 2.	1 15	11 28,48	1 44,44	30 31,78	50 52,14	48 58,87
	„ 17.	10 28	12 59,40	2 6,24	29 35,69	51 38,66	49 57,83
	„ 25.	7 27	13 47,98	2 15,84	29 10,48	52 2,45	50 27,15
	Sept. 10.	7 40	15 24,47	2 40,36			
Helgoland,	Juli 3.	3 40	—40 8,00	—30 26,84			
	„ 22.	12 40	42 2,02	30 3,89	— 0 20,34	+18 48,39	+16 47,39
	Aug. 5.	1 48	43 18,11	29 43,35	1 10,24	19 26,77	17 37,51
	„ 11.	13 9	43 35,77	29 33,43	1 32,75	19 47,22	18 1,30
	„ 30.	19 30	45 53,08	29 7,96	2 40,67	20 47,68	19 17,03
	Sept. 6.	3 6	46 31,56	28 58,94	3 4,55	21 6,56	19 43,80
	„ 7.	8 42	46 38,72	28 56,71			
Altona,	Aug. 6.	5 55	—51 38,95	—37 55,76	— 9 28,50	+11 16,25	+ 9 28,48
	„ 9.	12 35	51 57,35	37 50,03	9 38,81	11 27,76	9 40,30
	„ 31.	9 57	54 10,33	37 21,30	10 56,68	12 35,96	11 5,92
	Sept. 4.	22 12	54 39,16	37 15,21	11 15,36	12 48,10	11 24,49
Bremen,	Aug. 13.	0 2	—47 50,65	—33 16,49	— 5 23,37	+16 5,83	+14 21,86

Ich setze die Rechnung für *Breguet* 3056 zur Probe her. Die Länge von Helgoland sei $= 0$, die von Greenwich $= -x$, die von Altona $= +y$; Bremen schliesse ich hier aus, da es ohnehin, weil nur einmal daselbst beobachtet ist, keine Controlle darbietet.

Die Zeiten rechne ich von der ersten Vergleichung der englischen Chronometer an (Greenwich, Jun. 30. $3^h\ 22^m$).

Ich finde so, indem ich einen fingirten Chronometer vom Gange = 0 substituire, dessen Stand:

Θ		
22,4	$+\ 60,20^s$	
25,0	$+1949,60$	$-x$
28,0	$+1950,87$	$-x$
32,9	$+1950,29$	$-x$
35,9	$+\ 59,08$	
37,1	$-\ 434,98$	$+y$
40,4	$-\ 433,49$	$+y$
42,4	$+\ 59,88$	
48,3	$+1949,60$	$-x$
56,2	$+1952,74$	$-x$
61,6	$+\ 61,32$	
62,2	$-\ 432,53$	$+y$
66,8	$-\ 434,98$	$+y$
68,0	$+\ 60,19$.	

Die obigen Gleichungen fallen nun hier so aus, dass x und y gar nicht gemischt sind, wodurch die weitere Rechnung noch bequemer wird. Wir haben nämlich für x vier Bestimmungen:

$$+\,1889,40^s;\ \text{Gewicht}\ \frac{1}{2,6} = 0,38$$

$$+\,1891,21\quad ,,\quad \frac{1}{3,0} = 0,33$$

$$+\,1889,72\quad ,,\quad \frac{1}{5,9} = 0,17$$

$$+\,1891,42\quad ,,\quad \frac{1}{5,4} = 0,19$$

Also $x = +\,1890,36^s$; Gewicht $= 1,07$.

Ebenso findet man

$$y = +\,494,12^s;\quad \text{Gewicht} = 3,83.$$

Substituirt man diese Werthe, so ist der Stand des fingirten Chronometers gegen Helgolander Zeit:

Θ		λ
22,4	$+\ 60,20^s$	
		$-\ 0,96^s$
25,0	59,24	
		$+\ 1,27$
28,0	60,51	
		$-\ 0,58$
32,9	59,93	

Θ		λ
32,9	$+ 59{,}93^s$	
		$-0{,}85^s$
35,9	59,08	
		$+0{,}06$
37,1	59,14	
		$+1{,}49$
40,4	60,63	
		$-0{,}75$
42,4	59,88	
		$-0{,}64$
48,3	59,24	
		$+3{,}14$
56,2	62,38	
		$-1{,}06$
61,6	61,32	
		$+0{,}27$
62,2	61,59	
		$-2{,}45$
66,8	59,14	
		$+1{,}05$
68,0	60,19	

Also $S = 6{,}02$, $m = \sqrt{\frac{6{,}02}{13-3}}$. Hieraus der mittlere zu befürchtende Fehler bei $x \ldots 0{,}75^s$, bei $y \ldots 0{,}40^s$.

Die sämmtlichen von mir berechneten 5 Chronometer geben:

		E. med.	Gewicht.
Breguet	$x = 1890{,}36^s$	$0{,}75^s$	1,78
Kessels	1893,29	0,67	2,23
Barraud	1892,32	0,49	4,16
Engl. 1	1892,39	0,43	5,41
„ 4	1892,52	0,35	8,16
Mittel	$x = 1892{,}35$		21,74
Breguet	$y = 494{,}12$	0,40	6,25
Kessels	493,89	0,36	7,72
Barraud	493,67	0,26	14,79
Engl. 1	493,98	0,29	11,89
„ 4	494,16	0,24	17,36
Mittel	$y = 493{,}96$		58,01

Uebrigens ist zwar hier in die letzte Columne unter der Ueberschrift Gewicht $\frac{1}{\text{Quadr.(E.m.)}}$ gesetzt, also als Einheit die Genauigkeit verstanden, wo der mittlere zu befürchtende Fehler $= 1^s$ ist, so dass also z. B. für Altona der mittlere zu befürchtende Fehler $= \frac{1^s}{\sqrt{58{,}01}} = 0{,}13^s$ wird; inzwischen wird es rathsamer sein, die Zahlen der letzten Columne bloss als Verhältnisszahlen zu betrachten, und die absolute Genauigkeit aus den Unterschieden der aus den einzelnen Chronometern für x und y gefundenen Werthe von den Endresultaten abzuleiten. Inzwischen wird so die Genauigkeit des Endresultats noch immer etwas grösser scheinen, als sie wirklich ist, da die Zeitbestimmungen in Greenwich, Helgoland und Altona keine absolute Genauigkeit haben, und also offenbar, wenn die Anzahl der Chronometer auch noch so gross wäre, doch immer die aus jener Quelle entsprungenen Fehler in den Endresultaten nachwirken müssen.

Die Längenbestimmung von Bremen kann auf folgende Art gemacht werden. Setzt man die Länge $= z$ östlich von Helgoland, so giebt die Vergleichung des *Breguet*'schen Chronometers den Stand des fingirten Chronometers

$$-165{,}52^s + z.$$

Also

$$\begin{array}{lrl} \text{aus der vorherg. Vergl. } z = 225{,}40^s; & \text{Gewicht } \dfrac{1}{1{,}4} = 0{,}7 \\ \text{„ „ folgenden „ } z = 224{,}76 & \text{„ } \dfrac{1}{4{,}5} = 0{,}2 \\ \hline 225{,}24 & 0{,}9\,. \end{array}$$

Das Gewicht 0,9 ist noch mit $\frac{10}{6{,}02}$ zu multipliciren.

So geben die 5 Chronometer

		Gewicht.
Breguet	225,24^s	1,5
Kessels	225,84	1,9
Barraud	225,39	3,6
Engl. 1	226,04	2,9
„ 4	224,86	4,3
	225,42	14,2 .

Allein die Länge von Bremen, die hiernach gegen Altona 268,54^s westlich ausfällt, bleibt natürlich immer von der Zeitbestimmung in Bremen abhängig, und dieser Unterschied scheint mehrere Secunden zu klein zu sein. Nach meinen Dreiecken ist der Ansgariusthurm 273,51^s in Zeit westlich von Göttingen, also *Olbers*' Observatorium 271,9^s.