Dieser Werth von X ist also der wahrscheinlichste Werth der Polhöhe jenes Beobachtungsortes, wie er aus diesen zehn Beobachtungen folgt.

I. Es sind aber die Differenzen dieses Resultates X von den einzelnen Beobachtungen

$$X - x = e = 35{,}01 - 35{,}2 \text{ oder}$$

$$\begin{array}{llll}
e = & -0{,}19 & \text{und } e^2 & = 0{,}0361 \\
e_1 = & 0{,}41 & \text{„ } e^2_1 & = 0{,}1861 \\
e_2 = & -0{,}39 & \text{„ } e^2_2 & = 0{,}1521 \\
e_3 = & 0{,}01 & \text{„ } e^2_3 & = 0{,}0001 \\
e_4 = & 0{,}81 & \text{„ } e^2_4 & = 0{,}6561 \\
e_5 = & 0{,}31 & \text{„ } e^2_5 & = 0{,}0961 \\
e_6 = & -0{,}39 & \text{„ } e^2_6 & = 0{,}1521 \\
e_7 = & 0{,}21 & \text{„ } e^2_7 & = 0{,}0441 \\
e_8 = & -0{,}59 & \text{„ } e^2_8 & = 0{,}3481 \\
e_9 = & -0{,}19 & \text{„ } e^2_9 & = 0{,}0361 \\
\hline
 & & \Sigma e^2 & = 1{,}7070
\end{array}$$

Dieses vorausgesetzt ist das Gewicht P der vorhergehenden Bestimmung von X

$$P = \frac{N^2}{2\,\Sigma e^2} = 29{,}291.$$

Der mittlere zu befürchtende Fehler Z dieses Resultates X ist:

$$Z = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \pm\, 0'',0521.$$

Der wahrscheinliche Fehler V dieses Resultates ist:

$$V = \frac{0{,}47694}{\sqrt{P}} = \pm\, 0{,}0881.$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler v jeder einzelnen Beobachtung

$$v = 0{,}47694 \sqrt{\frac{N}{P}} = \pm\, 0{,}2787$$

und die wahrscheinliche Grenze $v + \Delta v$ dieses letzten Fehlers ist

$$v \pm \Delta v = v \left(1 \pm \frac{0{,}47694}{\sqrt{N}}\right)$$

das heisst:

$$0{,}2787 \pm 0{,}0420 = \begin{matrix} 0{,}3207 \\ 0{,}2367 \end{matrix}.$$

Man kann daher sagen, dass mit dem gebrauchten Instrumente, unter übrigens gleichen Umständen, jede einzelne Beobachtung dieser Art dem wahrscheinlichen Fehler 0″,28 unterworfen ist, und dass dieser Fehler in der Ordnung nicht grösser als 0″,32 und nicht kleiner als 0″,24 seyn wird, und dieser Schluss wird desto genauer seyn, je grösser die ihm zu Grunde gelegte Anzahl von Beobachtungen gewesen ist.

§. 147.

Um nun die Genauigkeit zu bestimmen, mit welcher man mittelst des zwölfzölligen Reichenbach'schen Theodoliths Horizontalwinkel beobachten kann, so wollen wir diese aus dem oben §. 37 angegebenen Winkel auf dem Tübinger Observatorium, W e i l e r b u r g-Mözingen, suchen.

Es ist $x = 44^0\ 17'\ 46''$ $X - x = e = +0{,}77$ und $e^2 = 0{,}5929$

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = - - 47 & X - x' = e_1 = -0{,}23 & e^2_1 = 0{,}0529 \\
x_2 = - - 46{,}3 & \text{etc.}\quad e_2 = +0{,}47 & e^2_2 = 0{,}2209 \\
x_3 = - - 46{,}2 & e_3 = +0{,}57 & e^2_3 = 0{,}3249 \\
x_4 = - - 47{,}1 & e_4 = -0{,}33 & e^2_4 = 0{,}1089 \\
x_5 = - - 47{,}3 & e_5 = -0{,}53 & e^2_5 = 0{,}2809 \\
x_6 = - - 47{,}1 & e_6 = -0{,}33 & e^2_6 = 0{,}1089 \\
x_7 = - - 47{,}0 & e_7 = -0{,}23 & e^2_7 = 0{,}0529 \\
x_8 = - - 47{,}1 & e_8 = -0{,}33 & e^2_8 = 0{,}1089 \\
x_9 = - - 46{,}6 & e_9 = +0{,}17 & e^2_9 = 0{,}0289 \\
 & & \Sigma e^2 = 1{,}8810 \\
 & & 2\Sigma e^2 = 3{,}7620
\end{array}
$$

Arithm. Mittel

$$X = 44\ 17\ 46{,}77 = \frac{\Sigma x}{N}$$

$$P = \frac{N^2}{2\,\Sigma e^2}.\quad \begin{array}{ll} \text{Log. } N^2 & = 2{,}0000000 \\ \text{Log. } 3{,}762 & = 0{,}5754188 \\ \hline \text{Log. } P & = 1{,}4245812 \\ P & = 26{,}582 \end{array}$$

$$z = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}}\quad \begin{array}{ll} \text{Log. } P & = 1{,}4245812 \\ \text{Log. } \pi & = 0{,}4971499 \\ \hline & 1{,}9217311 \\ \hline & 0{,}9608655 \\ \text{Log. } 2 & = 0{,}3010300 \\ \hline & 1{,}2618955 \\ \hline \text{Log. } z & = 8{,}7381045 \end{array}$$

Folglich der mittlere zu befürchtende Fehler des Resultates X, $Z = 0{,}05471$ und der wahrscheinliche Fehler dieses Resultates $V = \frac{0{,}4769363}{\sqrt{P}} =$

$$\begin{array}{ll} \text{Log.} & 9{,}6784603 \\ \text{Log. } \sqrt{P} & = 0{,}7122906 \\ \hline \text{Log. } V & = 8{,}9661697 \\ \text{und } V & = \pm 0{,}0925 \end{array}$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler v jeder einzelnen Beobachtung

$$v = 0{,}4769363\sqrt{\frac{N}{P}}\quad \begin{array}{ll} \text{Log. } 10 & = 1{,}0000000 \\ \text{Log. } P & = 1{,}4245812 \\ \hline \text{Log. } \frac{N}{P} & = 9{,}5754188 \\ \text{Log. } \sqrt{\frac{N}{P}} & = 9{,}7877094 \\ \text{Log. } 0{,}47\ldots & = 9{,}6784603 \\ \hline \text{Log. } v & = 9{,}4661697 \end{array}\ \text{und } v = 0{,}29253$$

und die wahrscheinliche Grenze $v + \Delta v$ dieses letzten Fehlers ist

$$v + \Delta v = v\left(1 \pm \frac{0{,}4769363}{\sqrt{N}}\right)\quad \begin{array}{ll} \text{Log. } 0{,}4769363 & = 9{,}6784603 \\ \text{Log. } \sqrt{N} = \text{Log. } \sqrt{10} & = 0{,}5000000 \\ \hline & 9{,}1784603 \\ \text{Log. } v & = 9{,}4661697 \\ \hline \text{Log. } \Delta v & = 8{,}6446300 \\ \Delta v & = 0{,}044119 \end{array}$$

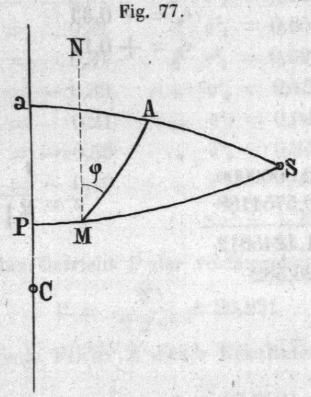
d. h. $0{,}29253 \pm 0{,}044119 = \begin{cases} 0{,}33665 \\ 0{,}2481 \end{cases}$

Es kann also jede einzelne Beobachtung mit diesem Instrumente noch dem wahrscheinlichen Fehler 0″,292 unterworfen seyn, aber er wird nicht grösser als 0″,336 und nicht kleiner als 0″,248 seyn.

§. 148.

Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Bestimmung des Signals Lerchenberg mittelst der sechs Punkte: Solitude, Hohenneuffen, Deckenpfronn, Achalm, Kornbühl und Oberjettingen, nach Bohnenberger.

Fig. 77.



Berechnung der Richtungswinkel aus sphärischen Coordinaten.

$$C a = a;\ a A = b;\ C P = x;\ P M = y;\ N M A = 90^0 - A M S = \varphi$$

$$\text{Tang.}\,\varphi = \frac{\sin(b - y)}{\cos b \sin(a - x)} + \sin y\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right) \text{ genau.}$$

Es sey $\text{Tang. } w = \dfrac{\sin(b - y)}{\cos b \sin(a - x)}$; so ist $\text{Tang.}\,\varphi = \text{Tang. } w + \sin y\,.\,\text{Tang.}\left(\dfrac{a - x}{2}\right)$,

$$\frac{\sin(\varphi - w)}{\cos\varphi\,.\,\cos w} = \sin y\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right)$$

$$\sin(\varphi - w) = \sin y\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right)\cos w \cos(w + \varphi - w) = \sin y\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right)$$

$$\cos w^2 \cos(\varphi - w) - \sin y\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right)\cos w\,.\,\sin w\,.\,\sin(\varphi - w)$$

$$\text{Tang.}\,(\varphi - w) = \sin y\,.\,\cos w^2\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right) - \sin y\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right)\cos w\,.\,\sin w\,.\,\text{Tang.}\,(\varphi - w)$$

$$\text{Tang.}\,(\varphi - w) = \frac{\sin y\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right)\cos w^2}{1 + \sin y\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right)\cos w\,.\,\sin w}$$

$$\varphi - w = \sin y\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right)\cos w^2 - \sin y^2\,.\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right)^2 \cos w^3\,.\,\sin w - \tfrac{1}{3}\sin y^3\,\text{Tang.}\left(\frac{a - x}{2}\right)^3 \cos w^3 \cos 3w$$

$$\varphi = w + \frac{\sin y\,.\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(a - x)\,.\,\cos w^2}{\sin 1''} - \frac{\sin y^2\,.\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(a - x)^2\,.\,\cos w^3\,.\,\sin w}{\sin 1''} - \tfrac{1}{3}\sin y^3\,.\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(a - x)^3\,.\,\cos w^3\,.\,\cos 3\,w \text{ etc.}$$