13. Zusammenfassung einiger Ergebnisse unserer Vierecksausgleichungen. Einige Regeln für die Ausgleichung trigonometrischer Lagenetze mit mehr als vier Punkten. a. Viereck. Im Triangulationsviereck hat sich in weitgehendem Mass Ersetzbarkeit von ***Su***-Gl. durch ***Si***-Gl. und umgekehrt gezeigt. Man könnte denken, dass die möglichst unmittelbare Ausgleichung der ***Sinus*** der Winkel dieselbe Bedeutung beanspruchen könne wie die unmittelbare Ausgleichung der Winkel selbst, denn jene Sinus sind fortwährend bei der Berechnung der Dreiecksseiten von der gegebenen Seite aus anzuwenden• und die gemessenen Winkel sind ja nur Mittel zum Zweck, nämlich zur gegenseitigen Festlegung der Triangulationspunkte gegeneinander, zunächst durch die berechneten gegenseitigen Entfernungen (und sodann durch Koordinaten verschiedener Art).

Aber die weitere Ueberlegung zeigt sofort, dass in einem Triangulationsnetz unter der gesamten Zahl von erforderlichen unabhängigen Bedingungsgleichungen im allgemeinen stets die grösste mögliche Zahl von unabhängigen ***Su***-Gl. zu wählen ist und ***Si***-Gl. nur so viele als unbedingt erforderlich sind, d. h. als eben nicht durch unabhängige ***Su***-Gl. ersetzt werden können. Dafür spricht schon, dass die Koeffizienten der v in den ***Su***-Gl., von der Null abgesehen, durchaus mathematisch exakt gegebene Zahlen, und zwar die einfachsten möglichen, $+1$ und -1 sind, die ***Si***-Gl. aber nur so lange theoretisch „exakte" Gleichungen sind, als sie nicht zu linearer Form entwickelt werden, was aber für ihre weitere Verwendung unerlässlich ist. Während die ***Si***-Gl. in ihrer „exakten", unentwickelten Form als gleichwertig anzusehen sind, sind sie nach der Entwicklung von verschiedener „Schärfe" und der Einfluss dieser Schärfegrade auf die Ausgleichung des trigonometrischen Netzes ist unter Umständen bedeutend; falls die Ausgleichung genügend genau ausfallen soll, kann eine nicht genügend scharfe ***Si***-Gl. zu sehr grossem Aufwand in der Zahlenrechnung zwingen, der weit hinausgeht über den Rechenaufwand der an sich nach der Natur des auszugleichenden Netzes angezeigt wäre. Bei unserem Viereck hat auch in **11.** bis **12.** im allgemeinen jeder Ersatz einer ***Su***-Bedingungsgleichung durch eine ***Si***-Gl. stufenweise zu einer, wenn auch oft sachlich gleichgültigen, Einbusse an Genauigkeit der Ausgleichung bei derselben Rechenschärfe geführt. Dazu kommt, dass die Rechnung bei Ersatz von ***Su***- durch ***Si***-Gleichungen, soweit er möglich ist, unbequemer wird wegen der nicht runden v-Koeffizienten in den ***Si***-Gl.

Man wird also im vollständigen Viereck bei der Anwendung von 3 ***Su***- und 1 ***Si***-Gl. bleiben. Für die beste 6gliedrige ***Si***-Gl. gilt dabei die Zachariae-Jordansche Regel, die die Sinus der spitzesten Winkel hereinbringt, d. h. möglichst grosse Koeffizienten einzelner v in der linear gemachten Gleichung liefert. Werden die grossen Koeffizienten durch Division der Gleichung mit einer runden ganzen Zahl auf kleinere Zahlen gebracht mit Rücksicht auf die rechnerische Notwendigkeit durchschnittlich möglichst gleich grosser v-Koeffizienten in allen Bedingungsgleichungen, so bleibt doch selbstverständlich jene ***Si***-Gl. mit den ursprünglich grossen Koeffizienten schärfer als eine andere. Die Wirkung der grossen Schärfe dieser ***Si***-Gl. auf die Genauigkeit der ganzen Ausgleichung darf aber auch nicht überschätzt werden. Für die ***Si***-Gleichungen grösserer Netze bringt sogar eine solche ***Si***-Bedingung mit möglichst grossen Koeffizienten eine wichtige Gefahr, von der unten noch die Rede sein muss. Ersetzung der schärfsten 6-gliedrigen ***Si***-Gl. im Viereck durch eine 8-gliedrige kann nicht wegen des noch etwas grössern „Schärfemasses" dieser Gl. in Betracht kommen, wohl aber gelegentlich im Hinblick auf noch grössere Symmetrie der Normalgleichungen einigen Vorteil bringen; der Nachteil, dass mehr v in diese Gleichung eingehen, ist besonders für grössere Netze als Vierecke nicht von Bedeutung.

Man mache sich jetzt auch, im Zusammenhang mit dem Eingang von a., die in 5. aufgestellte Reziprozität der ***Si***- und ***Su***-Gleichungen im Viereck, nämlich die theoretisch gegenseitige Ersetzbarkeit bis auf eine, die jedenfalls von der einen Art sein muss und nicht durch eine Gleichung der anderen Art ersetzt werden kann, noch weiter dadurch klar, dass man im vollständigen Viereck weniger als acht Winkel, wie bisher, als gemessen annimmt.

Setzen wir z. B. 5 Winkel als gemessen voraus, so ist, da von den zur einfach geometrischen Konstruktion des Vierecks erforderlichen 5 Stücken ja eines eine Seite sein muss, nur einer der Winkel überschüssig, d. h. nur eine Bedingungsgleichung vorhanden. Diese ist entweder eine ***Su***- oder eine ***Si***-Gl., nicht durch eine Gleichung der anderen Art ersetzbar.

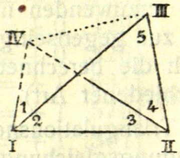

Fig. 9a).

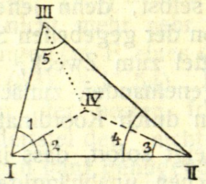

Fig. 9b).

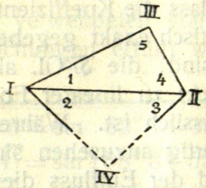

Fig. 9c).

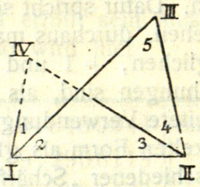

Fig. 9d).

Im Fall der Fig. 9a) und b) ist nur eine ***Su***-Gl. vorhanden, in Fig. 10a) und b) nur eine ***Si***-Gl. Im ersten Fall zerfällt das „Viereck" in zwei Dreiecke, ein geschlossenes und ein nichtgeschlossenes, die punktierte Linie ist ganz unwesentlich, nämlich nicht durch die Messungen bedingt. Unwesentlich ist nämlich auch, ob nach den Fig. 9a) und b) der Punkt IV mit III auf derselben Seite der Linie I II liegt, oder nicht, wie in Fig. 9c) [der Fig. 9b) oder 9a) entsprechend, wenn das nicht geschlossene Dreieck auf die andere Seite von I II geklappt wird]. Auch Fig. 9d) ist nichts anderes [Weglassung der Linie ..... III IV in a)], kurz es handelt sich in diesem Fall nur einer ***Su***-Gl. im „Viereck" nicht um ein solches, sondern um zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite.

Im Fall der Fig. 10a) und b) ist dagegen, bei ebenfalls nur 5 gemessenen Winkeln, also einer Bedingungsgleichung, ein vollständiges Viereck vorhanden, nur ist keines der vier Dreiecke „geschlossen", es ist also sicher nicht eine ***Su***-Gl. möglich, sondern die eine Bedingungsgleichung kann nur eine ***Si***-Gl. sein.

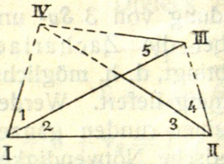

Fig. 10a).

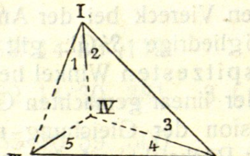

Fig. 10b).

Man führe die Betrachtung auch für 6 und 7 im vollständigen Viereck verschiedener Form gemessene Winkel vollständig durch, mit Berücksichtigung der gegenseitigen Ersetzbarkeit von ***Su***- und von ***Si***-Gl.

b. Abzählen der Bedingungsgleichungen im Netz von mehr als vier Punkten. Die letzte Bemerkung führt dazu, die Abzählung der Bedingungsgleichungen im trigonometrischen Netz mit mehr als vier Punkten kurz zu berühren. Wir schliessen dabei Besonderheiten wie Kranzsysteme, Basisanschlussbedingungsgleichungen usf. aus, wollen aber neben ***Su***- und ***Si***-Gl. gelegentlich auch ***Stations***-bedingungen betrachten.

Häufig ist zur sichern Feststellung aller unabhängigen Bedingungsgleichungen nichts als einfache Betrachtung der Figur notwendig und die Festhaltung der Tatsache, dass n Punkte der Ebene, wie sie auch gegenseitig liegen mögen, durch $(2n - 3)$ unabhängige Stücke, also im Fall der auf eine Strecke als gegebene Grundlinie sich stützenden Triangulierung durch $(2n - 4)$ Winkel einfach geometrisch gegeneinander festgelegt sind.

Es seien z. B. in dem Netz der Figur 11 nunmehr 18 Winkel gemessen.

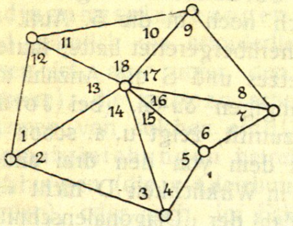

Fig. 11.

Es ist am einfachsten, bei jedem n Punkte enthaltenden Netz von einem n-Eck, hier von einem 7-Eck zu sprechen. Geometrisch einfach notwendig sind also $2 \,.\, 7 - 3 = 11$ unabhängige Stücke, von denen das eine eine Seite, also 10 Winkel sind. Es sind demnach $18 - 10 = 8$ überschüssige Winkel und somit im ganzen 8 unabhängige Bedingungsgleichungen da; eine davon ist offenbar die ***Stations***gleichung

$$(53) \qquad \underline{13} + \underline{14} + \underline{15} + \underline{16} + \underline{17} + \underline{18} - 360^\circ = 0;$$

sechs weitere sind die ***Su***-Gl. in jedem der 6 vorhandenen „geschlossenen" Dreiecke,

$$(54) \qquad \underline{1} + \underline{12} + \underline{13} - 180^\circ = 0; \quad \underline{2} + \underline{3} + \underline{14} - 180^\circ = 0; \ldots.$$

Eine weitere ***Su***-Gl. kann nicht aufgestellt werden, insbesondere bietet die Summe der Randwinkel $\underline{1} + \underline{2} + \underline{3} + \underline{4} \ldots . + \underline{12} - 720^\circ = 0$ nichts Neues mehr mit Rücksicht auf die Summe der 6 oben erwähnten Dreiecks-***Su***-Gl. und die erste Stationsgleichung. Die letzte, 8. Bedingungsgleichung, muss also eine ***Si***-Gl. sein und kann nicht durch eine ***Su***-Gl. ersetzt werden; sie enthält die Sinus der sämtlichen Randwinkel, $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, . . $\underline{12}$, vgl. oben in **4.**

Kommt in Fig. 11 ein weiterer gemessener Winkel durch eine („einseitig beobachtete") Diagonale hinzu, z. B. 19 in Fig. 12, so ist die weitere (9.) Bedingungsgleichung, da keine weitere „geschlossene" Figur entstanden ist, offenbar abermals eine (nicht durch eine ***Su***-Gl. ersetzbare) ***Si***-Gl. Wird aber die Diagonale „beiderseits beobachtet", d. h. werden die Winkel 19 und 20 gemessen, Fig. 13, so entstehen zwei weitere geschlossene Dreiecke im Vergleich mit Fig. 11. Sie liefern aber offenbar nur eine weitere ***Su***-Gl., so dass die 9. und 10., durch die Winkel 19 und 20 geforderten Bedingungsgleichungen, eine ***Su***- und eine ***Si***-Gl. sind. Die ***Su***-Gl. kann viergliedrig geschrieben werden als

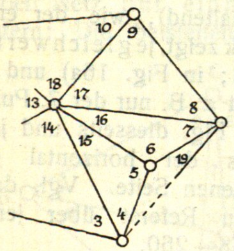

Fig. 12.

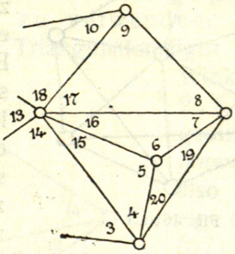

Fig. 13.

$$(55) \qquad \underline{5} + \underline{6} - \underline{19} - \underline{20} - 180^\circ = 0,$$

als ***Si***-Gl. wird man die 6-gliedrige nehmen:

$$(56) \qquad \sin \underline{4} \,.\, \sin \underline{19} \,.\, \sin \underline{16} = \sin \underline{7} \,.\, \sin \underline{15} \,.\, \sin \underline{20}.$$

Wo die Betrachtung der fertigen Netzfigur zur sichern Feststellung der unabhängigen Bedingungsgleichungen nicht ausreicht, steht der folgeweise Aufbau der Figur, Winkel für Winkel oder Richtung für Richtung der Messung entsprechend (Bessel's Methode) oder die bekannten Regeln zur Abzählung der Bedingungsgleichungen (p Punkte, l Linien im Netz; w gemessene Winkel oder r gemessene Richtungen; l' nur einseitig beobachtete Linien) zu Gebot, zugleich nach den Klassen getrennt (***Su***- oder ***Si***-Gl., ohne Rücksicht auf gegenseitige Ersetzbarkeit, vielmehr in der Annahme, dass unter der Gesamtzahl der erforderlichen unabhängigen Bedingungsgleichungen nur so viele ***Si***-Gl. genommen werden, als unumgänglich notwendig, d. h. nicht durch ***Su***-Gl. ersetzbar sind). Diese „Gauss-Gerling"schen Regeln sind neuerdings von andern vervollständigt oder anders gefasst worden

(u. a. Jordan, Koll usw.) Dabei taucht gelegentlich auch einmal eine unrichtige Regel auf; z. B. ist die Unrichtigkeit der folgenden Jordanschen Regel für die Zahl der *Su*-Gl. leicht einzusehen. Die Regel, die sich noch in die 5. Aufl. des I. Bandes, von Reinhertz bearbeitet (1904, S. 187), herübergerettet hatte, lautete: Ist Δ die Anzahl aller geschlossenen Dreiecke des Netzes und S die Anzahl aller Diagonalenschnitte, so ist die Anzahl D der unabhängigen *Su*-Gl. (bei Jordan „Dreiecksgleichungen") $D = \Delta - S$. Dass dies nicht zutrifft, zeigt u. a. schon das vollständige Viereck in der Form, bei der eine Ecke in dem von den drei andern gebildeten Dreieck liegt: hier ist $\Delta = 4$, $S = 0$, aber in Wirklichkeit D nicht $= 4$, sondern $= 3$. Alle Abzählungsregeln, die sich auf die Zahl der „Diagonalenschnitte" gründen, sind unbrauchbar, weil für die Ausgleichung Figuren wie 14a), b), c), ebenso

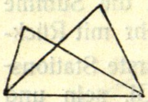

Fig. 14a).

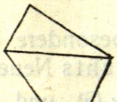

Fig. 14b).

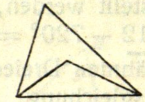

Fig. 14c).

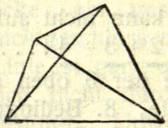

Fig. 15a).

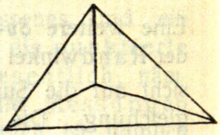

Fig. 15b).

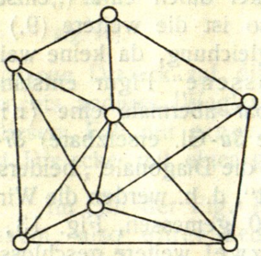

Fig. 16a).

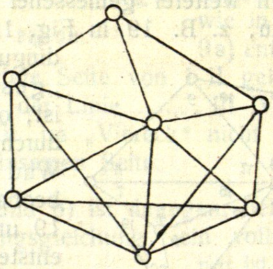

Fig. 16b).

Fig. 15a), b), endlich auch z. B. Fig. 16a) und b) (die erste nur zwei, die zweite aber 5 Schnittpunkte enthaltend), wie der erste Blick zeigt, je gleichwertig sind; in Fig. 16a) und b) liegt z. B. nur der 7. Punkt der Fig. diesseits und jenseits der horizontal gezogenen Seite. Vgl. dazu mein Referat über jenen Band I in der Zeitschr. für Instrumentenkunde 1905, S. 258—260.

c. „Gute" Bedingungsgleichungen. Die Gefahr unrichtiger Annahme der Gesamtzahl der vorhandenen unabhängigen Bedingungsgleichungen ist auch für grosse, zusammengesetzte Netze nicht sehr zu fürchten, besonders wenn man diese Zahl sowohl nach den Abzählregeln wie auch nach dem Besselschen Aufbauverfahren des Netzes bestimmt. Immerhin ist Vorsicht deshalb notwendig, weil ein Versehen in der Gesamtzahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen durch ein zweites Versehen aufgehoben sein kann: eine aus Versehen weggelassene Bedingungsgleichung ist ersetzt durch eine andere überschüssige, nicht unabhängige Bedingungsgleichung, die von selbst erfüllt wird, wenn andere bereits aufgestellte Gleichungen erfüllt werden. Man entgeht diesem Fehler am sichersten bei dem Besselschen Aufbauverfahren dadurch, dass womöglich in jede neue Bedingungsgleichung ein gemessener Winkel eingeführt wird, der in allen bisher aufgestellten Bedingungsgleichungen noch gar nicht vorkommt.

Eine andere Gefahr für die Netzausgleichung besteht darin, dass sie unstabil wird (vgl. oben **5.** Schluss, **11.**, ferner **13.**a.), dass nämlich nur sehr grosser Rechenaufwand, Beibehaltung einer den sonstigen Verhältnissen der Aufgabe (Messungen) nicht angemessene Zahl von Dezimalstellen in allen Koeffizienten unter Umständen noch zu brauchbarer Auflösung führen würde. Dieser missliche Zustand kann in verschiedenen Ursachen seinen Grund haben; so 1) in der Verwendung einer „unscharfen" *Si*-Gl., wie z. B. der Kollschen in unserem Viereck **8.**, statt einer bessern; dann 2) (und dies ist im allgemeinen der schlimmste Fall) darin, dass zwar die aufgestellten Bedingungsgleichungen tatsächlich (theoretisch) unabhängig voneinander sind, nämlich die erforderliche Gesamtzahl eingehalten, keine notwendige weggelassen ist, aber unter den Bedingungsgleichungen sich eine befindet (oder gar mehrere), die nahezu schon durch andere Bedingungsgleichungen oder Kombinationen von solchen erfüllt ist; endlich kann 3) die Instabilität auch nur die Normalgleichungen betreffen, nämlich genügend zurücktreten, wenn die Normalgleichungen (die v-Gleichungen, aus denen die Normalgleichungen der k gebildet werden), oder auch, im Fall von Ausgleichungen nach „Elementen", nämlich mit unabhängigen Unbekannten, diese in den Verbesserungsgleichungen zweckmässiger geordnet werden, so dass der Bau des Normalgleichungssystems zweckmässiger wird.

Einen Fall für 1) haben wir oben in **8.** kennen gelernt (vgl. dazu übrigens **10.**), ebenso ist ein Fall für 2) schon oben behandelt, vgl. **11.** Dieser zweite Fall bedarf, wie schon angedeutet, grosser Aufmerksamkeit. Z. B. dürfen die Sinus der kleinsten Winkel, die nach dem Zachariae-Jordanschen Satz in der schärfsten *Si*-Gl. eines vollständigen Vierecks auftreten, nicht auch noch in eine zweite *Si*-Gl. aufgenommen werden; die grossen Koeffizienten der v dieser kleinen Winkel erdrücken die andern Glieder einer solchen *Si*-Gl., und wenn also in zwei verschiedenen *Si*-Gl. dieselben v mit so grossen Koeffizienten vorkommen, so ist die Gefahr der „Unstabilität" des v-Gleichungssystems im Sinn von 2) vorhanden. Eine wichtige „Regel" bei der Auswahl der *Si*-Gl. lautet deshalb: die kleinsten Winkel geben die schärfsten *Si*-Bedingungsgleichungen, aber sie sind in demselben Netz nur einmal zu verwenden. Ein Beispiel*) mag dies noch erläutern: Die beistehende Triangulationsfigur (Fig. 17) hat bei 14 gemessenen Winkeln, da eine Seite und (Fünfeck) $2 . 5 - 3 - 1 = 6$ Winkel zur einfachen geometrischen Konstruktion ohne Proben notwendig sind, 8 überschüssige Winkel, also 8 Bedingungsgleichungen. Die eine davon ist die Stationsgleichung in D:

(57) $\underline{9} + \underline{10} + \underline{11} + \underline{12} - 360^\circ = 0$;

von den 7 übrigen gibt das vollständige Viereck A B C D drei *Su*-Gl., durch die auch die für den „Schluss" des stumpfwinkligen Dreiecks A C D befriedigt wird, das zugleich dem zweiten vollständigen Viereck A C E D angehört. Dieses zweite Viereck gibt also nur noch zwei weitere unabhängige *Su*-Gl., so dass deren **5** im ganzen vorhanden sind. (Die oben am Schluss von b. angeführte unrichtige Jordansche Regel würde mit $\varDelta = 7$, $S = 1$ geben $D = 6$, es sind aber offenbar nur 5 vorhanden). Es bleiben also noch 2 *Si*-Gl. zu befriedigen, wie es auch der unmittelbare Anblick verlangt; s. u. Als jene 5 *Su*-Gleichungen kann man nehmen, wenn auf möglichst wenige v-Glieder in jeder Gleichung Wert gelegt wird (und ebene Figur vorausgesetzt):

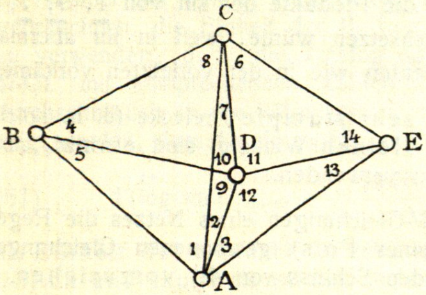

Fig. 17.

Gleichungsgruppe (58):

$$\underline{3} + \underline{12} + \underline{13} - 180^\circ = 0;\quad \underline{6} + \underline{11} + \underline{14} - 180^\circ = 0;\quad \underline{1} + \underline{2} + \underline{5} + \underline{9} - 180^\circ = 0;$$

$$\underline{4} + \underline{7} + \underline{8} + \underline{10} - 180^\circ = 0;\ \text{endlich}\ \underline{1} + \underline{4} + \underline{5} + \underline{8} - 180^\circ = 0.$$

*) Wright-Hayford, Adjustment of Observations, New-York 1906 (ein bei uns wie es scheint ganz unbekannt gebliebenes schönes amerikanisches Lehrbuch der Ausgleichungsrechnung) S. 205; Helmert, Ausgleichungsrechnung, 2. Aufl. 1907, S. 522.

Ein Blick auf diese 5 Gleichungen bestätigt arithmetisch ihre (geometrisch schon genügend verbürgte) gegenseitige Unabhängigkeit, indem in der Reihe der vier ersten Gleichungen jede folgende nur Winkel enthält, die in den vorhergehenden garnicht vorkommen und die in der letzten (5.) stehenden Winkel nur zu je zweien in zwei der vier ersten sich finden.

Von den zwei *Si*-Gl. ferner hat die eine jedenfalls den Dreistrahl D, A B C (also D als Pol) zu benützen oder auch den Dreistrahl D, A C E (derselbe Pol), von denen jeder die kleinen Winkel $\underline{2}$ und $\underline{7}$ hereinbringt; es wäre aber ganz falsch, nämlich die Auflösung unstabil machend, wenn man diese beiden sechsgliedrigen *Si*-Gl. mit D als Pol nebeneinander verwenden wollte. Nimmt man den Dreistrahl D, A C E, so lautet die *Si*-Gl. bekanntlich

$$(59) \qquad \frac{\sin \underline{2} \,.\, \sin \underline{13} \,.\, \sin \underline{6}}{\sin \underline{3} \,.\, \sin \underline{14} \,.\, \sin \underline{7}} = 1.$$

Für die letzte *Si*-Gl., für die nun nicht D, A B C verwendet werden darf, was die Winkel $\underline{2}$ und $\underline{7}$ nochmals hereinbringen würde, wird am besten der Vierstrahl D, A B C E gebraucht, nämlich

$$\sin(\underline{1}+\underline{2}) \,.\, \sin \underline{4} \,.\, \sin \underline{6} \,.\, \sin \underline{13} = \sin \underline{3} \,.\, \sin \underline{5} \,.\, \sin(\underline{7}+\underline{8}) \,.\, \sin \underline{14} \qquad \text{Gl. (60).}$$

In dieser Gleichung kommen zwar nach Linearmachung v_2 und v_7 abermals vor, aber nicht mit den sehr grossen Koeffizienten, die log sin 2 und log sin 7 entsprechen, wie in der vorigen *Si*-Gl., sondern nur mit den kleinen Koeffizienten, die log sin (1 + 2) und log sin (7 + 8) entsprechen. Natürlich würden für diese letzte *Si*-Gl. auch noch andere sechsgliedrige Gleichungen zu Gebot stehen, aber hier ist die zuletzt angeschriebene mehrgliedrige Gleichung (in der gewählten kommen 10 v vor) entschieden die bessere; und jedenfalls darf z. B. neben der vorletzten 6gliedrigen nicht die achtgliedrige verwendet werden (die „schärfste" überhaupt für das vollständige Viereck A B C D), die die Produkte der sin von $\underline{1}$, $\underline{9}$, $\underline{7}$, $\underline{4}$ und der sin von $\underline{2}$, $\underline{10}$, $\underline{8}$, $\underline{5}$ einander gleichsetzen würde, weil in ihr abermals v_7 und v_2 mit denselben grossen Koeffizienten wie in der vorletzten vorkämen.

Im ganzen ist also eine wichtige Regel: sehr stumpfe Dreiecke (d. h. solche mit einem Winkel nahe bei 180° und zwei kleinen Winkeln) sind einmal, aber nur einmal, bei den *Si*-Gl. eines Netzes zu verwenden.

Nicht unwichtig ist endlich für die *Si*-Gleichungen eines Netzes die Regel, die mit Hilfe eines „Zentralsystems" (eines Pols) gewonnenen Gleichungen andern („Nicht-Pol-") Gleichungen (vgl. den Schluss von **4.**) vorzuziehen.

Was endlich die *Su*-Gleichungen angeht, so ist zu ihrer Auswahl nur zu bemerken, dass es nicht vorteilhaft ist, auch für sie Dreiecke mit kleinen Winkeln verwenden zu wollen. Man soll ferner beim Anschreiben der *Su*-Gleichungen von Anfang an solche Dreiecke bevorzugen, in denen eine oder zwei Seiten dem äussern Umfang der ganzen Triangulationsfigur angehören, weil man damit am leichtesten Kollisionen mit andern Bedingungsgleichungen vermeidet.

d. Schärfe der Rechnung. Diese hat selbstverständlich dem Zweck der Messung, also der Schärfe der gemessenen Winkel zu entsprechen. Es ist oben bei den Ausgleichungen des Jordan-Kollschen Vierecks mit $\pm$ 1″,53 m. F. eines der gemessenen Winkel schon wiederholt betont, dass sachlich auch in der Ausgleichung 6stellige Log.-Tafeln zur Aufstellung der *Si*-Gl. durchaus genügen sollten, und zur Ausführung der Korrelatenrechnung einschl. Auflösung der Normalgleichungen der Rechenschieber. Scharfe grosse Triangulationen werden 7-, 8- und selbst 10-stellig berechnet und auch die Ausgleichung des Netzes wendet deshalb in den *Si*-Gleichungen diese Rechenschärfe an. Seit bequeme 8-stellige Tafeln zur Verfügung stehen (zuerst für „neue Teilung", seit kurzem auch für alte Teilung), werden sie die Haupttafeln zur Berechnung von Triangulationen I. O. bilden, obwohl auch bisher schon eine kleine Verschärfung der 7-stelligen Rechnung durch die Schrönsche Tafel möglich war. Beim Coast and Geodetic Survey der Vereinigten Staaten wird, nachdem früher schärfer gerechnet worden war, neuerdings bei der Rechnung auch der wichtigsten Triangulationen grundsätzlich auf 1 Einh_7 abgerundet; bei der Unmöglichkeit der Winkelmessung schärfer als auf mehrere Zehntel der $''$ wird eine weitergehende Rechengenauigkeit nicht für gerechtfertigt gehalten. (Der Fehler von 1 Einh_7 im Logarithmus einer Zahl entspricht einem Fehler in dieser Zahl von rund $^1/_{4340000}$ ihres Betrags; selbst nach vielen Logarithmen-Additionen ist man also noch innerhalb der Genauigkeit der feinsten möglichen Triangulationen). Dementsprechend werden dort auch bei der Ausgleichung der Netze die Absolutglieder der logarithmierten *Si*-Gleichungen auf die ganze Einheit_7 abgerundet angesetzt. Regel ist ferner, dass die Koeffizienten der v in den linear gemachten *Si*-Gleichungen auf 1 Dezimale mehr angesetzt werden, als die Absolutglieder, um sich vor grösserer Anhäufung von Abrundungsungenauigkeiten zu schützen; bei Zugrundlegung der Einh_6 als Recheneinheit der *Si*-Gl. erscheinen also die v-Koeffizienten mit 2, die Absolutglieder mit 1 Dezimalstelle. Bei kleinen Netzen (d. h. im ganzen kürzerer Rechnung) hat dies weniger Bedeutung.

Es ist oben schon mehrfach betont, dass die v-Koeffizienten der linear gemachten *Si*-Gl. durchschnittlich nicht viel abweichen sollen von den v-Koeffizienten der *Su*-Bedingungsgleichungen, damit die Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen nicht unbequem gemacht wird. Die v-Koeffizienten in den von Haus aus linearen *Su*-Gl. sind nun, von 0 abgesehen, fast durchaus + 1 oder — 1. Man hat früher vielfach bei Festhaltung der Einheit der 7. Log.-Dez. als Recheneinheit jene notwendige ungefähre Gleichheit der Koeffizienten in den beiden Arten von Gleichungen dadurch hergestellt, dass die *Su*-Gl. mit 10 durchmultipliziert wurden. Es ist aber bei weitem vorzuziehen und seit einiger Zeit auch ziemlich allgemein gebräuchlich, die Einheit der **6.** Log.-Dez. als Recheneinheit in den linearen *Si*-Gl. zu verwenden, d. h. die 7stellig oder 8stellig aufgestellten und linear gemachten *Si*-Gl. mit entsprechenden Zahlen durchzudividieren, um ihre v-Koeffizienten durchschnittlich in die Nähe von 1 zu bringen. In Gleichung (11) in **6.** ist gezeigt worden, dass für $d\alpha = 10''$ und für Rechnung in Einh_7 in runden Zahlen wird:

(61) $d\,(\overset{10}{\log}\sin\alpha)_{d\alpha = 10''} = \dfrac{1000\,.\,\text{ctg}\,\alpha}{4{,}75}\ \text{Einh}_7$; setzt man also $d\alpha = 1''$, was als Einheit der v sowohl für feine als für weniger feine Triangulierung allgemein üblich und tauglich ist und rechnet in Einheiten der **6.** Log.-Dezimale, so wird

(62) $d\,(\overset{10}{\log}\sin\alpha)_{d\alpha = 1''} = \dfrac{10\,.\,\text{ctg}\,\alpha}{4{,}75}\ \text{Einh.}_6$. Dieser v-Koeffizient wird also $= 1$ für den Winkel α_0, dessen $\text{ctg}\,\alpha_0 = 0{,}475$ ist, d. h. für $\alpha_0 = 64°{,}6$ (wie auch ein Blick in die 6- oder 7stellig. Log.-Tafeln bestätigt; die Differenz im log sin wird für $10''$ Winkeländerung in der ersten Tafel 10, in der zweiten 100 in der Gegend $64°{,}6$). Das Ideal des Dreieckswinkels für die Triangulation ist nun $\alpha = 60°$ (gleichseitige Dreiecke), also ganz in der Nähe von α_0. Für $\alpha = 60°$ ist $\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $= \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577$ und der entsprechende v-Koeffizient wird rund 1,2, noch wenig von 1 verschieden. Damit ist also die heutige Rechenweise in Einh_6 für die *Si*-Gl. auch unmittelbar als zweckmässig bestätigt. Es ist übrigens schon darauf hingewiesen worden, dass man durch nichts gezwungen ist, überhaupt in einer bestimmten Log.-Dezimalstelle zu rechnen. Multipliziert man irgend eine Bedingungsgleichung mit einer beliebigen Konstanten $\lesseqgtr 1$ durch, so wird dadurch weder ihre Bedeutung, noch ihre Schärfe verändert. Multipliziert man eine linear gemachte *Si*-Bedingungsgleichung mit einer Konstanten durch, die nicht eine positive oder negative ganze

Potenz von 10 ist, so rechnet man in ihr nicht mehr in Einheiten einer Log.-Dez.-Stelle, ohne dass dadurch die Bedeutung der Gleichung irgendwie geändert würde. Beispiele dafür sind oben mehrfach gegeben, z. B. Durchdivision von *Si*-Gl. mit 8 in den Abschnitten **9.**, **11.**, **12.**, mit 4 vor Gleichung (40) usf.

Noch ein Wort ist hier bei der Rechenschärfe anzufügen über unstabile Normalgleichungssysteme. In c. ist die richtige Anzahl und richtige Auswahl der Bedingungsgleichungen als Voraussetzung genügend scharfer Ausgleichung behandelt und auf zwei wichtige Quellen aufmerksam gemacht, aus denen unstabile Ausgleichungen entspringen. Eine dritte Gefahr für die Auflösung besteht darin, dass zwar die sämtlichen unabhängigen Bedingungen, die im ganzen erforderlich werden, auch angesetzt sind und dass man auch an der Wahl der Gleichungen nichts wesentliches tadeln kann, dass aber die Normalgleichungen der Korrelaten bei der Auflösung sich ungünstig zeigen, weil sie nicht günstig geordnet sind. Die Werte der Korrelaten fallen, z. T. wenigstens, „unstabil" aus, es bleibt z. B. bei der Elimination für die zuerst zu bestimmende Korrelate bei nicht sehr scharfer Rechnung wenig mehr als $\frac{0}{0}$ übrig, man muss eine zu grosse Anzahl von Dezimalstellen in allen Zahlen mitführen, um alle Ergebnisse erträglich genau zu finden. Es ist in dieser Beziehung bekanntlich am zweckmässigsten, dafür zu sorgen, dass möglichst in der Nähe der Diagonalreihe der Koeff.-Determinante mit den Gliedern $\left[\frac{a\,a}{g}\right], \left[\frac{b\,b}{g}\right], \left[\frac{c\,c}{g}\right], \ldots$ auch die übrigen grossen Koeffizienten der Normalgleichungen stehen und die kleinen Koeffizienten von der Diagonalreihe entfernt gehalten werden. Es ist für die Rechenschärfe der Auflösung der Normalgleichungen erwünscht, wenn die Quotienten, mit denen bei der ersten Reduktion der Normalgleichungen die erste Normalgleichung der Reihe nach durchmultipliziert werden muss, um sie zur 2., 3., . . . Normalgleichung hinzuzunehmen, d. h. die Brüche (ohne Rücksicht auf Gewichte) $-\left[\frac{a\,b}{a\,a}\right], -\left[\frac{a\,c}{a\,a}\right] \ldots$ (absolut) klein sind, jedenfalls müssen sie < 1 sein; können sie nahezu 0 sein, so bedeutet dies grossen Vorteil für die Auflösung der Normalgleichungen bei einer bestimmten angewandten Rechenschärfe. Oft ist freilich, besonders bei kleinern Netzen (wenigen Normalgleichungen der Korrelaten) die Ordnung ziemlich gleichgültig, vgl. oben die Auflösungen der zwei Systeme (42) und (44); mit steigender Zahl von Bedingungsgleichungen gewinnt aber die Rücksicht auf richtige Ordnung rasch an Bedeutung.

Auf die Durchführung der Netzausgleichung in Gruppen oder durch Annäherung gehe ich hier nicht ein, ebensowenig auf den Gebrauch der Rechenmaschine zur Auflösung der Normalgleichungen, die viele heute für unentbehrlich zu halten scheinen; sie hat den Nachteil, dass sie z. B. schon zur Linearmachung der *Si*-Gl. ausserordentlich viel unbequemer wäre als die logarithmische Rechnung und besonders den, dass man bei ihrer Anwendung fast immer alle Stellen mitzuschleppen hat, während in der ganzen Ausgleichungsrechnung so viel Anlass zu sachgemässer Abwerfung von Stellen und Anpassung der Rechengenauigkeit an das augenblickliche Schärfebedürfnis gegeben ist.

Für die Ausgleichungen der Niedern Geodäsie ist im allgemeinen daran festzuhalten, dass sie sich fast durchweg nur dann verlohnen, wenn der gewöhnliche Rechenschieber oder höchstens eines der grössern mechanisch-logarithmischen Rechenwerkzeuge zur vollständigen Durchführung, einschl. Auflösung der Normalgleichungen usw., verwendet werden kann. Für die Ausgleichung feinerer Messungen lautet natürlich das Urteil anders, obwohl man auch hier nicht von der Rücksicht auf die im ganzen aufzuwendende Rechenarbeit frei ist und z. B. nicht Ausgleichungen mit 50 oder noch mehr Bedingungsgleichungen durch Auflösung eines Systems von Korrelaten-Normalgleichungen durchführen sollte.