oder es ergeben sich auf diesem Weg zunächst die Zahlen $k \cdot d_1$, $k \cdot d_2$, ... $k \cdot d_6$, $k \cdot w^{IV}$, (k beliebige Konstante), was aber wieder keinen Unterschied bringt und nur abermals auf die Tatsache weist, dass eine Bedingungsgleichung der v mit einer beliebigen Konstanten durchmultipliziert werden darf ohne Aenderung ihrer Bedeutung.

Die Analogie zwischen den „elementaren" *Su*- und *Si*-Gleichungen geht aber noch weiter: wie in 2. alle übrigen möglichen *Su*-Gleichungen aus (*I*) bis (*IV*) durch lineare Kombination hergestellt werden konnten, so können hier bei den *Si*-Gleichungen alle übrigen möglichen aus den elementaren (I) bis (IV) durch Multiplikation und Division dieser Gleichungen (Addition und Subtraktion nach ihrer Logarithmierung) aufgestellt werden.

4. Fortsetzung über die *Si*-Bedingungsgleichungen des Vierecks. Neben den 6gliedrigen *Si*-Gl. sind nämlich oft von Bedeutung die 8gliedrigen. Die wichtigsten davon erhält man einfach als Produkt oder als Quotient zweier der Gleichungen (I) bis (IV).

Sowohl (I) × (III) wie auch (II) × (IV) gibt z. B. die Gleichung

$$(\text{V}) \quad \sin\underline{1} \cdot \sin\underline{3} \cdot \sin\underline{5} \cdot \sin\underline{7} = \sin\underline{2} \cdot \sin\underline{4} \cdot \sin\underline{6} \cdot \sin\underline{8} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\underline{1} \cdot \sin\underline{3} \cdot \sin\underline{5} \cdot \sin\underline{7}}{\sin\underline{2} \cdot \sin\underline{4} \cdot \sin\underline{6} \cdot \sin\underline{8}} = 1.$$

Man kann diese wichtige (und nicht nur fürs Viereck wichtige), weil in sich vollständig symmetrische Gleichung auch unmittelbar einfach am Viereck ablesen, indem man die mechanische Regel, die zu den Gleichungen (I) bis (IV) mit I, II, III, IV als Pol geführt hat, auf den Schnittpunkt S der Diagonalen im konvexen Viereck (Fig. 4) als Pol und den von ihm ausgehenden Vierstrahl anwendet: die Identität

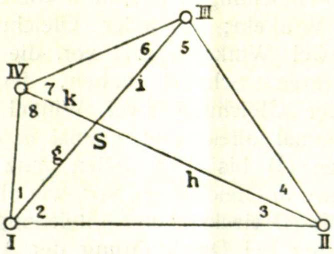

Fig. 4.

$$\frac{\underline{\underline{g}}}{\underline{h}} \cdot \frac{\underline{\underline{h}}}{\underline{i}} \cdot \frac{\underline{\underline{i}}}{\underline{k}} \cdot \frac{\underline{\underline{k}}}{\underline{g}} = 1$$

gibt nach Ersatz der Seitenverhältnisse durch die Sinusverhältnisse unmittelbar (V). Als Pol einer „Seitengleichung" eignet sich also auch ein anderer Schnittpunkt der Seiten als eine Ecke. Ausser S als Schnittpunkt von (I III) und (II IV) müssen demnach auch noch die Schnittpunkte S′ von (I II), (III IV) und S″ von (II III), (IV I) als Pole betrachtet werden, vgl. Fig. 5. Der Punkt S′ gibt in ganz derselben Weise durch den Ansatz

$$\frac{\underline{\underline{l}}}{\underline{m}} \cdot \frac{\underline{\underline{m}}}{\underline{n}} \cdot \frac{\underline{\underline{n}}}{\underline{o}} \cdot \frac{\underline{\underline{o}}}{\underline{l}} = 1$$

die Gleichung

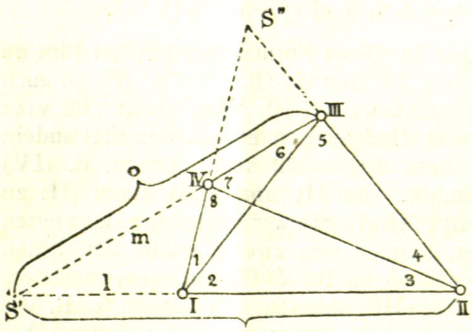

Fig. 5.

$$(\text{VI}) \quad \frac{\sin(\underline{7}+\underline{8}) \cdot \sin\underline{3} \cdot \sin(\underline{5}+\underline{6}) \cdot \sin\underline{2}}{\sin(\underline{1}+\underline{2}) \cdot \sin\underline{7} \cdot \sin(\underline{3}+\underline{4}) \cdot \sin\underline{6}} = 1,$$

eine Gleichung, die nichts anderes vorstellt als (I) : (II); und ebenso erhält man durch Benützung von S″ die Gleichung

$$(\text{VII}) \quad \frac{\sin(\underline{7}+\underline{8}) \cdot \sin\underline{4} \cdot \sin(\underline{1}+\underline{2}) \cdot \sin\underline{5}}{\sin(\underline{5}+\underline{6}) \cdot \sin\underline{8} \cdot \sin(\underline{3}+\underline{4}) \cdot \sin\underline{1}} = 1,$$

übereinstimmend mit (I) : (IV).

Die Gleichungen (VI) und (VII) sind hier noch auf diesem Weg abgeleitet, weil in einem Lehrbuch gesagt wird, man könne derartige weitere achtgliedrige *Si*-Gleichungen nicht in derselben mechanischen Art ablesen, wie die Gleichungen (I) bis (IV). Der Leser möge selbst den Grund für die anscheinende Asymmetrie suchen, nach der bei der Bildung von (VI) und (VII) durch Division zweier Grundgleichungen (I) bis (IV) zweimal die Gl. (I) vorkommt [(VI) hat sich als (I):(II) gezeigt; (VII) ist das Endglied dieser Reihe (I):(II); (II):(III); (III):(IV); (IV) : (I) $= \frac{1}{(\mathrm{VII})}$]. Bemerkt sei nur noch, dass der Versuch, eine achtgliedrige *Si*-Gl. mit Benützung des Vierstrahls zu erhalten, der von einer Ecke nach den drei übrigen und nach einem der Punkte S', S'' führt (z. B. von III aus nach II, I, IV und S'') sofort auf die sechsgliedrige Grundgleichung mit jener Ecke als Pol zurückführt. Etwas wichtiger ist, dass man die mechanische Bildungsregel der *Si*-Gleichungen aus Faktorenfolgen von Streckenquotienten derart, dass diese Folge eine Identität aufstellt und in jedem der Quotienten das Seitenverhältnis durch ein Sinus-Verhältnis ersetzbar ist, auch anwenden kann, ohne dass ein Pol gewählt würde, d. h. ohne dass die in die Gleichung aufgenommenen Strecken sich in einem Punkt zu vereinigen brauchen. Ein Beispiel dafür wird am Schluss dieser Nummer gegeben; der Leser möge diese Möglichkeit näher verfolgen, ebenso die geometrische Deutung aller der arithmetisch aufgestellten *Si*-Gleichungen (identisches Ergebnis für eine Vierecksstrecke, von einer gegebenen ausgehend, auf zwei verschiedenen Rechnungswegen, d. h. mit Anwendung des Sinus-Satzes auf verschiedene Dreiecke). Alle möglichen *Si*-Gleichungen lassen sich, wie bereits bemerkt, in einfachster Weise durch Multiplikation und Division (nach Logarithmierung Addition und Subtraktion) aus drei der vier elementaren *Si*-Gl. (I) bis (IV) gewinnen.

Nicht konvexes Viereck. Auch über die *Si*-Gl. des vollständigen Vierecks, bei dem eine Ecke innerhalb des Dreiecks der drei andern Ecken liegt, ist kaum etwas besonderes zu sagen. Die acht gemessenen Winkel, die ohne Stationsgleichung möglich sind, sind (vgl. Fig. 2) in Fig. 6 mit 1 bis 8 bezeichnet. Die vier elementaren *Si*-Gl. haben auch hier je eine der Ecken als Pol, bei ihnen kommt nach der in der Figur getroffenen Winkelanordnung ein Sinus der Summe zweier gemessener Winkel (in den vier elementaren *Si*-Gl. des konvexen Vierecks in jeder zweimal auftretend) in zweien je dreimal, in einer zweimal, in einer keinmal vor. Diese letzte Gleichung ist die mit D als Pol, in der hier die Sinus der 6 am Umfang liegenden gemessenen Winkel symmetrisch vorkommen:

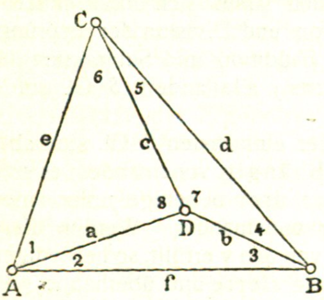

Fig. 6.

$$\sin \underline{1} \,.\, \sin \underline{3} \,.\, \sin \underline{5} = \sin \underline{2} \,.\, \sin \underline{4} \,.\, \sin \underline{6},$$

vgl. die achtgliedrige Gleichung (V) des konvexen Vierecks. Eine ebenso gebaute, nämlich nur die Umfangswinkel enthaltende *Si*-Gl. ist für jede Konfiguration wichtig, die eine beliebige Zahl von Dreiecken nach Andeutung von Fig. 7 so in geschlossener Folge nebeneinander reiht, dass sie eine Ecke S gemeinschaftlich haben, während je zwei sich folgende Dreiecke in einer Seite zusammenhängen und die freien Seiten der Dreiecke den Umfang eines geschlossenen Polygons bilden; eine der Bedingungsgleichungen von Fig. 7 lautet jedenfalls

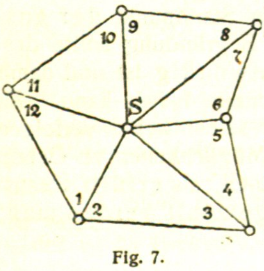

Fig. 7.

$$\frac{\sin \underline{1} \,.\, \sin \underline{3} \,.\, \sin \underline{5} \,.\, \sin \underline{7} \,.\, \sin \underline{9} \,.\, \sin \underline{11}}{\sin \underline{2} \,.\, \sin \underline{4} \,.\, \sin \underline{6} \,.\, \sin \underline{8} \,.\, \sin \underline{10} \,.\, \sin \underline{12}} = 1.$$

Wie erhält man am einfachsten achtgliedrige *Si*-Gl. aus der Fig. 6, wenn die mechanische Regel zu ihrer Aufstellung verwendet werden soll, den Gleichungen (V) bis (VII) entsprechend? Als Beispiel einer achtgliedrigen *Si*-Gl., die keinen Pol verwendet, sei an Fig. 6 noch willkürlich herausgegriffen:

$$\frac{\underline{d}}{\underline{b}} \cdot \frac{\underline{b}}{\underline{a}} \cdot \frac{\underline{a}}{\underline{e}} \cdot \frac{\underline{e}}{\underline{d}} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \underline{7} \cdot \sin \underline{2} \cdot \sin \underline{6} \cdot \sin (\underline{3} + \underline{4})}{\sin \underline{5} \cdot \sin \underline{3} \cdot \sin \underline{8} \cdot \sin (\underline{1} + \underline{2})} = 1,$$

die sich aber natürlich ebensoleicht wie jede andere aus den elementaren zusammensetzen lässt.

5. Zusammenstellung, der Reziprozität zwischen *Su*- und *Si*-Gleichungen im Viereck entsprechend. In unserem Viereck mit acht gemessenen Winkeln ohne Stationsbedingung sind nur **Summen-** und **Sinus-**Bedingungsgleichungen und die ihnen entsprechenden reduzierten Bedingungsgleichungen der v möglich. Da man zur einfachen geometrischen Konstruktion des Vierecks, von der gegebenen Seite ausgehend, vier der gemessenen Winkel braucht, so sind im ganzen

vier unabhängige Bedingungsgleichungen für die v

vorhanden.

Unter den

aufstellbaren ***Su***-Gl. (Dreiecks- oder Vierecks-„Schlussgleichungen") treten die vier als besonders einfach hervor, die den Winkelsummen der vier vorhandenen Dreiecke entsprechen (im konvexen Viereck je drei Winkel enthaltend, im nicht konvexen Viereck drei bis sechs Winkel enthaltend; die Zahl der in jeder Gleichung enthaltenen v ist ebensogross).

Aus ihnen lassen sich durch einfache Addition und Subtraktion alle andern aufstellbaren ***Su***-Gl. sofort ablesen.

Jene vier einfachsten ***Su***-Gl. sind aber nicht unabhängig voneinander; es sind vielmehr nur drei beliebige unter ihnen unabhängig voneinander. Werden diese drei ***Su***-Gl. von den v befriedigt, so wird damit auch die vierte und auch jede andere mögliche ***Su***-Gl. von den v erfüllt.

aufstellbaren ***Si***-Gl. (wie viele von verschiedener Form gibt es?) treten die vier als besonders einfach hervor, die man durch Anwendung der Ketten-Quotientenregel auf den von jeder Ecke des Vierecks ausgehenden Dreistrahl erhält (im konvexen Viereck wie im nicht konvexen sechsgliedrig, in jenem auch je 6 v, in diesem eine wechselnde Zahl von v enthaltend).

Aus ihnen lassen sich durch einfache Multiplikation und Division der ursprünglichen Gl. (Addition und Subtraktion der logarithmierten) alle andern ***Si***-Gl. sofort ablesen.

Jene vier einfachsten ***Si***-Gl. sind aber nicht unabhängig voneinander; es sind vielmehr nur drei beliebige unter ihnen unabhängig voneinander. Werden diese drei ***Si***-Gl. von den v erfüllt, so befriedigen die v auch die vierte und überhaupt jede andere mögliche ***Si***-Gl.

Die in unserem Viereck im ganzen vorhandenen vier unabhängigen Bedingungsgleichungen kann man theoretisch beliebig auf ***Su***- und auf ***Si***-Gleichungen verteilen mit der Ausnahme, dass dem eben Ausgesprochenen gemäss nicht alle vier Bedingungsgleichungen derselben Art sein können.

Man wählt bekanntlich aus praktischen Gründen stets

a) **3** ***Su***-Gl. und demnach **1** ***Si***-Gl., und die Lehrbücher gehen auf die zwei andern Möglichkeiten gar nicht ein, was zunächst nur vom Standpunkt der ausführenden Rechnung aus zu billigen ist; ein Wort der Begründung sollte deshalb nicht fehlen, weil die Wahl theoretisch keineswegs notwendig ist und damit die Frage entsteht, ob in keinem Fall eine andre Wahl Vorteile bieten kann. Zu dieser ersten Wahl, 3 ***Su***-, 1 ***Si***-Gl., stehen, wie der Leser selbst weiter verfolgen mag, eine überaus grosse Zahl (wie viele?) verschiedener Möglichkeiten zu Gebot. Es ist dabei natürlich leicht zu zeigen, dass man, die 3 ***Su***-Gl. als erfüllt vorausgesetzt, die eine weiter erforderliche ***Si***-Gl., welche auch gewählt werden mag, auf dieselbe Form bringen kann.