

Seitensteifigkeit von Eisenbetonbogenbrücken

Von Professor Dr. Ing. Alfred Hawranek, deutsche technische Hochschule, Brünn

Das Problem der Seitensteifigkeit von Eisenbetonbogenbrücken ist derzeit nicht *vollständig* gelöst. Es sind dabei viele Umstände zu berücksichtigen, die sich nicht leicht in Formeln kleiden lassen, so daß man alle bisherigen Versuche der Lösung als Näherungen ansehen muß, wenn auch diese vom praktischen Gesichtspunkte als ausreichend betrachtet werden, rein theoretisch genommen aber noch nicht ganz befriedigen können.

Das Bestreben nach einer einwandfreien Lösung der Aufgabe ist aber in letzter Zeit sowohl für Eisenbeton-, sowie für Eisenbogenbrücken deshalb dringender geworden, weil einmal derzeit die Anwendung hochwertiger Baustoffe (hochwertige Zemente, Baustahl St-48 und Si-Stahl) in den Vordergrund getreten ist und damit schlankere Abmessungen der Druckglieder erzielt werden können, andererseits, weil bei der immerwährend im Vordergrund stehenden Steigerung der Spannweite die auftretenden Querlasten größere Bedeutung gewinnen und schließlich besondere Ausführungssysteme, sei es bei der wiederholt empfohlenen teilweise steifen Bewehrung von Eisenbetonbogen (System MELAN) und der Anwendung von Gußeisen als Druckbewehrung (System EMPERGER), besonders für große Spannweiten, die Schlankheitsgrade größer geworden sind.

Nicht zuletzt beeinflussen auch die allgemein eingeführten höheren zulässigen Inanspruchnahmen der Baustoffe, auch die gesteigerten zufälligen Lasten und ihre seitlichen Stoßwirkungen die Quersteifigkeit der Brücken in nicht geringem Maße.

Um einen klaglosen Fortschritt der Bauweisen in den geschilderten Belangen zu ermöglichen und zu sichern, muß die Theorie weitere Wege weisen.

Nach unserer Ansicht müssen vor allem bei den einschlägigen Untersuchungen, die die Wissenschaft bisher zur Verfügung gestellt hat, die *Voraussetzungen* und *Annahmen* für die rechnerischen Entwicklungen überprüft werden. Es muß festgestellt werden, welche dieser Voraussetzungen bei den nunmehr vorliegenden Verhältnissen beibehalten und welche abgeändert werden müssen. Die neuen Lösungen werden hiebei wohl nicht einfacher sein.

Das Problem der Quersteifigkeit der Bogenbrücken setzt sich eigentlich aus mehreren Einzelaufgaben zusammen, und zwar, die Knicksicherheit des Bogens in der Tragwandebene vorausgesetzt, aus

1. der Festigkeit gegen das Ausknicken aus der Tragwandebene,
2. der Beanspruchung des Bogens bei seitlichen Kräften,
3. der Wirkung der Querriegel und Querverbände,
4. der Wahl der Elastizitätsziffer.

Zu diesen Fragen treten noch andere, die zum Schlusse gestreift werden sollen.

Im folgenden sollen vor allem solche Brücken behandelt werden, welche *keine* oberen Querverbindungen aufweisen. Die für die Berechnung der Seitensteifigkeit später erörterten Rechnungsverfahren gelten sowohl für *Eisen-, wie Eisenbetonbrücken*; wo diese Verfahren infolge des Baustoffs abweichen, werden sich einschlägige Erörterungen anschließen.

Die nachstehenden Ausführungen gliedern sich in folgende Hauptabschnitte:

- A. Näherungsverfahren für das Knicken aus der Tragwandebene.
- B. Genaue Verfahren zur Bestimmung der Seitensteifigkeit.
- C. Berechnung der Momente im Bogen quer zur Tragwandebene, bei Eigengewicht und Nutzlast.
- D. Elastizitätsziffer für Eisenbetonbogenbrücken bei Beanspruchung auf Knickung.
- E. Wirkung oberer Querverbindungen.

Auf die Berechnung der Knicksicherheit von Bogenbrücken *in der* Tragwandebene soll hier nur der Übersicht halber eingegangen werden.

Die Knicksicherheit von Bogenbrücken in der Tragwandebene

Ist bei dem derzeitigen Stand der konstruktiven Ausbildung für die normalen Belastungen reichlich vorhanden. Die einschlägigen theoretischen Erwägungen für Bogen aller Art finden sich bei ENGESSER¹ und BLEICH² sowie in dem Buche Doktor R. MAYERS³ für Bogen von kleinem Pfeilverhältnis. Wird beispielsweise für eine Eisenbetonbogenbrücke von 52,8 m Stützweite und 9,6 m Pfeil, einem eingespannten Bogen mit aufgehängter Fahrbahn für Eigengewicht und Nutzlast bei $E = 210000 \text{ kg/ccm}$ die Knicksicherheit unter Annahme eines mittleren Bogenquerschnittes nachgerechnet, so ergibt sich eine 52fache Sicherheit gegen das Ausknicken in der Tragwandebene (Knickkraft 29600 t, Kämpferkraft 567,8 t), dabei ist die freie Knicklänge $l_k = 19,3 \text{ m} = \frac{1}{2,74} l$; für einen Zweigelenkbogen ergäbe sich eine Knicksicherheit von 22,6 (Knickkraft 12830 t).

Bezeichnet b die Bogenlänge, i_x den kleinsten Trägheitshalbmesser des mittleren Bogenquerschnittes für die Biegung *in der* Tragwandebene, i_y für Biegung quer zur Tragwand, so ist in dem vorliegenden Beispiele der Bogenschlankeitsgrad λ_x bei $b = 57,18 \text{ m}$, $i_x = 56,3 \text{ cm}$, $\lambda_x = \frac{b}{i_x} = 101,5$

Für eine Anzahl von ausgeführten Eisenbetonbogenbrücken mit aufgehängter Fahrbahn sind die $I_x I_y i_x i_y$ für die jeweiligen mittleren Querschnitte ermittelt worden und auch die Schlankheitsgrade $\frac{b}{i_x}$, $\frac{b}{i_y}$; auch für zwei EMPERGER-Brücken sind die Rechnungen durchgeführt worden.

In der nebenstehenden Tafel I sind diese Werte angeführt.

Wenn man von der an zweiter Stelle stehenden Brücke bei Pettoncourt abieht, welche im Bogen flachliegende Querschnitte aufweist und für die $\lambda_x = 195$, sind fast alle Werte λ_x unter 100 und nehmen mit steigender Spannweite bis etwa $\lambda_x = 50$ ab. In Verbindung mit I_x läßt sich durchwegs ein großer Sicherheitsgrad für das Knicken in der Tragwandebene nachweisen. Er ist so groß, daß wahrscheinlich auch Ausführungen mit hochwertigem Zement und Eisen diese ausreichende Sicherheit aufweisen werden.

¹ ENGESSER, Knickfestigkeit des Dreigelenkbogens, Eisenbau 1913, S. 425.

² Dr. BLEICH, Theorie und Berechnung eiserner Brücken. Berlin 1924.

³ Dr. R. MAYER, Die Knickfestigkeit, 1921, S. 139 bis 148 und Eisenbau, 1913, S. 425.

Tafel I
Abmessungen und Schlankheitsgrade von Eisenbetonbogenbrücken mit untenliegender Fahrbahn

	Stützweite l m	Fteilhöhe f m	Abstand der Hängsäulen a m	Mittlerer Bogen- querschnitt F	m^4		m		$\frac{b}{i_x}$	$\frac{b}{i_y}$	Bogenlänge m	Zahl der Quertiegel	Quelle
					in der quer zur Tragwand	I_y	in der quer zur Tragwand	i_y					
1	Rosenfelderbrücke Ralsdorf..	17,80	3,75	2,225	0,272	0,00769	0,1682	0,1315	118	151	19,9	0	Handbuch f. Eisen- betonbau, S. 381
2	Brücke Pettoncourt	20,0	2,675	1,755	0,335	0,00380	0,1065	0,1490	197	140	20,95	0	
3	Kristiansstadt	20,0	4,50	1,70	0,453	0,02318	0,2265	0,148	100,2	153,4	22,70	0	Beton und Eisen Jg. 1916, S. 6
4	Obrabrücke b. Kosten	23,20	5,40	2,32	0,693	0,05655	0,286	0,179	46,4	74,1	26,55	1	B. u. E. 1913, S. 428
5	Jaispitzbrücke, Durchlaß....	24,0	5,00	3,00	0,627	0,04884	0,279	0,143	48,0	93,7	26,77	1	B. u. E. 1912, S. 39
6	Elsterbrücke, Dölan	29,30	5,30	2,93	0,731	0,05871	0,284	0,164	45,6	78,7	31,86	3	B. u. E. 1915, S. 125
7	Regenbrücke, Altenstadt....	36,25	3,85	3,00	0,397	0,02888	0,270	0,115	52,1	122,0	37,34	4	B. u. E. 1912, S. 384
8	Hauptbahnhof Trier	38,0	8,75	2,15	1,0476	0,20728	0,445	0,188	41,5	98,2	43,38	3	B. u. E. 1926, S. 269
9	Biegener Brücke	45,0	7,50	3,50	0,941	0,12280	0,362	0,202	52,2	93,5	48,32	3	B. u. E. 1914, S. 275
10	Niedernholzerbrücke	47,9	8,02	3,50	1,225	0,19525	0,399	0,237	51,2	86,2	51,46	3	B. u. E. 1913, S. 126
	Empergerbrücken												
11	Aspachbrücke Burgstall	34,7	5,30	3,15	0,307	0,00387	0,282	0,105	131,0	353	36,86		B. u. E. 1928
12	Alnbrücke Scharnstein	60,30	11,50		0,840	0,137	0,404	0,173	164,0	382	66,14	2	B. u. E. 1928

Nur die EMPERGER-Brücken haben einen Schlankheitsgrad von 131 bzw. 164. Die Knicksicherheit dieser Bogen konnte wegen in der Literatur fehlenden genauen Angaben noch nicht festgestellt werden.

Die Mitwirkung der Fahrbahntafel und auch der Hängesäulen erhöht die Sicherheit und ganz besonders ist dies bei Brücken mit Zugband und betonierten Hängesäulen der Fall. Für den Einfluß der Fahrbahntafel auf die Knicksicherheit der Bogen in der Tragwandebene ist derzeit in der Literatur noch kein Berechnungsverfahren angegeben.

Bei wachsenden Spannweiten wird man genötigt sein, den Bogenquerschnitt hochzustellen und für ihn entsprechend kleinere Breiten zu wählen, damit nicht unnütz Nutzbreite der Brücke verloren geht und so dürfte auch in diesem Falle die Knicksicherheit in der Tragwandebene ausreichend erhalten werden. Jedenfalls ist aber eine Nachprüfung nötig.

Das Knicken von Bogenbrücken aus der Tragwandebene

A. Näherungsverfahren für das Knicken aus der Tragwandebene.

Wichtig für dieses Knickproblem ist die Bestimmung der Form der Biegelinie des Gurtes vor dem Ausknicken. Sie ist erschwert durch die Mannigfaltigkeit der konstruktiven Ausbildungen der Brücken, die Veränderlichkeit der Querschnitte, der Trägerhöhen und die Verschiedenheit der Stabanschlüsse und Einspannungen. Der rein theoretische Fall einer regelmäßigen Sinuslinie wie beim geraden Stab ist hier ausgeschlossen und so muß man sich entschließen, sich mit Annäherungen zu begnügen, welche den gerade vorliegenden Verhältnissen entsprechen.

Schon bei *Balkenbrücken* werden nach der Berechnung ENGESSERS und auf Grund seiner Vorversuche (Zentralbl. der Bauverwaltung 1909, S. 179) auch in Wirklichkeit die Wellenlängen beim Ausknicken gegen das Brückenende *kleiner*.

Bei *Bogenbrücken* wird dies in um so höherem Maße der Fall sein, als der Bogen an den Enden eingespannt, oder mit einem Zugband an einer, oft mit sehr großem Querschnitt versehenen Anschlußstelle verbunden ist. Selbst bei einem Zweigelenkbogen wird bei einer immer im Kämpfer angeordneten Querverbindung für die Knicklinie kein Gelenkpunkt angenommen werden können, wie dies ENGESSER beim Obergurtende tut. Die Halbrahmensteifigkeit nimmt gegen die Enden zu. Außerdem nimmt aber, wenigstens bei eingespannten und beim Eingelenkbogen der Querschnitt gegen den Kämpfer zu, und zwar in höherem Maße als es der Bogenkraft entspricht, weil die Einspannungsmomente dort oft den größeren Anteil an der Querschnittsvergrößerung haben. Außerdem durchschneiden oft Bogen mit niedriger liegenden Kämpfern die Fahrbahn, wo sie neuerlich Verbindungsmöglichkeit mit letzterer haben (wenn man nicht auf sie verzichtet), so daß diese Anordnung selbst bei Zweigelenkbogen gegen seitliches Knicken eine teilweise Einspannung ergibt, die mitunter recht groß werden kann, besonders wenn unter der Fahrbahn zwischen den Bogen noch weitere Querverbindungen vorliegen.

Werden Rippen von Zweigelenkbogen etwa durch eine weiter reichende Querplatte in der Nähe der Kämpfer verbunden, wie dies EMPERGER bei der Traunfallbrücke ausführte, so liegt eine ähnliche teilweise Einspannung in besonderem Maße vor.

Alle diese Umstände führen, was das Knickproblem betrifft, zu einem im allgemeinen günstigeren Verhalten als dies bei offenen Balkenbrücken der Fall ist. Leider sind bisher für offene Eisenbetonbogenbrücken noch keine *Bruchversuche* durchgeführt worden, die bei systematischer Durchführung wohl sehr zur Klärung der Frage beitragen würden.

Die nun unter A zu erörternden und kritisch zu besprechenden Näherungswege geben geschlossene Formeln für die Knicklast, die Wellenlänge und die Knicksicherheit unter verschiedenen vereinfachenden Voraussetzungen, so daß sie den Konstrukteur die erforderlichen Abmessungen ermitteln lassen, während die unter B angegebenen Verfahren eine Nachprüfung der Knicksicherheit unter weitergehender Berücksichtigung der gegebenen Verhältnisse allerdings auf einem umständlichen Wege ermöglichen.

Die Näherungsformeln haben sich lange im Eisenbau bewährt, so daß ihre Anwendung auch im Eisenbetonbau mit entsprechenden Abänderungen, die unter D gegeben werden, gerechtfertigt erscheint.

I. Prof. Dr. Fr. ENGESSER⁴ ermittelt in seinem bekannten Verfahren die Knickkraft der Gurtung und setzte eine über die ganze Gurtung wirksame *konstante Gurtkraft* voraus, ebenso das Trägheitsmoment. Bedeuten I das Trägheitsmoment der Gurtung, c die Feldlänge, A die Rahmensteifigkeit, das ist die Gegenkraft des Rahmens bei einer seitlichen Ausbiegung $\delta = 1$, dann ist die Knickkraft

$$P = 2 \sqrt{\frac{E I A}{c}}, \text{ die Wellenlänge} = \pi \sqrt[3]{\frac{E I c}{A}}. \text{ Beides sind Näherungswerte.}$$

Veränderliche Gurtkräfte und Steifigkeiten will ENGESSER durch angemessene „bezogene“ Mittelwerte von I und A berücksichtigen.

Die Formel für P gilt solange, als die Knickspannung $\frac{P}{F}$ innerhalb der Elastizitätsgrenze bleibt. Wird diese überschritten, dann ersetzt bekanntlich ENGESSER E durch den Knickmodul T .

Endlich gibt ENGESSER Gleichungen für die Knickkraft (siehe unten angegebene Quelle) zwischen welchen in praktischen Fällen die maßgebende Knicklast liegt. Im übrigen sind die ENGESSERSchen Formeln für den frei aufliegenden Träger (Parallelträger) entwickelt, bei dem die Gurtkräfte gegen die Enden abnehmen; er schließt dadurch auf einen Überschuß an Sicherheit gegenüber den Formelwerten, besonders wenn es sich um vieleckige Gurtungen handelt.

Bei Bogenträgern nehmen aber die Bogenkräfte gegen die Lager hin zu; es wird also der Sicherheitsgrad bei sonst gleichen konstruktiven Bedingungen, wenn man nach ENGESSER rechnen wollte, abnehmen, dagegen erhöht wiederum die größere Seitensteifigkeit der nahe den Brückenenden liegenden niedrigen Halbrahmen den Sicherheitswert. Um wieviel, ist nach ENGESSER unmöglich festzustellen, da die Ableitung obiger Formeln für konstante A -Werte erfolgt.

2. KAYSER.

Prof. H. KAYSER⁵ sucht in seiner Abhandlung jene Wellenlängen λ , bei denen die geringste Biegungsarbeit geleistet wird und ermittelt den Sicherheitsgrad n der Gurtung gegen Knicken. Dabei geht er von den Gleichungen für die Formänderungsarbeit aus, schließt sich im wesentlichen an den Entwicklungsgang ENGESSERS an, und rechnet bei Vernachlässigung der Durchbiegung der Querträger die Wellenlänge

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{100 c h^3 J_1}{3 J_2}}$$

(h -Querrahmenhöhe, J_1 = Trägheitsmoment des Gurtes, J_2 des Pfostens).

⁴ Zentralbl. d. Bauv. 1909, S. 179.

⁵ H. KAYSER, Die Knicksicherheit der Druckgurte offener Brücken. Zentralblatt d. Bauverwaltung 1909, S. 45, 349, 611. — F. ENGESSER, Zentralblatt d. Bauverwaltung 1909, S. 178. — E. ELWITZ, Zentralblatt d. Bauverwaltung 1909, S. 563.

Mit Berücksichtigung der Durchbiegung des Querträgers ist

$$\lambda = \sqrt[3]{100 c E J_1 \left(\frac{h^3}{3 E J_2} + \frac{h^2 b}{3 E J_3} \right)}$$

(b = Hauptträgerabstand, J_3 = Trägheitsmoment des Querträgers).

Als Sicherheitsgrad der Konstruktion definiert KAYSER das Verhältnis der gedachten Biegeungsarbeit für die Welle kleinsten Widerstandes zur inneren Druckarbeit

$$n = \frac{A_i}{P \Delta \lambda}$$

P ist hier die vorhandene Gurtkraft bei Einhaltung der zulässigen Inanspruchnahme des Baustoffs. KAYSER begibt sich also *nicht* in den Bereich plastischer Formänderungen, was eigentlich erforderlich wäre. Auch diese Ableitungen gelten für Balkenträger.

Dabei darf nicht vergessen werden, daß bei dem eingeschlagenen Rechnungsgang nicht ein mittlerer Wellenberg, wenn er auch größer ist als die seitlich anschließenden, herausgegriffen werden darf, wenn die kleinste Biegeungsarbeit gerechnet wird, sondern die Gesamtarbeit aller Wellen in die Rechnung einbezogen werden müßte. Wie man aus der Abb. 2c der Abhandlung KAYSERS entnehmen kann, sind gerade die Formänderungs-Arbeiten der Endwellen großen Schwankungen bei selbst kleinen Änderungen der Mittelwellenlänge im schrittweisen Verfahren unterworfen, so daß sie das gesamte Arbeitsminimum stark beeinflussen, außer in dem Sonderfall, wenn alle Wendepunkte der Wellen in der ursprünglichen Haupttragwand liegen.

KAYSER gibt ein graphisches Näherungsverfahren für Bogenträger an. Es wird schrittweise jene mittlere Wellenlänge für veränderliche Halbrahmenwiderstände gesucht, welche die geringste Arbeitsleistung aufweist. Dabei wird die Mittelkraft aller Kräfte in einem Schnitte nahe dem Scheitel eingeführt und außerdem angenommen, daß bei dem 71,00 m weitgespannten Sichelfachwerkbogen (Röntgen-Brücke, Berlin), die für die Knickung maßgebende Bogenachse mit der Mittellinie der Bogengurtungen zusammenfalle, was allerdings nicht immer zutrifft.

Hiebei erhält KAYSER eine Wellenlänge $\lambda = 32,40$ m bzw. 30,30 m, je nachdem die Durchbiegung des Querträgers berücksichtigt wird oder nicht, das ist $\frac{1}{2,2}$ bzw. $\frac{1}{2,34}$ der Stützweite oder nahezu 6,5 Feldweiten. Die Knickkraft beträgt 5020 t.

Wird dieser Fall nach ENGESSER gerechnet, so ergibt sich 4840 t als Knicklast. Der Unterschied ist also nicht groß. Die größere Sicherheit liegt auf der Seite der ENGESSERSchen Formel. Das kann auch ein Zufall sein, es wäre deshalb die Knicksicherheit von offenen Bogenbrücken nach den verschiedenen Formeln zu rechnen.

Es unterliegt keiner Schwierigkeit, dieses Näherungsverfahren auch auf Eisenbetonbogen anzuwenden. In Wirklichkeit wird, wegen der viel größeren Steifigkeit der seitlichen Brückenteile, die mittlere Wellenlänge kürzer sein; um wieviel, kann auch hier nicht genau gesagt werden. Jedenfalls hat die KAYSERSche *Knicksicherheit* unter dem Einfluß der Nutzlast einen ebenso ideellen Wert wie die *Sicherheit gegen Knicken* ENGESSERS bei Anwendung von E in dessen Formeln.

3. BRISKE.

R. BRISKE⁶ untersucht den Fall mittels der Arbeitsgleichung und nimmt an, daß die Ausknickung nach einer Aneinanderreihung eines Wellenberges und zweier

⁶ Knicksicherheit der Druckgurte offener Brücken. Zentralblatt d. Bauverwaltung 1910, S. 53.

benachbarten halben Wellentälern erfolgt, an welche sich gerade Stücke, einer Endenspannung entsprechend anschließen. Die Ausbiegungen werden parabolisch angenommen.

Er enthält

$$\begin{aligned} \text{die Knickkraft } P &= 3,4 \sqrt{\frac{E J_1}{\delta c}} \\ \text{die Wellenlänge } \lambda &= 4,85 \sqrt[4]{E J_1 \delta c} \\ &\text{(volle Welle)} \end{aligned}$$

Der Wert für P ist um 70% größer als nach ENGESSER.

Bei einer geänderten Annahme des Verlaufs der Ausbiegung beim Knicken, wonach diese bei einer vollen Länge der Welle λ , der mittlere Wellenberg $m \cdot \lambda$ lang, angenommen wird und m einen echten Bruch bedeutet, erhält Briske bei konstanter Quersteifigkeit der Rahmen mit $m = 0,38$

$$\begin{aligned} P &= 3,3 \sqrt{\frac{E J_1}{\delta c}} \\ \lambda &= 5,07 \sqrt[4]{E J_1 \delta c} \end{aligned}$$

Das gibt also praktisch geringe Unterschiede. — Auch hier handelt es sich um eine Ableitung im E -Bereich.

Diese letzteren Formeln geben kleinere Sicherheiten gegen Knicken als man nach einem genaueren Verfahren von MÜLLER — Breslau erhält, von welchem Verfahren noch die Rede sein wird.

Sehr lehrreich sind die nachgerechneten Knicksicherheiten der Havel-Brücke im Zuge der *Döberitzer Heerstraße* mit einer Stützweite von 63 m. Nach obigen Formeln ergibt sich eine Sicherheit n gegen Knicken:

Nach BRISKE 11,5, nach ENGESSER 7,0, nach MÜLLER — Breslau *genau* 13.

Eine Wiederholung der Rechnung mit den vierfachen Werten δ_a ergab nach BRISKE eine Sicherheit von 5,9, nach MÜLLER - Breslau von 8. Jedenfalls sieht man, bei den ziemlich auseinanderliegenden Werten von n , daß man nach ENGESSER bei Bogenbrücken sicherer rechnet als nach BRISKE, andererseits die starken Einspannungsverhältnisse an den Bogenenden die tatsächliche Sicherheit der Bogenbrücken gegen Knicken wesentlich erhöhen, nach den vorliegenden Rechnungen fast um das Doppelte.

Schon hier soll auf den großen Einfluß der Berücksichtigung der Bogenkrümmung durch die ε -Werte MÜLLER - Breslaus nach der Seite der größeren Sicherheit hingewiesen werden.

Wichtig ist ferner die Feststellung, daß nach der BRISKEschen Formel in dem vorerwähnten Beispiel die Länge $\lambda = 38,9$ m, das ist $\frac{1}{1,62}$ der Spannweite beträgt. Auch ergibt diese Formel bei weniger steifen konstruierten Querrahmen einen größeren Abfall der Sicherheit gegen die genaue Berechnung, als bei sehr steifen Halbrahmen. In letzterem Falle nähert sich das Ergebnis der BRISKEschen Formel dem genauen Werte.

4. TIMOSCHENKO.

Auf die sehr eingehenden Untersuchungen TIMOSCHENKOS⁷ über die Knicksicherheit sei hier besonders hingewiesen, wobei dieser auch die Steifigkeit der Schrägstäbe, nach einem linearen Gesetz von der Mitte gegen die Enden zunehmend, berücksichtigt und Formeln mit Zuziehung von Tabellen angibt.

⁷ Annales des ponts et chaussées 1913. Fasc. III, IV, V.

5. DR. BLEICH.

In seiner außerordentlich lehrreichen Abhandlung über die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen⁸ gibt Dr. BLEICH 1919 eine Formel für die Knick-sicherheit von Druckgurten.

Er setzt eine konstante Druckkraft, unveränderliches Trägheitsmoment, gleiche Feldlängen und überall gleiche Rahmenwiderstände voraus. Außerdem werden die Brückenden durch Portalrahmen unverschieblich aber *drehbar* festgehalten.

Durch sehr geschickte Umformung der Momentengleichungen und Übergang zu Differenzgleichungen erhält er durch Zerfall drei Knickbedingungen und schließlich kommt er zu dem Ausdruck für den spezifischen Widerstand A , das ist jene Kraft, die die wagrechte Querverschiebung *Eins* der Stütze hervorruft

$$A = \frac{2 \psi S}{l} \cdot \frac{\left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}\right) a - b}{1 - \frac{b}{1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}}} \quad \nu = 1, 2, \dots, n - 1$$

$$a = \frac{\varphi}{\varphi - \sin \varphi} \quad b = 3 - \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^2$$

$$\varphi = l \sqrt{\frac{\psi S}{E J \tau}} = l \sqrt{\frac{\psi S}{J T}}$$

Darin bedeuten:

ψ = Sicherheitsgrad,

n = Felderzahl,

S = Druckkraft,

τ = Knickzahl = $\frac{T}{E}$,

T = Knickmodul (ENGESSER).

Bei wachsenden n nähert sich der Wert A einem Maximum, welchen Wert BLEICH für die Bemessung vorschlägt, ($n = \infty$) und erhält das nötige A , das dem Sicherheitsgrad ψ entspricht.

$$A = \frac{2 \psi S}{l} \left[3 - \left(\frac{\varphi}{\pi}\right)^2 \right] \frac{\sqrt{\varphi} - \sqrt{\sin \varphi}}{\sqrt{\varphi} + \sqrt{\sin \varphi}} = \frac{2 \psi S}{l} \cdot \Phi$$

Durch die Einführung des Knickmoduls ist die Formel auch für den plastischen Bereich anwendbar.

Über den bei Eisenbetonbrücken einzuführenden Wert T finden sich in Abschnitt D nähere Angaben.

Von den bisher hier angeführten Näherungsformeln, die alle von gleichen Vereinfachungen ausgehen, ist die oben angegebene von Dr. BLEICH die genaueste. Nachprüfungen haben gezeigt, daß sie *kleinere* Sicherheitsgrade gibt als die ENGESSERSchen Formeln, wiewohl, wenigstens bei Eisenbrücken, die ENGESSERSche Formel noch ausreichende, wenn auch kleine Sicherheiten, gibt.

Auch die Formel von BRISKE gibt zu große Sicherheiten.

Es empfiehlt sich demnach nach BLEICH zu rechnen, so lange die etwas anders liegenden Verhältnisse bei Eisenbetonbrücken nicht durch Versuche mit Brücken genügend geklärt sind.

⁸ Eisenbau 1919, S. 27, 120. Eisenbau 1922, S. 34. Dr. BLEICH F., Theorie und Berechnung eiserner Brücken. Berlin 1924. Verlag Springer, S. 198.

B. Genaue Verfahren zur Bestimmung der Seitensteifigkeit.

Die bisherigen Formeln gaben geschlossene Näherungsausdrücke für eine rasche Berechnung der Knicklast und der Wellenlänge der Gurten offener Brücken, die unter vereinfachenden Annahmen, die im vorstehenden Abschnitt angegeben sind, entwickelt wurden.

Nun sollen die genauen Rechnungsmethoden angegeben und kritisch beleuchtet werden.

1. ENGESSER⁹ hat 1892 als erster dieses Problem zu lösen versucht, indem er sich die einzelnen Gurtstäbe mit Kugelgelenken angeschlossen denkt. Hier muß aber dieses Verfahren ausgeschieden werden, da es sowohl für Brücken in Eisen, wie in Eisenbeton wegen der durchlaufenden Gurten nicht gut angewendet werden kann und die tatsächliche Sicherheit der Gurte gegen Knicken sicher viel größer sein wird, als sich nach diesem ENGESSERSchen Verfahren ergibt. Eine kurze Angabe des Rechnungsweges findet sich später.

Ebenso gibt ein zweites Verfahren ENGESSERS, das einen durchgehenden Gurt mit unendlich großem Trägheitsmoment voraussetzt, keine Anwendungsmöglichkeit für Bogenbrücken. Beide Verfahren geben höchstens untere bzw. obere Grenzwerte der Knicksicherheit.

Dagegen ist aber schon in dieser Abhandlung das *wesentliche* Kriterium für den Knickfall gegeben; daß die *Nennerdeterminante* einer Reihe von Gleichungen, die zur Ermittlung der Knotenpunktsverschiebungen dient, Null werden muß. Dabei müssen soviel Gleichungen angeschrieben werden, als Felder im Tragwerk vorliegen.

2. MÜLLER-Breslau¹⁰ baut 1908 auf der ENGESSERSchen Ableitung auf. Voraussetzungen sind: Form und Belastung der Brücke sind symmetrisch, es wirken nur lotrechte Lasten, die Eigengewichtslasten in den oberen Gurtknotenpunkten werden vernachlässigt, ebenso die wagrechten Querverschiebungen der Untergurtknoten. Auch von der Verwindung der Gurte und Füllungsstäbe wird abgesehen. Es wird eine Ausbiegung der oberen Gurtung in der Querrichtung angenommen. Die Ausbiegungen in den Knotenpunkten wären δ_m , dabei entstehen in den Knotenpunkten m Seitendrucke X_m . Diese lassen sich durch drei aufeinanderfolgende δ_{m-1} , δ_m , δ_{m+1} ausdrücken. Mit Hilfe der Querverschiebung δ'_m , die das obere Ende des Halbrahmens für $X_m = \Phi$ erfährt und dem Verschiebungswert des freien Halbrahmens infolge $X_m = 1$ ist es möglich, X_m zu eliminieren und eine Gleichung zwischen δ und δ' aufzustellen.

Man kann soviel Gleichungen mit je 3 aufeinander folgenden δ aufstellen als unbekanntes Verschiebungen vorhanden sind, und dann die Nennerdeterminante berechnen.

Diese wird bei richtig konstruierten Brücken für die gegebenen Nutzlasten natürlich nicht Null sein. Deshalb wird eine ϱ -fache Belastung angenommen und hierfür der Determinantenwert bestimmt. Je größer das ϱ , desto kleiner die Nennerdeterminante Δ , bis bei einem bestimmten ϱ_0 die Größe Δ negativ wird, also durch Null hindurchgegangen ist. Dieser Wert gibt also den Sicherheitsgrad an, ein konstantes E vorausgesetzt. Über die Bedeutung der Sicherheit soll später noch Näheres gesagt werden. Diese Methode gilt für Gurtungen mit gedachten Kugelgelenken.

Bei der *gelenklosen durch Halbrahmen gestützten Gurtung* ist noch die Biegesteifigkeit der Gurten zu berücksichtigen, so daß die Gleichung für X_m noch die Gurtmomente in der Querrichtung enthält. Durch Elimination des X_m , was in ähnlicher Weise wie oben geschieht, erhält man wieder eine Gleichung mit drei aufeinanderfolgenden δ und drei Momenten. Da noch $n - 1$ Gleichungen fehlen,

⁹ Nebenspannungen S. 142, 148, und Zentralblatt d. Bauverwaltung 1892, S. 349.

¹⁰ Statik d. Baukonstruktionen, I. Bd. 2. Abt. S. 309, 326.

müssen sie aus der Kontinuität der Gurtungen an den Knotenpunkten abgeleitet werden, so daß dann $2n$ Gleichungen mit je fünf Unbekannten vorliegen, deren Nennerdeterminante für den Knickfall Null sein muß.

Zu dem Ausfall einer Unbekannten aus den Knickgleichungen gelangt MÜLLER-Breslau durch Gleichsetzung zweier Beiwerte, was somit eine Näherung gibt.

3. OSTENFELD¹¹ gibt ein genaues und ein Näherungsverfahren; auf diese Verfahren wird hier nicht eingegangen, da ein eigenes Referat darüber vorliegt.

4. ZIMMERMANN.

Da die früher angeführten Verfahren von ENGESSER und MÜLLER - Breslau sich auf Fachwerkbrücken beziehen, sei im folgenden das eigentliche Knickproblem von *Bogenbrücken* nach den klassischen Entwicklungen ZIMMERMANN^{s12}, die dieser für das Stabeck auf elastischen Zwischenstützen gegeben hat, in der Fassung und mit den Zusätzen des Verfassers¹³ gekürzt behandelt. Näheres ist aus dem Buche des Verfassers „Nebenspannungen“ zu entnehmen. Es wird die *Knickbedingung* entwickelt. Vernachlässigt ist hier bloß die Verdrehung der Gurte, was bei den kleinen

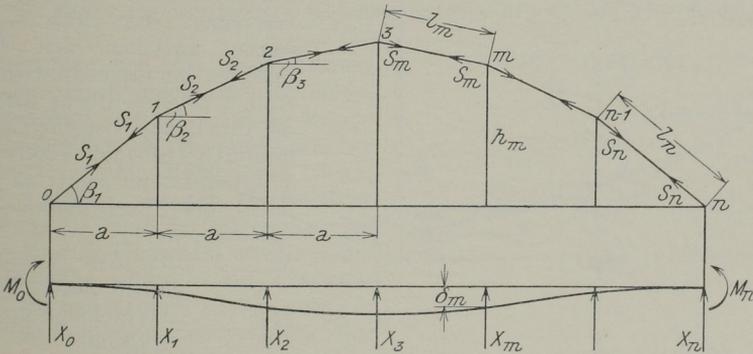


Abb. 1

Querausbiegungen zulässig ist. Ihre Berücksichtigung würde n unbekannte Verdrehungsmomente, deren Vektor in die Bogenachse fällt und $(n-2)$ Verdrehungsmomente der Hängesäulen zur Folge haben, die die Zahl der Gleichungen um $2n - 2$ vermehren, was die Auswertung der Determinante wesentlich erschweren würde. Die rechnerische Arbeit bei der Auswertung der Nennerdeterminante ist nicht so groß wie sie aussieht. Abgesehen davon, daß die Symmetrie der Anlage wesentliche Vereinfachungen bringt und eine Rechenmaschine selbst bei größerer Zahl der Hängestangen die Arbeit bald bewältigt.

Entwicklung der Knickbedingungen.

Es bezeichnen:

S_1, S_2, \dots, S_n Die durch die Brückenbelastung in dem Bogen erzeugten Achsialkräfte,

¹¹ Die Seitensteifigkeit offener Brücken. Beton und Eisen 1916.

¹² Dr. ZIMMERMANN H., Das Stabeck auf elastischen Einzelstützen mit Belastung durch längsgerichtete Kräfte. Sitzungsberichte der kgl. preuß. Akad. d. Wissenschaften 1907. Phys. math. Abt.

¹³ Dr. A. HAWRANEK, Nebenspannungen von Eisenbetonbogenbrücken. Berlin 1919. W. Ernst & Sohn, S. 114.

- T_1, T_2, \dots, T_n ihre wagrechten Projektionen,
- X_0, X_1, \dots, X_n die in den Bogenknoten entstehenden elastischen Stützkkräfte senkrecht zur Trägerebene,
- M_0, M_n die Einspannungsmomente an den Trägernenden,
- J_1, J_2, \dots, J_n die Trägheitsmomente der Bogengurtquerschnitte in Bezug auf ihre in der Tragwandebene gelegenen Achse,
- l_1, l_2, \dots, l_n die Gurtstablängen,
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ die Neigungswinkel der Gurtstäbe gegen die Wagrechte.

Alle Zeiger von Größen, die sich auf eine Feldweite beziehen, erhalten die Ordnungsziffer jenes Knotenpunktes, der sich auf der rechten Seite des Feldes in Abb. 1 vorfindet. Die Momente M_0, M_n wirken auf die Endstäbe in Ebenen, die senkrecht zur Tragwandebene durch die Stabachsen hindurchgelegt werden.

Infolge der verschiedenen großen Verbiegungen der Hängesäulenköpfe wird der Hauptträger aus der Tragwandebene herausgebogen. Jeder Knoten verschiebt

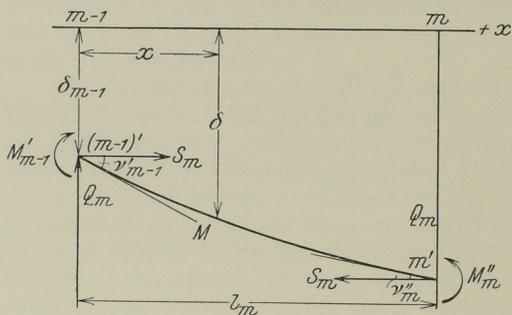


Abb. 2

sich wagrecht um δ_m , so daß wir es mit einem durchgehenden Träger auf elastisch senkbaren Stützen zu tun haben. Ein Stab $(m - 1), m$ werde zwischen den Knotenpunkten herausgeschnitten und in Abb. 2 in einer Ebene dargestellt, die durch den betreffenden Stab hindurchgeht und senkrecht zur Tragwandebene steht; er gelangt nach der Formänderung nach $(m - 1)', m''$.

M'_{m-1} sei das Moment am linken Stabende,
 M''_m das Moment am rechten Stabende,

ν'_{m-1}, ν''_m sind die Tangentenwinkel an den Stabenden. Hierbei deutet der Zeiger die Ordnungsziffer des Knotenpunktes an, während die nähere Bezeichnung des linken bzw. rechten Stabendes durch ' bzw. '' erfolgt.

Die Gleichung der elastischen Linie lautet

$$M = -EJ_m \cdot \frac{d^2 \delta}{dx^2} \text{ worin das Moment } M \text{ an der Stelle } x \text{ mit}$$

$$(1) \dots \dots \dots M = S_m \delta + Q_m x + M'_{m-1} - S_m \delta_{m-1}$$

einzuführen ist. Die Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 \delta}{dx^2} + \frac{S_m \delta}{EJ_m} = -\frac{S_m}{EJ_m} \left[\frac{Q_m x}{S_m} + \left(\frac{M'_{m-1}}{S_m} - \delta_{m-1} \right) \right]$$

lautet unter Heranziehung der Hilfswerte:

$$(2) \dots \dots \dots \begin{cases} k_m^2 = \frac{S_m}{EJ_m}, & \lambda_m = k_m l_m = l_m \sqrt{\frac{S_m}{EJ_m}} \\ C = -\frac{Q_m}{S_m}, & D = -\left(\frac{M'_{m-1}}{S_m} - \delta_{m-1} \right) \end{cases}$$

$$(3) \dots \dots \dots \delta = A \sin k_m x + B \cos k_m x + Cx + D$$

Die erste Ableitung nach x ergibt:

$$(4) \dots \dots \dots \frac{d\delta}{dx} = k_m A \cos k_m x - k_m B \sin k_m x + C$$

Aus den Bedingungen für die Stabenden, wonach für $x = 0$, $\delta = \delta_{m-1}$, für $x = l_m$, $\delta = \delta_m$ berechnen sich die Beiwerte A und B :

$$A = \frac{M''_m}{S_m \sin \lambda_m} - \frac{M'_{m-1}}{S_m \operatorname{tg} \lambda_m}, \quad B = \frac{M'_{m-1}}{S_m} \dots \dots \dots (5)$$

Damit sind alle Faktoren der Differentialgleichung ermittelt.

Nun können die Tangentenwinkel v'_{m-1} , v''_m an den Stabenden $m-1$ und m aus Gleichung 4 bestimmt werden, indem einmal $x = 0$, dann $x = l_m$ eingesetzt wird. Vorerst bezeichnen wir zur Vereinfachung:

$$\left(1 - \frac{\lambda_m}{\operatorname{tg} \lambda_m}\right) \frac{1}{l_m S_m} = m_m \cos^2 \beta_m; \quad \left(1 - \frac{\lambda_m}{\sin \lambda_m}\right) \frac{1}{l_m S_m} = m'_m \cos^2 \beta_m \dots (6)$$

und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} v'_{m-1} &= -\frac{\delta_{m-1} - \delta_m}{l_m} + (M'_{m-1} m_m - M''_m m'_m) \cos^2 \beta_m \\ v''_m &= -\frac{\delta_{m-1} - \delta_m}{l_m} + (M'_{m-1} m'_m - M''_m m_m) \cos^2 \beta_m \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

In den bisher angeschriebenen Gleichungen sind M'_{m-1} , M''_m , δ_{m-1} , δ_m , Q_m unbekannt.

Denkt man sich nun einen Knotenpunkt abgetrennt, indem man die beiden anschließenden Gurtstäbe und die Hängesäule durchschneidet, so muß zwischen den Kräften und Momenten Gleichgewicht bestehen. In der Querrahmenebene wirkt am Kopf der Hängesäule das Moment Y_m . Die Momente, welche in den durch die Stäbe senkrecht zur Tragwand gelegten Ebenen wirken, sind in Abb. 3 in vektorieller Darstellung eingezeichnet und werden in wagrechter und lotrechter Richtung zerlegt. Gegen den zweispitzigen Pfeil gesehen, sind rechtsdrehende Momente positiv angenommen. Unter Vernachlässigung der Verdrehungen von Gurten und Pfosten ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen:

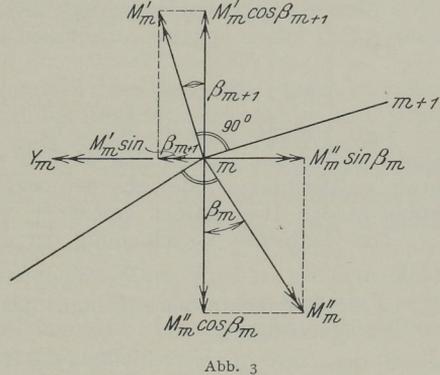


Abb. 3

Gurten und Pfosten ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} M''_m \cos \beta_m &= M'_m \cos \beta_{m+1} = M_m \\ Y_m &= M''_m \sin \beta_m - M'_m \sin \beta_{m+1} = M_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) = M_m \tau_m \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

wobei

$$\tau_m = \operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1} \dots \dots \dots (9)$$

Damit sind die Momente M'_m , M''_m durch das neu eingeführte Moment M_m , das in einer wagrechten Ebene wirksam gedacht ist, ausgedrückt.

Jetzt können die Stetigkeitsbedingungen eingeführt werden, denen zufolge die Tangentenwinkel links und rechts jedes Knotens wegen der Stetigkeit der Gurte gleich groß sind, und zwar soll hier nach ZIMMERMANN angenommen werden, daß diese Stetigkeit der Gurte sich auch im Grundriß erweisen muß, somit die Projektionen der anschließenden Winkelgrößen auch im Grundriß gleiche Größe haben.

Die wagrechten Projektionen der Stablängen und Stabkräfte haben die Werte:

$$a = l_m \cos \beta_m, \quad T_m = S_m \cos \beta_m, \quad l_m S_m = \frac{a T_m}{\cos^2 \beta_m} \dots \dots \dots (10)$$

Nun sind die Verschiebungen δ_m nach Gleichung 13 durch die bekannten Größen T_m und die unbekanntenen Momente M_m bestimmbar, es wird allgemein:

$$\delta_m = \zeta_m + \xi_m \left[T_m v_m - T_{m+1} v_{m+1} + \frac{1}{a} (M_{m-1} - 2M_m + M_{m+1}) \right] + \left\{ \begin{array}{l} \\ + \eta_m \tau_m M_m \end{array} \right\} \quad (16)$$

Solcher Gleichungen gibt es im allgemeinen $n + 1$; bei eingespannten Bogenenden, wobei $\delta_o = \delta_n = 0$ wird, sind $n - 1$ Gleichungen für ebensoviel unbekanntete δ zur Verfügung.

Schreibt man die Gleichung 16 für jeden Knoten der Reihe nach an, zieht die erste von der zweiten Gleichung ab, dann die zweite von der dritten und so fort und teilt jedesmal durch a , so erhält man die in Gleichung 12 angegebenen v -Werte. Es entstehen auf diese Weise im allgemeinen Fall n Gleichungen, bei fester Einspannung der Bogenenden $n - 2$ Gleichungen nachstehender Bauart:

$$av_m - \beta v_{m+1} + \gamma v_{m+2} = -c M_{m-1} + d M_m - e M_{m+1} + f M_{m+2} + g \dots \text{II}$$

$a, \beta, \gamma, c, d, e, f, g$ sind durch gegebene Größen ausdrückbare Faktoren. Diese Gleichungen sollen die *Lagerbedingungen* heißen. MÜLLER-Breslau erzielt beim Aufbau ähnlicher Gleichungen eine Vereinfachung, indem er für die Größen m_m und m'_m in Gleichung 6 einen für den ganzen Träger konstanten Mittelwert annimmt.

Die Gleichungsgruppen I und II, deren Lösung allerdings umständlich ist, geben die gesuchten Momente und Verschiebungen, solange nicht die Nennerdeterminante Δ der M und v Null wird.

Tritt letzteres ein, so knickt der Gurt aus, weil dann die Ausbiegungen unendlich groß werden. Hierbei wird vorausgesetzt, daß bei der Laststeigerung bis zum Bruch die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird, worüber später näheres folgt.

Um also die Sicherheit n gegen Knicken zu rechnen, die ein bemessener Gurt erfährt, wird man in die abgeleiteten Gleichungen bzw. in die Nennerdeterminante Δ sowohl für die Belastungen der Querträger wie für die Stabkräfte S_m die n -fachen Werte einführen und Δ ziffernmäßig für einige Werte $n = 3, 4, 5, 6$ usw. rechnen, solange bis Δ das Vorzeichen wechselt. Dann gibt jener Wert n , bei dem dieser Wechsel eintritt, die Sicherheit gegen Ausknicken an. Unter der Sicherheit n ist hier das Verhältnis der Knickbelastung bei konstant vorausgesetzter Elastizitätsziffer zur größten vorhandenen Stabkraft verstanden.

Handelt es sich um einen symmetrisch gebauten Träger und eine symmetrische Belastung, so wird die Nennerdeterminante Δ bezüglich beider Diagonalen eine symmetrische Bauart haben, somit ihr Wert rascher zu berechnen sein. Hierbei leistet die ZIMMERMANNsche Beziehung, daß Δ sich dann als Produkt zweier Determinanten darstellen läßt, gute Dienste.

Wollte man noch die Windwirkung, also eine stetige Last auf den Bogen berücksichtigen, so kämen an den Knotenpunkten neue Momente hiezu, aber keine neuen Unbekannten; dagegen werden beide Hauptträger verschieden beansprucht und die Symmetrie der Formänderungen der Brücken geht verloren. Bei oben offenen Brücken ist aber die Spannweite nicht groß und damit auch der Wind gegenüber der Knicklast vernachlässigbar.

C) Berechnung der Momente im Bogen quer zur Tragwandebene.

Für die Bemessung von oben offenen Eisenbeton-Bogenbrücken ist es notwendig, die Momente des Bogens quer zur Tragwandebene für Eigengewicht und Nutzlast zu kennen; aber auch für die Belastung der Brücke mit einem Vielfachen der Nutzlast, wie dies bei der Bestimmung des Sicherheitsgrades gegen Knicken der Fall ist, wird es wertvoll sein zu wissen, wie groß die Spannungen infolge der Querwirkung der Halbrahmen sind.

Verfasser¹⁴ hat zwei Wege angegeben, einmal für die Berechnung der Momente, und dann für die Berechnung der Verschiebungen in den Gurtknotenpunkten. Hier soll nur die Ermittlung der Momente gegeben werden. Wegen Berechnung der Verschiebungen sei auf die untenstehende Quelle verwiesen.

Berechnung der Momente mittels Fünf-Momentengleichungen. Vorausgesetzt wird eine konstante Feldweite a und außerdem, daß die wagrechte Projektion der Bogenstabkräfte konstant und gleich dem Horizontalschube H sei.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 1 und jenen im vorigen Abschnitt ist

$$(17) \dots\dots\dots T_m = S_m \cos \beta_m = T_{m+1} = H$$

Wir ziehen Gleichung I und 16 heran, setzen die Werte der Gleichung 17 in Gleichung 16 ein und dividieren durch $H \xi_m$.

Es entsteht:

$$(18) \dots m'_m M_{m-1} + (m_m + m_{m+1}) M_m + m'_{m+1} M_{m+1} = v_m - v_{m+1}$$

$$\frac{1}{H a} M_{m-1} + \frac{1}{H a} \left(\frac{a \eta_m \tau_m}{\xi_m} - 2 \right) M_m + \frac{1}{H a} M_{m+1} +$$

$$(19) \dots\dots\dots + \frac{\zeta_m}{H \xi_m} - \frac{\delta_m}{H \xi_m} = - (v_m - v_{m+1})$$

Durch Summierung dieser beiden Gleichungen verschwinden die rechten Seiten und man erhält:

$$(20) \dots\dots\dots \frac{\delta_m}{H \xi_m} = M_{m-1} \left(m'_m + \frac{1}{H a} \right) + M_m \left(m_m + m_{m+1} - \frac{2}{H a} + \frac{\eta_m \tau_m}{H \xi_m} \right) +$$

$$\dots\dots\dots + M_{m+1} \left(m'_{m+1} + \frac{1}{H a} \right) + \frac{\zeta_m}{H \xi_m}$$

Nun ist aus Gleichung 6

$$m'_m + \frac{1}{H a} = \frac{1}{H a} \left(2 - \frac{\lambda_m}{\sin \lambda_m} \right)$$

$$m_m + m_{m+1} - \frac{2}{H a} = - \frac{1}{H a} \left(\frac{\lambda_m}{\text{tg } \lambda_m} + \frac{\lambda_{m+1}}{\text{tg } \lambda_{m+1}} \right)$$

$$m'_{m+1} + \frac{1}{H a} = \frac{1}{H a} \left(2 - \frac{\lambda_{m+1}}{\sin \lambda_{m+1}} \right)$$

Setzt man zur Vereinfachung der Ausdrücke

$$(21) \dots\dots\dots \begin{cases} A_m = \xi_m \left(2 - \frac{\lambda_m}{\sin \lambda_m} \right) \\ B_m = \xi_m \left(\frac{a \eta_m \tau_m}{\xi_m} - \frac{\lambda_m}{\text{tg } \lambda_m} - \frac{\lambda_{m+1}}{\text{tg } \lambda_{m+1}} \right) \\ C_m = \xi_m \left(2 - \frac{\lambda_{m+1}}{\sin \lambda_{m+1}} \right) \end{cases}$$

so läßt sich Gleichung 20, nachdem man sie wieder mit $H \xi_m$ multipliziert hat, schreiben:

$$(22) \dots\dots\dots \delta_m = \zeta_m + \frac{1}{a} (M_{m-1} A_m + M_m B_m + M_{m+1} C_m)$$

Es ist somit jede Verschiebung δ_m durch drei aufeinanderfolgende Momente ausgedrückt. Ähnliche Gleichungen lassen sich für jeden Knotenpunkt anschreiben.

¹⁴ Dr. Ing. HAWRANEK, Nebenspannungen von Eisenbetonbogenbrücken. Berlin 1919. Verlag Wilh. Ernst & Sohn. S. 121, 123.

Diese Gleichungen kann man nun in Gleichung 18 einführen, nachdem man darin entsprechend Gleichung 12

$$v_m - v_{m+1} = -\frac{1}{a} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})$$

gleichgesetzt hat und erhält eine *Fünf-Momentengleichung* nachstehender Form:

$$K_{m-2} M_{m-2} + K_{m-1} M_{m-1} + K_m M_m + K_{m+1} M_{m+1} + K_{m+2} M_{m+2} = L_m \quad (23)$$

oder

$$\sum_{v=m-2}^{v=m+2} K_v M_v = L_m \dots \dots \dots (III)$$

worin bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} K_{m-2} &= A_{m-1} \\ K_{m-1} &= B_{m-1} - 2A_m + a^2 m'_m \\ K_m &= C_{m-1} - 2B_m + A_{m+1} + a^2 (m_m + m_{m+1}) \\ K_{m+1} &= -2C_m + B_{m+1} + a^2 m'_{m+1} \\ L_m &= -a (\zeta_{m-1} - 2\zeta_m + \zeta_{m+1}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (24)$$

Solche Gleichungen III lassen sich so viele anschreiben, als unbekannte Momente vorhanden sind. Die allgemeine Gleichung enthält fünf Momente, ausgedrückt durch die infolge der Brückenbelastungen am Halbrahmenkopfe entstehenden seitlichen Verschiebungen ζ_m .

Die erste und letzte Gleichung dieser Gruppe enthält nur drei Momente, die zweite und vorletzte nur vier. Mittels Determinanten lassen sich nun die M_m rechnen; dann sind mit Hilfe der Gleichung 8 $M'_m M''_m$ bestimmbar. Symmetrische Anordnungen der Brücke und Belastungen vereinfachen die Rechnung und vermindern die Zahl der Gleichungen auf $\frac{n}{2} + 1$ bei geraden n , auf $\frac{n+1}{2}$ bei ungeraden.

Aus den Momenten können unmittelbar die Spannungen gerechnet werden.

Bei stetiger Querträgerbelastung p auf den laufenden Meter und wenn h'_m die Höhe der Gurtachse über der unteren Eckversteifung der Hängesäule bedeutet, wird die Ausbiegung δ_m

$$\delta_m = \frac{1}{24} \frac{p b_1^3 h_m}{E J_q} + \frac{X_m h_m^3}{3 E J_h} + \frac{Y_m h_m^2}{2 E J_h} \dots \dots \dots (25)$$

J_q = Trägheitsmoment des Querträgers.

J_h = Trägheitsmoment der Hängesäule.

h_m = Theoretischer Gurtabstand von der Querträgerachse.

b_1 = Hauptträgerabstand.

X_m und Y_m ergeben sich aus dem früheren Abschnitt.

Eine Lösung des Gleichungssystems III mit der Differenzenrechnung wird anderwärts gegeben.

D. Elastizitätsziffer für Eisenbetonbogenbrücken bei Beanspruchung auf Knickung.

Wenn Formeln für die Berechnung auf Knicken, die sich im Eisenbau bewährt haben, auf Eisenbetonbrücken angewendet werden sollen, so ist zunächst die Einführung des Wertes für die Elastizitätsziffer E in diese Formeln zu beachten.

Unter den gleichen Voraussetzungen, wie E bei Eisenbrücken verwendet wird, wäre auch für Eisenbetonbrücken ein Festwert anzunehmen, wenn auch E schon bei kleinen Beanspruchungen des Betons starken Veränderungen unterworfen ist. Da aber die Sicherheit n gegen Knicken eben wegen der Ungültigkeit einer Kon-

stanten im plastischen Bereich, für den Eisenbau eine ideelle Wertziffer bedeutet, so wird dies beim Eisenbetonbau, allerdings in noch höherem Maße der Fall sein.

Wenn man sich entschließt einen konstanten E -Wert für diese Zwecke bei Eisenbetonbrücken einzuführen, so wäre dieser nicht für das Ausschaltungsstadium der Brücke zu wählen, sondern jener Wert, den der Beton im Augenblicke der Belastungsprobe der Brücke aufweist. Bezüglich der Wahl der Elastizitätsziffer sind aber noch einige Erwägungen nötig.

Für die zur Betonbereitung üblichen Zemente sind bei Brückenbelastungsversuchen in der Literatur wiederholt Angaben über die Elastizitätsziffer des Bauwerks gemacht worden. Die Elastizitätsziffern, die aus den Formänderungen bei Biegung und Druckbeanspruchungen folgen, bewegen sich zwischen 300000 und 350000 kg/qcm. Für Bauten aus Sonderzementen mit höherer Festigkeit sind, wenigstens in der Literatur, soweit bekannt, noch keine aus Belastungsversuchen hervorgehende Elastizitätsziffern zu finden, auch nicht für besondere Ausführungsweisen, wie etwa Gußeisenbeton.

Ob für E beim Knickproblem obige Werte eingeführt werden können, ist noch fraglich. Aber Vorsicht ist schon deshalb am Platze, weil, wenigstens nach der EULER-Formel, die Knicklast proportional dem E ist und damit auch die Sicherheit, und nach der ENGESSERSchen Formel für die Seitensteifigkeit sich die Knicklast proportional der \sqrt{E} ergibt. Diese Vorsicht ist deshalb wegen der oft großen Schwankungen der Elastizitätsziffer nötig, die bei verschiedenem Mischungsverhältnis und selbst bei gleichem Mischungsverhältnis mit dem Alter und der Beanspruchung auftreten. Um diese Frage zu klären, sollen, da keine Versuche mit Eisenbetonbrücken der hier in Frage stehenden Art vorliegen, Säulenknickversuche herangezogen werden.

MÖRSCH führt in seinem Buche „Der Eisenbeton“, I. Bd., I. Hälfte, 5. Aufl., S. 244, Säulenknickversuche an, die an der Materialprüfungsanstalt in Stuttgart¹⁵ ausgeführt worden sind. Es seien die Säulen Nr. 2 und Nr. 3 herausgegriffen. Sie sind beide mit einem quadratischen Querschnitt von 32 cm Seitenlänge ausgeführt. Säule 2 im Mischungsverhältnis 1 : 4 (Sand) mit 4 Φ 20 mm Bewehrung, Säule 3, 1 : 2 : 2 (Sand, Kies) mit 4 Φ 30 mm und Spiralwicklung von 5 mm mit 45 mm Ganghöhe. Alter 45 Tage, 9,3% Wasser, also nahezu Gußbeton.

Säulenknickversuche

	Säule 2	Säule 3
9 m lang bewehrt	Höchstlast 270 t	232,833 t
1,2 m lang bewehrt	„ 370 t	310,667 t
1,2 m lang unbewehrt	„ 339,667 t	233,167 t
Prismenfestigkeit k_b	330 kg/qcm	227 kg/qcm
Würfelfestigkeit k_w	376 kg/qcm	283 kg/qcm
EULER-Last (gerechnet mit E_m)	278,2 t	241,6 t
In die Rechnung eingeführtes E_m	217,750 kg/qcm	132,500 kg/qcm
Elastizitätsziffer im Knickstadium E_1	150,000 kg/qcm	55,000 kg/qcm
Elastizitätsmaß bei Druckabnahme E_2	281,500 kg/qcm	150,000 kg/qcm

Die zuletzt angegebenen EULER-Knicklasten werden aus einem Mittelwert $E_m = \frac{E_1 + E_2}{2}$ aus den bezüglichen Elastizitätsziffern für zu- und abnehmende Druckspannungen an gegenüberliegenden Querschnittsrändern gerechnet und dazu die Spannungsdehnungskurven herangezogen.

¹⁵ BACH, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1913, S. 1969.

Bei der Einführung dieser Mittelwerte E_m erhielt MÖRSCH eine gute Übereinstimmung der nach EULER gerechneten Knicklasten für die 9 m langen Säulen und den tatsächlichen, die bloß um 3% bzw. 3,7% abweichen, wie man aus obiger Tabelle entnehmen kann. (MÖRSCH führt allerdings als freie Knicklänge die Säulenhöhe $h = 9,0$ m ein, während sie eigentlich infolge der Kugellager in der Maschine zirka 9,8 m ist.) Man sieht wenigstens aus diesen zwei Versuchsreihen (es waren Mittelwerte von je drei Säulen), daß die Elastizitätsziffer E_1 , die für das Knickstadium aus dem Spannungsdehnungsdiagramm entnommen werden kann, für die Berechnung auf Knicken nach EULER *nicht maßgebend* ist, sondern einen erheblich größeren Wert, der bei Säule 2 um 45%, bei Säule 3 um 141% größer war.

Andererseits sind für die an sich außerordentlich geringen Unterschiede im Mischungsverhältnisse sehr verschiedene E_m -Werte maßgebend gewesen: 217,750 kg/qcm bzw. 132,500 kg/qcm (BACH ermittelte 199,300 kg/qcm bzw. 131,400 kg/qcm, gemessen aus der gesamten Zusammendrückung vor der Ribbildung).

Beim *Knickproblem des Bogens* wird sich wohl gegenüber dieser Erscheinung bei Säulen gewiß kein prinzipieller Unterschied ergeben, solange man mit Formeln operiert, die auf der EULER-Gleichung aufgebaut sind.

Man kann deshalb heute keinen „Festwert“ E von allgemeiner Gültigkeit für das Knickproblem bei Eisenbetonbrücken angeben. Hier müssen also systematische Versuche mit Bogen bei völligem Einblick in die Elastizitätsverhältnisse des verwendeten Betons einsetzen. Natürlich wäre auch dieser „Festwert“ mit dem Mischungsverhältnis und dem Alter des Betons abzustufen.

Wollte man schon jetzt einen E -Wert für das Knicken festlegen, so könnte man für Brückenbogen bei dem Mischungsverhältnis 1:4 $E = 200,000$ kg/qcm bzw. 1:5 $E = 140,000$ kg/qcm zur Zeit der Belastungsprobe einführen, also sechs Wochen nach beendeter Betonierung. Für höhere Werte kann man sich erst nach neuen Versuchen, wenn sie erfolgreich sind, einsetzen.

Es fragt sich nur, ob im Eisenbeton nicht vielleicht ein *Knickmodul* T an Stelle von E eingeführt werden kann. Dies wäre auf folgende Weise möglich:

Die Druckspannung unmittelbar vor dem Ausknicken errechnet sich mit

$$\sigma_k = \frac{1,25 k_b}{1 + \kappa \left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

andererseits ist bei Einführung des Knickmoduls T : $\sigma_k = \pi^2 T \left(\frac{i}{l}\right)^2$

Werden die Ausdrücke für σ_k gleichgesetzt, so ergibt sich:

$$T = \frac{1,25 k_b \left(\frac{l}{i}\right)^3}{\pi^2 \left[1 + \kappa \left(\frac{l}{i}\right)^2\right]}$$

wobei k_b die Prismenfestigkeit des Betons, k_w die Würfelfestigkeit, $k_w = 1,25 k_b$ bedeuten.

κ ist ein Wert, der allgemein mit 0,0001 angenommen wird. Nach BACH genügt (Zeitschr. V. D. I. 1913, S. 1972) aber $\kappa = 0,00005$, wie sich aus seinen Säulenversuchen ergibt.

Werden für die früheren zwei Säulen die Werte T nach obiger Formel gerechnet, so ergibt sich bei

$$\begin{array}{ll} \kappa = 0,0001 & \text{für Säule 2: } T = 173,500 \text{ kg/qcm} \\ & \text{„ „ 3: } T = 124,500 \text{ kg/qcm} \\ \kappa = 0,00005 & \text{„ 2: } T = 219,000 \text{ kg/qcm} \\ & \text{„ 3: } T = 158,800 \text{ kg/qcm} \end{array}$$

Wie man nach Vergleich mit den früheren E_m -Werten ersieht, ist der Knickmodul T bei Säule 2 mit $\kappa = 0,00005$ mit E_m übereinstimmend, bei Säule 3 liegt der T -Wert für $\kappa = 0,0001$ dem bezüglichen E_m näher.

Die Mittelwerte von T stimmen nahezu mit den früher angegebenen E -Werten überein. Man kann mit diesen T -Werten nach obiger Formel rechnen, da sie aus der jeweiligen Würfel Festigkeit ableitbar sind, somit dem jeweilig verwendeten Beton und auch der Erhärtungszeit angepaßt werden können. Der Beiwert κ wäre, solange keine weiteren Versuche vorliegen, mit $\kappa = 0,00008$ einzuführen.

Der Einfluß der Eisenbewehrung des Betons braucht bei der Festlegung von E für das Knickproblem nicht berücksichtigt zu werden, da vor dem Ausknicken die Quetschgrenze des Eisens erschöpft ist und das weitere Verhalten des Stabes bis zur Knickung von den Eigenschaften des Betons anhängt.

Zu erwägen wäre noch, ob für den Bogen einerseits sowie für die Fahrbahnquerträger und die Hängesäulen andererseits, die gleiche Elastizitätsziffer E angewendet werden soll. Mit Bezug auf die eingangs hervorgehobenen Erscheinungen bei den Säulenknickversuchen wäre es richtiger für den Bogen einen kleineren E -Wert einzuführen, etwa den vorgeschlagenen, während man für die Halbrahmen einen größeren ansetzen kann, da vor der Ausknickung der Gurte die Formänderungen der Halbrahmen für diese, da sie auf Biegung beansprucht werden, weniger gefährlich sind. Auch die Einführung des Trägheitsmomentes für die Querträger ist bei der üblichen Ausführung von Eisenbetonbrücken nicht so eindeutig wie im Eisenbau, da die Fahrbahnplatte mit den Querträgern steif verbunden ist. Genaues über den Grad der Mitwirkung der Fahrbahnplatte mit dem Querträger läßt sich derzeit nicht angeben.

Sind keine Fahrbahnlängsträger vorhanden, so kann man für die Berechnung des Trägheitsmomentes des Querträgers die Fahrbahnplatte zwischen den dem Querträger benachbarten Wendepunkten der Biegelinie für Vollast einbeziehen, so daß etwa als mitwirkende Plattenbreite die halbe Feldweite (beiderseits des Querträgers je $\frac{1}{4}$ der Feldweite) genommen werden kann.

Ist dagegen eine Anordnung von Längsträgern vorgesehen, so könnte die mitwirkende Plattenbreite etwas größer angenommen werden, vielleicht beiderseits des Querträgers noch je $\frac{1}{3}$ der Feldweite.

Diese beiden Angaben ließen sich, wenigstens für die gewöhnliche Nutzlast, aus genauen Versuchen bei ausgeführten Brücken überprüfen.

E. Wirkung oberer Querverbindungen bei Bogenbrücken.

Die räumliche Beanspruchung, besonders die der Querbelastung von Bogenbrücken mit aufgehängter Fahrbahn ohne obere Querverbindungen, wurde in dem Buche des Verfassers¹⁶ eingehend behandelt und durch Beispiele belegt. Auch für die Berechnung von Bogenrippen mit *einem* und mit *zwei* Querriegeln (S. 84) für Querbelastung sind die nötigen Gleichungen angegeben.

Da in letzter Zeit schon sehr große Spannweiten mit Fahrbahn unten ausgeführt wurden, wie die Seinebrücke bei St. Pierre du Vauvray, $l = 131,8$ m, mit bloß zwei Querriegeln und noch größere zu erwarten sind, wurde vom Verfasser¹⁷ eine allgemeine Theorie der Verbindung von zwei Bogenrippen mit mehreren Querriegeln gegeben und auf dem 2. internationalen Kongreß für technische Mechanik Zürich 1926 vorgetragen.

¹⁶ Dr. HAWRANEK, Nebenspannungen von Eisenbetonbogenbrücken. Berlin 1919. Verlag Ernst & Sohn.

¹⁷ Dr. HAWRANEK, Allgemeine Theorie der Wirkung von Querriegeln bei zweirippigen Bogenbrücken. Verhandlungen des 2. internationalen Kongresses für techn. Mechanik Zürich 1926.

Ohne auf die Ausführungen dieser Abhandlung näher einzugehen (es sei deshalb auf die untenstehende Quelle verwiesen), sei, um bloß die ganz allgemeine Gültigkeit der Entwicklung zu zeigen, erwähnt, daß alle Riegel in ihrer Mitte durchschnitten wurden. In den Schnittstellen wurden nach den drei zueinander senkrecht stehenden Hauptrichtungen je eine Schnittkraft und je ein Moment angebracht, also sechs Unbekannte an jeder Schnittstelle.

Für alle bei Brücken möglichen Belastungen sind die Gleichungssysteme aufgestellt und lassen sich nach Auflösung derselben alle Beanspruchungen des Bogens, der Querriegel und Hängestangen rechnen.

Auch das Knickproblem ist durch Nullsetzen der Nennerdeterminante gelöst.

Nachdem einige Beispiele völlig durchgerechnet worden sind und namentlich ein Bild über die Wirkung von Querriegeln auf die Bogenbeanspruchung gewonnen wurde, kann als weiteres Ergebnis dieser Arbeit der Schluß gezogen werden, daß man tunlichst wenig Querriegel verwenden soll, etwa in den $\frac{1}{4}$ Punkten. Riegel im Scheitel entlasten die Bogen weniger. Auch bezüglich der Wahl von rechteckig geformten Riegelquerschnitten hat sich die Anordnung von größerer Breite als Höhe zweckmäßiger erwiesen.

Starke Riegel erhöhen die Steifigkeit des Bogens, erfordern aber eine starke Zusatzbewehrung des Bogens und der Riegel. Im übrigen sei auf zwei Modellversuche mit solchen Brücken verwiesen, welche Dr. RUDOLF MAYER durchführte, welche ebenfalls in den Verhandlungen des Züricher Mechanik-Kongresses 1926 veröffentlicht sind.

Schlußbemerkungen.

In vorliegender Abhandlung wurde versucht, einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der Seitensteifigkeit offener und geschlossener Bogenbrücken zu geben.

Es ist klar, daß die errechnete Knicksicherheit eine ideelle Ziffer darstellt, da für das Knickstadium die Elastizitätsziffern sowohl des Eisens wie des Betons eine Änderung gegenüber dem Anfangszustand der Nutzbelastung erfahren. Nur dann, wenn es gelingen wird, geeignete, durch Versuche zu ermittelnde Knickmodule einzuführen, wird man sich der wirklichen Knicksicherheit nähern. Solange darin keine Klarheit besteht, soll man keinen zu kleinen Sicherheitsgrad zulassen. Nach ENGESSER mindestens eine sechsfache, nach BLEICH ein drei- bis vierfache.

Wie man sieht, kann die endgültige Klarheit in diesen Fragen der Seitensteifigkeit von Bogenbrücken und ihrer Knicksicherheit nur auf zwei Wegen erhalten werden.

1. Durch systematische *Bruchversuche* mit Bogenbrücken in Verbindung mit sehr vielen Spannungs- und Formänderungsmessungen in allen Phasen der Belastung und entsprechende Auswertung der Ergebnisse.

2. Indem man für viele Brücken die Rechnung nach dem angegebenen genauen Verfahren für Nutzlasten und ihre Vielfache durchführt, die Spannungen für alle Stadien sucht, die Ausbiegungen rechnet, um für verschiedene Anordnungen von Brücken ein Bild zu gewinnen, wann der Übergang in den plastischen Bereich bei Eisen erfolgt, wie sich die Betonbrücken in dieser Beziehung verhalten und wie groß der Sicherheitsgrad in dem Augenblick ist, wenn die Elastizität beim Eisen überschritten wird oder die Betonspannungen schon gefährliche Werte erreichen. Diese mühsame Arbeit muß unbedingt in Kauf genommen werden.

Vorschläge zur Erreichung dieses Ziels werden anlässlich des Kongresses gemacht werden.