

Richard Schmid

# Korrektur von Phasenfehlern in einem multifrequenten, magnetischen Induktions-Tomographen

Diplomarbeit



Institut für Medizintechnik  
Technische Universität Graz  
Kronesgasse 5/II - 8010 Graz  
Vorstand: Univ.-Prof. Dipl.-Ing Dr.techn. Rudolf Stollberger

Betreuer: ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Hermann Scharfetter  
Begutachter: ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Hermann Scharfetter

Graz, (Juni, 2009)



## Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die Ableitung und Validierung einer allgemeinen Methode zur Korrektur der Meßdaten des vorhandenen MIT-Systems (Magnetische Induktions-Tomographie). Die Grundlage des Korrekturalgorithmus stellen aus den Meßdaten abgeleitete Signale dar, wodurch sowohl systematische, als auch dynamische Fehler korrigiert werden können, und keine zusätzlichen Kalibrierzyklen benötigt werden.

Es werden zwei Methoden zur Korrektur von Phasenfehlern und ein Korrekturverfahren für frequenzdifferentielle MIT-Messungen abgeleitet und mit Hilfe von simulierten Datensätzen überprüft. Durch Vergleich des Modells mit dem realen Meßsystem werden in der Simulation unberücksichtigte Effekte identifiziert, die eine Erklärung für die abweichenden Korrekturergebnisse bei simulierten und gemessenen Daten liefern, und zu Einschränkungen in der Einsetzbarkeit der Methoden führen.

### Schlüsselwörter:

Magnetische Induktionstomographie (MIT), frequenzdifferentielle MIT (FDMIT), Magnetische Induktions-Spektroskopie, Kalibriermethode, Phasenfehler

## Abstract

Aim of this work is the deduction and validation of a common method to correct the measured data of the existing MIT-system (magnetic induction tomography). The basis for the correction algorithm is derived from measured data, why systematic as well as dynamic errors could be eliminated, and no extra calibration cycles are needed.

Two methods for correcting phase errors and one mode for frequency differential measurements are derived and tested with simulated data. Unconsidered effects in the simulation, which are identified by comparison between the model and the real system provide an explanation of the deviant correction results for simulated and measured data and lead to limitations for the methods.

### key words:

magnetic induction tomography (MIT), frequency differential MIT (FDMIT), magnetic induction spectroscopy, calibration method, phase error



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Grundlagen und Funktionsweise der Magnetischen Induktions-Tomographie	1
1.2	Gewebeimpedanz . . . . .	2
1.2.1	Frequenzverlauf der Gewebeimpedanz . . . . .	2
1.3	Fehlerquellen [6] . . . . .	4
1.3.1	Leitendes Objekt in der Nähe des Gradiometers . . . . .	4
1.3.2	Kapazitive Einkopplung von Störungen ins Gradiometer . . . . .	4
1.3.3	Phasenverschiebung und -drift der Gradiometerverstärker . . . . .	4
1.3.4	Vibration, laterale Verschiebung . . . . .	5
1.3.5	Temperaturdrift des Gradiometers . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Kalibrierproblem</b>	<b>7</b>
2.1	Ersatzschaltbild des Gradiometers . . . . .	7
2.2	Laterale Verschiebung des Gradiometers . . . . .	9
2.3	Deterministische Modulationsmethode . . . . .	10
2.3.1	Vereinfachte Sende-Empfangseinheit . . . . .	10
2.3.2	Kombination aus Sendespule und Gradiometer . . . . .	11
2.3.3	Rekonstruktion des Korrekturwinkels aus periodischer Verschiebung	12
2.4	Simulation . . . . .	15
2.4.1	Implementierung und Beschreibung der Parameter . . . . .	15
2.4.2	Simulationen mit Matlab . . . . .	18
2.5	Stochastische Modulationsmethode . . . . .	22
2.5.1	Quadrantenanalyse . . . . .	24
2.6	Simulation . . . . .	26
2.6.1	Implementierung und Beschreibung der Parameter . . . . .	26
2.6.2	Simulationen mit Matlab . . . . .	26
2.7	frequenzdifferentielle Messung . . . . .	30
2.7.1	These zur Bestimmung des Korrekturfaktors . . . . .	30
2.7.2	Methoden zur Bestimmung des Korrekturfaktors . . . . .	33
2.7.3	Bedingung für die frequenzdifferentielle Korrektur . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Verifikation des Modells</b>	<b>39</b>
3.1	Messungen mit analogem lock-in-Verstärker . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Methoden</b>	<b>43</b>
4.1	Systemaufbau . . . . .	43
4.2	Meßanordnung . . . . .	43
4.2.1	Meßbereich FSR (full scale range) . . . . .	44
4.2.2	Anpassung der Fensterlänge für das LabView Messungstool . . . . .	45

4.2.3	Trigger . . . . .	45
4.2.4	räumliche Anordnung der Komponenten . . . . .	46
4.2.5	Vibration . . . . .	46
4.2.6	Meßobjekt . . . . .	47
4.3	Verwendete Software . . . . .	47
4.4	Verwendete Hardware . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>49</b>
5.1	deterministische Modulationsmethode . . . . .	49
5.1.1	Meßreihe ohne Objekt . . . . .	50
5.1.2	Meßreihe mit Objekt . . . . .	51
5.2	stochastische Modulationsmethode . . . . .	52
5.2.1	Meßreihe ohne Objekt . . . . .	53
5.2.2	Meßreihe mit Objekt . . . . .	54
5.2.3	Meßreihe mit asynchroner Vibration ohne Objekt . . . . .	54
5.3	frequenzdifferentielle Methode . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>57</b>
6.1	deterministische Modulationsmethode . . . . .	57
6.2	stochastische Modulationsmethode . . . . .	58
6.3	Vergleich der Korrekturmethode . . . . .	59
6.4	frequenzdifferentielle Methode . . . . .	60
6.5	Schlußfolgerungen . . . . .	60

Symbol/Abkürzung	Bedeutung
MIT	Magnetische Induktions-Tomographie
FDMIT	frequenzdifferentielle MIT
PGRAD/ZFGRAD	Gradiometer
OBJ	Objekt
Tx	Sendespule, Sendekanal
Rx	Empfangskanal
REF	Referenzspule
VIB	Vibration des Meßsystems
$\sigma$	Leitfähigkeit
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante
$\epsilon_r$	relative Permittivität
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante
$\mu_r$	relative Permeabilität
SNVD	spektrale Rauschspannungsdichte (spectral noise voltage density)
CAR	Trägerfrequenz (carrier)
USB	obere(s) Seitenfrequenz(band) (upper sideband)
LSB	untere(s) Seitenfrequenz(band) (lower sideband)

Tabelle 1: Erläuterung der verwendeten Symbole und Abkürzungen



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Grundlagen und Funktionsweise der Magnetischen Induktions-Tomographie

Die Magnetische Induktions-Tomographie (MIT) dient zur berührungslosen Ermittlung der passiven elektromagnetischen Eigenschaften von Materialien. Zu diesem Zweck wird mit Hilfe einer Erregerspule (TX) ein alternierendes Magnetfeld ( $B_0$ ) erzeugt, in das ein Objekt (OBJ) eingebracht wird. In diesem bilden sich Wirbelströme je nach Materialeigenschaften und Frequenz aus, und verursachen eine Störung ( $\Delta B$ ) des Erregerfeldes. Diese Veränderung des Magnetfeldes wird durch geeignete Empfängerspulen (PGRAD, ZFGRAD) detektiert. Sie ist um einige Zehnerpotenzen kleiner als das Erregerfeld, und relativ dazu zeitlich gedreht. Geeignete Empfängerspulen bestehen z.B. aus zwei gegenseitig gewickelten, in einer Ebene nebeneinander angeordneten Planarspulen. Das Gradiometer (PGRAD) wird symmetrisch, im Feld der Erregerspule platziert, damit der Fluß durch beide Gradiometerhälften identisch ist, und sich die induzierten Spannungen auslöschen. Eine weitere Variante, das Zero-Flow-Gradiometer (ZFGRAD) zeichnet sich durch die Ausrichtung in der zentralen Normalebene der Sendespule aus, weshalb der Fluß durch das Gradiometer Null ist, und keine Spannungen vom Erregerfeld induziert werden [5].

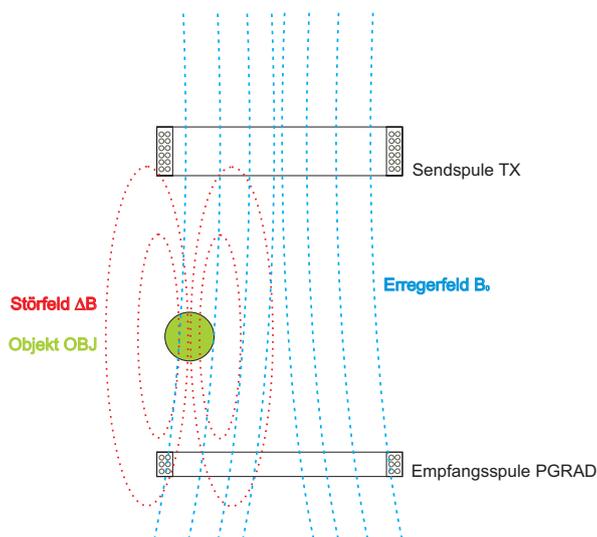


Abbildung 1.1: Meßprinzip der Magnetischen Induktions-Tomographie

Bei symmetrischen Gradiometerhälften, zentrierter Ausrichtung zum Erregerfeld und dem Fehlen eines Objektes im Meßbereich, ergibt sich eine Summenspannung von Null Volt. Es können also nur asymmetrisch zu den Gradiometerspulen befindliche Störungen detektiert werden. Zur Extraktion der gewünschten Materialeigenschaften (Leitfähigkeit  $\sigma$ , Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  bzw. komplexe Leitfähigkeit  $\kappa = \sigma + j\omega\epsilon_r\epsilon_0$ ) werden die gemessenen Signale verstärkt und demoduliert. Man erhält Real- und Imaginärteil bezogen auf eine interne Referenz. Um einen Bezug zum Erregerfeld herstellen zu können, muß dieses durch eine weitere Spule (REF), die in einer Ebene, um das Gradiometer angebracht ist, aufgenommen werden.

## 1.2 Gewebeimpedanz

Ein einfaches Modell für biologisches Gewebe stellt eine Suspension von Zellen in Flüssigkeit, dem Extrazellulärvolumen EZV, dar. Die Zellen bestehen aus einer Zellmembran, deren Dicke ca. 6nm beträgt, und dem Intrazellulärvolumen IZV, das von der Membran umschlossen wird. Sowohl IZV als auch EZV beinhalten kleine Ionen, für die die Membran einen großen Widerstand darstellt. Elektrisch betrachtet kann man die Membran durch eine Kapazität  $C_M$  parallel zu einem Widerstand  $R_M$  darstellen. Das IZV wird durch den Widerstand  $R_I$ , das EZV durch  $R_E$  gekennzeichnet.

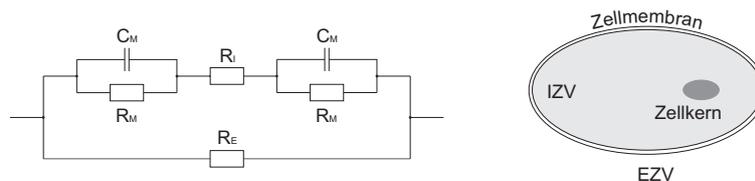


Abbildung 1.2: Ersatzschaltbild einer Zelle im EZV

Die Gewebeimpedanz besitzt eine reelle und eine imaginäre Komponente, die durch die Leitfähigkeit  $\sigma$  und die Dielektrizität  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$  ausgedrückt werden können. Dazu wird eine unendlich ausgedehnte, homogene Gewebescheibe angenommen. Die Dicke der Scheibe wird mit  $d$ , die stromdurchflossene Fläche mit  $A$  bezeichnet.

$$C = \frac{\epsilon_r\epsilon_0 A}{d}$$

$$G = \frac{\sigma A}{d}$$

### 1.2.1 Frequenzverlauf der Gewebeimpedanz

Der gesamte Frequenzverlauf der Gewebeimpedanz läßt sich in drei Hauptbereiche unterteilen. Diese werden als  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ -Dispersion bezeichnet.

#### $\alpha$ -Dispersion

Die  $\alpha$ -Dispersion kann durch die Relaxation von permanenten oder nicht-permanenten Dipolen, welche durch die Verschiebung von kleinen Ionen, als Folge eines äußeren elektrischen Feldes, entlang der geladenen Oberfläche von Riesenmolekülen oder Zellmembranen entstehen, beschrieben werden. Sie tritt in einem Frequenzbereich von einigen Hz bis etwa 1kHz auf.

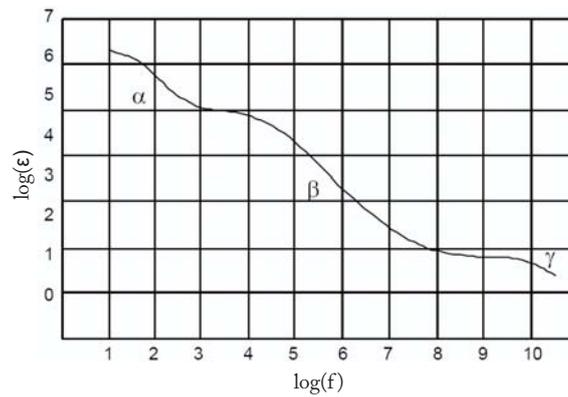


Abbildung 1.3: Frequenzgang der Dielektrizitätszahl von Gewebe

### $\beta$ -Dispersion

Wird ein Wechselstrom durch die Zellsuspension geschickt, resultiert bei niedrigen Frequenzen die Leitfähigkeit hauptsächlich aus dem EZV und den enthaltenen Ionen, da die Zellmembran einen sehr hohen elektrischen Widerstand aufweist. Mit steigender Frequenz verringert sich die Impedanz der Zellmembran und auch das IZV wird vom Strom durchflossen, was eine Erhöhung der Leitfähigkeit zur Folge hat. Die  $\beta$ -Dispersion tritt in einem Frequenzbereich von etwa 10kHz bis 10MHz auf.

### $\gamma$ -Dispersion

Sie wird durch die rotatorische Relaxation von Wasser verursacht. Man spricht hier von einer sogenannten Debye-Relaxation. Die  $\gamma$ -Dispersion tritt in einem Frequenzbereich von etwa 1GHz bis 100GHz auf.

## 1.3 Fehlerquellen [6]

Das Ergebnis der Messung ist von einer Vielzahl von nicht exakt bestimmbar Parametern abhängig, die für die Dauer einer Messung als konstant angenommen werden, jedoch während einer Meßreihe variieren können. Ziel dieser Arbeit ist es, eine allgemeine Methode zur Korrektur der Meßdaten zu finden und zu validieren. Die Grundlage des Korrekturalgorithmus sollten, aus der Messung abgeleitete Signale sein, wodurch keine zusätzlichen Kalibrierobjekte und -messungen benötigt werden. Die Bestimmung der (variierenden) Parameter des Meßaufbaus, oder die spezifische Fehleridentifikation stellen dabei keine primären Ziele dar.

### 1.3.1 Leitendes Objekt in der Nähe des Gradiometers

Befindet sich ein gut leitendes, nicht magnetisches Objekt in der Nähe des Gradiometers, so macht sich dieses Objekt im Realteil des Meßsignals bemerkbar. Die einzige, jedoch recht grobe Möglichkeit, ein gut leitfähiges Objekt in Gradiometernähe zu identifizieren, besteht im Vergleich von Real- und Imaginärteil des Signals. Dies ist durch das stark unterschiedliche Verhältnis von Real- und Imaginärteil bei biologischem Gewebe und gut leitfähigem Material möglich. Das Meßsignal bei biologischem Gewebe besitzt meist einen wesentlich größeren Imaginärteil im Vergleich zum Realteil. Bei gut leitfähigen Materialien ist es umgekehrt, das Verhältnis des Realteils zum Imaginärteil ist groß. Bemerkt man also einen deutlichen Anstieg des Realteils, kann man davon ausgehen, daß sich Metallteile in der Nähe des Meßsystems befunden haben.

### 1.3.2 Kapazitive Einkopplung von Störungen ins Gradiometer

Da die Meßfrequenzen im Bereich von 50kHz bis 1MHz liegen, ist neben der induktiven Kopplung auch eine parasitäre, kapazitive Kopplung zwischen Erregerspule und Gradiometer vorhanden, wodurch sich höherfrequente Störsignale im Meßsignal bemerkbar machen können. Um dieser Problematik entgegenzuwirken, ist eine Abschirmung der Gradiometer unumgänglich.

### 1.3.3 Phasenverschiebung und -drift der Gradiometerverstärker

Der Realteil ( $V$ ) des induzierten Signals wird im wesentlichen vom Erregerfeld erzeugt, der Imaginärteil ( $S$ ) hauptsächlich vom Objekt. Beide Anteile sind um den Winkel  $\theta_1$  relativ zum Bezugssystem der Signalerzeugung ( $Re_{LO}, Im_{LO}$ ) gedreht. Dazu addieren sich die Phasenverschiebung des Gradiometers ( $\varphi$ ) und des Empfangsverstärkers ( $\theta_2$ ), und erzeugen das Koordinatensystem ( $Re', Im'$ ). Durch Demodulation mit dem Bezugssystem ( $Re_{LO}, Im_{LO}$ ) werden reelle Anteile in die imaginäre Achse und imaginäre Anteile in die reelle Achse projiziert.

Die Phasenverschiebung ist nicht konstant, da die Grenzfrequenz und der Phasengang unter anderem von der Bauteiltemperatur der einzelnen Verstärker abhängen. Durch Verwendung eines Gradiometers als Empfänger kann das Verhältnis  $\frac{Im(V)}{Re(V)} \approx [10^{-7}..10^{-6}]$  auf etwa  $\frac{Im(V)}{Re(V)} \approx [10^{-4}..10^{-3}]$  verbessert werden, dennoch führen bereits Phasenverschiebungen von 1" zu einer Projektion, die in der Größenordnung des gesuchten Imaginärteils liegt.

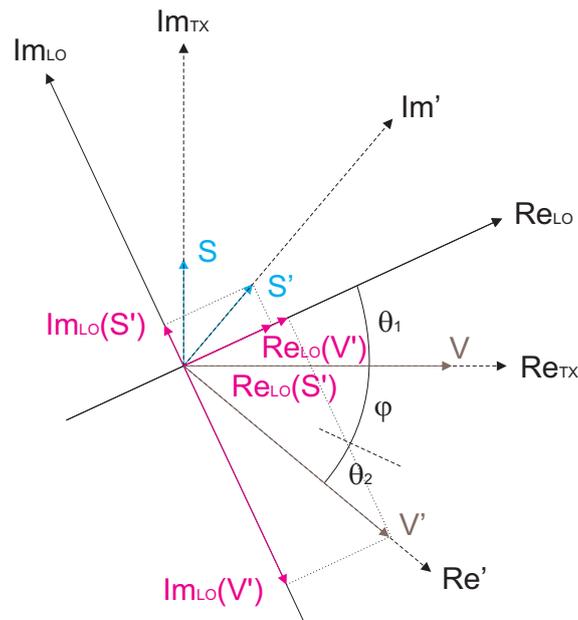


Abbildung 1.4: Zusammenhang von Signalen und unterschiedlichen Bezugssystemen für eine Gradiometerhälfte

### Messung mit separatem Referenzkanal

Um eine Phasenbeziehung der gemessenen Spannung, zum Strom, oder zur Spannung der Sendespule herstellen zu können, ist es notwendig eine Referenzspannung aufzuzeichnen. Die Referenzspule (REF) ist nicht als Gradiometer ausgeführt, weshalb sie für die vom Objekt hervorgerufene Feldänderung kaum sensitiv ist, und daher weitgehend die Phasenlage des Erregerfeldes abbildet. Durch Subtraktion der Referenzphase von der Phase der Meßdaten, werden alle Kanäle auf ein einheitliches Bezugssystem zurückgeführt. Die unterschiedlichen Phasendrehungen der einzelnen Meßkanäle werden dadurch jedoch nicht korrigiert.

### Referenzbestimmung im Zuge der Kalibrierung

Die in (Abschnitt 2.3 und 2.5) beschriebenen Methoden zur Korrektur der Meßdaten, beruhen auf der Berechnung eines mittleren Korrekturwinkels, der die Unterschiede der beiden Gradiometerhälften und den Referenzwinkel beinhaltet. Ein zusätzlicher Referenzkanal (Referenzspule und Verstärker) wird dazu nicht benötigt.

#### 1.3.4 Vibration, laterale Verschiebung

Wird das System durch externe Vibrationen in Schwingung versetzt (es reichen bereits natürliche Bodenschwingungen), kann dies eine relative Verschiebung der Erregerspule zum Gradiometer zur Folge haben. Diese Verschiebung kann in die x-, y- und z-Richtung erfolgen. Zusätzlich können Vibrationen eine Rotation der Erregerspule oder des Gradiometers in die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Richtung verursachen. Geht man von einem symmetrisch abgeglichenen System aus, wird eine Rotation um  $\Delta\alpha$  zu keiner Signaländerung führen. Symmetrisch bedeutet, daß die Erregerspule in ihren Abmessungen rotationssymmetrisch aufgebaut, und damit auch das von ihr erzeugte Feld rotationssymmetrisch ist. Eine Verschiebung um  $\Delta z$  oder  $\Delta y$  führt im abgeglichenen, symmetrischen Fall ebenfalls zu keiner

meßbaren Störung, aber zu einer Veränderung der Sensitivität des Meßsystems. Eine Ver-

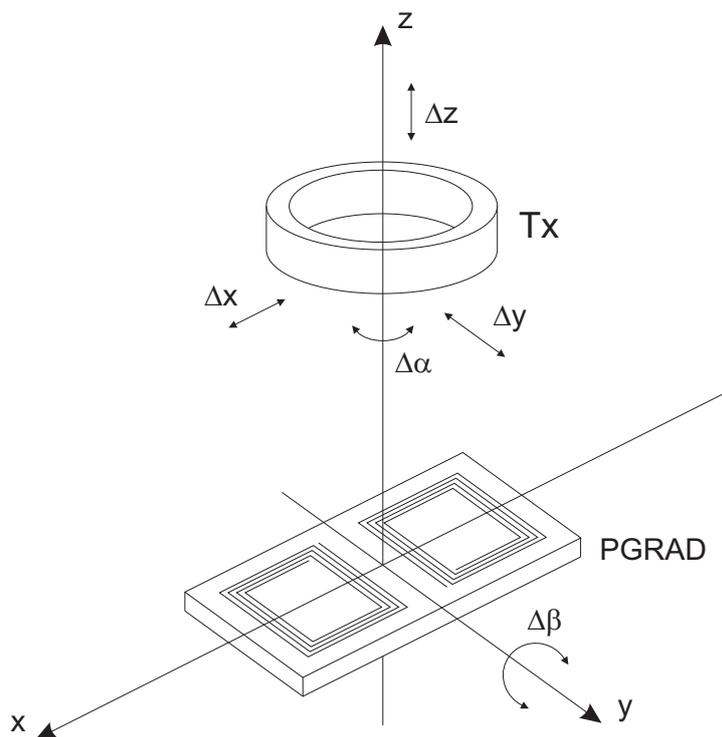


Abbildung 1.5: Verschiebung und Rotation des Gradiometers oder der Sendespule

schiebung um  $\Delta x$  bzw. Rotation um  $\Delta\beta$  macht sich als Störung im Signal bemerkbar. Grund dafür ist der nun nicht mehr gleiche magnetische Fluß in den beiden Spulenhälften des Gradiometers. Gesucht wird eine Möglichkeit, durch geeignete Filterung diesen Fehler zu eliminieren. Ein Problem dabei ist das nicht stationäre Zeitverhalten der Vibration. Weder eine konstante Amplitude, noch eine definierte Frequenz sind angebar, weil die Schwingungen von äußeren, nicht bekannten Einflüssen hervorgerufen werden. Absichtlich eingebrachte, definierte Vibrationen des Meßsystems (VIB) können jedoch dazu verwendet werden, Meßfehler zu bestimmen und die Ergebnisse zu korrigieren. Eine detaillierte Beschreibung dieser Möglichkeiten ist in (Abschnitt 2.3 und 2.5) zu finden.

### 1.3.5 Temperaturdrift des Gradiometers

Die Komponenten des Ersatzschaltbildes (Abb. 2.1) der verwendeten Gradiometer sind von der Temperatur abhängig. Ein Abgleich der Ausgangsspannung  $\Delta V$  auf Null bleibt nicht aufrecht, wenn sich die Temperatur einer Gradiometerhälfte relativ zur anderen verändert. Sind die Komponenten trotz gleicher Temperatur, aufgrund der Herstellungstoleranz des Gradiometers nicht exakt gleich, ist ein symmetrischer Abgleich der Ausgangsspannung nicht erreichbar.

# Kapitel 2

## Kalibrierproblem

### 2.1 Ersatzschaltbild des Gradiometers

Die beiden Wicklungen des Gradiometers werden durch ihre Selbstinduktivitäten ( $L_1, L_2$ ) und ihre ohmschen Widerstände ( $R_1, R_2$ ) ersetzt. Die Spannungsquellen stellen die vom Erregerfeld direkt induzierten ( $V_{1,0}, V_{2,0}$ ) und die vom Objekt induzierten Spannungen ( $\eta_1, \eta_2$ ) dar. Die parasitären Kapazitäten zwischen den Spulenwindungen und gegen Masse werden zu den Ersatzkapazitäten ( $C_1, C_2$ ) zusammengefaßt. Der Verstärker des Empfangskanals, der Widerstand und die parasitären Kapazitäten der Zuleitungen treten im Ersatzschaltbild konzentriert als Abschlußwiderstände ( $R_{A1}, R_{A2}$ ) und Abschlußkapazitäten ( $C_{A1}, C_{A2}$ ) auf.

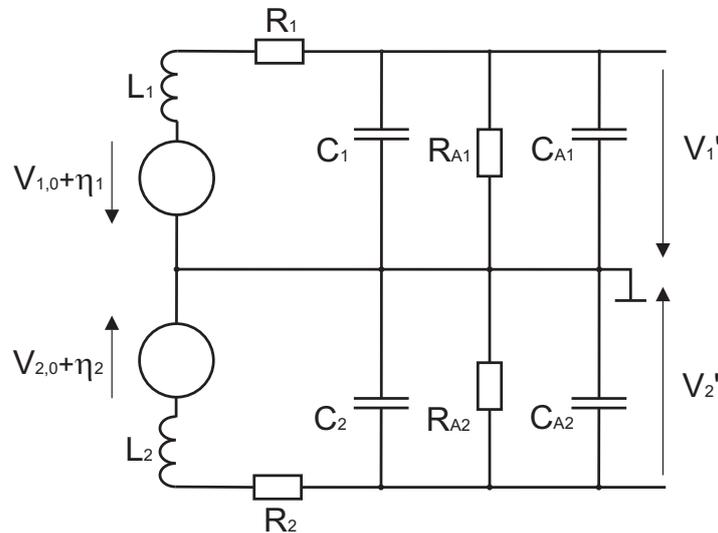


Abbildung 2.1: Ersatzschaltbild des Gradiometers

Bei sinusförmiger Erregung des Gradiometers können die Signale des Ersatzschaltbildes in einem Zeigerdiagramm (Abb. 2.2) dargestellt werden. Die vom Erregerfeld direkt induzierten Spannungen ( $V_{1,0}, V_{2,0}$ ) sind im Falle idealer Ausrichtung des Gradiometers zur Sendespule gleich groß und gegenphasig. Durch die Übertragungsfunktionen der beiden Gradiometerhälften werden die Spannungen verstärkt und gedreht ( $V'_{1,0}, V'_{2,0}$ ). Bei der anschließenden Summation heben sie sich, bei vollkommen identischen Gradiometerhälften, auf. Da aber sowohl die Ausrichtung zur Sendespule, als auch die Fertigung des Gradiome-

ters nicht ideal erfolgen kann, ergibt sich bei der Summation ein Spannungsoffset ( $\Delta V'$ ). Bringt man in das Erregerfeld ein leitfähiges Objekt ein, so wird in diesem eine Spannung induziert, die zur Ausbildung von Wirbelströmen führt. Diese Wirbelströme erzeugen ein schwaches Magnetfeld, welches die Objektsignale ( $\eta_1, \eta_2$ ) induziert. Sie sind von der Lage und der Leitfähigkeit des Objekts abhängig, und werden durch die Übertragungsfunktionen ebenfalls verstärkt und gedreht ( $\eta'_1, \eta'_2$ ). Bei der Summation durch das Gradiometer heben sie sich, bei asymmetrischer Anordnung des Objekts nicht auf, und ergeben das Nutzsignal ( $\Delta \eta'$ ).

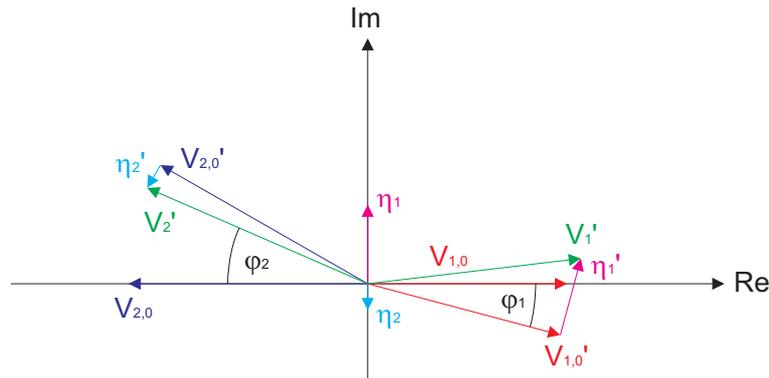


Abbildung 2.2: Zeigerdiagramm für das Gradiometer

Bei der Demodulation des gemessenen Signals, können Offset und Nutzsignal nicht unterschieden werden. Die durch den Phasengang der Meßkette (Gradiometer, Vor- und Nachverstärker) bedingte Drehung des Signals verursacht einen zusätzlichen Fehler, weil das Referenzkoordinatensystem nicht mit dem Koordinatensystem des generierten Signals übereinstimmt.

Dieser Fehlerwinkel kann durch Phasenkorrektur-Messungen mit geeigneten Materialien (zB.  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  Pulver) annähernd bestimmt werden und driftet mit der Temperatur der Gradiometer. Diese Materialien dürfen im beobachteten Frequenzbereich keine Dispersion aufweisen, und müssen rein imaginäre Signalanteile erzeugen.

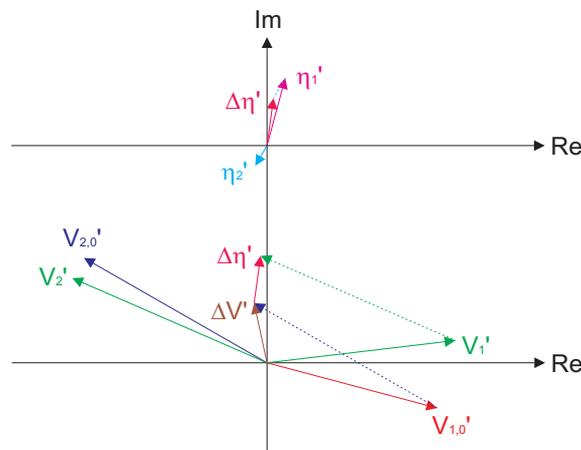


Abbildung 2.3: Offset  $\Delta V'$  durch nicht ideales Gradiometer und Ausrichtung

## 2.2 Laterale Verschiebung des Gradiometers

Die Kurve  $|B_0(x)|$  beschreibt die Verteilung der Magnetischen Flußdichte entlang einer Verschiebungslinie  $x$ . Im ideal ausgerichteten Fall, erhalten beide Gradiometerhälften den selben magnetischen Fluß ( $\Phi_1$  bzw.  $\Phi_2$ ). Durch Verschiebung in Richtung  $\Delta x$  steigt der Fluß in Gradiometerhälfte 1 und sinkt in Gradiometerhälfte 2.

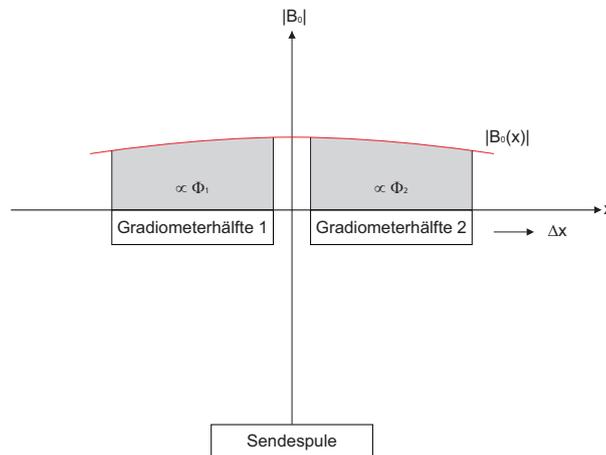


Abbildung 2.4: Verschiebung eines ideal ausgerichteten Gradiometers

Eine Verschiebung des Gradiometers verursacht eine Abnahme der induzierten Spannung in einer Gradiometerhälfte, und eine Zunahme um etwa den selben Betrag in der anderen Gradiometerhälfte. Durch periodische Auslenkung (zB. sinusförmige Anregung) kann man die induzierten Signale amplitudenmodulieren.

$$\Delta V \propto \Delta \hat{x} \cdot e^{j\omega_V t}$$

$$\Delta \hat{x} \quad \dots \text{Auslenk} - \text{Amplitude} \tag{2.1}$$

$$\omega_V \quad \dots \text{Vibrationsfrequenz}$$

**Problem:** Die hauptsächlich im Realteil auftretende Modulation wird in den Imaginärteil projiziert.

**Ziel:** Bestimmung eines Fehlerwinkels aus der absichtlichen Modulation.

## 2.3 Deterministische Modulationsmethode

Durch Vibration des Meßsystems mit bekannter Frequenz wird das Trägersignal amplitudenmoduliert (Abschnitt 2.2). Aus den Seitenfrequenzen des Frequenzspektrums wird ein Korrekturwinkel errechnet, der zur Kalibrierung der Messung dient.

**Annahme:** Die Übertragungsfunktionen der Verstärker und des Gradiometers verursachen lediglich eine Phasenverschiebung, jedoch keine Amplitudendämpfung der Signale.

### 2.3.1 Vereinfachte Sende-Empfangseinheit

Das Signal der Sendespule (TX) wird vom Lokaloszillator (LO) abgeleitet und erfährt eine Phasenverschiebung  $\theta_1$  durch die Sendeverstärkerkette (ADC, Leistungsverstärker, Sendespule). Der Lokaloszillator wird durch das Koordinatensystem ( $Re_{LO}$ ,  $Im_{LO}$ ) beschrieben und dient als Referenz-System für die Demodulation. Die Achsen für das wirklich emittierte Feld werden mit  $Re_{TX}$  und  $Im_{TX}$  bezeichnet und sind um den Systemwinkel  $\theta_1$  gedreht. Da in der Empfängerspule bei niedrigen Frequenzen das Feld phasengleich zur Sendespule ist, ist die induzierte Spannung ( $V$ ) reell im System ( $Re_{TX}$ ,  $Im_{TX}$ ). Führt man eine periodische Modulation des Hauptfeldes, und dadurch das Modulationssignal ( $M$ ) ein, so hat dieses nur einen Realteil im System ( $Re_{TX}$ ,  $Im_{TX}$ ).

#### Annahmen:

1. Bringt man ein schwach leitendes Objekt ein, so besitzt dessen Signal ( $S$ ) nur einen Imaginärteil.
2. Das Signal ( $S$ ) wird durch die periodische Bewegung sehr viel schwächer moduliert als das vom Hauptfeld induzierte Signal ( $V$ ), und kann für die Analyse als unmoduliert betrachtet werden.

Diese Annahmen werden in der Praxis gut erfüllt.

Das Signal durchläuft die Empfängerspule ( $RX$ ), und wird durch die Übertragungsfunktion des Gradiometers um den Phasenwinkel  $\varphi$  gedreht. Zusätzlich erhält es eine Drehung um den Winkel  $\theta_2$  durch den Leistungsverstärker und DAC bevor es weiterverarbeitet werden kann. Werden diese, ins System ( $Re'$ ,  $Im'$ ) gedrehten Signale ( $V'$ ,  $M'$ ,  $S'$ ) demoduliert, so geschieht dies wieder in Bezug auf den Lokaloszillator ( $Re_{LO}$ ,  $Im_{LO}$ ). Man erhält eine starke Modulation ( $Im_{LO}(M')$ ) des projizierten Imaginärteils, obwohl in Wirklichkeit (nahezu) keine Modulation des originalen Imaginärteils vorliegt. Die Projektion ( $Im_{LO}(S')$ ) des Signals gibt die Amplitude des originalen Signals ( $S'$ ) fehlerhaft wieder, und Teile des Realteils ( $V'$ ) werden im Imaginärteil  $Im_{LO}(V')$  sichtbar.

Um dies zu korrigieren, müssen die Signale um den Winkel  $\Psi = (\theta_1 + \theta_2 + \varphi)$  zurückgedreht werden (Glg. 2.2). Der Winkel  $\theta_1$  kann mit Hilfe einer Referenzspule gemessen werden, dafür ist allerdings ein separater ADC und Verstärkerkanal notwendig.  $\varphi + \theta_2$  können nur durch Kalibrierung korrigiert werden. Bei der nachfolgend beschriebenen Kalibrierungsmethode wird diese Korrektur erreicht, in dem man das Signal so dreht, daß die Modulation ( $Im_{LO}(M')$ ) des projizierten Imaginärteils ( $Im_{LO}(V') - Im_{LO}(S') + Im_{LO}(M')$ ) verschwindet. Dieser Drehwinkel muß genau  $(-\Psi)$  entsprechen, und beinhaltet automatisch die Fehlerwinkel  $\varphi$ ,  $\theta_2$  und  $\theta_1$ . Ein zusätzlicher Referenzkanal zur Bestimmung von  $\theta_1$  wird nicht mehr benötigt.

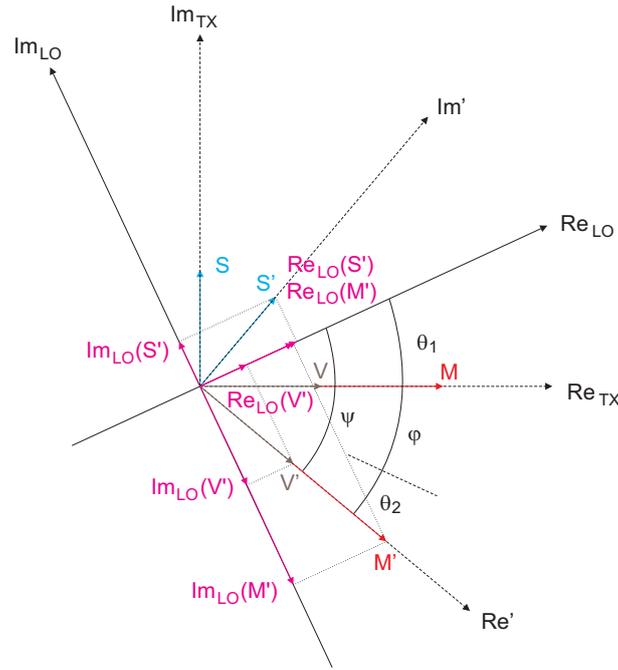


Abbildung 2.5: Zusammenhang von Signalen und unterschiedlichen Bezugssystemen

$$\begin{aligned}
 Im_{LO}(V') &= -Re'(V') \sin(\Psi) + Im'(V') \cos(\Psi) \\
 Re_{LO}(V') &= Re'(V') \cos(\Psi) + Im'(V') \sin(\Psi) \\
 &\Downarrow \\
 Im'(V') &= Re_{LO}(V') \sin(\Psi) + Im_{LO}(V') \cos(\Psi) \\
 Re'(V') &= Re_{LO}(V') \cos(\Psi) - Im_{LO}(V') \sin(\Psi)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

(Glg 2.2) gilt analog für die Signale  $M'$  und  $S'$ , wobei  $Im_{LO}(\#)$ ,  $Re_{LO}(\#)$  die gemessenen Imaginär- und Realteile, und  $Im'(\#)$ ,  $Re'(\#)$  die wirklichen Imaginär- und Realteile bezeichnet.

### 2.3.2 Kombination aus Sendespule und Gradiometer

Ist die Empfängerspule ein Gradiometer, werden die Verhältnisse etwas komplizierter, da sich die Spannungen  $V_1$  und  $V_2$  addieren (Abb. 2.1). Bei ideal ausgerichtetem Gradiometer sind die direkt induzierten Spannungen in ihrer Amplitude gleich und in Gegenphase, wodurch sie sich bei der Summation auslöschen. Sowohl die direkt induzierten Spannungen  $V_{\#0}$ , als auch die gewünschten Signale  $\eta_{\#}$  werden durch die Gradiometerhälften gefiltert und ihre Amplitude und Phasenlage verändert ( $V'_{\#}$ ). Die Summation führt zu keiner vollständigen Auslöschung, da die beiden Gradiometerhälften nie vollkommen identisch sind.

Die Winkel  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  ergeben sich aus der Phase des Sendeverstärkers  $\theta_1$ , den Phasen der Gradiometerhälften ( $\varphi_1, \varphi_2$ ), und der Kombination aus DAC und Verstärker  $\theta_2$ . Die Signale  $M'_1$  und  $M'_2$  sind die Modulationen der gedrehten, direkt induzierten Spannungen  $V'_{\#0}$ . Sie sind gleichphasig, da eine Zunahme von ( $V_{\#0}$ ) in einer Gradiometerhälfte, eine Abnahme in der anderen begleitet.

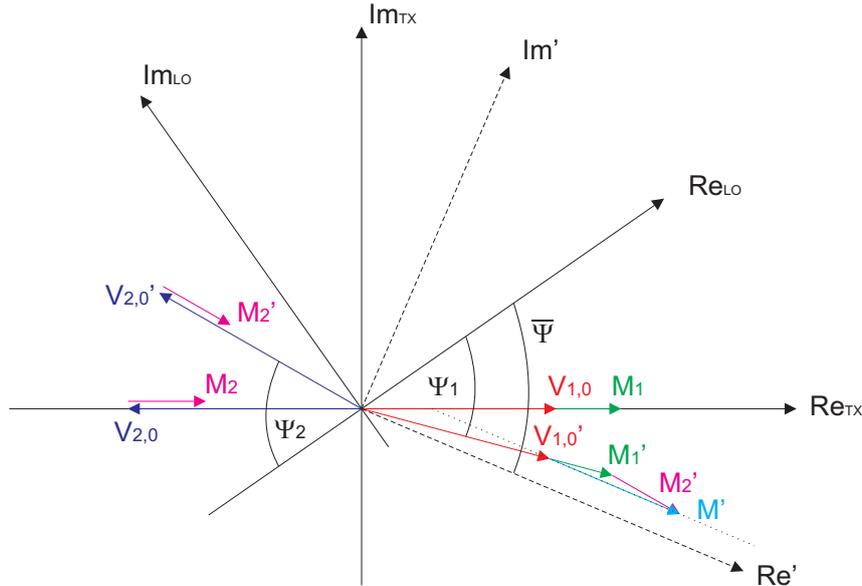


Abbildung 2.6: Zusammenhang von Signalen und unterschiedlichen Bezugssystemen beim Gradiometer

### 2.3.3 Rekonstruktion des Korrekturwinkels aus periodischer Verschiebung

Moduliert man das Trägersignal durch sinusförmige Verschiebung des Gradiometers aus der abgeglichenen Position (Abschnitt 2.2), kann das erhaltene Signal beschrieben werden durch:

$$S_{mod} = V_{1,0} \cdot e^{j(\omega_C t + \Psi_1)} (1 + k_1 \sin(\omega_V t + \chi)) - V_{2,0} \cdot e^{j(\omega_C t + \Psi_2)} (1 - k_2 \sin(\omega_V t + \chi)) \quad (2.3)$$

Mit den Modulationsgraden  $k_1$  und  $k_2$ , die sich leicht unterscheiden, da das Gradiometer nicht exakt abgeglichen werden kann, und dem Startwinkel  $\chi$  des Modulationssignals.  $\omega_C$  bezeichnet die Frequenz des unmodulierten Signals,  $\omega_V$  die Vibrationsfrequenz. Das negative Vorzeichen von  $k_2$  beschreibt die Tatsache, daß eine Spannungsabnahme in einer Gradiometerhälfte, von einer Spannungszunahme in der anderen begleitet wird.

In (Abb. 2.6) werden die beiden Modulationssignale gleichphasig dargestellt, da das negative Vorzeichen von  $k_2$  und die Gegenphase der Gradiometerhälften sich kompensieren. Die beiden Signale ( $M_1'$ ) und ( $M_2'$ ) addieren sich geometrisch zur Modulation ( $M'$ ) (Abb. 2.7).

#### Geometrische Lösung

Die geometrische Bedingung für die Auslöschung der Projektion der Modulation in den Imaginärteil lautet:

$$V'_{1,0} k_1 \sin(\Psi_1 - \bar{\Psi}) + V'_{2,0} k_2 \sin(\Psi_2 - \bar{\Psi}) = 0 \quad (2.4)$$

Womit sich als Bedingung ergibt:

$$\begin{aligned} V'_{1,0} k_1 (\sin(\Psi_1) \cos(\bar{\Psi}) - \cos(\Psi_1) \sin(\bar{\Psi})) + V'_{2,0} k_2 (\sin(\Psi_2) \cos(\bar{\Psi}) - \cos(\Psi_2) \sin(\bar{\Psi})) &= 0 \\ -\sin(\bar{\Psi}) (V'_{1,0} k_1 \cos(\Psi_1) + V'_{2,0} k_2 \cos(\Psi_2)) + \cos(\bar{\Psi}) (V'_{1,0} k_1 \sin(\Psi_1) + V'_{2,0} k_2 \sin(\Psi_2)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\tan(\bar{\Psi}) = \frac{V'_{1,0}k_1 \sin(\Psi_1) + V'_{2,0}k_2 \sin(\Psi_2)}{V'_{1,0}k_1 \cos(\Psi_1) + V'_{2,0}k_2 \cos(\Psi_2)} \quad (2.5)$$

Falls  $V'_{1,0}$  und  $V'_{2,0}$  sich nur sehr wenig ändern existiert ein konstanter Winkel  $\bar{\Psi}$  bei dem die Vibration verschwindet.

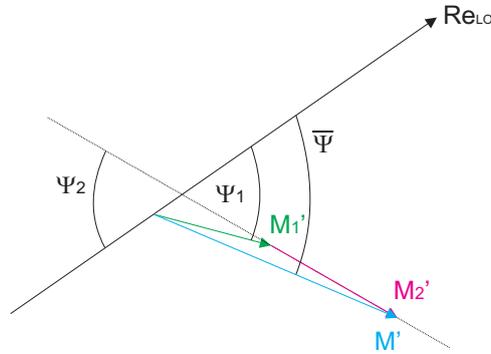


Abbildung 2.7: Geometrische Beziehung der Winkel  $\Psi_1, \Psi_2$  und  $\bar{\Psi}$

### Analytische Lösung

Das modulierte Signal (Glg. 2.3) lautet in seiner komplexen Form:

$$\begin{aligned} S_{C,mod} &= V_{1,0}e^{j(\omega_C t + \Psi_1)} \left(1 - \frac{jk_1}{2} (e^{j(\omega_V t + \chi)} - e^{-j(\omega_V t + \chi)})\right) \\ &\quad - V_{2,0}e^{j(\omega_C t + \Psi_2)} \left(1 + \frac{jk_2}{2} (e^{j(\omega_V t + \chi)} - e^{-j(\omega_V t + \chi)})\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Daraus ergibt sich für den Träger,

$$S_{CAR} = V_{1,0}e^{j(\omega_C t + \Psi_1)} - V_{2,0}e^{j(\omega_C t + \Psi_2)}$$

und für die Seitenfrequenzen:

$$\begin{aligned} S_{USB} &= -\frac{jk_1 V_{1,0}}{2} e^{j(\omega_C t + \Psi_1)} e^{j(\omega_V t + \chi)} - \frac{jk_2 V_{2,0}}{2} e^{j(\omega_C t + \Psi_2)} e^{j(\omega_V t + \chi)} \\ &= -\frac{j}{2} e^{j((\omega_C + \omega_V)t + \chi)} (k_1 V_{1,0} e^{j\Psi_1} + k_2 V_{2,0} e^{j\Psi_2}) \\ S_{LSB} &= \frac{jk_1 V_{1,0}}{2} e^{j(\omega_C t + \Psi_1)} e^{-j(\omega_V t + \chi)} + \frac{jk_2 V_{2,0}}{2} e^{j(\omega_C t + \Psi_2)} e^{-j(\omega_V t + \chi)} \\ &= \frac{j}{2} e^{j((\omega_C - \omega_V)t - \chi)} (k_1 V_{1,0} e^{j\Psi_1} + k_2 V_{2,0} e^{j\Psi_2}) \end{aligned}$$

Nun kann man die komplexen Fourierkoeffizienten berechnen:

$$\begin{aligned} c_{CAR} &= V_{1,0}e^{j\Psi_1} - V_{2,0}e^{j\Psi_2} \\ c_{USB} &= -\frac{j}{2} e^{j\chi} (k_1 V_{1,0} e^{j\Psi_1} + k_2 V_{2,0} e^{j\Psi_2}) \\ c_{LSB} &= \frac{j}{2} e^{-j\chi} (k_1 V_{1,0} e^{j\Psi_1} + k_2 V_{2,0} e^{j\Psi_2}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Mit  $\cos(\chi) = \frac{e^{j\chi} + e^{-j\chi}}{2}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} c_{USB} - c_{LSB} &= -\frac{j}{2} (e^{j\chi} + e^{-j\chi}) (k_1 V_{1,0} e^{j\Psi_1} + k_2 V_{2,0} e^{j\Psi_2}) \\ &= -j \cos(\chi) (k_1 V_{1,0} e^{j\Psi_1} + k_2 V_{2,0} e^{j\Psi_2}) \end{aligned}$$

und der Real- und Imaginärteil zu:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c_{USB} - c_{LSB}) &= \cos(\chi) (k_1 V_{1,0} \sin(\Psi_1) + k_2 V_{2,0} \sin(\Psi_2)) \\ \operatorname{Im}(c_{USB} - c_{LSB}) &= -\cos(\chi) (k_1 V_{1,0} \cos(\Psi_1) + k_2 V_{2,0} \cos(\Psi_2)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Mit  $\sin(\chi) = \frac{e^{j\chi} - e^{-j\chi}}{2j}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} c_{USB} + c_{LSB} &= -\frac{j}{2} (e^{j\chi} - e^{-j\chi}) (k_1 V_{1,0} e^{j\Psi_1} + k_2 V_{2,0} e^{j\Psi_2}) \\ &= \sin(\chi) (k_1 V_{1,0} e^{j\Psi_1} + k_2 V_{2,0} e^{j\Psi_2}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

und der Real- und Imaginärteil zu:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c_{USB} + c_{LSB}) &= \sin(\chi) (k_1 V_{1,0} \cos(\Psi_1) + k_2 V_{2,0} \cos(\Psi_2)) \\ \operatorname{Im}(c_{USB} + c_{LSB}) &= \sin(\chi) (k_1 V_{1,0} \sin(\Psi_1) + k_2 V_{2,0} \sin(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Man erhält das selbe Ergebnis wie (Glg. 2.5):

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re}(c_{USB} - c_{LSB})}{\operatorname{Im}(c_{LSB} - c_{USB})} &= \frac{(k_1 V_{1,0} \sin(\Psi_1) + k_2 V_{2,0} \sin(\Psi_2)) \cancel{\cos(\chi)}}{(k_1 V_{1,0} \cos(\Psi_1) + k_2 V_{2,0} \cos(\Psi_2)) \cancel{\cos(\chi)}} \\ \frac{\operatorname{Im}(c_{USB} + c_{LSB})}{\operatorname{Re}(c_{USB} + c_{LSB})} &= \frac{(k_1 V_{1,0} \sin(\Psi_1) + k_2 V_{2,0} \sin(\Psi_2)) \cancel{\sin(\chi)}}{(k_1 V_{1,0} \cos(\Psi_1) + k_2 V_{2,0} \cos(\Psi_2)) \cancel{\sin(\chi)}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Woraus man schließen kann:

$$\begin{aligned} \tan \bar{\Psi} &= \frac{\operatorname{Re}(c_{USB} - c_{LSB})}{\operatorname{Im}(c_{LSB} - c_{USB})} \rightarrow \bar{\Psi}_{cor1} \\ \tan \bar{\Psi} &= \frac{\operatorname{Im}(c_{USB} + c_{LSB})}{\operatorname{Re}(c_{USB} + c_{LSB})} \rightarrow \bar{\Psi}_{cor2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Fourierkoeffizienten  $c_{USB}$  und  $c_{LSB}$  können aus dem Frequenzspektrum des gemessenen Signals als komplexe Werte der beiden Seitenfrequenzen unverfälscht erhalten werden, wenn die Abtastfrequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Modulationsfrequenz, und die Fensterbreite ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer des Modulationssignals ist. Da sowohl LabView [National Instruments] als auch MatLab [Mathworks] ein zweiseitiges Amplitudenspektrum berechnet (Aufteilung der Energie in negative und positive Frequenzkomponenten), müssen die Koeffizienten mit dem Faktor zwei skaliert werden. (Glg. 2.11) ist für alle periodischen (nicht-sinusförmigen) Modulationen gültig, wenn für  $c_{USB}$  und  $c_{LSB}$  die Fourierkoeffizienten der Grundschwingung der Modulation verwendet werden.

Da der Winkel in (Abb. 2.5) negativ ist, wird (Glg. 2.2) zu:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}'(S_{CAR}) &= -\operatorname{Re}_{LO}(S_{CAR}) \sin(\bar{\Psi}) + \operatorname{Im}_{LO}(S_{CAR}) \cos(\bar{\Psi}) \\ \operatorname{Re}'(S_{CAR}) &= \operatorname{Re}_{LO}(S_{CAR}) \cos(\bar{\Psi}) + \operatorname{Im}_{LO}(S_{CAR}) \sin(\bar{\Psi}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

## Einfluß des Startwinkels des Modulationssignals

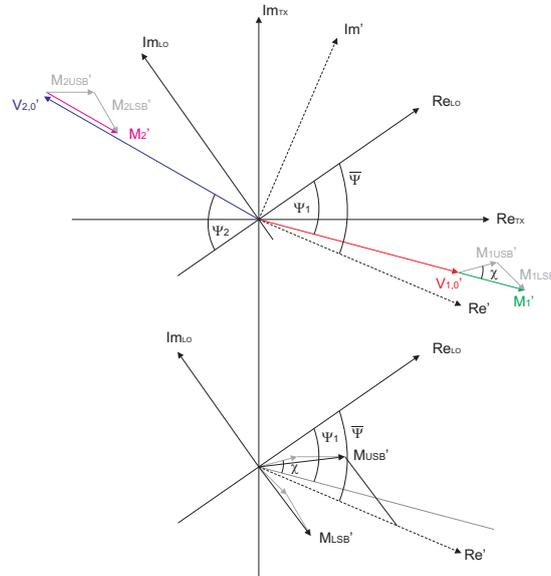


Abbildung 2.8: Geometrische Betrachtung zum Startwinkel des Modulationssignals

Auch der Startwinkel  $\chi$  des Modulationssignals bestimmt die Größe des Real- und Imaginärteils der Seitenfrequenzen. Die Berechnungsvorschriften (Glg. 2.11) für den Fehlerwinkel  $\overline{\Psi}_{cor_{\Psi}}$  enthalten den Startwinkel nicht, sind jedoch für  $\cos(\chi) = 0$  bzw.  $\sin(\chi) = 0$  praktisch nicht verwendbar, weshalb für die Messung ein Startwinkel

$$\begin{aligned} \chi &\neq (2n - 1) \frac{\pi}{2} & n \in \mathbb{Z} \\ \chi &\neq n\pi & n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (2.13)$$

gefordert wird.

Der Startwinkel kann (zur Kontrolle) aus (Glg. 2.8) und (Glg. 2.9) berechnet werden. Es lassen sich zwei Möglichkeiten zur Bestimmung von  $\chi$  finden:

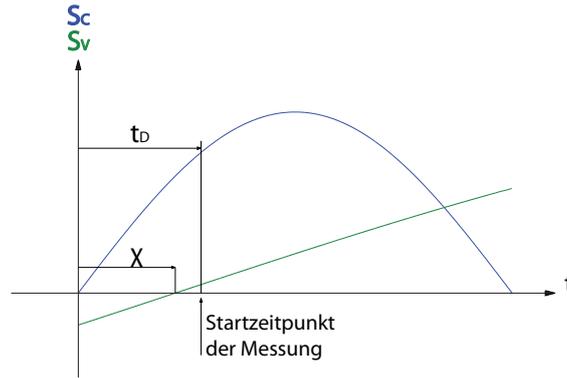
$$\tan(\chi) = \frac{\text{Im}(c_{\text{USB}} + c_{\text{LSB}})}{\text{Re}(c_{\text{USB}} - c_{\text{LSB}})} \rightarrow \chi_1 \quad (2.14)$$

$$\tan(\chi) = \frac{\text{Re}(c_{\text{USB}} + c_{\text{LSB}})}{\text{Im}(c_{\text{LSB}} - c_{\text{USB}})} \rightarrow \chi_2 \quad (2.15)$$

## 2.4 Simulation zum Datenmodell für die deterministische Methode

### 2.4.1 Implementierung und Beschreibung der Parameter

Zur Simulation der deterministischen Methode wird eine Meßreihe aus  $N$  Datensätzen generiert. Pro Datensatz wird ein amplitudenmoduliertes Signal  $S$ , mit der Trägerfrequenz  $f_C$  und der Modulationsfrequenz  $f_V$ , den Modulationsgraden ( $m_R, m_I$ ) des Real- und Imaginärteils, den Startphasen ( $\varphi_C, \varphi_V$ ) und  $n_g$  Werten erzeugt.  $S$  stellt die Differenz der um die Systemwinkel gedrehten Spannungen der beiden Gradiometerhälften dar, die

Abbildung 2.9: Starverzögerung  $t_D$  und Modulationswinkel  $\chi$ 

sich in der Amplitude des Trägers ( $A_1, A_2$ ), dem Systemdrehwinkel ( $\Psi_1, (\Psi_1 + \xi)$ ), dem Objektanteil ( $A_{Obj}(1 - k_{Obj}), A_{Obj}k_{Obj}$ ) und dem Vorzeichen der (deterministischen und stochastischen) Modulation unterscheiden.

Signal in Gradiometerhälfte 1:

$$S_{G1} = \underbrace{A_1 \cos(2\pi f_C t_g + \varphi_C)}_{\text{Trägerschwingung, Hauptfeld}} \cdot \left[ \underbrace{1 + (m_R + j \cdot m_I) \sin(2\pi f_V t_g + \varphi_V + \chi)}_{\text{deterministische Modulation, Vibration}} \right. \\ \left. + j \underbrace{(1 - k_{Obj}) A_{Obj}}_{\text{Objektanteil}} + \underbrace{A_{STO} \left(1 + j \frac{m_I}{m_R}\right)}_{\text{stochastische Modulation}} \right]$$

Signal in Gradiometerhälfte 2:

$$S_{G2} = \underbrace{A_2 \cos(2\pi f_C t_g + \varphi_C)}_{\text{Trägerschwingung, Hauptfeld}} \cdot \left[ \underbrace{1 - (m_R + j \cdot m_I) \sin(2\pi f_V t_g + \varphi_V + \chi)}_{\text{deterministische Modulation, Vibration}} \right. \\ \left. + j \underbrace{k_{Obj} A_{Obj}}_{\text{Objektanteil}} - \underbrace{A_{STO} \left(1 + j \frac{m_I}{m_R}\right)}_{\text{stochastische Modulation}} \right]$$

$$S = (S_{G1} e^{j\Psi_1} - S_{G2} e^{j(\Psi_1 + \xi)}) \underbrace{\left(1 + (A_n R_{n_{Re}} + j A_n R_{n_{Im}})\right)}_{\text{Rauschanteil}}$$

$$\varphi_C = \varphi_0 + \varphi_J R_\varphi = 2\pi f_C t_D \quad \text{Startwinkel des Trägersignals}$$

$$\varphi_V = \varphi_C \frac{f_V}{f_C} = 2\pi f_V t_D \quad \text{Startwinkel des Modulationssignals}$$

$$t_g = [0..(n_g - 1)] \frac{1}{f_g} \quad \text{Zeitvektor zur Signal-Generierung}$$

$$t_s = [0..(n_s - 1)] \frac{1}{f_s} \quad \text{Zeitvektor zur Signal-Abtastung}$$

Die Startphasen  $\varphi_C$  und  $\varphi_V$  simulieren die Startverzögerung  $t_D$  einer realen Messung [2, Abschnitt 2.2.2]. Der Winkel  $\chi$  ist die Phasenverschiebung zwischen Träger- und Modulationssignal zum Zeitpunkt der Signalgenerierung (Abb. 2.9).

$R_\varphi$  ist eine normalverteilte Zufallsvariable ( $\overline{R_\varphi} = 0$ ,  $\text{std}(R_\varphi) = 1$  und  $\text{Var}(R_\varphi) = 1$ ) zur Erzeugung einer zufälligen Startverzögerung und simuliert den Triggerjitter (Abschnitt 4.2.3) der Meßkarten.  $R_{n_{Re}}$  und  $R_{n_{Im}}$  sind normalverteilte Zufallsvektoren ( $\overline{R_{n_\#}} = 0$ ,  $\text{std}(R_{n_\#}) = 1$  und  $\text{Var}(R_{n_\#}) = 1$ ) zur Erzeugung eines Rauschanteils des Signals  $S$ . Das Signal wird mit der Frequenz  $f_s$  abgetastet und der Auflösung  $Q$  des Spannungsbereichs FSR quantisiert. Mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation (DFT) wird das Frequenzspektrum  $S(\omega)$  jedes Datensatzes berechnet und die Werte an den Stellen der Trägerfrequenz ( $c_{CAR}|_{\omega_C} = S_{\omega_C}$ ), der unteren Seitenfrequenz ( $c_{LSB}|_{(\omega_C - \omega_V)}$ ) und der oberen Seitenfrequenz ( $c_{USB}|_{(\omega_C + \omega_V)}$ ) bestimmt. Da Matlab ein zweiseitiges Frequenzspektrum berechnet, werden die Ergebnisse mit dem Faktor zwei skaliert und die Koeffizienten für die negativen Frequenzen verworfen.

Die Fensterlänge  $t_w$  der Abtastung und auch die Frequenzauflösung  $\Delta f$  des Spektrums ergibt sich aus

$$\Delta f = \frac{1}{t_w} = \frac{f_s}{n_s} \quad (2.16)$$

Der Korrekturwinkel  $\overline{\Psi}$  wird aus (Glg. 2.11) für jeden Datensatz unabhängig berechnet, und die Daten mit (Glg. 2.17) korrigiert.

$$\begin{aligned} Im_{cor}(S_{\omega_C}) &= Re_{raw}(S_{\omega_C}) \sin(\overline{\Psi}) + Im_{raw}(S_{\omega_C}) \cos(\overline{\Psi}) \\ Re_{cor}(S_{\omega_C}) &= Re_{raw}(S_{\omega_C}) \cos(\overline{\Psi}) + Im_{raw}(S_{\omega_C}) \sin(\overline{\Psi}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Von den Rohdaten und den korrigierten Meßwerten wird die spektrale Rauschspannungsdichte berechnet:

$$\text{SNVD}(S_{\omega_C}) = \frac{\text{std}(S_{\omega_C})}{A_V \sqrt{B}} = \frac{\text{std}(S_{\omega_C})}{A_V \sqrt{\frac{f_s}{4n_s}}} \quad (2.18)$$

$\text{std}(S_{\omega_C})$  ... Standardabweichung von  $S_{\omega_C}$

$A_V$  ... Gesamtverstärkungsfaktor

$B$  ... Bandbreite

In den folgenden Tabellen wird eine Übereinstimmung mit den zu erwartenden Ergebnissen durch **grünen**, und eine (starke) Abweichung durch **roten** Text hervorgehoben.

### 2.4.2 Simulationen mit Matlab

In (Tab. 2.1) werden die Simulations-Parameter aufgelistet, die Variationen dieser, sind bei den Ergebnissen der einzelnen Simulationen angegeben.

Parameter	Wert	Einheit	Bedeutung
$f_C$	100000	Hz	Trägerfrequenz
$f_V$	50	Hz	Modulationsfrequenz
$A_1, A_2$	1	V	Amplitude des Trägers
$A_{Obj}$	0,2	V	Amplitude des Objektsignals
$k_{Obj}$	0		Objektanteil an $S_{G2}$
$m_{Re}$	$10^{-2}$		Modulationsgrad des Realteils
$m_{Im}$	$10^{-4}$		Modulationsgrad des Imaginärteils
$A_n$	$10^{-3}$		Rauschanteil
$\Psi_1$	$-\frac{\pi}{5}$	rad	Systemdrehwinkel für $S_{G1}$
$\xi$	0	rad	Systemdrehwinkel-Differenz $\Psi_2 - \Psi_1$
$\varphi_0$	$\frac{\pi}{4}$	rad	Signal-Startwinkel
$\varphi_J$	$\frac{\pi}{180}$	rad	Schwankung des Signal-Startwinkels
$\chi$	$\frac{\pi}{8}$	rad	Modulations-Phasenverschiebung
$A_{STO}$	0	V	stochastische Modulationsamplitude
N	20		Anzahl der Datensätze
$f_g$	10	MHz	Frequenz der Signalgenerierung
$n_g$	2000000		generierte Datenpunkte
$f_s$	5	MHz	Frequenz der Signalabtastung
$n_s$	200000		Anzahl der Abtastpunkte
FSR	$\pm 1$	V	Spannungsbereich der Quantisierung
Q	12	Bit	Auflösung der FSR
$A_V$	75		Gesamtverstärkung

Tabelle 2.1: (Standard-) Parameter der Simulationen

(Tab. 2.2) zeigt die Korrekturergebnisse bei exakt abgeglichenem Gradiometer  $A_1 = A_2$  und identischen Gradiometerhälften  $\xi = 0$ . Der Triggerjitter ( $\varphi_J = \frac{\pi}{180}$  rad) und der Rauschanteil verursachen eine spektrale Rauschspannungsdichte  $SNVD(Im_{raw}(S_{\omega_C})) \approx 10^{-6} \frac{V}{\sqrt{Hz}}$ , durch die Korrektur wird diese auf  $\approx 10^{-8} \frac{V}{\sqrt{Hz}}$  verringert.

exakter Abgleich von identischen Gradiometerhälften

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,2	$1,8211 \cdot 10^{-8}$
$Im_{raw}(S_{\omega_C})$	0,19731	$2,9731 \cdot 10^{-6}$
$Im_{cor_1}(S_{\omega_C})$	0,19999	$1,8420 \cdot 10^{-8}$
$Im_{cor_2}(S_{\omega_C})$	0,19999	$1,8549 \cdot 10^{-8}$
$Re_{raw}(S_{\omega_C})$	$-32,501 \cdot 10^{-3}$	$1,8361 \cdot 10^{-5}$
$Re_{cor_1}(S_{\omega_C})$	$1,997 \cdot 10^{-3}$	$4,3180 \cdot 10^{-7}$
$Re_{cor_2}(S_{\omega_C})$	$1,991 \cdot 10^{-3}$	$4,8392 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 2.2:  $A_1 = A_2$ ,  $\xi = 0$

In (Abb. 2.10) ist der berechnete Korrekturwinkel für die einzelnen Datensätze dargestellt, der Mittelwert  $\overline{\Psi}_{cor_{\#}} = 0,173$  rad entspricht etwa dem erwarteten Wert  $\Psi_1 + \varphi_0 = 0,1571$  rad. (Abb. 2.11) zeigt einen Ausschnitt aus dem Amplitudenspektrum eines Datensatzes, die

Imaginär- und Realteile des Trägersignals und der Seitenfrequenzen sind durch rote Kreise markiert.

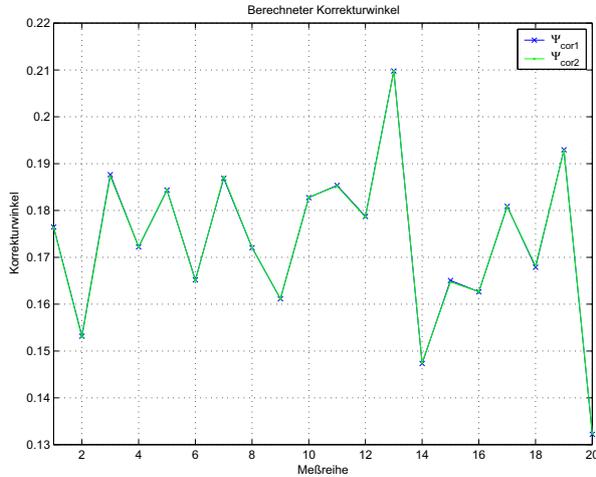


Abbildung 2.10: Berechneter Korrekturwinkel

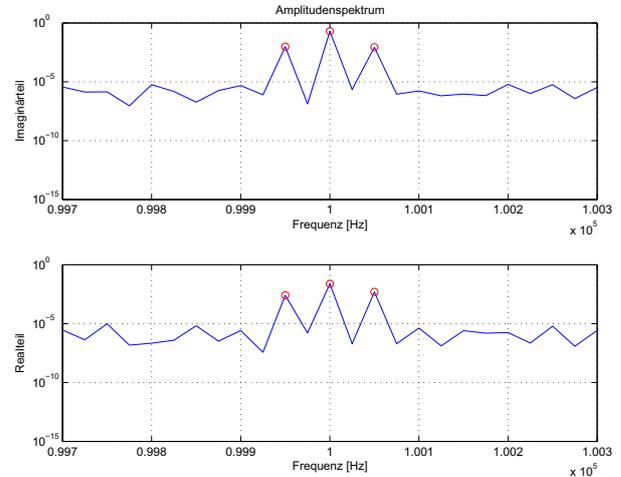


Abbildung 2.11: Teil des Amplitudenspektrums eines Datensatzes

Ist der Abgleich des Gradiometers nicht exakt (Tab. 2.3), wird der Anteil des Objekts  $A_{Obj} = 0,2V$  dennoch korrekt in den Imaginärteil, und die Differenz der Trägeramplituden  $A_1 - A_2 = -0,25V$  in den Realteil gedreht.

Bei nicht identischen Systemdrehwinkeln  $\xi = \frac{\pi}{180}$  rad für die beiden Gradiometerhälften (Tab. 2.4), wird ein mittlerer Korrekturwinkel ermittelt. Der Objektanteil des Signals kann dadurch nicht korrekt wiedergegeben werden, die spektrale Rauschspannungsdichte wird dennoch verringert.

Nicht exakt abgeglichenes Gradiometer

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,32016	$1,4189 \cdot 10^{-8}$
$Im_{raw}(S_{\omega_C})$	0,15963	$2,1396 \cdot 10^{-5}$
$Im_{cor1}(S_{\omega_C})$	0,20249	$3,1236 \cdot 10^{-7}$
$Im_{cor2}(S_{\omega_C})$	0,2025	$4,0835 \cdot 10^{-7}$
$Re_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,27748	$1,2144 \cdot 10^{-5}$
$Re_{cor1}(S_{\omega_C})$	-0,24799	$2,5065 \cdot 10^{-7}$
$Re_{cor2}(S_{\omega_C})$	-0,24798	$3,2975 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 2.3:  $A_2 = 1,25V$

Nicht identische Gradiometerhälften

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,18255	$1,3943 \cdot 10^{-8}$
$Im_{raw}(S_{\omega_C})$	0,18035	$1,5929 \cdot 10^{-6}$
$Im_{cor1}(S_{\omega_C})$	0,18251	$1,5473 \cdot 10^{-8}$
$Im_{cor2}(S_{\omega_C})$	0,18251	$1,5284 \cdot 10^{-8}$
$Re_{raw}(S_{\omega_C})$	$-28,158 \cdot 10^{-3}$	$1,0340 \cdot 10^{-5}$
$Re_{cor1}(S_{\omega_C})$	$3,5597 \cdot 10^{-3}$	$2,1628 \cdot 10^{-7}$
$Re_{cor2}(S_{\omega_C})$	$3,5472 \cdot 10^{-3}$	$2,6524 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 2.4:  $\xi = \frac{\pi}{180}$  rad

Wird vom Objekt in beide Hälften des Gradiometers eine Spannung induziert (Tab. 2.5), tritt nach der Korrektur nur die Differenz der Objektanteile  $(1 - 2k_{Obj}) A_{Obj} = 0,1V$  im Imaginärteil auf, die Differenz der Trägersignale  $(A_1 - A_2 = -0,2V)$  im Realteil.

Ein stochastischer Modulationsanteil (Tab. 2.6) oder ein hoher Rauschanteil (Tab. 2.7) beeinflussen die Ergebnisse in ähnlicher Weise. Sowohl die SNVD der Rohdaten, als auch die SNVD der korrigierten Daten verschlechtert sich, da beide Signalanteile hauptsächlich

Aufteilung des Objekts

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,21932	$2,1713 \cdot 10^{-8}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	$57,239 \cdot 10^{-3}$	$1,9357 \cdot 10^{-5}$
$\text{Im}_{cor1}(S_{\omega_C})$	0,0920	$3,6745 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{cor2}(S_{\omega_C})$	0,0920	$2,9661 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,21168	$5,2482 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{cor1}(S_{\omega_C})$	-0,19909	$1,5700 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{cor2}(S_{\omega_C})$	-0,19909	$1,2650 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 2.5:  $k_{Obj} = 0,25$   $A_2 = 1,2V$ 

stochastischer Modulationsanteil

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,89023	$3,2373 \cdot 10^{-3}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,21828	$9,5314 \cdot 10^{-4}$
$\text{Im}_{cor1}(S_{\omega_C})$	0,20103	$1,1890 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor2}(S_{\omega_C})$	0,20122	$7,9625 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,088075	$5,6251e \cdot 10^{-3}$
$\text{Re}_{cor1}(S_{\omega_C})$	0,12196	$5,7056 \cdot 10^{-3}$
$\text{Re}_{cor2}(S_{\omega_C})$	0,12194	$5,7054 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 2.6:  $A_{STO} = 0,5V$ ,  $A_2 = 1,1V$ 

Einfluß auf den Träger, und nur in geringem Maße auf die Seitenfrequenzen des Amplitudenspektrums haben. Der Objektanteil wird nahezu fehlerfrei rekonstruiert.

Rauschen

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,2236	$4,0426 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,18141	$1,2138 \cdot 10^{-5}$
$\text{Im}_{cor1}(S_{\omega_C})$	0,20086	$3,1966 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor2}(S_{\omega_C})$	0,20075	$6,7391 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,13066	$1,7006 \cdot 10^{-5}$
$\text{Re}_{cor1}(S_{\omega_C})$	-0,098229	$6,0767 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{cor2}(S_{\omega_C})$	-0,098437	$1,3897 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.7:  $A_n = 0,1$   $A_2 = 1,1V$ 

Modulation des Imaginärteils

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,2	$1,3334 \cdot 10^{-8}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,19779	$2,9726 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor1}(S_{\omega_C})$	0,14142	$1,7350 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{cor2}(S_{\omega_C})$	0,14142	$1,9679 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,02938	$2,0280 \cdot 10^{-5}$
$\text{Re}_{cor1}(S_{\omega_C})$	0,14142	$1,7989 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{cor2}(S_{\omega_C})$	0,14142	$2,0234 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 2.8:  $m_{Im} = 10^{-2}$ ,  $m_{Re} = 10^{-2}$ 

Anders verhält es sich bei deterministischer Modulation des Imaginärteils (Tab. 2.8). Werden Real- und Imaginärteil in gleichem Maße moduliert (Annahme 2, Abschnitt 2.3 wird nicht erfüllt), kann zwischen projizierter Modulation des Realteils und wirklicher Modulation des Imaginärteils nicht unterschieden werden, der berechnete Korrekturwinkel minimiert beide Anteile.

Einfluß der Fensterlänge  $t_w$ 

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,22363	$1,5929 \cdot 10^{-8}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,18964	$8,3129 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor1}(S_{\omega_C})$	0,18738	$2,9015 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{cor2}(S_{\omega_C})$	0,20173	$1,9417 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,1185	$1,3355 \cdot 10^{-5}$
$\text{Re}_{cor1}(S_{\omega_C})$	-0,12207	$4,6143 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{cor2}(S_{\omega_C})$	-0,09652	$4,2146 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 2.9:  $n_s = 199999$   $A_2 = 1,1V$ 

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,22337	$2,3215 \cdot 10^{-8}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,19617	$1,1866e \cdot 10^{-5}$
$\text{Im}_{cor1}(S_{\omega_C})$	0,15895	$2,9900 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{cor2}(S_{\omega_C})$	0,20123	$1,3279 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,10673	$2,1681 \cdot 10^{-5}$
$\text{Re}_{cor1}(S_{\omega_C})$	-0,15694	$3,0460 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{cor2}(S_{\omega_C})$	-0,096952	$2,8032 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 2.10:  $n_s = 199998$   $A_2 = 1,1V$

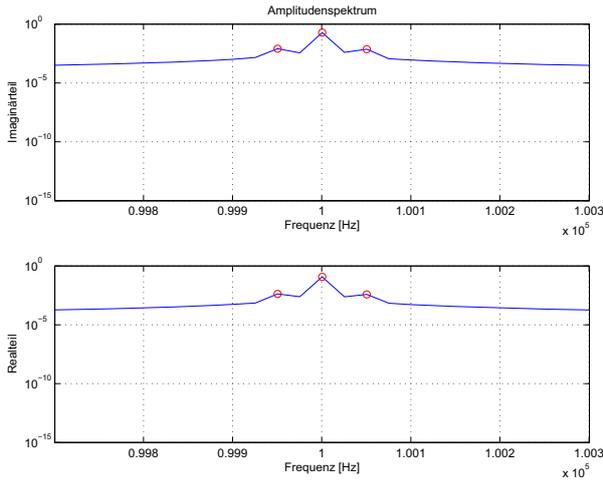


Abbildung 2.12: Amplitudenspektrum bei  $n_S = 199999$   $A_2 = 1,1V$

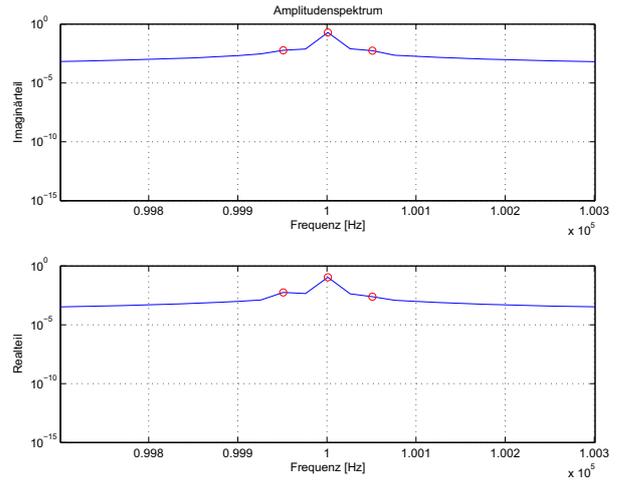


Abbildung 2.13: Amplitudenspektrum bei  $n_S = 199998$   $A_2 = 1,1V$

Die Fensterlänge  $t_w$  muß ein ganzzahliges Vielfaches der Signal- und der Vibrations-Periodendauer sein, damit im Amplitudenspektrum die unverfälschten Werte der komplexen Fourierkoeffizienten abgebildet werden (Abb 2.11). Ist dies nicht der Fall (Tab. 2.9 und Tab. 2.10), wird die Information der einzelnen Frequenzwerte in benachbarte Stützpunkte 'verschmiert' (leakage) (Abb. 2.12 und Abb. 2.13). Die Fensterlänge kann über die Anzahl der Abtastpunkte  $n_s$  festgelegt werden (Glg. 2.16), und bestimmt die Frequenzauflösung des Spektrums. Die verfälschten Koeffizienten der Seitenfrequenzen bewirken eine fehlerhafte Berechnung des Korrekturwinkels, wobei die Berechnungsvorschrift für  $\Psi_{cor2}$  (in der Simulation) stabiler gegenüber leakage zu sein scheint.

### Einfluß des Startwinkels $\chi$

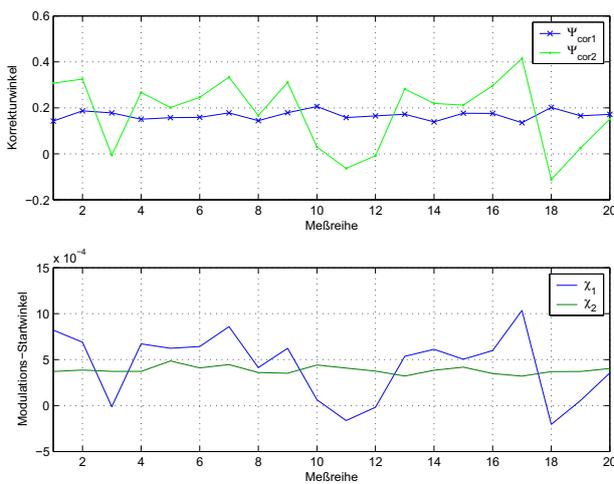


Abbildung 2.14: Berechneter Korrekturwinkel für  $\chi = 0$

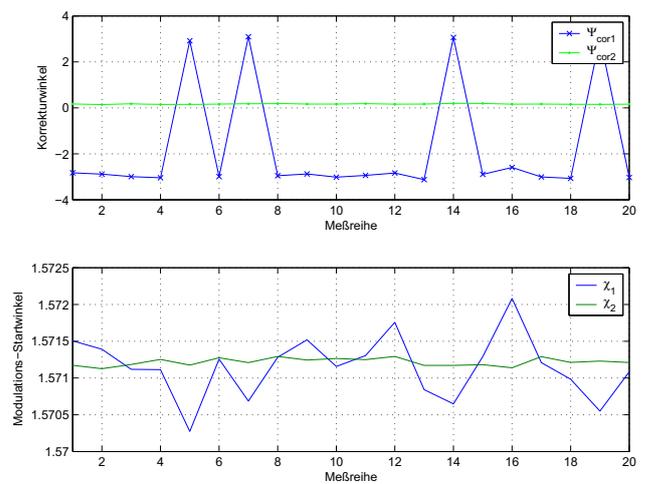


Abbildung 2.15: Berechneter Korrekturwinkel für  $\chi = \frac{\pi}{2}$

Winkel	Mittelwert [rad]	Standardabweichung [rad]
$\Psi_{cor_1}$	0,1671	0,0193
$\Psi_{cor_2}$	0,1800	0,1512
$\chi_1$	$4,3544 \cdot 10^{-4}$	$3,5959 \cdot 10^{-4}$
$\chi_2$	$3,8589 \cdot 10^{-4}$	$4,1045 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.11:  $\chi = 0$ 

Winkel	Mittelwert [rad]	Standardabweichung [rad]
$\Psi_{cor_1}$	-1,7464	2,4547
$\Psi_{cor_2}$	0,1680	0,0146
$\chi_1$	1,5712	$4,2025 \cdot 10^{-4}$
$\chi_2$	1,5712	$5,1514 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.12:  $\chi = \frac{\pi}{2}$ 

Für die Berechnung des Korrekturwinkels  $\overline{\Psi}_{cor_{\#}}$  (Glg. 2.11) wird ein Startwinkel

$$\chi \neq (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\chi \neq n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

gefordert. Wird diese Forderung nicht erfüllt, ist nur jeweils eine der ansonsten redundanten Berechnungsvorschriften praktisch verwendbar. Die Startwinkel  $\chi_{\#}$  werden mit (Glg. 2.14) richtig bestimmt (Tab. 2.11 und Tab. 2.12). Für  $\chi = 0$  rad wird nur  $\overline{\Psi}_{cor_1}$  richtig berechnet (Abb. 2.14), für  $\chi = \frac{\pi}{2}$  rad ergibt nur  $\overline{\Psi}_{cor_2}$  eine richtige Lösung (Abb. 2.15).

## 2.5 Stochastische Modulationsmethode

Der optimale Korrekturwinkel  $\overline{\Psi}$  ist dann gefunden, wenn alle systematischen Variationen, die nicht durch das Kanalrauschen im Imaginärteil  $Im_{LO}(V'_{1,M} + V'_{2,M} + S'_1 + S'_2)$  hervorgerufen werden, verschwinden, das bedeutet, der gemessene Imaginär- und Realteil maximal dekorreliert sind.

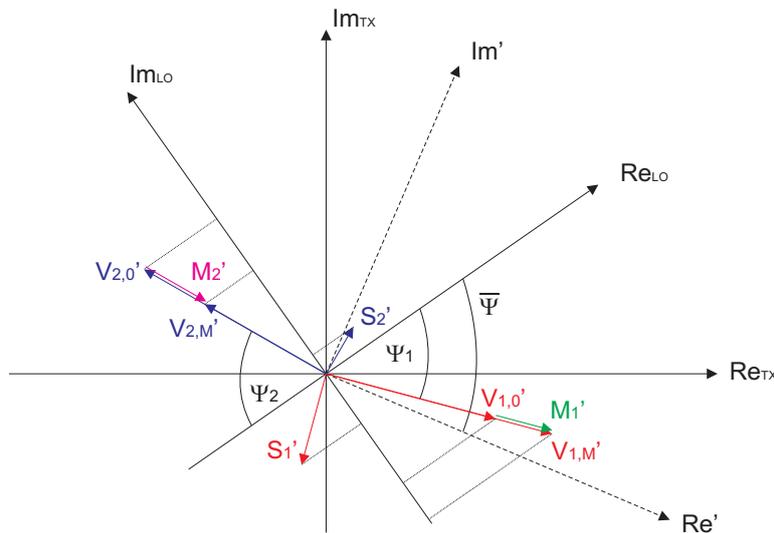


Abbildung 2.16: Zusammenhang von Signalen und unterschiedlichen Bezugssystemen

$(V'_{\#,M} = V'_{\#,0} + M'_{\#})$  bezeichnet die direkt induzierten, modulierten, gedrehten Spannungen,  $(S'_{\#})$  die vom Objekt hervorgerufen, gedrehten Spannungen, welche als unmoduliert betrachtet werden.

Für das Gradiometer kann man analog zu (Glg. 2.2) schreiben:

$$\begin{aligned} Im_{LO}(V'_{1,M} + V'_{2,M} + S'_1 + S'_2) &= -Re'(V'_{1,M} + V'_{2,M} + S'_1 + S'_2) \sin(\bar{\Psi}) \\ &\quad + Im'(V'_{1,M} + V'_{2,M} + S'_1 + S'_2) \cos(\bar{\Psi}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Zur übersichtlicheren Darstellung werden in der weiteren Ableitung die Argumente der Real- und Imaginärteile nicht geschrieben:

$$\begin{aligned} Im_{LO}(V'_{1,M} + V'_{2,M} + S'_1 + S'_2) & \quad Im_{LO} \\ Im'(V'_{1,M} + V'_{2,M} + S'_1 + S'_2) & \quad \Leftrightarrow \quad Im' \\ Re'(V'_{1,M} + V'_{2,M} + S'_1 + S'_2) & \quad Re' \end{aligned}$$

$$Im_{LO} = -Re' \sin(\bar{\Psi}) + Im' \cos(\bar{\Psi}) \quad (2.20)$$

Die Varianz des Imaginärteils  $Im_{LO}$  berechnet sich als:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Im_{LO}) &= E[(Im_{LO})^2] - E[Im_{LO}]^2 \\ &= E[(-Re' \sin(\bar{\Psi}) + Im' \cos(\bar{\Psi}))^2] - E[(-Re' \sin(\bar{\Psi}) + Im' \cos(\bar{\Psi}))]^2 \\ &= E[(Im')^2 \cos^2(\bar{\Psi}) - 2Re'Im' \sin(\bar{\Psi}) \cos(\bar{\Psi}) + (Re')^2 \sin^2(\bar{\Psi})] \\ &\quad - (\overline{Im'} \cos(\bar{\Psi}) - \overline{Re'} \sin(\bar{\Psi}))^2 = \\ &= E[(Im')^2 \cos^2(\bar{\Psi})] - \overline{Im'}^2 \cos^2(\bar{\Psi}) \\ &\quad - 2E[Re'Im' \sin(\bar{\Psi}) \cos(\bar{\Psi})] + 2\overline{Re'} \cdot \overline{Im'} \sin(\bar{\Psi}) \cos(\bar{\Psi}) \\ &\quad + E[(Re')^2 \sin^2(\bar{\Psi})] - \overline{Re'}^2 \sin^2(\bar{\Psi}) \\ &= \cos^2(\bar{\Psi}) \text{Var}(Im') - 2 \cos(\bar{\Psi}) \sin(\bar{\Psi}) \text{Cov}(Im', Re') + \sin^2(\bar{\Psi}) \text{Var}(Re') \end{aligned} \quad (2.21)$$

Definiert man:

$$\sin(\bar{\Psi}) = a \quad \cos(\bar{\Psi}) = \sqrt{1 - a^2} \quad (2.22)$$

so wird (Glg. 2.21) zu:

$$\text{Var}(Im_{LO}) = (1 - a^2) \text{Var}(Im') + a^2 \text{Var}(Re') - 2a\sqrt{1 - a^2} \text{Cov}(Im', Re') \quad (2.23)$$

Zur Vereinfachung der Darstellung setzt man

$$\text{Var}(Im_{LO}) = y \quad \text{Var}(Im') = U \quad \text{Var}(Re') = V \quad \text{Cov}(Im', Re') = X$$

und erhält für (Glg. 2.23)

$$y(a) = (1 - a^2)U + a^2V - 2a\sqrt{1 - a^2} X$$

Maximale Dekorrelation bedeutet die Minimierung der Varianz von  $Im_{LO}$  bzw. Minimierung von  $y(a)$  bezüglich  $a$ .

$$\min_a y(a) \rightarrow \frac{d}{da} y = 0$$

$$\frac{dy}{da} = -2aU + 2aV - 2X \left( \sqrt{1-a^2} + \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}}(-2a) \right) \quad (2.24)$$

$$\frac{dy}{da} = 0 \quad \rightarrow \quad -U + V - X \left( \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \right) = 0 \quad \text{für } a \neq 0$$

Substituiert man

$$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} = \frac{\cos(\bar{\Psi})}{\sin(\bar{\Psi})} = \cot(\bar{\Psi}) = C$$

kann man die quadratische Gleichung lösen.

$$-U + V - X \left( C - \frac{1}{C} \right) = 0$$

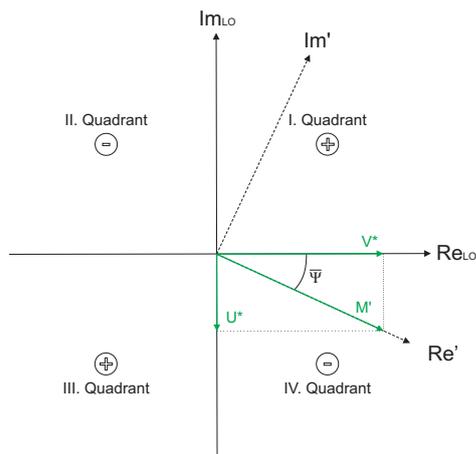
$$C^2 - \frac{V-U}{X}C - 1 = 0 \quad (2.25)$$

$${}_2C_1 = \frac{V-U}{2X} \pm \sqrt{\left( \frac{V-U}{2X} \right)^2 + 1}$$

Die statistischen Variablen  $U, V, X$  müssen durch eine Meßreihe geschätzt werden, um brauchbare statistische Daten zu erhalten.

### 2.5.1 Quadrantenanalyse

Um festzustellen welche der beiden Lösungen ein Minimum der Varianz des Imaginärteils bewirkt, wird eine Quadrantenanalyse durchgeführt. Zur Bestimmung des Quadranten, in dem die Lösung liegt, wird die Kovarianz  $\text{Cov}(Im', Re')$  betrachtet. In (Abb. 2.17) sind die vier Quadranten und das jeweilige Vorzeichen der Kovarianz dargestellt.



$$Im_{LO}(M') = U^*$$

$$Re_{LO}(M') = V^*$$

$$\text{Cov}(U^*, V^*) \propto V^*U^*$$

$$\Downarrow$$

$$\text{sign}(\text{Cov}(U^*, V^*)) = \text{sign}(V^*U^*)$$

Abbildung 2.17: Quadrantenanalyse: Kovarianz von  $Im_{LO}(M')$  und  $Re_{LO}(M')$

Für beide Lösungen der quadratischen Gleichung (Glg. 2.25) gilt:

$$\left| \frac{V-U}{2X} \right| < \sqrt{\left( \frac{V-U}{2X} \right)^2 + 1}$$

Wodurch sich für  $C_1$  und  $C_2$  ergibt:

$$\begin{aligned} C_1 = \cot(\bar{\Psi}_1) &= \frac{V-U}{2X} + \sqrt{\left(\frac{V-U}{2X}\right)^2 + 1} > 0 \\ C_2 = \cot(\bar{\Psi}_2) &= \frac{V-U}{2X} - \sqrt{\left(\frac{V-U}{2X}\right)^2 + 1} < 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

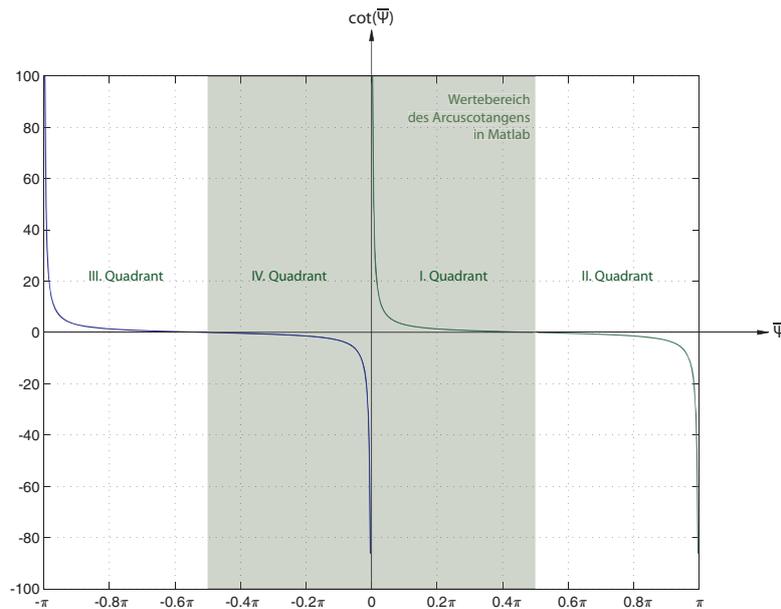


Abbildung 2.18: Quadrantenanalyse: Kotangens und Arcuskotangens Funktion

(Abb. 2.18) zeigt den  $\cot(\bar{\Psi})$  und den (eingeschränkten) Wertebereich  $[-\frac{\pi}{2}.. \frac{\pi}{2}]$  des Arkuskotangens (in Matlab). Um Lösungen für alle Quadranten zu erhalten, wird der Wertebereich auf den II. und III. Quadranten ausgedehnt (Tab. 2.13).

Quadrant	$\text{sign}(\text{Cov}(V^*, U^*))$	$\bar{\Psi}$
I	+1	$\text{arccot}(C_1)$
II	-1	$\text{arccot}(C_2) + \pi$
III	+1	$\text{arccot}(C_1) - \pi$
IV	-1	$\text{arccot}(C_2)$

Tabelle 2.13: Quadranten und zugehörige Lösungen

Durch das Vorzeichen der Kovarianz kann der Quadrant nicht eindeutig bestimmt werden.

**Annahme:**

Aufgrund des Tiefpaßverhaltens der Meßkette muß der Winkel  $\bar{\Psi}$  negativ sein, und sollte bei Messungen ausreichend unterhalb der Resonanzfrequenz im Bereich  $[0.. -\pi]$  liegen, weshalb der Lösungsbereich auf den III. und IV. Quadranten beschränkt werden kann.

## 2.6 Simulation zum Datenmodell für die stochastische Methode

### 2.6.1 Implementierung und Beschreibung der Parameter

Den Simulationen der stochastischen Methode liegt das selbe Datenmodell wie für die deterministische Methode (Kapitel 2.4.1) zugrunde, jedoch wird zusätzlich ein Referenzsignal generiert, welches dem unmodulierten Trägersignal einer Gradiometerhälfte entspricht. Dieses Referenzsignal wird benötigt, um den Startwinkel des Trägersignals  $\varphi_C$ , welcher den Phasenoffset  $\varphi_0$  und den Triggerjitter  $\varphi_J R_\varphi$  enthält, vor der Anwendung der stochastischen Methode herausrechnen zu können.

$$S_{REF} = \cos(2\pi f_C t + \varphi_C) \quad \text{Referenzsignal zur Korrektur der Startphase des Signals}$$

Auch das Referenzsignal wird mit der Frequenz  $f_s$  abgetastet und die Amplitude mit einer Auflösung von  $Q$  im Spannungsbereich FSR quantisiert. Nach Berechnung des Amplitudenspektrums mittels (zweiseitiger) DFT und Skalierung, wird der Phasenwinkel ( $\varphi_{REF} = \bar{\varphi}_{REF} + \tilde{\varphi}_{REF}$ ) ermittelt und zur Vorverarbeitung der Daten verwendet. Der konstante Teil  $\bar{\varphi}_{REF}$  ist der Mittelwert von  $\varphi_{REF}$  und beinhaltet vorwiegend den Phasenoffset  $\varphi_0$ , der variable Teil  $\tilde{\varphi}_{REF}$  wird hauptsächlich durch den Triggerjitter  $\varphi_J R_J$  hervorgerufen.

### 2.6.2 Simulationen mit Matlab

In Tabelle (Tab. 2.14) werden die Simulations-Parameter aufgelistet, die Variationen dieser, sind bei den Ergebnissen der einzelnen Simulationen angegeben.

Parameter	Wert	Einheit	Bedeutung
$f_C$	100000	Hz	Trägerfrequenz
$f_V$	38	Hz	Modulationsfrequenz
$A_1, A_2$	1	V	Amplitude des Trägers
$A_{Obj}$	0,2	V	Amplitude des Objektsignals
$k_{Obj}$	0		Objektanteil an $S_{G2}$
$m_{Re}$	$10^{-3}$		Modulationsgrad des Realteils
$m_{Im}$	$10^{-5}$		Modulationsgrad des Imaginärteils
$A_n$	$10^{-3}$		Rauschanteil
$\Psi_1$	$-\frac{\pi}{5}$	rad	Systemdrehwinkel für $S_{G1}$
$\xi$	0	rad	Systemdrehwinkel-Differenz $\Psi_2 - \Psi_1$
$\varphi_0$	$\frac{\pi}{4}$	rad	Signal-Startwinkel
$\varphi_J$	$\frac{\pi}{18}$	rad	Schwankung des Signal-Startwinkels
$\chi$	$\frac{\pi}{8}$	rad	Modulations-Phasenverschiebung
$A_{STO}$	$1 \cdot 10^{-3}$	V	stochastische Modulationsamplitude
$N$	20		Anzahl der Datensätze
$f_g$	10	MHz	Frequenz der Signalgenerierung
$n_g$	2000000		generierte Datenpunkte
$f_s$	5	MHz	Frequenz der Signalabtastung
$n_s$	200000		Anzahl der Abtastpunkte
FSR	$\pm 1$	V	Spannungsbereich der Quantisierung
$Q$	12	Bit	Auflösung der FSR
$A_V$	75		Gesamtverstärkung

Tabelle 2.14: (Standard-) Parameter der Simulationen

### Vorverarbeitung der Daten

Da der Korrekturwinkel  $\Psi_{cor}$  aus allen Datensätzen einer Meßreihe berechnet wird, müssen für alle Einzelmessungen die selben Bedingungen geschaffen werden. Die Rohdaten werden mit Hilfe des Referenzwinkels  $\varphi_{REF}$  zurückgedreht, um die Variation des Meßzeitpunktes durch  $\tilde{\varphi}_{REF}$  und den konstanten Phasenoffset  $\bar{\varphi}_{REF}$  zu korrigieren. Die Korrektur von  $\bar{\varphi}_{REF}$  ist notwendig, da sich dieser konstante Anteil zum Systemdrehwinkel addiert, wodurch das Signal in einen beliebigen Quadranten gedreht wird, und die bei der Quadrantenanalyse getroffene Annahme zur Bestimmung der Lösung (Kapitel 2.5.1) nicht mehr erfüllt wird. Die referenzkorrigierten Rohdaten werden mit  $Im_{rc}$  und  $Re_{rc}$  bezeichnet.

### Simulation zur Datenvorverarbeitung

Wird nur der Triggerjitter  $\tilde{\varphi}_{REF}$  korrigiert (Tab. 2.15), addiert sich der Phasenoffset  $\bar{\varphi}_{REF}$  zum gesuchten Korrekturwinkel ( $\bar{\Psi} = \Psi_1 = -\frac{\pi}{5}$ ). Mit  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$  werden die Daten vom IV. in den I. Quadranten gedreht. Die Kovarianz wird positiv, weshalb die Lösung für den III. Quadranten berechnet wird ( $\Psi_{cor} - \pi$ ) (Abschnitt 2.5.1).

Korrigiert man nur den Phasenoffset  $\bar{\varphi}_{REF}$  (Tab. 2.16), bleibt die durch den variablen

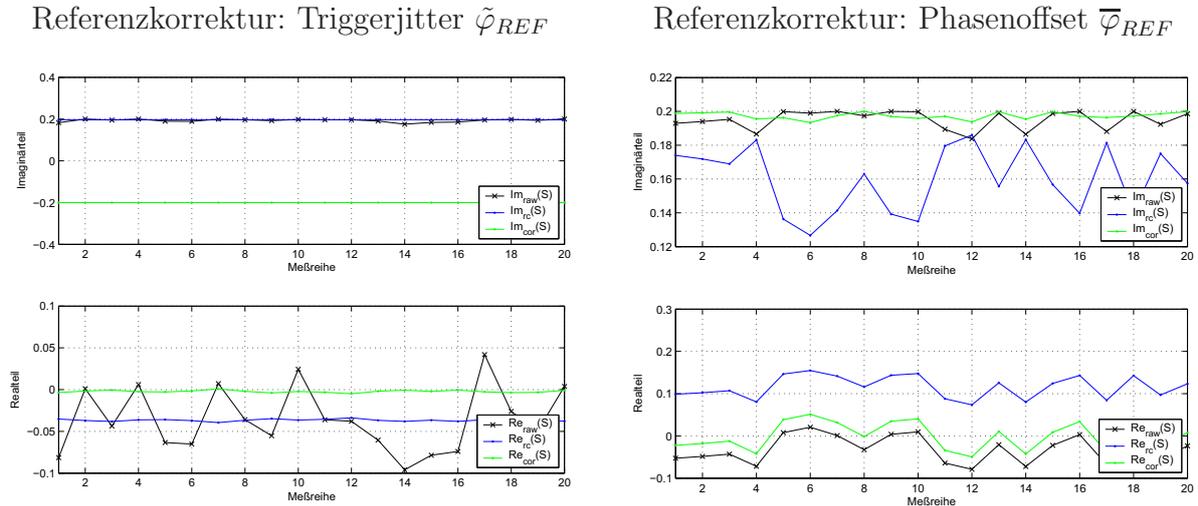


Abbildung 2.19: gemessener und korrigierter Imaginär- und Realteil von  $S_{\omega_C}$

$$\Psi_{cor} = -2,9471 \text{ rad}$$

$$\Psi_1 = -0,6283 \text{ rad } \bar{\varphi}_{REF} = 0,8158 \text{ rad}$$

Variable	Mittelwert [V]	SNVD $[\frac{V}{\sqrt{Hz}}]$
$ (S_{\omega_C}) $	0,2	$9,9731 \cdot 10^{-8}$
$Im_{raw}(S_{\omega_C})$	0,19304	$3,6337 \cdot 10^{-5}$
$Im_{rc}(S_{\omega_C})$	0,19665	$1,4226 \cdot 10^{-6}$
$Im_{cor}(S_{\omega_C})$	<b>-0,2</b>	<b><math>4,7213 \cdot 10^{-8}</math></b>
$Re_{raw}(S_{\omega_C})$	$-35,925 \cdot 10^{-3}$	$2,0515 \cdot 10^{-4}$
$Re_{rc}(S_{\omega_C})$	$-36,504 \cdot 10^{-3}$	$7,2196 \cdot 10^{-6}$
$Re_{cor}(S_{\omega_C})$	$-2,184 \cdot 10^{-3}$	$7,3582 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 2.15: Korrektur des Triggerjitters  $\tilde{\varphi}_{REF}$

$$\Psi_{cor} = -0,62692 \text{ rad}$$

$$\Psi_1 = -0,6283 \text{ rad}$$

Variable	Mittelwert [V]	SNVD $[\frac{V}{\sqrt{Hz}}]$
$ (S_{\omega_C}) $	0,2	$8,0904 \cdot 10^{-8}$
$Im_{raw}(S_{\omega_C})$	0,19506	$2,9229 \cdot 10^{-5}$
$Im_{rc}(S_{\omega_C})$	0,15971	$1,0353 \cdot 10^{-4}$
$Im_{cor}(S_{\omega_C})$	<b>0,1974</b>	<b><math>1,0779 \cdot 10^{-5}</math></b>
$Re_{raw}(S_{\omega_C})$	$-30,304 \cdot 10^{-3}$	$1,7374 \cdot 10^{-4}$
$Re_{rc}(S_{\omega_C})$	$116,01 \cdot 10^{-3}$	$1,4255 \cdot 10^{-4}$
$Re_{cor}(S_{\omega_C})$	$-0,255 \cdot 10^{-3}$	$1,7585 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 2.16: Korrektur des Phasenoffsets  $\bar{\varphi}_{REF}$

Anteil  $\tilde{\varphi}_{REF}$  verursachte Varianz im  $\text{Im}_{rc}(S_{\omega_C})$  erhalten, und verfälscht die Berechnung des Korrekturwinkels  $\Psi_{cor}$ .

### Simulation der stochastischen Korrekturmethode

Bei allen folgenden Simulationen wird eine vollständige Referenzkorrektur mit Hilfe des Referenzsignals durchgeführt.

Ist der Abgleich des Gradiometers nicht exakt (Tab. 2.17), wird der Anteil des Objekts  $A_{Obj} = 0,2V$  dennoch korrekt in den Imaginärteil gedreht, die Differenz der Trägeramplituden  $A_2 - A_1 = -0,25V$  wird im Realteil abgebildet. Die SNVD des Imaginärteils wird etwa um den Faktor  $10^{-2}$  gegenüber den referenzkorrigierten Daten verbessert. Der berechnete Korrekturwinkel  $\Psi_{cor}$  entspricht dem vorgegebenen Systemdrehwinkel  $\Psi_1$ .

$$\begin{aligned} \Psi_{cor} &= -0,61924 \text{ rad} \\ \Psi_1 &= -0,6283 \text{ rad} \end{aligned}$$

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,32025	$8,8214 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,16134	$2,9054 \cdot 10^{-4}$
$\text{Im}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,30881	$6,6059 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor}(S_{\omega_C})$	<b>0,20226</b>	<b><math>8,1793 \cdot 10^{-8}</math></b>
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,2694	$1,8428 \cdot 10^{-4}$
$\text{Re}_{rc}(S_{\omega_C})$	-0,084797	$9,2677 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{cor}(S_{\omega_C})$	-0,24829	$1,1381 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.17:  $A_2 = 1,25V$

$$\begin{aligned} \Psi_{cor} &= -0,6108 \text{ rad} \\ \Psi_1 &= -0,6283 \text{ rad} \quad \xi = 0,0175 \text{ rad} \end{aligned}$$

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,18256	$1,6392 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,17864	$1,9249 \cdot 10^{-5}$
$\text{Im}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,14748	$4,2849 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor}(S_{\omega_C})$	<b>0,18252</b>	<b><math>5,3449 \cdot 10^{-8}</math></b>
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	$-31,319 \cdot 10^{-3}$	$1,1231 \cdot 10^{-4}$
$\text{Re}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,10758	$6,1203 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{cor}(S_{\omega_C})$	$3,550 \cdot 10^{-3}$	$7,4709 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 2.18:  $\xi = \frac{\pi}{180}$

Bei nicht identischen Systemdrehwinkeln  $\xi = \frac{\pi}{180}$  rad für die beiden Gradiometerhälften (Tab. 2.18), wird ein mittlerer Korrekturwinkel ermittelt. Der Objektanteil des Signals kann dadurch nicht korrekt wiedergegeben werden, die spektrale Rauschspannungsdichte wird dennoch verringert.

Wird vom Objekt in beide Hälften des Gradiometers eine Spannung induziert (Tab. 2.19), tritt nach der Korrektur nur die Differenz der Objektanteile  $(1 - 2k_{Obj})A_{Obj} = 0,1V$  im Imaginärteil auf, die Differenz der Trägersignale  $A_1 - A_2 = -0,2V$  im Realteil.

Erhöht man den Anteil der deterministischen Modulation (Tab. 2.20), hat das auf die Verbesserung der SNVD kaum Einfluß, auch der Objektanteil wird korrekt wiedergegeben.

Anders sieht das Ergebnis bei einem hohen Rauschanteil des Signals aus (Tab. 2.21), der Korrekturwinkel ist mit dem Systemdrehwinkel nahezu identisch, wodurch der Objektanteil korrekt wiedergegeben wird, die Verbesserung der SNVD des Imaginärteils wird jedoch auf den Faktor  $10^{-1}$  verringert.

$$\Psi_{cor} = -0,6184 \text{ rad}$$

$$\Psi_1 = -0,6283 \text{ rad}$$

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,21819	$9,8480 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,048886	$1,5897 \cdot 10^{-4}$
$\text{Im}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,18965	$6,2961 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor}(S_{\omega_C})$	0,091992	$6,1872 \cdot 10^{-8}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,21052	$4,1939 \cdot 10^{-5}$
$\text{Re}_{rc}(S_{\omega_C})$	-0,10789	$8,8497 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{cor}(S_{\omega_C})$	-0,19785	$1,0861 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.19:  $k_{Obj} = 0,25$   $A_2 = 1,2V$ 

$$\Psi_{cor} = -2,3462 \text{ rad}$$

$$\Psi_1 = -2,3562 \text{ rad}$$

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,22364	$3,5466 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,10259	$2,0382 \cdot 10^{-4}$
$\text{Im}_{rc}(S_{\omega_C})$	-0,070673	$5,7644 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor}(S_{\omega_C})$	0,20099	$1,9700 \cdot 10^{-8}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,19421	$1,0714 \cdot 10^{-4}$
$\text{Re}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,21217	$5,6500 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{cor}(S_{\omega_C})$	-0,098046	$8,0716 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 2.20:  $m_{Re} = 10^{-1}$   $m_{Im} = 10^{-3}$   $A_2 = 1,1V$   $\Psi_1 = -\frac{3\pi}{4}$  rad

$$\Psi_{cor} = -0,6282 \text{ rad}$$

$$\Psi_1 = -0,6283 \text{ rad}$$

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,22318	$5,4724 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,17849	$1,3487 \cdot 10^{-4}$
$\text{Im}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,22001	$7,2384 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor}(S_{\omega_C})$	0,20001	$3,8354 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,12819	$1,6508 \cdot 10^{-4}$
$\text{Re}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,037438	$9,9589 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{cor}(S_{\omega_C})$	-0,099003	$1,2306 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.21:  $A_n = 0,1$   $A_2 = 1,1V$ 

$$\Psi_{cor} = -2,9835 \text{ rad}$$

$$\Psi_1 = -0,6283 \text{ rad}$$

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,22399	$3,6261 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,17247	$1,6226 \cdot 10^{-4}$
$\text{Im}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,22076	$1,7473 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor}(S_{\omega_C})$	-0,21205	$4,9894 \cdot 10^{-8}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,13336	$2,2963 \cdot 10^{-4}$
$\text{Re}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,037817	$1,0955 \cdot 10^{-5}$
$\text{Re}_{cor}(S_{\omega_C})$	-0,072105	$1,1093 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.22:  $m_{Im} = 10^{-3}$   $A_2 = 1,1V$ 

Werden Real- und Imaginärteil in gleichem Maße moduliert (Tab. 2.22), kann zwischen projizierter Modulation des Realteils und wirklicher Modulation des Imaginärteils nicht unterschieden werden, der berechnete Korrekturwinkel minimiert beide Anteile, und verursacht dadurch Fehler im rekonstruierten Imaginär- und Realteil.

$$\Psi_{cor} = -0,61646 \text{ rad}$$

$$\Psi_1 = -0,6283 \text{ rad } \Delta f = 25,0001 \text{ Hz}$$

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,22324	$5,2961 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,18992	$8,4451 \cdot 10^{-5}$
$\text{Im}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,22013	$6,9976 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor}(S_{\omega_C})$	0,20104	$6,0801 \cdot 10^{-8}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	-0,11353	$1,3851 \cdot 10^{-4}$
$\text{Re}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,037067	$9,8753 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{cor}(S_{\omega_C})$	-0,097026	$1,2103 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.23:  $n_s = 199999$   $A_2 = 1,1V$ 

$$\Psi_{cor} = -0,61854 \text{ rad}$$

$$\Psi_1 = -0,6283 \text{ rad } \Delta f = 25,0011 \text{ Hz}$$

Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ (S_{\omega_C}) $	0,21178	$4,9005 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{raw}(S_{\omega_C})$	0,20928	$1,8220 \cdot 10^{-5}$
$\text{Im}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,20886	$6,5009 \cdot 10^{-6}$
$\text{Im}_{cor}(S_{\omega_C})$	0,19044	$3,7357 \cdot 10^{-8}$
$\text{Re}_{raw}(S_{\omega_C})$	$0,799 \cdot 10^{-3}$	$1,7652 \cdot 10^{-4}$
$\text{Re}_{rc}(S_{\omega_C})$	0,034976	$9,1342 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{cor}(S_{\omega_C})$	-0,09261	$1,1211 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.24:  $n_s = 199991$   $A_2 = 1,1V$ 

Ist die Fensterlänge  $t_w$  kein ganzzahliges Vielfaches der Signal-Periodendauer, verändert

sich die Frequenzauflösung des Amplitudenspektrums, die leakage verursacht eine zusätzliche Varianz des Trägersignals und beeinflusst das Ergebnis der Korrektur. Bei geringer leakage (Tab. 2.23) läßt sich keine Verschlechterung des Ergebnisses erkennen, mit stärkerer Veränderung der Frequenzauflösung (Tab. 2.24) wird ein Fehler des Objektanteils sichtbar.

## 2.7 Kalibrierung bei frequenzdifferentieller Messung

Diese Methode basiert auf einer frequenzdifferentiellen MIT Messung (FDMIT), welcher die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Frequenz, im Bereich der  $\beta$ -Dispersion, für verschiedene Gewebe zugrunde liegt. Dazu werden Signale bei unterschiedlichen Frequenzen aufgenommen und nach geeigneter Skalierung subtrahiert. FDMIT bietet damit die Möglichkeit, Kontraste zwischen unterschiedlichen Geweben darzustellen oder MIT-Spektren zu erzeugen. Durch die Skalierung der Signale kann die Projektion von  $V_0$  in  $\Delta V$  eliminiert werden, allerdings wird ein kleiner, meist vernachlässigbarer Fehler der rekonstruierten Leitwertdifferenz eingeführt [4].

### 2.7.1 These zur Bestimmung des Korrekturfaktors

#### Systematischer Fehler bei Einzelfrequenzmessung

Aus dem Ersatzschaltbild des Gradiometers (Abb. 2.20) kann eine Übertragungsfunktion 2. Ordnung für jede Gradiometerhälfte abgeleitet werden.

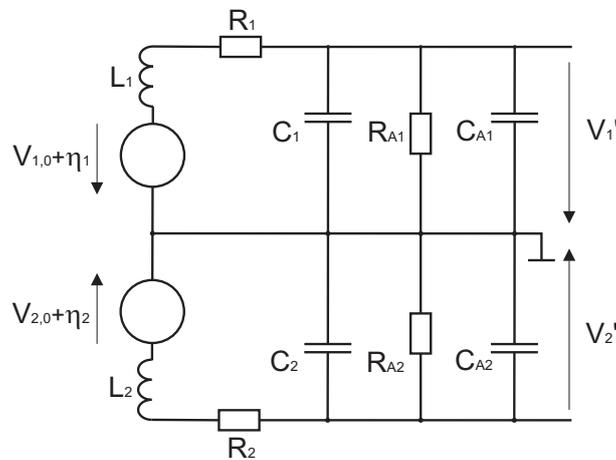


Abbildung 2.20: Ersatzschaltbild des Gradiometers

$$H_1^*(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_{A1}} - \omega^2 L_1 (C_1 + C_{A1}) + j\omega \left( R_1 (C_1 + C_{A1}) + \frac{L_1}{R_{A1}} \right)} \quad (2.27)$$

$$H_2^*(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_{A2}} - \omega^2 L_2 (C_2 + C_{A2}) + j\omega \left( R_2 (C_2 + C_{A2}) + \frac{L_2}{R_{A2}} \right)} \quad (2.28)$$

Für Meßfrequenzen ausreichend unterhalb der niedrigeren Resonanzfrequenz kann diese Beschreibung durch eine Übertragungsfunktion 1. Ordnung angenähert werden (Abb. 2.21).

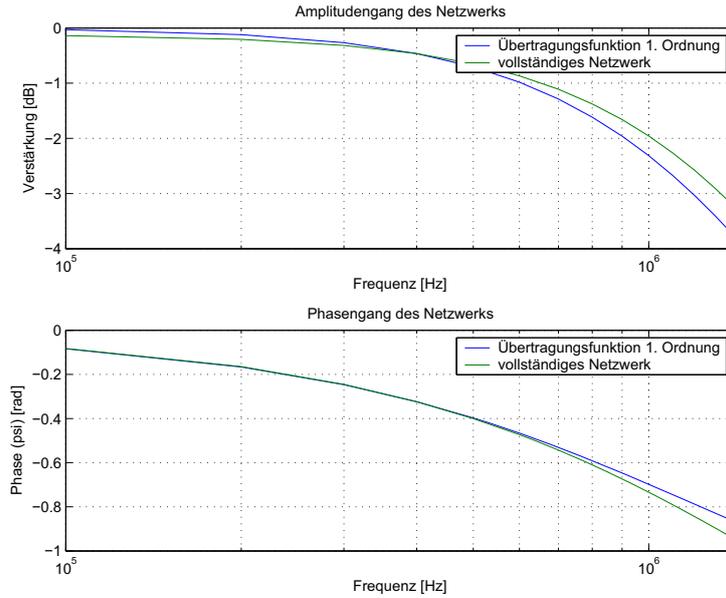


Abbildung 2.21: Übertragungsfunktion einer Gradiometerhälfte und Approximation durch Tiefpaß 1. Ordnung

$$H_1(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \left( R(C + C_a) + \frac{L}{R_a} \right)} = |H_1| e^{j\Psi_1(\omega)} \quad (2.29)$$

$$H_2(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \left( R'(C' + C'_a) + \frac{L'}{R'_a} \right)} = |H_2| e^{j(\Psi_2(\omega))} = |H_2| e^{j(\Psi_1(\omega) + \xi(\omega))} \quad (2.30)$$

Durch die Fertigungstoleranz und unterschiedliche Temperatur der beiden Hälften ergeben sich zwei leicht unterschiedliche Übertragungsfunktionen.  $\xi = (\Psi_2 - \Psi_1)$  ist die Phasendifferenz der beiden Netzwerke. Unter der Annahme vernachlässigbarer magnetischer Kopplung kann für die Signalspannung  $S = (V_1 - V_2)$  geschrieben werden:

$$S(\omega) = -j\omega(\tilde{K}_1 H_1(\omega) - \tilde{K}_2 H_2(\omega)) + \omega^2(\tilde{K}_3 H_1(\omega) - \tilde{K}_4 H_2(\omega))\sigma(\omega) \quad (2.31)$$

Der erste Term repräsentiert die direkt induzierten Spannungen  $V_{\#0}$  nach Filterung mit den Übertragungsfunktionen  $H_1$  und  $H_2$ . Der Unterschied der beiden Amplitudengänge kann durch einen Faktor  $a$  dargestellt werden  $|H_2| = a|H_1|$ .  $\tilde{K}_1$  und  $\tilde{K}_2$  sind das Produkt des Stromes in der Erregerspule und den Gegeninduktivitäten ( $M_{Tx1}$ ,  $M_{Tx2}$ ) zwischen der Erregerspule und den Gradiometerhälften. Bei ideal abgeglichenem Gradiometer sind die beiden Konstanten gleich, in der Realität unterscheiden sie sich um einen Faktor  $b$ , der nahe bei 1 liegt, sodaß  $\tilde{K}_2 = b\tilde{K}_1$ .

$$\tilde{K}_1 \propto (I_{Tx}, M_{Tx1}) \quad \tilde{K}_2 \propto (I_{Tx}, M_{Tx2}) \quad \tilde{K}_3 \propto (I_{Tx}, M_{TxO}, M_{O1}) \quad \tilde{K}_4 \propto (I_{Tx}, M_{TxO}, M_{O2})$$

Der zweite Term beschreibt die Signalspannungen  $\eta_{\#}$ . Diese sind proportional zur Leitfähigkeit des Objekts, dem Quadrat der Kreisfrequenz und den Kopplungskonstanten  $\tilde{K}_3$  und  $\tilde{K}_4$ , welche von der Form und Lage des Objekts und vom Strom der Sendespule abhängig sind. Für feste Position und Form kann man die Beziehung  $\tilde{K}_4 = c\tilde{K}_3$  festlegen (geometrischer Parameter  $c$ ).

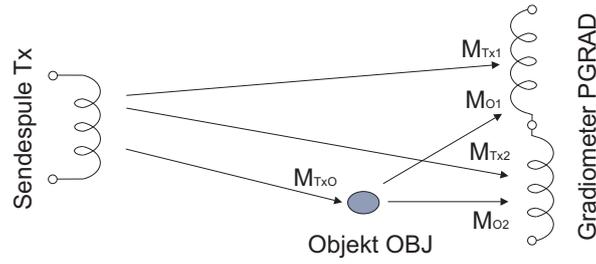


Abbildung 2.22: Kopplung von Sendespule, Objekt und Gradiometer

(Glg. 2.31) verwendet als Bezugssystem den Strom der Sendespule, weshalb die direkt induzierten Spannungen im Imaginärteil und die Objektspannungen im Realteil auftreten. Bezieht man das Signal auf die Spannung an der Sendespule, erhält man:

$$S(\omega) = \omega K_1 |H_1(\omega)| (1 - abe^{j\xi(\omega)}) e^{j\Psi_1(\omega)} + j\omega^2 K_3 |H_1(\omega)| (1 - ace^{j\xi(\omega)}) e^{j\Psi_1(\omega)} \sigma(\omega) \quad (2.32)$$

Im realen Fall sind die Übertragungsfunktionen verschieden, der Fehlerwinkel wird mit  $\xi = (\Psi_2 - \Psi_1)$  bezeichnet. Die Phasenverschiebung  $\Psi_1$  muß korrigiert werden, da durch Projektion der gedrehten Signale in Imaginär- und Realteil, keine klare Trennung von Objekt- und Trägersignal erfolgen kann.

Im idealen Fall  $H_1 = H_2 \rightarrow a = 1 \quad \xi = 0$  (identische Gradiometerhälften), wird der erste Term der rechten Seite rein reell und der zweite rein imaginär. Bei symmetrischem Abgleich  $b = 1$  verschwindet die reelle Komponente.

$$S_{ideal}(\omega) = j\omega^2 K_3 (1 - c) \sigma(\omega) \quad (2.33)$$

$j\omega^2 K_3 (1 - c)$  stellt die Sensitivität des idealisierten Spulensystems auf ein Objekt dar.

### Kalibrierung der Phasenverschiebung

Eine Korrektur der Phasenverschiebung  $\Psi_1$  ist notwendig, da die Signale durch die Projektion in die imaginäre und reelle Achse vollkommen verzerrt werden, und eine Kalibrierung nicht mehr sinnvoll durchführbar ist. Durch Vermessung eines z.B. rein paramagnetischen Objekts kann man diesen Phasenwinkel bestimmen. Eine Multiplikation mit dem Faktor  $e^{-j\Psi_1(\omega)}$  führt zum phasenkalibrierten Signal:

$$\tilde{S}(\omega) = \omega K_1 |H_1(\omega)| (1 - a(\omega)be^{j\xi(\omega)}) + j\omega^2 K_3 |H_1(\omega)| (1 - a(\omega)ce^{j\xi(\omega)}) \sigma(\omega) \quad (2.34)$$

$$\text{Im}(\tilde{S}(\omega)) = -\omega K_1 |H_1(\omega)| (a(\omega)b \sin(\xi(\omega))) + \omega^2 K_3 |H_1(\omega)| \sigma(\omega) (1 - a(\omega)c \cos(\xi(\omega))) \quad (2.35)$$

Durch Subtraktion des Imaginärteils des idealen Signals aus (Glg. 2.33) erhält man den Fehler:

$$\tilde{E}_{Im}(\omega) = -\omega K_1 |H_1(\omega)| (a(\omega)b \sin(\xi(\omega))) + \omega^2 K_3 \sigma(\omega) (|H_1(\omega)| - |H_1(\omega)| a(\omega)c \cos(\xi(\omega)) - 1 + c) \quad (2.36)$$

### Systematischer Fehler bei multifrequenter Messung

Im frequenzdifferentiellen Fall errechnet sich das Signal (FSD ... frequency scaled difference) durch Subtraktion der skalierten Signale unterschiedlicher Frequenzen. Als geeigneter Skalierungsfaktor erscheint  $g = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2$ , da die Signalanteile, welche die Leitfähigkeit des Objektes beinhalten, proportional dem Quadrat der Frequenz sind (Glg. 2.32).

$$\begin{aligned}
 FSD &= \{S(\omega_1) - gS(\omega_2)\} \\
 &= \omega_1 K_1 |H_1(\omega_1)| (1 - a(\omega_1) b e^{j\xi(\omega_1)}) e^{j\Psi_1(\omega_1)} \\
 &\quad + j\omega_1^2 K_3 |H_1(\omega_1)| (1 - a(\omega_1) c e^{j\xi(\omega_1)}) e^{j\Psi_1(\omega_1)} \sigma(\omega_1) \\
 &\quad - g \left( \omega_2 K_1 |H_1(\omega_2)| (1 - a(\omega_2) b e^{j\xi(\omega_2)}) e^{j\Psi_1(\omega_2)} \right. \\
 &\quad \left. + j\omega_2^2 K_3 |H_1(\omega_2)| (1 - a(\omega_2) c e^{j\xi(\omega_2)}) e^{j\Psi_1(\omega_2)} \sigma(\omega_2) \right)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Nach Korrektur der Phasenverschiebung  $\Psi_1$  betrachtet man wieder den Imaginärteil:

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(F\tilde{S}D) &= \omega_1 K_1 |H_1(\omega_1)| (a(\omega_1) b \sin(\xi(\omega_1))) \\
 &\quad + g\omega_2 K_1 |H_1(\omega_2)| (a(\omega_2) b \sin(\xi(\omega_2))) \\
 &\quad + \omega_1^2 K_3 |H_1(\omega_1)| \sigma(\omega_1) (1 - a(\omega_1) c \cos(\xi(\omega_1))) \\
 &\quad - g\omega_2^2 K_3 |H_1(\omega_2)| \sigma(\omega_2) (1 - a(\omega_2) c \cos(\xi(\omega_2)))
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Durch Subtraktion des Imaginärteils des idealen Signals (Glg. 2.33) ergibt sich wieder der absolute Fehler:

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{Im,FSD} &= \left. \begin{aligned} &\omega_1 K_1 |H_1(\omega_1)| (a(\omega_1) b \sin(\xi(\omega_1))) \\ &+ g\omega_2 K_1 |H_1(\omega_2)| (a(\omega_2) b \sin(\xi(\omega_2))) \end{aligned} \right\} \text{Offsetterm} \\
 &\quad + \omega_1^2 K_3 \sigma(\omega_1) (|H_1(\omega_1)| - |H_1(\omega_1)| a(\omega_1) c \cos(\xi(\omega_1)) - 1 + c) \\
 &\quad - g\omega_2^2 K_3 \sigma(\omega_2) (|H_1(\omega_2)| - |H_1(\omega_2)| a(\omega_2) c \cos(\xi(\omega_2)) - 1 + c)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Die ersten beiden Terme des Fehlers beinhalten keinerlei Informationen über das Objekt, dafür aber Bewegungsartefakte (Vibrationen), wenn  $b$  nicht über die Zeit konstant ist. Durch eine geeignete Wahl des Skalierungsfaktors  $g$  können diese Terme eliminiert werden. Der dritte und vierte Term sind bei biologischen Geweben sehr viel kleiner und können vernachlässigt werden. Nun versucht man den optimalen Faktor  $g_{opt}$  durch Multiplikation mit einem Korrekturfaktor  $\gamma$  (nahe 1) so zu wählen, daß  $\tilde{E}_{Im,FSD}$  verschwindet.

$$g_{opt} = \gamma g = \gamma \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{Im,FSD} &\approx \omega_1 K_1 |H_1(\omega_1)| (a(\omega_1) b \sin(\xi(\omega_1))) \\
 &\quad + \gamma g \omega_2 K_1 |H_1(\omega_2)| (a(\omega_2) b \sin(\xi(\omega_2)))
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\gamma = \frac{|H_1(\omega_1)| a(\omega_1) b \sin(\xi(\omega_1)) \omega_1}{|H_1(\omega_2)| a(\omega_2) b \sin(\xi(\omega_2)) g \omega_2} = \frac{|H_1(\omega_1)| a(\omega_1) \sin(\xi(\omega_1)) \omega_2}{|H_1(\omega_2)| a(\omega_2) \sin(\xi(\omega_2)) \omega_1} \tag{2.42}$$

### 2.7.2 Methoden zur Bestimmung des Korrekturfaktors

Durch Vibration der Spulen (Abschnitt 2.2) kann eine Modulation von  $b$  und damit des wirklichen Realteils erreicht werden. Durch die Projektion tritt diese Vibration auch im

Imaginärteil auf, das optimale  $\gamma$  ist gefunden, wenn diese Modulation des Imaginärteils verschwindet.

$$\begin{aligned} \text{Im}(F\tilde{S}D) = & \omega_1 K_1 |H_1(\omega_1)| (a(\omega_1)b \sin(\xi(\omega_1))) \\ & + g\omega_2 K_1 |H_1(\omega_2)| (a(\omega_2)b \sin(\xi(\omega_2))) \\ & + \omega_1^2 K_3 |H_1(\omega_1)| \sigma(\omega_1) (1 - a(\omega_1)c \cos(\xi(\omega_1))) \\ & - g\omega_2^2 K_3 |H_1(\omega_2)| \sigma(\omega_2) (1 - a(\omega_2)c \cos(\xi(\omega_2))) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Moduliert werden hauptsächlich die Faktoren  $b$ ,  $K_1$  und  $K_3$ , wodurch sich die zeitabhängige Funktionen  $b(t)$ ,  $K_1(t)$  und  $K_3(t)$  ergeben. Der zweite Teil der Gleichung ist (bei biologischen Geweben) wiederum sehr viel kleiner als der erste, und wird in der weiteren Betrachtung vernachlässigt.

$$\begin{aligned} \text{Im}(F\tilde{S}D_{VIB}) = & -\omega_1 K_1(t) |H_1(\omega_1)| a(\omega_1)b(t) \sin(\xi(\omega_1)) \\ & + g\omega_2 K_1(t) |H_1(\omega_2)| (a(\omega_2)b(t) \sin(\xi(\omega_2))) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Durch Zerlegung von  $K_1(t)b(t) = K_{10}b_0(1 + m(t))$  in eine zeitabhängige Modulationskomponente  $K_{10}b_0m(t)$  und den konstanten Faktor  $K_{10}b_0$  erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Im}(F\tilde{S}D_{VIB}) = & \left. \begin{aligned} & -\omega_1 K_{10}b_0 m(t) (|H_1(\omega_1)| a(\omega_1) \sin(\xi(\omega_1))) \\ & + \gamma \frac{\omega_1}{\omega_2} |H_1(\omega_2)| a(\omega_2) \sin(\xi(\omega_2)) \end{aligned} \right\} \text{alternierender Teil} \\ & \left. \begin{aligned} & -\omega_1 K_{10}b_0 (|H_1(\omega_1)| a(\omega_1) \sin(\xi(\omega_1))) \\ & + \gamma \frac{\omega_1}{\omega_2} |H_1(\omega_2)| a(\omega_2) \sin(\xi(\omega_2)) \end{aligned} \right\} \text{konstanter Teil} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Wird das System mit konstanter Frequenz  $\omega_V$  vibriert, treten im Frequenzspektrum an den Stellen  $(\omega_{\#} + \omega_V)$  und  $(\omega_{\#} - \omega_V)$  Seitenfrequenzen auf, welche die Information der Spulenbewegung beinhalten (alternierender Teil aus Glg. 2.45).

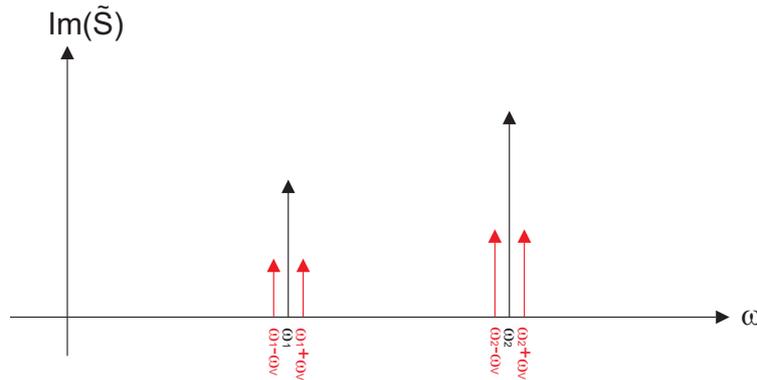


Abbildung 2.23: diskretes Frequenzspektrum bei konstanter Vibration

Ist die Vibrationsfrequenz nicht konstant, kann die Standardabweichung des Trägers für kurze Beobachtungszeiträume zur Bestimmung von  $\gamma$  herangezogen werden. Damit die Vibration im Imaginärteil (Glg. 2.45) zu Null wird, ergibt sich der Korrekturfaktor zu

$$\gamma_{NULL} = \frac{|H_1(\omega_1)| a(\omega_1) \sin(\xi(\omega_1)) \omega_2}{|H_1(\omega_2)| a(\omega_2) \sin(\xi(\omega_2)) \omega_1} = \frac{\text{Im}(\tilde{S}(\omega_1 + \omega_V)) + \text{Im}(\tilde{S}(\omega_1 - \omega_V))}{\text{Im}(\tilde{S}(\omega_2 + \omega_V)) + \text{Im}(\tilde{S}(\omega_2 - \omega_V))} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \quad (2.46)$$

### 2.7.3 Bedingung für die frequenzdifferentielle Korrektur

Um durch den Korrekturfaktor  $\gamma$  keinen großen Fehler einzuführen, sollte dieser nahe bei eins liegen. Bei geringen Unterschieden der Gradiometerhälften ist dies annähernd erfüllt, wenn

$$\frac{|H_1(\omega_1)|a(\omega_1)\sin(\xi(\omega_1))}{|H_1(\omega_2)|a(\omega_2)\sin(\xi(\omega_2))} \approx \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (2.47)$$

#### Simulation des Gradiometer-Ersatzschaltbildes

Die Simulation des Netzwerkes erfolgt mit den Bauteilwerten des Ersatzschaltbildes und den vereinfachten Übertragungsfunktionen 1. Ordnung [3].

Parameter	Wert	Einheit
R	10	$\Omega$
L	100	$\mu\text{H}$
C	10	pF
Ra	750	$\Omega$
Ca	11	pF

Tabelle 2.25: Parameter der Simulation

Damit die Bedingung (Glg. 2.47) erfüllt wird, muß  $|H_1(\omega)|a(\omega)\sin(\xi(\omega))$  linear und im selben Verhältnis wie die Frequenzen steigen.  $a(\omega)\sin(\xi(\omega))$  beschreibt den Unterschied der Gradiometerhälfte zwei, bezogen auf Hälfte eins.

$$H_{\#}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \left( R_{\#}(C_{\#} + C_{A\#}) + \frac{L_{\#}}{R_{A\#}} \right)} = |H_{\#}| e^{j\Psi_{\#}(\omega)}$$

$$a(\omega) = \frac{|H_2(\omega)|}{|H_1(\omega)|}$$

$$\xi = \Psi_2 - \Psi_1$$

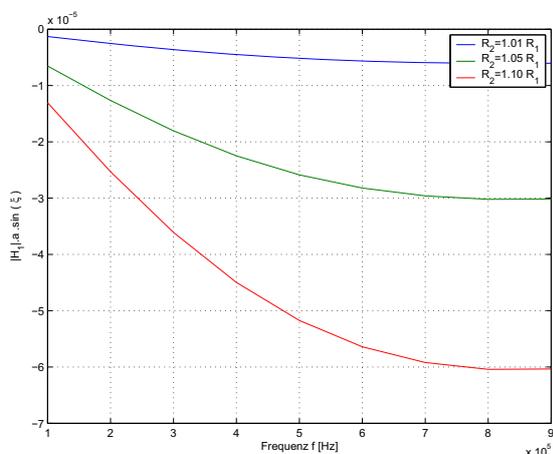


Abbildung 2.24:  $|H_1|a(\omega)\sin(\xi(\omega))$  für unterschiedlichen Widerstand (R)

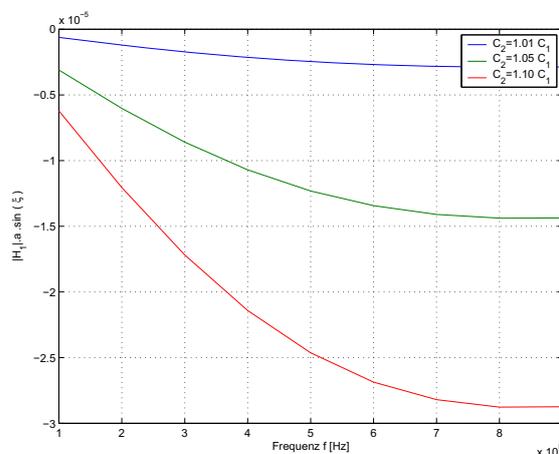


Abbildung 2.25:  $|H_1|a(\omega)\sin(\xi(\omega))$  für unterschiedliche Kapazität (C)

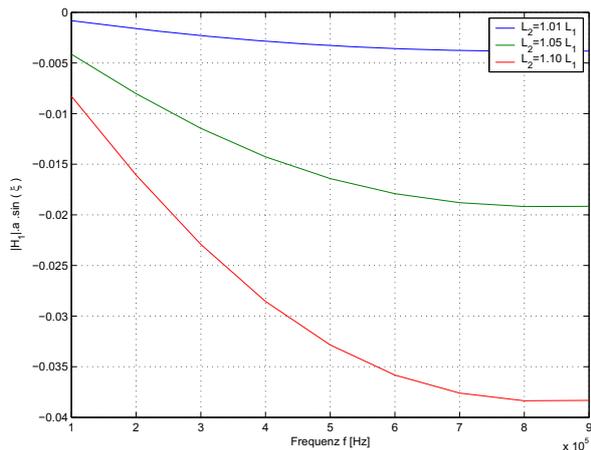


Abbildung 2.26:  $|H_1|a(\omega) \sin \xi(\omega)$  für unterschiedliche Induktivität ( $L$ )

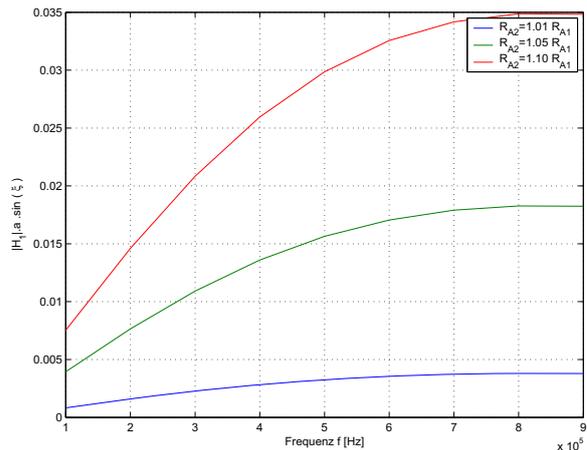


Abbildung 2.27:  $|H_1|a(\omega) \sin \xi(\omega)$  für unterschiedlichen Abschlußwiderstand ( $R_A$ )

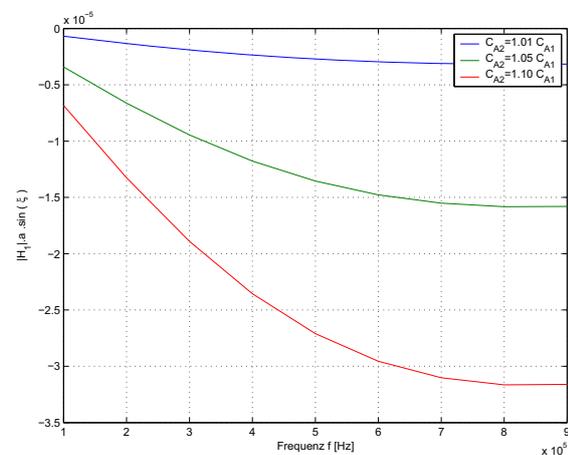


Abbildung 2.28:  $|H_1|a(\omega) \sin \xi(\omega)$  für unterschiedliche Abschlußkapazität ( $C_A$ )

(Abb. 2.24) bis (Abb. 2.28) zeigen Beispiele für den Verlauf von  $|H(\omega)|a(\omega) \sin \xi(\omega)$  für die Variation der Bauteile des Ersatzschaltbildes, die Kurven für andere Bauteilwerte haben ähnlichen Verlauf, bei entsprechender Skalierung.

	$f_1$ [kHz]	$\Delta f$ [kHz]		
		100	200	300
$\gamma$	100	1,032	1,085	1,161
	200	1,052	1,126	1,223
	300	1,070	1,163	1,280
	400	1,087	1,196	1,329
	500	1,100	1,223	1,370
	600	1,112	1,245	1,402
	700	1,120	1,262	1,426
	800	1,126	1,273	1,443

Tabelle 2.26: Korrekturfaktor  $\gamma$

Daraus wird ersichtlich, daß  $|H_1(\omega)|a(\omega) \sin(\xi(\omega))$  nicht linear und im Verhältnis der Fre-

quenzen steigt. Für kleine Frequenzdifferenz kann man die Kurven aber als abschnittsweise linear betrachten. Der Korrekturfaktor  $\gamma$  nimmt für steigende Meßfrequenz zu und ist von der Differenz der Meßfrequenzen  $\Delta f = f_2 - f_1$  abhängig (Tab. 2.26).



# Kapitel 3

## Verifikation des Modells

### 3.1 Messungen mit analogem lock-in-Verstärker

Das deterministische und stochastische Modell basieren auf der Annahme, daß Vibrationen des Systems, hauptsächlich zur Modulation des direkt induzierten Signals führen, und damit nur im Realteil auftreten (Abschnitt 2.3 Bedingung 2). Um diese Annahme zu verifizieren wird das Signal eines Gradiometers mittels 'lock-in'-Verstärkers in seinen Real- und Imaginärteil zerlegt, und am Oszilloskop im X-Y-Betrieb dargestellt. Als Referenz dient das gesendete Signal, zur Vibration des Systems wird ein Lautsprecher über einen Funktionsgenerator gespeist (Abschnitt 4.2.5). Das Referenzsignal beinhaltet die Phasendrehung der Meßkette nicht, weshalb das Bezugssystem am Oszilloskopschirm gedreht dargestellt wird.

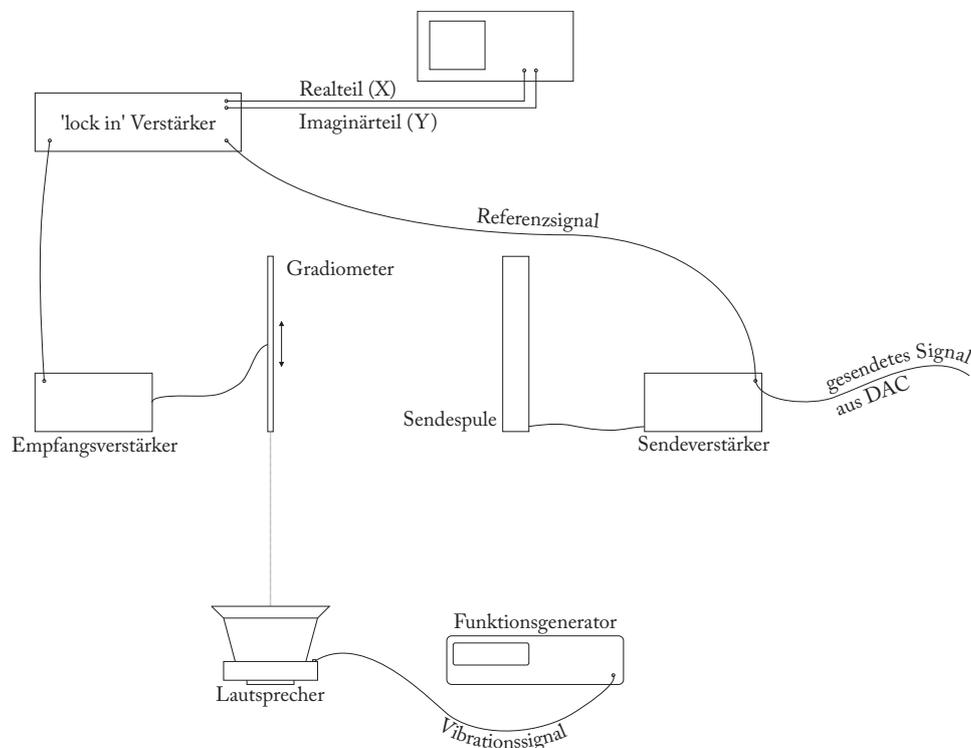


Abbildung 3.1: Schema der Meßanordnung zur Verifikation des Modells

sinusförmige Modulation von Real- und Imaginärteil			
Erregerfrequenz [Hz]	Modulation [ $\frac{Re}{Im}$ ]	X-Achse [ $\frac{mV}{div}$ ]	Y-Achse [ $\frac{mV}{div}$ ]
20	7,7	100	200
38	72	100	200
48	7,4	50	100
50	31,8	20	50
62	1,4	20	50
100	$\approx 0,5$	10	10

Tabelle 3.1: Verhältnis der Modulation von Real- und Imaginärteil

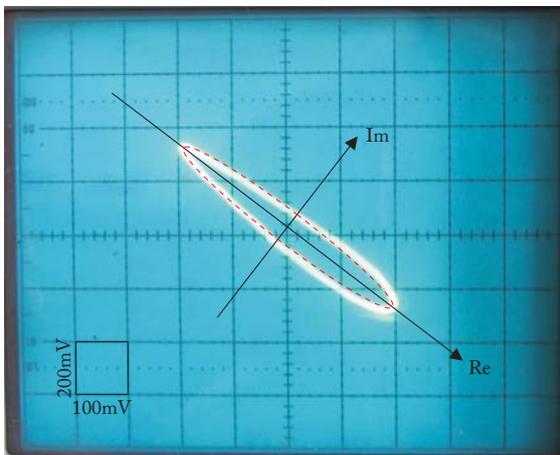


Abbildung 3.2: Vibration mit 20Hz

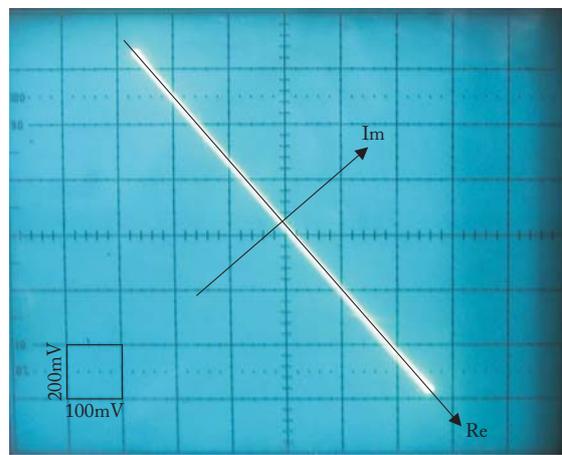


Abbildung 3.3: Vibration mit 38Hz

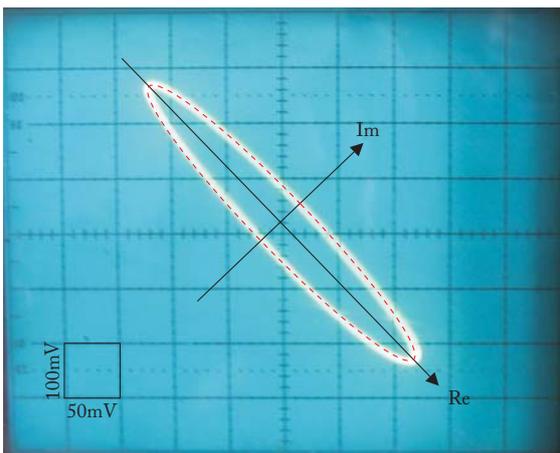


Abbildung 3.4: Vibration mit 48Hz

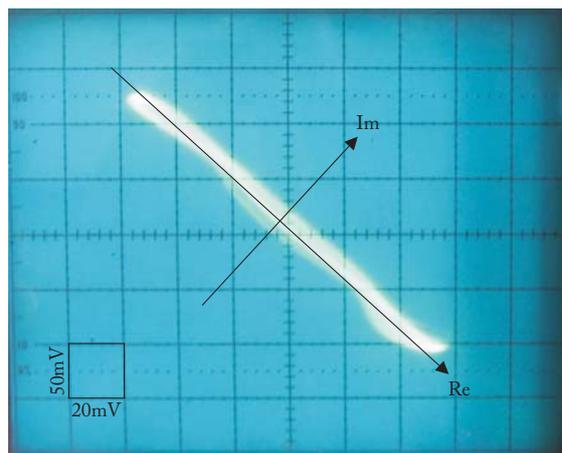


Abbildung 3.5: Vibration mit 50Hz

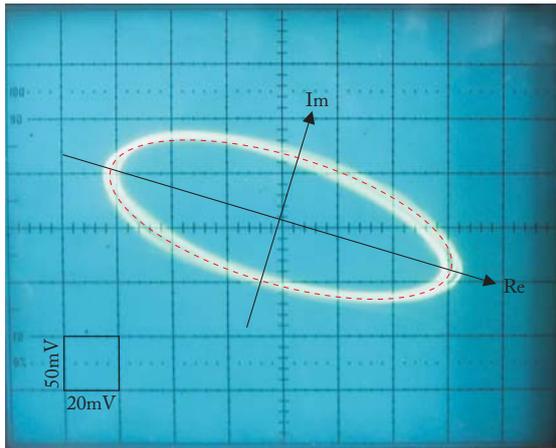


Abbildung 3.6: Vibration mit 62Hz

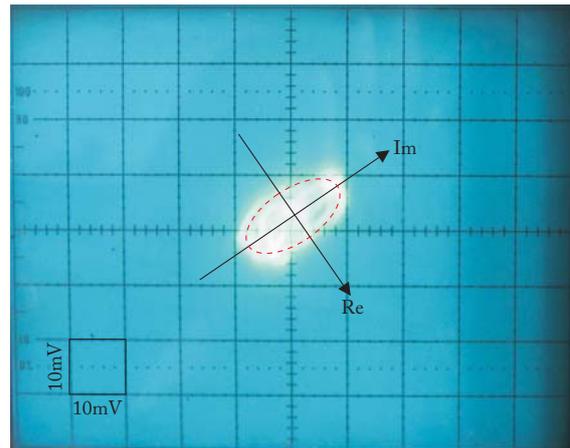


Abbildung 3.7: Vibration mit 100Hz

(Abb. 3.2 ... 3.7) zeigen die Modulation von Real- und Imaginärteil für unterschiedliche Erregungsfrequenzen. Mit steigender Frequenz der Vibration sinken die Amplituden der Modulation, was an der mechanischen Trägheit des Systems liegt. Bei Vibrationen mit 38Hz und 50Hz scheint hauptsächlich der Realteil beeinflusst zu werden, bei anderen Frequenzen ist auch eine Modulation des Imaginärteils erkennbar.

#### Problem:

Bei gutem Abgleich des Gradiometers bleibt ein geringer Imaginärteil-Offset ( $Im_{\text{offset}}$ ) und praktisch kein Realteil-Offset bestehen. Durch die Anregung des Systems ( $M$ ) wird das Gradiometer aus der abgeglichenen Position ausgelenkt, die induzierten Realteile verursachen eine Phasenmodulation ( $\Delta\alpha$ ) des Offsets, die nach der Amplituden-Demodulation im Real- und Imaginärteil auftritt.

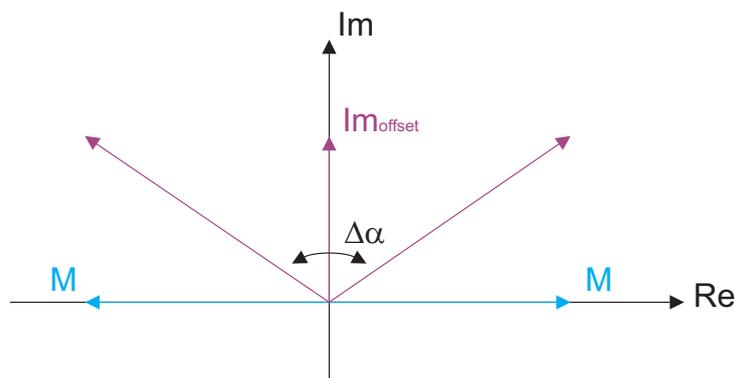


Abbildung 3.8: Phasenmodulation des Imaginärteil-Offsets



# Kapitel 4

## Methoden

### 4.1 Systemaufbau

Das, am Institut für Medizintechnik der Technischen Universität Graz, vorhandene MIT-System besteht aus 16 Sender-Empfänger-Kombinationen die in zwei horizontalen Ebenen, vertikal verschoben, angeordnet sind. Die Sendespulen sind als Solenoid, die Empfänger als Planargradiometer ausgeführt. Die gesamte Aufhängung des Spulensystems besteht aus Kunststoff, um unerwünschte Störungen durch leitfähige Materialien zu vermeiden. Ein grober Abgleich des Systems kann durch Verschieben und Drehen der einzelnen Kombinationen erfolgen, zum genaueren Abgleich sind Stellschrauben vorhanden. (Abb. 4.1) zeigt ein Foto des Systems, eine detaillierte Beschreibung ist in [1, Kapitel 2] zu finden.

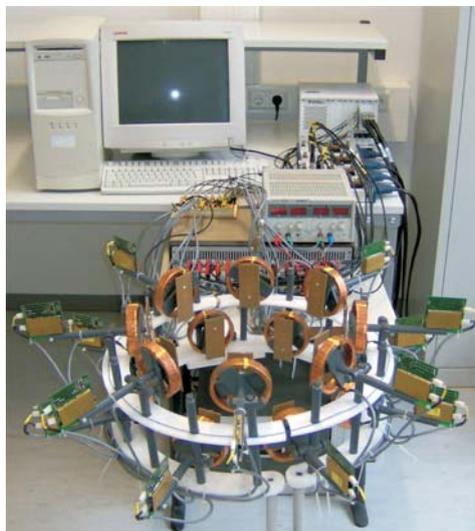


Abbildung 4.1: MIT-Meßsystem

### 4.2 Meßanordnung

Die Messungen erfolgen mit einer Sendespule und dazu abgeglichenen Gradiometerkanälen. Die Meßkarten werden getriggert um exakte Startzeitpunkte der Messungen zu ermöglichen. Durch unangepaßte Leitungen kommt es zur Verzerrung des Triggersignals und dessen

Flanken, weshalb diese Anforderung nicht erfüllt werden kann (Abb. 4.3). Dadurch und wegen der Reaktionszeiten der Meßkarten, variiert die Startphase des gesendeten Signals und der Vibration. Um diesen Einfluß bestimmen, und gegebenenfalls eliminieren zu können, wird ein analoger Ausgangskanal direkt mit einem Eingangskanal verbunden, und eine Startwinkel-Referenz bestimmt.

Die gesendeten Signale werden von analogen Ausgängen der Multifunktions-DAC-Karten generiert und mittels Leistungsverstärker und Multiplexer an die Sendespulen verteilt. Die von den Gradiometern empfangenen Signale, werden über Vorverstärker, einen (16:8) Multiplexer und Nachverstärker an eine ADC-Karte geleitet, und in der LabView Umgebung verarbeitet.

Die in der Schematik der Meßkette dargestellte Referenzspule, ist die in (Abschnitt 1.3.3) erwähnte Referenzspule (REF), welche zur Herstellung eines gemeinsamen Bezugssystems für alle Gradiometer verwendet werden kann.

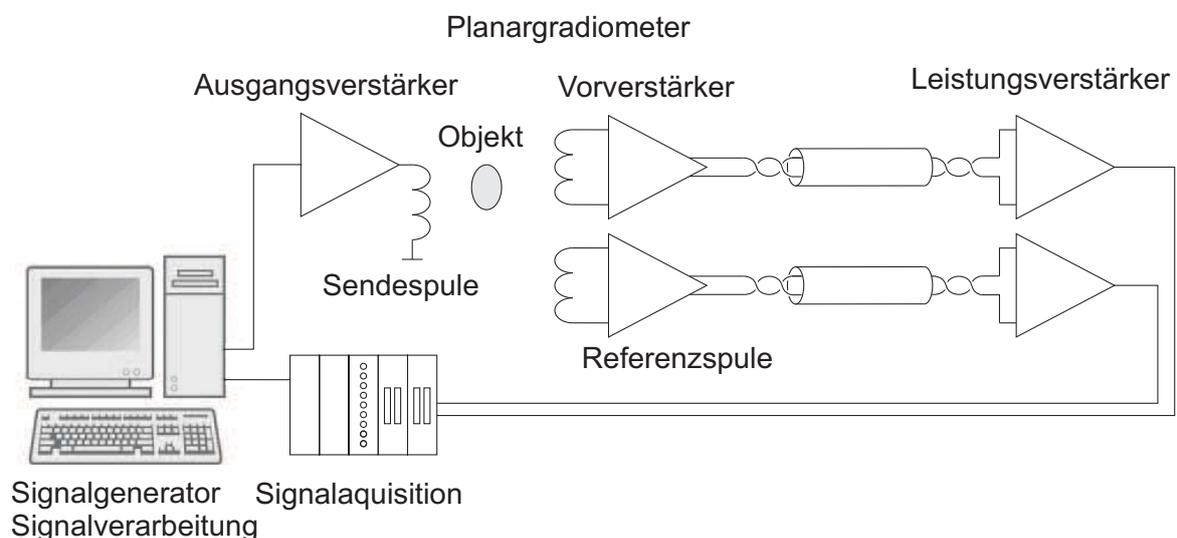


Abbildung 4.2: Schematik der Meßkette

### 4.2.1 Meßbereich FSR (full scale range)

Für die verschiedenen Meßbereiche der ADC-Karten NI-PXI5105 (National Instruments) ergeben sich unterschiedliche DC-Genauigkeiten  $\Delta S_{DC}$ , Quantisierungsfehler  $\Delta S_q$  und Kanalrauschen  $N_{RMS}$ .

$$\begin{aligned} \Delta S_{DC} &= \pm(1\% S + 0,25\% \text{FSR} + 600\mu V) && \text{bei FSR}=50\text{mV} \\ \Delta S_{DC} &= \pm(0,65\% S + 0,25\% \text{FSR} + 600\mu V) && \text{bei FSR}=200\text{mV}, 1\text{V} \\ \Delta S_q &= \pm \frac{\text{FSR}}{2 \cdot 2^Q} \end{aligned}$$

S... Signalamplitude

FSR... Meßbereich

Q... Quantisierungsschritte

Bereich [mV]	Parameter	Wert	Einheit
$\pm 25$ mV	$\Delta S_{DC}$	$\pm(0,65\% S + 0,725)$	mV
	$\Delta S_q$	$\pm 6,1$	$\mu V$
	$N_{RMS}$	60	$\mu V$
$\pm 100$ mV	$\Delta S_{DC}$	$\pm(0,65\% S + 1,1)$	mV
	$\Delta S_q$	$\pm 24,4$	$\mu V$
	$N_{RMS}$	72	$\mu V$
$\pm 500$ mV	$\Delta S_{DC}$	$\pm(0,65\% S + 3,1)$	mV
	$\Delta S_q$	$\pm 122$	$\mu V$
	$N_{RMS}$	300	$\mu V$

Tabelle 4.1: Fehler für unterschiedliche Meßbereiche

### 4.2.2 Anpassung der Fensterlänge für das LabView Messungstool

Die Dauer der Abtastung des Meßsignals beeinflusst die Frequenzauflösung des Amplitudenspektrums und muß ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer des gesendeten und des Vibrationssignals betragen, damit das Trägersignal und die Seitenfrequenzen unverfälscht wiedergegeben werden. Bei der Signalverarbeitung mit LabView muß die berechnete Fensterlänge jedoch um einen Punkt verringert werden, damit die geringste leakage im Amplitudenspektrum auftritt. Der Grund dafür konnte nicht gefunden werden, es dürfte sich dabei um einen Implementierungsfehler in LabView handeln.

### 4.2.3 Trigger

Eine detaillierte Beschreibung der Triggerung von Signalerzeugung und -acquisition kann in [2, Kapitel 2.2.3] gefunden werden. (Abb. 4.3) zeigt den Vergleich eines idealen und eines gemessenen Triggerimpulses. Aufgrund der unangepaßten Leitungsabschlüsse kommt es zu Reflexionen die zur Verzerrung des Rechteckimpulses und zu nicht synchroner Triggerung führen. Zusätzlich starten die Karten nach Erkennung eines Triggerimpulses ihre Tätigkeit mit einem gewissen Zeitfehler (typ. eine Taktperiode). Zwei Ansätze zur Korrektur der resultierenden zeitlichen Ungenauigkeiten (Triggerjitter) sind in [2, Kapitel 2.3.1.1] beschrieben.

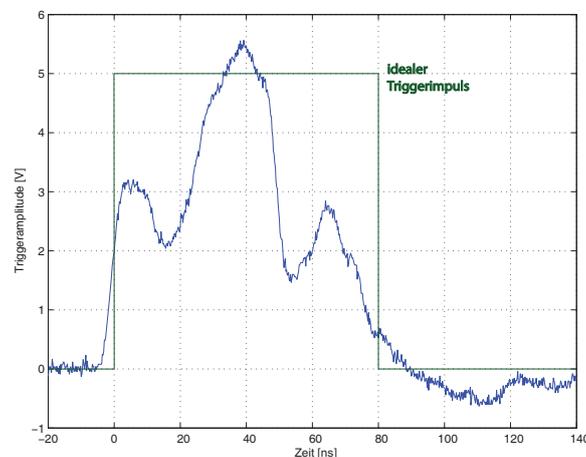


Abbildung 4.3: Verzerrung des Triggersignals

Ausgangswiderstand NI PXI6259  $R_{DO}=50\text{k}\Omega$  (typ. pull down)  
 Wellenwiderstand der Koaxialleitung  $Z_L=50\Omega$   
 Eingangswiderstand Acquitec DA8150  $R_{TTL}=50\Omega$   
 Eingangswiderstand NI PXI5105  $R_{PFI1}=150\text{k}\Omega$   
 Eingangswiderstand Oszilloskop  $R_{CHA}=10\text{M}\Omega$

#### 4.2.4 räumliche Anordnung der Komponenten

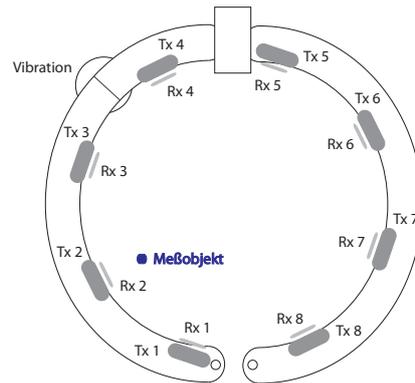


Abbildung 4.4: Konfiguration der Messung

(Abb. 4.4) zeigt schematisch die verwendete Meßanordnung (oberer Ring), die Gradiometer wurden mit (Rx), die Sendespulen mit (Tx) bezeichnet und nummeriert.

#### 4.2.5 Vibration

Zur Erregung der Vibration des Meßsystems wird ein Lautsprecher verwendet, dessen Membran über einen Draht mit dem Kunststoffskelett der Anordnung verbunden ist. Dabei ist darauf zu achten, daß sich keine stehenden Wellen bilden, da dann nur eine unzureichende Vibration erfolgt. Zur Justierung der Aufhängung und der Drahtspannung dient eine Kunststoffschraube.

Angesteuert wird der Lautsprecher, bei der deterministischen Methode, von einem Ausgang der NI-PXI6259 (National Instruments) Karte, wobei eine Frequenz von 50Hz gewählt wird. Um Einschwingvorgänge abklingen zu lassen, startet die Messung erst nach einer einstellbaren Verzögerungszeit  $t_D$  (HW-Tuningtime). Das Signal der DAC-Karte muß nachträglich verstärkt werden, damit die benötigte Leistung für den Lautsprecher bereitgestellt werden kann. Bei der stochastischen Methode werden die natürlichen Bodenschwingungen (keine zusätzliche Vibration) bzw. ein Signalgenerator 33120A (Hewlett Packard) verwendet, dessen Ausgangssignal ein Sinussignal mit einer Frequenz von 38Hz ist. Dies bewirkt eine mechanische Anregung des Systems asynchron zur Messung und mit einer großen Unsicherheit der Startphase, weil der Signalgenerator nicht getriggert und mit eigenem Takt läuft. Da die Frequenz der Abtastung kein ganzzahliges Vielfaches der Vibrationsfrequenz ist, wird die Seitenfrequenz in die benachbarten Stützpunkte verschmiert, durch die zufälligen Startphasen der Vibration verursacht dies eine Varianz des Trägersignals.



Abbildung 4.5: Vibrationssystem

#### 4.2.6 Meßobjekt

Die Messungen werden mit oder ohne Meßobjekt durchgeführt. Dieses ist durch eine Windung eines lackierten Kupferdrahtes, die mit einem Widerstand abgeschlossen ist, realisiert. Die Resistanz des Objekts ist etwa zwei Zehnerpotenzen höher (bei 100kHz) als die Reaktanz, wodurch sich das Objekt hauptsächlich auf den Imaginärteil des Signals auswirkt.



Drahtdurchmesser:  $\sim 0,75\text{mm}$   
 Windungsdurchmesser:  $\sim 10\text{mm}$   
 Abschlusswiderstand:  $10\Omega$   
 gemessener Widerstand:  $3,4\Omega$  (Solartron)  
 gemessene Induktivität:  $300\text{nH}$  (Solartron)

Abbildung 4.6: Verwendetes Meßobjekt

### 4.3 Verwendete Software

- LabView 7.1 (National Instruments)  
 Entwicklungsumgebung zur Modifikation der Aquisitions-Software
  - MIT-Meßsoftware [2]
- MATLAB 6.5 (MathWorks)

### 4.4 Verwendete Hardware

- NI-PXI 1033 (National Instruments)  
 5-Slot PXI Chassis with Integrated MXI-Express Controller

- NI-PXI 6259 (National Instruments)  
High Speed Multifunction DAQ - 16 Bit, Serie M, (2 Stück)  
zur Ausgabe des Vibrationssignals und der digitalen Steuersignale (Trigger, Multiplexer-Steuerung)
- NI-PXI 5105 (National Instruments)  
8 Channel Digitizer - 12 Bit, 60 MS/s  
zur kontinuierlichen Erfassung von jeweils 8 Gradiometer-Kanälen zum Abgleich des Systems und zur getriggerten Datenerfassung während der Meßzyklen.
- NI-BNC 2110 (National Instruments)  
Geschirmte Anschlußeinheit, Serie E, für die DAQ-Karten (4 Stück).
- Aquitek DA8150  
zur Ausgabe der Signale für die Sendespulen
- 33120A (Hewlett Packard)  
15MHz Function/Arbitrary Waveform Generator  
zur kontinuierlichen Vibration des Systems, für die stochastische Methode und zur Überprüfung des Modells
- TDS 3014B (Tektronix)  
100MHz 1,25GS/s 4-Kanal-Speicheroszilloskop
- 5610B (HP Electronic Instruments)  
Two Phase Lock-In-Amplifier  
zur analogen Signaldemodulation bei der Überprüfung des Modells
- 2214 (Tektronix)  
20MHz, 16MS/s, 4-Kanal-Speicheroszilloskop, für die Überprüfung des Modells
- 150W NF-Verstärker, zur Vibration des Meßsystems
- 8 $\Omega$  Lautsprecher, zur Vibration des Meßsystems
- MIT-System der TU-Graz [1]
- 1260 (solartron analytical)  
impedance/gain-phase Analyzer, zur Vermessung des Objekts

# Kapitel 5

## Ergebnisse

### 5.1 deterministische Modulationsmethode

Aufgenommen werden 15 Datensätze für drei simultane Frequenzen, mit einer Sendespule (Tx 1) und zwei abgeglichenen Gradiometer-Meßkanälen (Rx 2, Rx 6), wobei das System mit konstanter Frequenz angeregt wird. Ein weiterer Eingangskanal mißt direkt die Spannung eines Ausgangskanals, um die zeitlichen Verschiebungen durch den Triggerjitter abschätzen zu können.

Parameter	Wert	Einheit
Ausgangssignal (DA8150)		
Trägerfrequenz	99,9 / 201 / 300	kHz
Amplitude	0,4	V
Abtastfrequenz	75	MHz
Signalpunkte	250000	
Referenzsignal (DA8150)		
Frequenz	99,9 / 201 / 300	kHz
Amplitude	0,2	V
Ausgangssignal (NI-PXI6259)		
Vibrationsfrequenz	50	Hz
Amplitude	0,3	V
Abtastfrequenz	1	MHz
Signalpunkte	20000	
Eingangssignal (NI-PXI5105)		
Spannungsbereich	$\pm 100$	mV
Abtastfrequenz	7,5	MHz
Abtastpunkte	149999	
Meßreihe		
Einschwingzeit	1,05 ( $\rightarrow$ 1,04)	s
Anzahl der Messungen	20	

Tabelle 5.1: Meßkonfiguration bei deterministischer Methode

Für die Meßkarte wird der Eingangsbereich  $\pm 100\text{mV}$  gewählt, da bei mehreren aktiven Sendespulen (Tx) oder mehreren überlagerten Frequenzen, der Meßbereich von  $\pm 25\text{mV}$  zur unverzerrten Signalaquisition nicht ausreicht. Die Einschwingzeit dient der Verzögerung

der Messung, damit durch die Vibration hervorgerufene, mechanische Einschwingvorgänge abklingen können. Wie in [2, 2.2.3.2] beschrieben, wird die Einschwingzeit auf ganzzahlige Vielfache des Abtastzeitfensters gerundet, damit die Datenaquisition immer bei einem Nulldurchgang des Vibrationssignals startet, wodurch Startwinkel  $\chi = 0$  realisiert werden und die Forderung (Glg. 2.13) nicht erfüllt ist. Somit kann nur die erste Berechnungsmöglichkeit aus (Glg. 2.11) für den Korrekturwinkel herangezogen werden.

### 5.1.1 Meßreihe ohne Objekt

$|S|$  gibt den Absolutbetrag des gemessenen Signals ( $S_{\omega_C}$ ) wieder, dieser entspricht der Amplitude bei der Frequenz  $\omega_C$ . ( $\text{Im}_{\text{raw}}(S)$ ,  $\text{Re}_{\text{raw}}(S)$ ) sind der gemessene Imaginär- und Realteil, welche durch Drehung mit  $\overline{\Psi}_{\text{cor1}}$  zu ( $\text{Im}_{\text{cor}}(S)$ ,  $\text{Re}_{\text{cor}}(S)$ ) korrigiert werden. ( $\text{Im}_{\text{rc}}(S)$ ,  $\text{Re}_{\text{rc}}(S)$ ) sind die um den Triggerjitter korrigierten Rohdaten, um die Auswirkung der zeitlichen Ungenauigkeiten der Meßkarten abzuschätzen und einen einfacheren Vergleich mit der stochastischen Methode zu ermöglichen.

Trägersignal 99,9kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ S $	$4,911 \cdot 10^{-3}$	$1,184 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{\text{raw}}(S)$	$-4,885 \cdot 10^{-3}$	$1,167 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{\text{cor}}(S)$	$-2,074 \cdot 10^{-3}$	$7,148 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{\text{raw}}(S)$	$4,787 \cdot 10^{-4}$	$5,940 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{\text{cor}}(S)$	$-4,447 \cdot 10^{-3}$	$2,616 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{\text{rc}}(S)$	$-4,754 \cdot 10^{-3}$	$9,545 \cdot 10^{-8}$
$\text{Re}_{\text{rc}}(S)$	$1,230 \cdot 10^{-3}$	$1,184 \cdot 10^{-7}$

$$\overline{\Psi}_{\text{cor1}} = 1,231 \text{ rad}$$

$$\chi = 2,733 \text{ rad}$$

Tabelle 5.2: Gradiometer Rx 2 ohne Objekt

Trägersignal 99,9kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ S $	$10,774 \cdot 10^{-3}$	$1,271 \cdot 10^{-8}$
$\text{Im}_{\text{raw}}(S)$	$10,542 \cdot 10^{-3}$	$2,617 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{\text{cor}}(S)$	$3,218 \cdot 10^{-5}$	$1,915 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{\text{raw}}(S)$	$-2,202 \cdot 10^{-3}$	$1,192 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{\text{cor}}(S)$	$-10,774 \cdot 10^{-3}$	$1,265 \cdot 10^{-8}$
$\text{Im}_{\text{rc}}(S)$	$10,078 \cdot 10^{-3}$	$1,284 \cdot 10^{-8}$
$\text{Re}_{\text{rc}}(S)$	$-3,809 \cdot 10^{-3}$	$8,568 \cdot 10^{-9}$

$$\overline{\Psi}_{\text{cor1}} = -1,366 \text{ rad}$$

$$\chi = 0,016 \text{ rad}$$

Tabelle 5.3: Gradiometer Rx 6 ohne Objekt

Trägersignal 201kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ S $	$6,927 \cdot 10^{-3}$	$1,942 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{\text{raw}}(S)$	$-6,913 \cdot 10^{-3}$	$1,906 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{\text{cor}}(S)$	$-1,225 \cdot 10^{-3}$	$6,088 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{\text{raw}}(S)$	$1,370 \cdot 10^{-4}$	$1,622 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{\text{cor}}(S)$	$-6,816 \cdot 10^{-3}$	$1,396 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{\text{rc}}(S)$	$-6,552 \cdot 10^{-3}$	$1,390 \cdot 10^{-7}$
$\text{Re}_{\text{rc}}(S)$	$2,248 \cdot 10^{-3}$	$2,048 \cdot 10^{-7}$

$$\overline{\Psi}_{\text{cor1}} = 1,402 \text{ rad}$$

$$\chi = 3,051 \text{ rad}$$

Tabelle 5.4: Gradiometer Rx 2 ohne Objekt

Trägersignal 201kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
$ S $	$12,819 \cdot 10^{-3}$	$1,394 \cdot 10^{-8}$
$\text{Im}_{\text{raw}}(S)$	$12,785 \cdot 10^{-3}$	$1,722 \cdot 10^{-7}$
$\text{Im}_{\text{cor}}(S)$	$7,493 \cdot 10^{-6}$	$7,658 \cdot 10^{-8}$
$\text{Re}_{\text{raw}}(S)$	$-5,615 \cdot 10^{-4}$	$2,902 \cdot 10^{-6}$
$\text{Re}_{\text{cor}}(S)$	$-12,819 \cdot 10^{-3}$	$1,397 \cdot 10^{-8}$
$\text{Im}_{\text{rc}}(S)$	$12,021 \cdot 10^{-3}$	$1,258 \cdot 10^{-8}$
$\text{Re}_{\text{rc}}(S)$	$-4,452 \cdot 10^{-3}$	$2,921 \cdot 10^{-8}$

$$\overline{\Psi}_{\text{cor1}} = -1,539 \text{ rad}$$

$$\chi = 0,004 \text{ rad}$$

Tabelle 5.5: Gradiometer Rx 6 ohne Objekt

Aufgrund des Tiefpaßcharakters der Meßkette und Meßfrequenzen ausreichend unterhalb der Resonanzfrequenz muß der Korrekturwinkel im Bereich von  $[-\pi..0]$  liegen. Für die

in (Tab. 5.2 ... Tab. 5.9) dargestellten Messungen ist das nicht unmittelbar der Fall. Aufgrund der Annahme eines cosinusförmigen Trägersignals bei der Herleitung der deterministischen Methode (Abschnitt 2.3.3) und eines sinusförmigen Trägersignals beim realen Meßsystem ergibt sich ein Offsetwinkel von  $\frac{\pi}{2}$  der vom berechneten Korrekturwinkel abgezogen wurde. Durch den mechanischen Aufbau wirkt sich das eingebrachte Vibrationssignal mit umgekehrtem Vorzeichen (entspricht  $\chi = \pi$ ) auf das Gradiometer (Rx 2) aus, weshalb ein Offset von  $\pm\pi$  im Korrekturwinkel enthalten ist.

Bei den Meßreihen des Gradiometers (Rx 6) tritt keine erwartete Verbesserung der SNVD des korrigierten Imaginärteils gegenüber der SNVD des ursprünglich gemessenen auf, verglichen mit den referenzkorrigierten Daten wird auch der Triggerjitter nur teilweise korrigiert. Der Offset des Imaginärteils wird verringert, und fast vollständig in den Realteil gedreht. Beim Gradiometer (Rx 2) verursacht die Korrektur eine Verschlechterung der Daten, was auf verfälschte oder fehlerhaft gemessene Seitenfrequenz-Amplituden hinweist. Der berechnete Startwinkel sollte aufgrund des mechanischen Aufbaus für (Rx 2) bei  $\chi \simeq \pi$  liegen, und wird ebenfalls falsch berechnet.

### 5.1.2 Meßreihe mit Objekt

Trägersignal 99,9kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$4,874 \cdot 10^{-3}$	$8,767 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$-4,836 \cdot 10^{-3}$	$1,188 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$-4,179 \cdot 10^{-3}$	$4,438 \cdot 10^{-7}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$5,983 \cdot 10^{-4}$	$4,493 \cdot 10^{-7}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-2,500 \cdot 10^{-3}$	$6,668 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$-4,688 \cdot 10^{-3}$	$7,554 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$1,333 \cdot 10^{-3}$	$5,807 \cdot 10^{-8}$

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{cor1} &= 0,657 \text{ rad} \\ \chi &= 2,758 \text{ rad} \end{aligned}$$

Tabelle 5.6: Gradiometer Rx 2

Trägersignal 99,9kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$10,746 \cdot 10^{-3}$	$1,169 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$10,513 \cdot 10^{-3}$	$2,192 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$9,081 \cdot 10^{-5}$	$2,452 \cdot 10^{-7}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$-2,212 \cdot 10^{-3}$	$1,013 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-10,746 \cdot 10^{-3}$	$1,055 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$10,052 \cdot 10^{-3}$	$1,221 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$-3,799 \cdot 10^{-3}$	$6,003 \cdot 10^{-9}$

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{cor1} &= -1,349 \text{ rad} \\ \chi &= 0,018 \text{ rad} \end{aligned}$$

Tabelle 5.7: Gradiometer Rx 6

Trägersignal 201kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$6,919 \cdot 10^{-3}$	$1,213 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$-6,895 \cdot 10^{-3}$	$1,779 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$-4,245 \cdot 10^{-3}$	$1,197 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$4,730 \cdot 10^{-4}$	$1,307 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-5,451 \cdot 10^{-3}$	$8,860 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$-6,435 \cdot 10^{-3}$	$9,629 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$2,542 \cdot 10^{-3}$	$9,274 \cdot 10^{-8}$

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{cor1} &= 0,976 \text{ rad} \\ \chi &= 3,010 \text{ rad} \end{aligned}$$

Tabelle 5.8: Gradiometer Rx 2

Trägersignal 201kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$12,783 \cdot 10^{-3}$	$1,108 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$12,753 \cdot 10^{-3}$	$1,302 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$4,805 \cdot 10^{-5}$	$9,595 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$-6,058 \cdot 10^{-4}$	$2,468 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-12,783 \cdot 10^{-3}$	$1,105 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$11,986 \cdot 10^{-3}$	$1,085 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$-4,444 \cdot 10^{-3}$	$4,923 \cdot 10^{-9}$

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{cor1} &= -1,511 \text{ rad} \\ \chi &= 0,005 \text{ rad} \end{aligned}$$

Tabelle 5.9: Gradiometer Rx 6

Auch bei den Meßreihen mit Objekt (Tab. 5.6 ... Tab. 5.9 ) werden ähnliche Ergebnisse erzielt. Es wird keine Verbesserung der SNVD des Imaginärteils erreicht, jedoch ist ein geringes Absinken des Mittelwertes für das Gradiometer (Rx 2) und ein Anstieg für (Rx 6) zu festzustellen, der durch das Objekt hervorgerufen wird. Der berechnete Startwinkel  $\chi$  für (Rx 2) deutet wiederum auf verfälschte oder fehlerhaft gemessene Amplituden der Seitenfrequenzen hin.

## 5.2 stochastische Modulationsmethode

Aufgenommen werden 20 Datensätze für drei simultane Frequenzen, mit einer Sendespule (Tx 1) und zwei abgeglichenen Gradiometer-Meßkanälen (Rx 2, Rx 6), wobei das System nur durch die natürlichen Vibrationen des Bodens angeregt wird. Ein weiterer Ein- und Ausgangskanal wird zur direkten Referenzmessung verwendet, wodurch die zeitlichen Verschiebungen durch den Triggerjitter aufgezeichnet und die Referenzwinkel  $\varphi_{REF}$  berechnet werden können.

Parameter	Wert	Einheit
Ausgangssignal (Aquitek)		
Meßfrequenz	99,9 / 201 / 300	kHz
Amplitude	0,4	V
Abtastfrequenz	75	MHz
Signalpunkte	250000	
Referenzsignal (DA8150)		
Frequenz	99,9 / 201 / 300	kHz
Amplitude	0,2	V
Eingangssignal		
Spannungsbereich	$\pm 100$	mV
Abtastfrequenz	7,5	MHz
Abtastpunkte	149999	
Anzahl der Messungen	20	
Einschwingzeit	1,05 ( $\rightarrow$ 1,04)	s

Tabelle 5.10: Meßkonfiguration bei stochastischer Methode

## 5.2.1 Meßreihe ohne Objekt

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,2378 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,1537 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 99,9kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$4,676 \cdot 10^{-3}$	$4,173 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$-4,640 \cdot 10^{-3}$	$4,764 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$-4,499 \cdot 10^{-3}$	$3,955 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$-2,661 \cdot 10^{-4}$	$6,429 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$5,749 \cdot 10^{-4}$	$3,387 \cdot 10^{-7}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$1,274 \cdot 10^{-3}$	$1,495 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$4,668 \cdot 10^{-3}$	$4,179 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.11: Gradiometer Rx 2

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,3919 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,1537 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 99,9kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$10,755 \cdot 10^{-3}$	$1,383 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$10,521 \cdot 10^{-3}$	$1,598 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$10,061 \cdot 10^{-3}$	$1,383 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$-1,949 \cdot 10^{-3}$	$5,289 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$-2,224 \cdot 10^{-3}$	$7,613 \cdot 10^{-7}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$-3,800 \cdot 10^{-3}$	$5,772 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-10,577 \cdot 10^{-3}$	$1,402 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.12: Gradiometer Rx 6

(Tab. 5.11 ... Tab. 5.14) geben die Mittelwerte und spektralen Rauschspannungsdichten SNVD für eine Meßreihe ohne Objekt wieder. Die Werte (Im<sub>rc</sub>(S), Re<sub>rc</sub>(S)) sind die um den Referenzwinkel  $\Psi_{ref}$  gedrehten Werte (Im<sub>raw</sub>(S), Re<sub>raw</sub>(S)). Diese Korrektur des Triggerrauschens bewirkt eine Verringerung der SNVD sowohl im Imaginär-, als auch im Realteil. Die anschließende Korrektur mit dem Winkel  $\overline{\Psi}_{cor}$  verbessert die SNVD des Imaginärteils auf Kosten der SNVD des Realteils, und bewirkt eine deutliche Verringerung des Imaginärteil-Offsets.

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,2258 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,30708 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 201kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$6,702 \cdot 10^{-3}$	$4,807 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$-6,682 \cdot 10^{-3}$	$7,085 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$-6,239 \cdot 10^{-3}$	$4,528 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$1,956 \cdot 10^{-4}$	$4,921 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$4,609 \cdot 10^{-4}$	$9,676 \cdot 10^{-7}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$2,450 \cdot 10^{-3}$	$1,691 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$6,700 \cdot 10^{-3}$	$4,809 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.13: Gradiometer Rx 2

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,5653 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,30708 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 201kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$12,794 \cdot 10^{-3}$	$1,142 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$12,769 \cdot 10^{-3}$	$1,008 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$11,997 \cdot 10^{-3}$	$1,187 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$-4,377 \cdot 10^{-3}$	$7,147 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$-6,302 \cdot 10^{-4}$	$1,850 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$-4,443 \cdot 10^{-3}$	$7,147 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-12,021 \cdot 10^{-3}$	$1,187 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.14: Gradiometer Rx 6

### 5.2.2 Meßreihe mit Objekt

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,271 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,1570 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 99,9kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$4,743 \cdot 10^{-3}$	$4,425 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$-4,711 \cdot 10^{-3}$	$7,182 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$-4,574 \cdot 10^{-3}$	$4,235 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$-1,532 \cdot 10^{-4}$	$7,299 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$5,363 \cdot 10^{-4}$	$5,135 \cdot 10^{-7}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$1,254 \cdot 10^{-3}$	$1,482 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$4,740 \cdot 10^{-3}$	$4,427 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.15: Gradiometer Rx 2

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,37 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,1570 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 99,9kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$10,755 \cdot 10^{-3}$	$1,119 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$10,522 \cdot 10^{-3}$	$2,448 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$10,061 \cdot 10^{-3}$	$1,112 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$-1,718 \cdot 10^{-3}$	$5,396 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$-2,209 \cdot 10^{-3}$	$1,144 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$-3,802 \cdot 10^{-3}$	$5,748 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-10,617 \cdot 10^{-3}$	$1,130 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.16: Gradiometer Rx 6

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,204 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,3138 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 201kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$6,748 \cdot 10^{-3}$	$5,190 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$-6,726 \cdot 10^{-3}$	$9,922 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$-6,300 \cdot 10^{-3}$	$4,850 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$-9,563 \cdot 10^{-7}$	$5,941 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$3,919 \cdot 10^{-4}$	$1,464 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$2,418 \cdot 10^{-3}$	$1,941 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$6,748 \cdot 10^{-3}$	$5,190 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.17: Gradiometer Rx 2

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,2438 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,3138 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 201kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$12,796 \cdot 10^{-3}$	$1,359 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$12,762 \cdot 10^{-3}$	$1,607 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$11,998 \cdot 10^{-3}$	$1,300 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$-3,579 \cdot 10^{-4}$	$5,466 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$-5,965 \cdot 10^{-4}$	$2,780 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$-4,448 \cdot 10^{-3}$	$6,773 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-12,791 \cdot 10^{-3}$	$1,360 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.18: Gradiometer Rx 6

Auch bei Messungen mit Objekt (Tab. 5.15 ... Tab. 5.18) ist eine deutliche Verringerung der SNVD der referenzkorrigierten Real- und Imaginärteile feststellbar, die Korrektur mit  $\overline{\Psi}_{cor}$  vermindert die SNVD des Imaginärteils durch Erhöhung der SNVD des Realteils. Beim Gradiometer (Rx 6) ist eine geringfügige Erhöhung des Imaginärteil-Mittelwertes zufolge des Objekts erkennbar, beim Gradiometer (Rx 2) wie zu erwarten eine Verringerung bei 201kHz, jedoch eine Erhöhung bei 99,9kHz.

### 5.2.3 Meßreihe mit asynchroner Vibration ohne Objekt

Ähnlich wie bei deterministischer Korrektur verhält sich das System bei asynchroner Vibration mit einem externen Funktionsgenerator (33120A (Hewlett Packard)). Durch die nicht getriggerte Anregung und die Wahl der Vibrationsfrequenz (38Hz) so, daß die Abtastzeit kein ganzzahliges Vielfaches der Vibrations-Periodendauer enthält, wird sowohl eine deterministische als auch eine stochastische Modulation des Trägersignals hervorgerufen. Die Ergebnisse in (Tab. 5.19 ... Tab. 5.22) zeigen eine geringere Verbesserung

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,234 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,154 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 99,9kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$7,914 \cdot 10^{-3}$	$3,967 \cdot 10^{-6}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$7,914 \cdot 10^{-3}$	$3,952 \cdot 10^{-6}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$7,453 \cdot 10^{-3}$	$3,774 \cdot 10^{-6}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$-9,324 \cdot 10^{-4}$	$6,708 \cdot 10^{-7}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$-2,405 \cdot 10^{-3}$	$1,259 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$-3,595 \cdot 10^{-3}$	$1,463 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-8,222 \cdot 10^{-3}$	$3,992 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5.19: Gradiometer Rx 2 ohne Meßobjekt (Vibration mit 38Hz)

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,106 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,154 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 99,9kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$19,551 \cdot 10^{-3}$	$4,219 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$19,176 \cdot 10^{-3}$	$3,833 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$18,373 \cdot 10^{-3}$	$3,764 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$2,992 \cdot 10^{-3}$	$8,934 \cdot 10^{-9}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$-3,779 \cdot 10^{-3}$	$1,868 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$-6,684 \cdot 10^{-3}$	$2,199 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-1,932 \cdot 10^{-3}$	$4,267 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.20: Gradiometer Rx 6 ohne Meßobjekt (Vibration mit 38Hz)

der SNVD des Imaginärteils als bei den Meßreihen mit Anregung durch die natürliche Vibration des Bodens.

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,181 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,309 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 201kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$8,331 \cdot 10^{-3}$	$4,686 \cdot 10^{-6}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$8,305 \cdot 10^{-3}$	$4,670 \cdot 10^{-6}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$7,890 \cdot 10^{-3}$	$4,388 \cdot 10^{-6}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$5,658 \cdot 10^{-4}$	$1,835 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$-1,084 \cdot 10^{-4}$	$2,532 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$-2,633 \cdot 10^{-3}$	$2,460 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-8,299 \cdot 10^{-3}$	$4,684 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5.21: Gradiometer Rx 2 ohne Meßobjekt (Vibration mit 38Hz)

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{cor} &= -1,159 \text{ rad} \\ \overline{\varphi}_{REF} &= -0,309 \text{ rad}\end{aligned}$$

Meßfrequenz 201kHz		
Variable	Mittelwert [V]	SNVD [ $\frac{V}{\sqrt{Hz}}$ ]
S	$23,063 \cdot 10^{-3}$	$6,025 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>raw</sub> (S)	$23,022 \cdot 10^{-3}$	$2,037 \cdot 10^{-7}$
Im <sub>rc</sub> (S)	$21,739 \cdot 10^{-3}$	$5,579 \cdot 10^{-8}$
Im <sub>cor</sub> (S)	$1,640 \cdot 10^{-3}$	$1,758 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>raw</sub> (S)	$-7,378 \cdot 10^{-4}$	$4,502 \cdot 10^{-6}$
Re <sub>rc</sub> (S)	$-7,702 \cdot 10^{-3}$	$2,904 \cdot 10^{-8}$
Re <sub>cor</sub> (S)	$-23,004 \cdot 10^{-3}$	$6,038 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 5.22: Gradiometer Rx 6 ohne Meßobjekt (Vibration mit 38Hz)

### 5.3 frequenzdifferentielle Methode

Die ersten Messungen wurden mit fixer Phasenkalibrierung durchgeführt. Durch multi-frequente Vermessung einer Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Probe wurde für jedes Gradiometer einmalig ein Phasengang ermittelt, der für die folgenden Messungen zur Korrektur des Winkels  $\Psi_1(\omega)$  interpoliert wurde. Da diese Methode den Winkel nur mit geringer Genauigkeit korrigiert, und keinerlei Veränderungen des Meßsystems berücksichtigt, bleibt ein Fehler in den Meßdaten erhalten. Dieser Restwinkel ist von der Frequenz abhängig und addiert sich zum Fehlwinkel  $\xi$  wodurch eine Verfälschung der Bedingung (Glg. 2.47) verursacht wird, welche gravierende Abweichungen des Faktors  $\gamma$  von eins zur Folge hat. Aufgrund

dieser Ergebnisse wurde der deterministische Kalibrieransatz entwickelt, mit dessen Hilfe eine genauere Kalibrierung der Phase möglich sein sollte. Aus den vorverarbeiteten Daten wird nun mittels frequenzdifferentieller Methode der Korrekturfaktor  $\gamma$  ermittelt (Glg. 2.46).

	Phasenkorrektur	Gradiometer		f <sub>2</sub>	f <sub>1</sub>
		Rx 2	Rx 6	[kHz]	
$\gamma$	Korrektur mit $\overline{\Psi}_{cor1}(\omega)$	6,64	1,15	201	99,9
		2,14	0,93	300	201
		13,88	3,01	300	99,9
	ohne Phasenkorrektur	3,65	1,76	201	99,9
		-2,15	-1,07	300	201
		-7,27	-1,90	300	99,9

Tabelle 5.23: Korrekturfaktor  $\gamma$  für Meßreihen ohne Objekt

Erfolgt keine Korrektur des Phasenwinkels durch die deterministische Methode, können die unterschiedlichen Systemdrehwinkel bei den verschiedenen Meßfrequenzen negative Korrekturfaktoren zur Folge haben. Durch Drehung der Seitenfrequenzen (und Trägersignale) mit  $\overline{\Psi}_{cor1}$  (deterministische Methode) sollte die Modulation des Imaginärteils verschwinden, diese wird jedoch auch zur Bestimmung des Korrekturfaktors  $\gamma$  herangezogen, wodurch sich geringe Fehler der deterministischen Methode auch auf die frequenzdifferentielle Korrektur auswirken.

	Phasenkorrektur	Gradiometer		f <sub>2</sub>	f <sub>1</sub>
		Rx 2	Rx 6	[kHz]	
$\gamma$	Korrektur mit $\overline{\Psi}_{cor1}(\omega)$	4,64	-1,28	201	99,9
		2,70	0,72	300	201
		12,56	1,14	300	99,9
	ohne Phasenkorrektur	3,33	1,80	201	99,9
		-2,10	-1,07	300	201
		-7,02	-1,88	300	99,9

Tabelle 5.24: Korrekturfaktor  $\gamma$  für Meßreihen mit Objekt

Beim Gradiometer (Rx 2) weicht  $\gamma$  sehr stark von eins ab, was wiederum durch eine fehlerhafte Bestimmung der Seitenfrequenzen (wie schon in Abschnitt 5.1.1 erwähnt) verursacht werden könnte. Bei einigermaßen korrekter Phasenkorrektur (Rx 6) liegen die berechneten Korrekturfaktoren zwar näher bei eins, sind jedoch durch die nicht erfüllte Bedingung (Glg. 2.47) zur frequenzdifferentiellen Korrektur praktisch nicht verwendbar.

# Kapitel 6

## Diskussion

### 6.1 deterministische Modulationsmethode

Die Simulationen (Abschnitt 2.4) zeigen, daß die deterministische Korrekturmethode eine recht stabile und genau Möglichkeit bietet, den mittleren Fehlerwinkel zu korrigieren, solange die Modulation des wirklichen Realteils erheblich größer als die Modulation des wirklichen Imaginärteils ist. Die durchgeführten Messungen zur Verifikation des Modells (Abschnitt 3.1) zeigen, daß diese Forderung bei den meisten Erregungsfrequenzen kaum erfüllt wird. Die Phasenmodulation des Imaginärteil-Offsets verfälscht die gemessenen Seitenfrequenzen und damit den Korrekturwinkel, dieser Effekt nimmt für größere Auslenkung der Gradiometer zu.

	Gradiometer				
	Rx 2		Rx 6		
	99,9kHz	201kHz	99,9kHz	201kHz	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{raw}}(S))}$	6,12	3,19	0,73	0,44	ohne Objekt
$\frac{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{raw}}(S))}$	0,44	0,09	0,01	0,005	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}( S )}$	2,209	3,13	15,07	5,49	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{raw}}(S))}$	3,73	6,72	1,12	0,74	mit Objekt
$\frac{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{raw}}(S))}$	0,988	1,48	0,68	0,004	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}( S )}$	7,606	9,87	20,98	8,66	

Tabelle 6.1: Rauschspannungsdichten SNVD

Eine Triggerung der Ein- und Ausgangskarten ist zur Festlegung des Startwinkels  $\chi$  erforderlich, da aber der Korrekturwinkel für jede Messung individuell berechnet werden kann, ist eine Korrektur des Triggerjitters nicht notwendig. Korrigiert man den Triggerjitter der Rohdaten vor Berechnung des Korrekturwinkels  $\overline{\Psi}_{\text{cor1}}$  dennoch, sollte sich bei den korrigierten Daten der Meßreihe eine Erhöhung der SNVD des Realteils und eine Verringerung der SNVD des Imaginärteils zeigen.

Eine sprunghafte Änderung des Objekts führt bei der deterministischen Methode nicht zu einer fehlerhaften Berechnung des Korrekturwinkels, da dieser für jede Messung separat berechnet wird. Aus diesem Grund wäre es möglich, Meßdaten online zu korrigieren.

	Gradiometer				
	Rx 2		Rx 6		
	99,9kHz	201kHz	99,9kHz	201kHz	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{rc}}(S))}$	7,49	4,38	14,91	6,08	ohne Objekt
$\frac{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{rc}}(S))}$	2,21	0,68	1,48	0,48	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{rc}}(S))}$	5,87	12,43	20,09	8,84	mit Objekt
$\frac{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{rc}}(S))}$	11,48	9,87	1,76	2,24	

Tabelle 6.2: Rauschspannungsdichten SNVD bei korrigiertem Triggerjitter

## 6.2 stochastische Modulationsmethode

Die Simulationen (Abschnitt 2.6) zeigen, daß auch die stochastische Korrekturmethode eine recht stabile und genau Möglichkeit bietet, den mittleren Fehlerwinkel zu korrigieren, solange die Modulation des wirklichen Realteils erheblich größer als die Modulation des wirklichen Imaginärteils ist. Da der Korrekturwinkel aus der Varianz der Meßreihe geschätzt wird, ist es notwendig gleiche Anfangsbedingungen für die einzelnen Messungen einer Meßreihe zu schaffen. Zu diesem Zweck müssen die Messungen getriggert gestartet, und die gemessenen Signale um den Triggerjitter korrigiert werden. Die vorverarbeiteten Rohdaten ( $\text{Im}_{\text{rc}}(S)$ ,  $\text{Re}_{\text{rc}}(S)$ ) weisen eine erheblich geringere SNVD auf, als die gemessenen Rohdaten ( $\text{Im}_{\text{raw}}(S)$ ,  $\text{Im}_{\text{raw}}(S)$ ). Berechnet man den Korrekturwinkel aus den referenzkorrigierten Daten, verbessert sich die SNVD des Imaginärteils, die SNVD des Realteils steigt.

	Gradiometer				
	Rx 2		Rx 6		
	99,9kHz	201kHz	99,9kHz	201kHz	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{rc}}(S))}$	0,163	0,109	0,382	0,602	ohne Objekt
$\frac{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{rc}}(S))}$	2,795	2,844	2,430	1,661	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}( S )}$	0,154	0,102	0,383	0,626	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{rc}}(S))}$	0,172	0,122	0,485	0,421	mit Objekt
$\frac{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{rc}}(S))}$	2,987	2,673	1,966	2,008	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}( S )}$	0,1605	0,114	0,482	0,402	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{rc}}(S))}$	0,178	0,418	0,237	0,315	bei $\omega_V = 38$ Hz
$\frac{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Re}_{\text{rc}}(S))}$	2,730	1,904	1,940	2,079	
$\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}( S )}$	0,169	0,392	0,218	0,292	

Tabelle 6.3: Rauschspannungsdichten SNVD

Wird die Varianz des Trägers durch asynchrone Vibration ( $\omega_V = 38$  Hz) mit geringer Amplitude erzeugt, verbessert sich das Verhältnis  $\frac{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{cor}}(S))}{\text{SNVD}(\text{Im}_{\text{rc}}(S))}$  für das Gradiometer (Rx 6)

und verschlechtert sich für (Rx 2) gegenüber den Meßreihen bei mechanischer Anregung durch die natürliche Vibration des Bodens. Die  $SNVD(\text{Im}_{rc}(S))$  steigt jedoch für beide Gradiometer, was eine Verschlechterung der Korrekturergebnisse bedeutet.

Eine sprunghafte Änderung des Objekts führt bei der stochastischen Methode zu einer fehlerhaften Berechnung des Korrekturwinkels, da dieser aus der gesamten Meßreihe geschätzt wird.

### 6.3 Vergleich der deterministischen und stochastischen Korrekturmethode

Bei der stochastischen Methode wird eine Verringerung der spektralen Rauschspannungsdichte und des Imaginärteil-Offsets erzielt, die deterministische Methode korrigiert nur den Imaginärteil-Offset. Beide Methoden liefern jedoch teilweise ähnliche mittlere Korrekturwinkel (Tab. 6.4). Die mittels deterministischer Korrekturmethode für das Gradiometer (Rx 2) ermittelten Winkel werden um den Winkel  $-\pi$  korrigiert dargestellt ((Rx 2) steht gegenüber (Rx 6) 'auf dem Kopf'). Einfluß auf die berechneten Korrekturwinkel nehmen

	Meßfrequenz [kHz]	Korrekturwinkel $\overline{\Psi}_{cor}$ [rad]					
		Rx 2	Rx 6	Rx 2	Rx 6	Rx 2	Rx 6
ohne Objekt	99,9	-1,910	-1,366	-1,238	-1,392	-1,234	-1,106
	201	-1,740	-1,539	-1,226	-1,565	-1,181	-1,159
mit Objekt	99,9	-2,485	-1,349	-1,271	-1,370	$\omega_V = 38 \text{ Hz}$	
	201	-2,166	-1,511	-1,204	-1,244		
		deterministische Korrekturmethode			stochastische Korrekturmethode		

Tabelle 6.4: Berechnete Korrekturwinkel der deterministischen Methode

die Erregungsfrequenz und Amplitude der Vibration, und die Lage von Sende- und Empfangseinheit. Wie in (Abschnitt 3.1) beschrieben, kommt es bei den meisten Erregungsfrequenzen auch zu einer Modulation des Imaginärteils (durch eine Phasenmodulation des Offsets), welche mit steigender Relativbewegung zwischen Sende- und Empfangseinheit zunimmt.

Die besten Korrekturergebnisse werden durch eine mechanische Anregung des Systems über die natürliche Vibration des Bodens erzielt (stochastische Methode), geringe Abweichungen des Korrekturwinkels ergeben sich bei asynchroner Vibration ( $\omega_V = 38 \text{ Hz}$ , stochastische Methode) des Systems, für das Gradiometer (Rx 2) und getriggerte Vibration ( $\omega_V = 50 \text{ Hz}$ , deterministische Methode) für Gradiometer (Rx 6). Stärkere Abweichungen werden für asynchrone Vibration beim Gradiometer (Rx 6) und gravierende Abweichungen für getriggerte Anregung beim Gradiometer (Rx 2) verzeichnet.

Ein weiterer Unterschied ergibt sich durch die Grundlage der Korrektur selbst. Bei der deterministischen Korrektur müssen die Seitenfrequenzen des Spektrums erfaßt werden, welche eine viel geringere Amplitude als das Trägersignal aufweisen. Dadurch wirken sich das Rauschen der Verstärker, das Quantisierungsrauschen und die Meßfehler der Eingangskanäle stärker aus.

## 6.4 frequenzdifferentielle Methode

Die Simulation (Abschnitt 2.7.3) zeigt, daß die Bedingung für  $\gamma \approx 1$  nicht erfüllt werden kann, jedoch praktisch verwendbare Ergebnisse bei kleiner Differenz der Meßfrequenzen theoretisch erreichbar wären (Tab. 2.26). Allerdings wirken sich die, bei der deterministischen Korrekturmethode beschriebenen Probleme auch auf die frequenzdifferentielle Methode aus, da zur Berechnung des Korrekturfaktors  $\gamma$ , die mit  $\bar{\Psi}_{cor1}$  gedrehten Seitenfrequenzen des Spektrums verwendet werden. Die aus den realen Messungen berechneten Korrekturfaktoren  $\gamma$  können praktisch nicht angewandt werden, da sie einen zu großen Fehler in der frequenzskalierten Leitwertdifferenz verursachen.

## 6.5 Schlußfolgerungen

Daraus ergeben sich für die Korrekturmethode einige Einschränkungen:

- Für die mechanische Anregung des Systems muß ein Kompromiß zwischen hohem Modulationsgrad und geringer Auslenk-Amplitude gefunden werden
- Die Vibration des Systems darf nur zur Bestimmung des Korrekturwinkels erfolgen (Kalibriermessung), der zur Offlinekorrektur von Meßdaten welche ohne mechanische Anregung des Systems (Messzyklen) aufgenommen wurden, verwendet wird. Aus diesem Grund ist eine Referenzkorrektur auch für die deterministische Methode erforderlich.

Zur Verbesserung der Ergebnisse sollte die Hard- und Software des vorhandenen MIT-System modifiziert werden:

- Triggerung
  - Die Koaxialleitungen zur Übertragung des Triggerimpulses müssen mit den Wellenwiderständen der Leitung abgeschlossen werden, damit keine Reflexionen und Verzerrungen des Triggerimpulses auftreten → Verminderung des Triggerjitters, ersetzt jedoch nicht die Referenzkorrektur
  - Das Timing der Messung sollte so verändert werden, daß die Forderung  $\chi \neq 0$  erfüllt wird (deterministische Korrekturmethode)
- Vibration
  - Das Vibrationssystem sollte das gesamte System gleichmäßig anregen, um die Relativbewegung der Sende- und Empfangseinheiten zueinander zu minimieren und ähnliche Modulationsgrade für das gesamte System zu bewirken.
- Referenzbestimmung
  - Die Bestimmung des Referenzwinkels könnte aus den Meßdaten erfolgen, wodurch kein zusätzlicher Meßkanal benötigt wird. Eine Möglichkeit wird in [2, Kapitel 2.3.1.1] beschrieben.

Die frequenzdifferentielle Methode scheint praktisch nicht einsetzbar, eine eindeutige Aussage kann allerdings erst nach Verbesserung der deterministischen Ergebnisse getroffen werden.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Meßprinzip der Magnetischen Induktions-Tomographie . . . . .	1
1.2	Ersatzschaltbild einer Zelle im EZV . . . . .	2
1.3	Frequenzgang der Dielektrizitätszahl von Gewebe . . . . .	3
1.4	Zusammenhang von Signalen und unterschiedlichen Bezugssystemen für eine Gradiometerhälfte . . . . .	5
1.5	Verschiebung und Rotation des Gradiometers oder der Sendespule . . . . .	6
2.1	Ersatzschaltbild des Gradiometers . . . . .	7
2.2	Zeigerdiagramm für das Gradiometer . . . . .	8
2.3	Offset $\Delta V'$ durch nicht ideales Gradiometer und Ausrichtung . . . . .	8
2.4	Verschiebung eines ideal ausgerichteten Gradiometers . . . . .	9
2.5	Zusammenhang von Signalen und unterschiedlichen Bezugssystemen . . . . .	11
2.6	Zusammenhang von Signalen und unterschiedlichen Bezugssystemen beim Gradiometer . . . . .	12
2.7	Geometrische Beziehung der Winkel $\Psi_1, \Psi_2$ und $\bar{\Psi}$ . . . . .	13
2.8	Geometrische Betrachtung zum Startwinkel des Modulationssignals . . . . .	15
2.9	Starverzögerung $t_D$ und Modulationswinkel $\chi$ . . . . .	16
2.10	Berechneter Korrekturwinkel . . . . .	19
2.11	Teil des Amplitudenspektrums eines Datensatzes . . . . .	19
2.12	Amplitudenspektrum bei $n_S = 199999$ $A_2 = 1,1V$ . . . . .	21
2.13	Amplitudenspektrum bei $n_S = 199998$ $A_2 = 1,1V$ . . . . .	21
2.14	Berechneter Korrekturwinkel für $\chi = 0$ . . . . .	21
2.15	Berechneter Korrekturwinkel für $\chi = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	21
2.16	Zusammenhang von Signalen und unterschiedlichen Bezugssystemen . . . . .	22
2.17	Quadrantenanalyse: Kovarianz von $\text{Im}_{LO}(M')$ und $\text{Re}_{LO}(M')$ . . . . .	24
2.18	Quadrantenanalyse: Kotangens und Arcuskotangens Funktion . . . . .	25
2.19	gemessener und korrigierter Imaginär- und Realteil von $S_{\omega_C}$ . . . . .	27
2.20	Ersatzschaltbild des Gradiometers . . . . .	30
2.21	Übertragungsfunktion einer Gradiometerhälfte . . . . .	31
2.22	Kopplung von Sendespule, Objekt und Gradiometer . . . . .	32
2.23	Frequenzspektrum . . . . .	34
2.24	$ H_1 a(\omega) \sin \xi(\omega)$ für unterschiedlichen Widerstand (R) . . . . .	35
2.25	$ H_1 a(\omega) \sin \xi(\omega)$ für unterschiedliche Kapazität (C) . . . . .	35
2.26	$ H_1 a(\omega) \sin \xi(\omega)$ für unterschiedliche Induktivität (L) . . . . .	36
2.27	$ H_1 a(\omega) \sin \xi(\omega)$ für unterschiedlichen Abschlußwiderstand ( $R_A$ ) . . . . .	36
2.28	$ H_1 a(\omega) \sin \xi(\omega)$ für unterschiedliche Abschlußkapazität ( $C_A$ ) . . . . .	36
3.1	Schema der Meßanordnung zur Verifikation des Modells . . . . .	39
3.2	Vibration mit 20Hz . . . . .	40

3.3	Vibration mit 38Hz . . . . .	40
3.4	Vibration mit 48Hz . . . . .	40
3.5	Vibration mit 50Hz . . . . .	40
3.6	Vibration mit 62Hz . . . . .	41
3.7	Vibration mit 100Hz . . . . .	41
3.8	Phasenmodulation des Imaginärteil-Offsets . . . . .	41
4.1	MIT-Meßsystem . . . . .	43
4.2	Schematik der Meßkette . . . . .	44
4.3	Verzerrung des Triggersignals . . . . .	45
4.4	Konfiguration der Meßung . . . . .	46
4.5	Vibrationssystem . . . . .	47
4.6	Verwendetes Meßobjekt . . . . .	47

# Literaturverzeichnis

- [1] Sinan Issa. 16-Kanal-Multifrequenz-Transmittersystem für die Magnetische Induktions-Tomographie. Diplomarbeit, Technische Universität Graz, 2007.
- [2] Herbert Pamperl. Magnetische Induktionstomografie: Systemsteuerung und Datenvorverarbeitung für das Graz Mk2-System. Masterarbeit, Technische Universität Graz, Juni 2008.
- [3] Hermann Scharfetter, Roberto Casañas, and Javier Rosell. Biological Tissue Characterization by Magnetic Induction Spectroscopy (MIS): Requirements and Limitations. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 50(No. 7):870–880, 2003.
- [4] Hermann Scharfetter and Robert Merwa. Correction of systematic errors in frequency differential magnetic induction tomography. *IFMBE Proceedings*, Vol. 17:476–479, 2007.
- [5] Hermann Scharfetter, Robert Merwa, and Karl Pilz. A new type of gradiometer for the receiving circuit of magnetic induction tomography (MIT). *Physiological Measurement*, Vol. 26:307–318, 2005.
- [6] Phillip Thaler. Kalibrierproblem bei Magnetischer Induktions Tomographie. Diplomarbeit, Technische Universität Graz, 2003.