

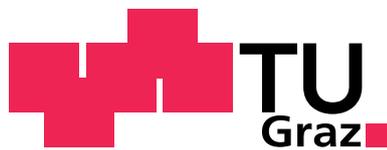
Hannes WEIßENBACHER

**Zur Analysis und Numerik eines
nichtlinearen Modellproblems aus der
Magnetohydrodynamik**

DIPLOMARBEIT

**zur Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieur**

Diplomstudium Technische Mathematik



Graz University of Technology

Technische Universität Graz

Betreuer:

Univ.-Prof. Dr. Olaf STEINBACH

Institut für Numerische Mathematik

Graz, im März 2012

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am
.....
(Unterschrift)

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....
date
.....
(signature)

Abstract

Magnetohydrodynamics (MHD) deals with the dynamics of electrically conducting fluids, under influence of magnetic fields. This thesis deals with the approximately solving of a non-linear model problem from the MHD, by use of Newton's method and alternatively a simple Richardson method, where linear sub problems are solved. First the basic equations of MHD are formulated. Then a simplified two-dimensional model is derived from the MHD equations, which is reformulated in variationformulation to be able to state results about unique solvability in the weak sense. With the use of a finite-element-discretisation of the variationformulation, there are equation systems derived, which solutions correspond to approximations of the weak solution of the model problem. Numerical solution methods for solving the linear equation systems are discussed. Finally, results of some numerical examples, which were implemented in C++, are stated. The theoretical statements about the convergence of the approximate solutions are confirmed.

Kurzfassung

Magnetohydrodynamik (MHD) beschäftigt sich mit dem Flussverhalten von elektrisch leitenden Fluiden, unter dem Einfluss von Magnetfeldern. Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit der näherungsweise Lösung eines nichtlinearen Modellproblems aus der MHD, mittels des Newtonverfahrens und alternativ mit einer einfachen Richardson Iteration, bei der lineare Teilprobleme gelöst werden. Erst werden die Grundgleichungen der MHD formuliert. Dann wird aus den MHD-Gleichungen ein vereinfachtes zweidimensionales Modell abgeleitet, welches dann in Variationsformulierungen angegeben wird, um Lösbarkeitsaussagen im schwachen Sinne anführen zu können. Mit einer Finite-Element-Diskretisierung der Variationsformulierungen werden Gleichungssysteme hergeleitet, deren Lösungen Näherungslösungen für die schwache Lösung des Modellproblems entsprechen. Weiters werden numerische Lösungsverfahren zur näherungsweise Lösung der diskretisierten Probleme beschrieben. Schließlich werden Ergebnisse zu einigen numerische Beispielrechnungen, welche in C++ implementiert wurden, angeführt. Die theoretischen Aussagen über die Konvergenz der Näherungslösungen werden bestätigt.

Danksagung

Für die fachliche Hilfe zu dieser Diplomarbeit danke ich meinem Betreuer, Univ.-Prof. Dr. Olaf Steinbach, weiters für sehr engagierte Hilfe zu Teilen der Implementierung danke ich Dr. Günther Of. Für nützliche Ratschläge bedanke ich mich bei Dipl.-Ing. Lorenz John, Dipl.-Ing. Elias Karabelas und Dipl.-Ing. Martin Neumüller.

Für die selbstlose Bereitstellung der finanziellen Grundlast, welche mir mein Studium ermöglichte, bedanke ich mich bei meinen Eltern.

Des weiteren danke ich allen Studienkolleginnen und Studienkollegen für die gute Zusammenarbeit während des Studiums.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Modellierung	3
2.1	Hydrodynamik	3
2.1.1	Navier-Stokes-Gleichungen	3
2.1.2	Anfangs- und Randbedingungen	5
2.2	Elektrodynamik	6
2.2.1	Maxwellgleichungen	6
2.2.2	Anfangs- und Randbedingungen	7
2.3	Magnetohydrodynamik	7
2.3.1	Kopplung	7
2.3.2	MHD-Modell	8
2.3.3	Modellreduktion	9
3	Analysis	13
3.1	Grundlagen	13
3.1.1	Funktionenräume	13
3.1.2	Einige Sätze aus der Funktionalanalysis	15
3.2	Variationsformulierung	16
3.2.1	Zerlegung in lineare Teilprobleme	20
3.3	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	21
3.3.1	Stokes-Problem mit vorgegebenem Potential	21
3.3.2	Vektorpotential-Variationsformulierung mit vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld	28
3.3.3	Gesamtsystem	31
4	Diskretisierung	35
4.1	Diskrete Variationsformulierung	35
4.1.1	Ansätze	35
4.1.2	Netze	37
4.1.3	Ansatzräume	38
4.1.4	Lineare Teilprobleme	39
4.1.5	Newtonverfahren	45
4.2	L_2 -Fehlerabschätzungen	46

5	Löser	49
5.1	Aufteilung in lineare Teilprobleme	49
5.1.1	Vektorpotential-Problem mit vorgegebenem Geschwindigkeitsfeld	49
5.1.2	Stokes-Problem mit vorgegebenem Potential	50
5.2	Newtonverfahren	52
6	Beispiele	57
6.1	Numerische Beispiele	57
6.2	Ausblick	64

1 Einleitung

Der Teilbereich der Physik, der sich mit Strömungsvorgängen in Fluiden, die mit elektromagnetischen Feldern wechselwirken, beschäftigt nennt man Plasmaelektrodynamik. Solche Fluide sind z.B.: Plasmen, Elektrolyte oder flüssige Metalle. Die Spezialisierung für den Fall vernachlässigbarer elektrischer Felder ist die Magneto-hydrodynamik (MHD).

Es gibt viele Anwendungen der MHD sowohl im ingenieurstechnischen Bereich als auch im naturwissenschaftlichen Bereich. Als Anwendungsbeispiel sei die Metallurgie (siehe z.B.: [4]) genannt, wo z.B. statische Magnetfelder eingesetzt werden, um die in fließenden Metallen auftretenden Turbulenzen zu dämpfen. Ein anderes Beispiel sind MHD-Generatoren bzw. MHD-Motoren bei denen das leitende Fluid in einem starken stationären Magnetfeld fließt. Im Fall eines MHD-Generators wird durch das bewegte Fluid im Magnetfeld eine Ladungstrennung erreicht, welche als Spannung abgegriffen werden kann. Beim MHD-Motor erzeugen das Magnetfeld und die aufgebrachte Spannung Bewegung im Fluid. Aufgrund der geringen Wirkungsgrade haben diese jedoch heute wenig Bedeutung. Für weitere Anwendungen siehe z.B.: [6].

Im naturwissenschaftlichen Bereich finden sich Anwendungen z.B im Modellieren des Magnetfeldes eines Planeten. So ein Modell wird im Fall der Erde Geodynamo genannt. Das Verhalten von Sonnenwinden wird auch mit MHD-Modellen beschrieben. Für weitere Anwendungen im astrophysischen Bereich siehe z.B.: [5].

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit dem näherungsweise Lösen eines nichtlinearen Modellproblems aus der MHD, mittels des Newtonverfahrens und einer Methode bei der alternierend lineare Teilprobleme gelöst werden. In Kapitel 2 werden die Grundlagen der MHD erwähnt. Dann wird aus den MHD-Gleichungen ein vereinfachtes zweidimensionales Modell abgeleitet, welches dann in Kapitel 3 in Variationsformulierungen umformuliert wird, um Lösbarkeitsaussagen im schwachen Sinne anführen zu können. In Kapitel 4 wird die Finite-Element-Diskretisierung der Variationsformulierungen beschrieben. Hier findet man auch Aussagen über Fehlerabschätzungen in Abhängigkeit der Maschenweite der finiten Elemente. In Kapitel 5 werden die numerischen Lösungsverfahren zur näherungsweisen Lösung der diskretisierten Probleme beschrieben. Kapitel 6 enthält einige numerische Beispielrechnungen, welche die theoretischen Aussagen über die Konvergenz der vorangegangenen Kapitel bestätigen.

Ziel der Arbeit ist es, ein besseres Verständnis im mathematischen Umgang mit der nichtlinearen Koppelung zu erarbeiten. Daher werden viele Annahmen und Vereinfachungen nicht ausführlich physikalisch begründet.

2 Modellierung

In diesem Kapitel werden die physikalischen Grundlagen zur MHD aufgearbeitet. Nach der Vorstellung eines mathematischen Modells für inkompressible MHD, folgt eine Modellreduktion. Das Kapitel endet mit einem vereinfachtem Modell, das als Ausgangspunkt für die weiteren Kapitel dient.

MHD ist eine Spezialisierung der Plasma-Elektrodynamik, dadurch, dass das elektrische Feld als vernachlässigbar angesehen wird. Im wesentlichen sind die Maxwellgleichungen aus der Elektrodynamik und die Navier-Stokes-Gleichungen aus der Hydrodynamik, gekoppelt über eine verallgemeinerte Form des Ohm'schen Gesetzes und der Lorentzkraft ausreichend, um eine Vielfalt von Prozessen modellieren zu können. Als technische Anwendungen gibt es unter anderen MHD-Generatoren, MHD-Motoren oder auch Durchflußgeschwindigkeitsmessgeräte. Allgemein findet MHD immer dort Anwendungen, wo Fluide durch elektromagnetische Kräfte beeinflusst werden. Als Beispiele seien hier flüssige Metalle [4], Elektrolyte und Plasmen genannt.

Voraussetzungen

Um das Modell einfach zu halten, wird angenommen, dass das Fluid immer dicht genug ist, um als Kontinuum angesehen werden zu können. Des weiteren wird vorausgesetzt, dass die Temperatur konstant ist, und dass das Fluid homogen und einphasig ist.

2.1 Hydrodynamik

Ausgehend von den Grundgleichungen werden durch die Annahme eines Newton'schen und inkompressiblen Fluids die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen hergeleitet.

2.1.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Dieser Abschnitt orientiert sich an [4]. Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) und eine Zeit $t \in (0, T)$ sind die Grundgleichungen der Hydrodynamik zwei Erhaltungsgleichungen, für Masse und Impuls: die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T), \quad (2.1)$$

und die Impulserhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (2.2)$$

2 Modellierung

Hier stehen ρ für die Dichte, \mathbf{v} für die Geschwindigkeit, $\boldsymbol{\tau}$ für den Spannungstensor und \mathbf{f} für die Funktion, die den von äußeren Kräften (z.B.: Schwerebeschleunigung der Erde) aufgetragenen Impuls modelliert. Die Verknüpfung \otimes steht für das dyadische Produkt, der Term $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ für

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j) \right)_{j=1..d} .$$

Setzt man ein Newton'sches Fluid voraus, so lässt sich der Spannungstensor als

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}$$

schreiben. Hierbei bezeichnet $p = p(t, \mathbf{x})$ den hydrodynamischen Druck, \mathbf{I} den Einheitstensor und \mathbf{T} den viskosen Spannungstensor, welcher wiederum als

$$\mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{v})$$

dargestellt werden kann. Der Deformationstensor \mathbf{D} hängt nur mehr vom Geschwindigkeitsgradienten ab:

$$\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)_{i,j=1..d} .$$

λ und μ sind reellwertige Koeffizienten. Sie sind Charakteristika des Fluids. Für Newton'sche Fluide gilt die Beziehung

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu.$$

Man bezeichnet μ auch als *dynamische Viskosität*. Insgesamt gilt also:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla \cdot \left(-p\mathbf{I} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top) \right).$$

Im allgemeinen hängt die dynamische Viskosität von der Dichte ρ und der Temperatur ab. Hier wird angenommen, dass die Dichte und die Temperatur konstant in Zeit und Ort sind. Daher folgt

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \bar{\rho} = \text{konstant} \quad \text{und} \quad \mu(\rho) = \mu(\bar{\rho}) = \bar{\mu}.$$

Durch diese Annahmen kann die Kontinuitätsgleichung (2.1) zur inkompressiblen Kontinuitätsgleichung umgeformt werden:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{2.3}$$

Somit kann die Divergenz des Spannungstensors als

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top)) = -\nabla p + \bar{\mu}\Delta \mathbf{v}$$

geschrieben werden.

Weiters vereinfacht sich der nichtlineare Konvektionsterm aus der Impulserhaltungsgleichung (2.2), durch Anwendung der Produktregel zu

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

und durch die Annahme der Inkompressibilität zu:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \bar{\rho}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Somit lautet die inkompressible Impulserhaltungsgleichung:

$$\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \bar{\rho}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \bar{\mu} \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (2.4)$$

Aus den inkompressiblen Erhaltungsgleichungen (2.3) und (2.4) ergeben sich zusammenfassend die **inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen**:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \bar{\rho}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \bar{\mu} \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= +\mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.1.2 Anfangs- und Randbedingungen

In der Hydrodynamik werden meist beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ oder $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betrachtet. Oft wird als Gebiet der Bereich gewählt, der mit dem Fluid gefüllt ist. Als Randbedingung am Rand $\Gamma = \partial\Omega$ bieten sich hier zum Beispiel Dirichlet-Randbedingungen an,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{rb} \quad \text{am Rand } \Gamma.$$

Um hydrodynamisch abgeschlossene Systeme (d.h. kein Fluid tritt durch den Rand Γ) mit benetzbaren Rändern zu modellieren, ist es sinnvoll, sogenannte no-slip-Randbedingungen, oder Haftbedingungen, anzugeben:

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{am Rand } \Gamma.$$

Hat man Ränder, die zwar kein Fluid durchlassen, aber nicht benetzbar sind (z.B.: Begrenzung durch Schwerkraft), kann dies durch free-slip-Randbedingungen

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{am Rand } \Gamma$$

dargestellt werden. Hierbei bezeichnet \mathbf{n} den nach außen gerichteten Normalvektor. In diesem Fall ist eine zusätzliche Information über die Randspannung notwendig. Man kann die Randspannung \mathbf{t} als

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} = (-p \mathbf{I} + \mathbf{T}) \mathbf{n}$$

angeben. Die passende Randbedingung wäre dann die Vorgabe der Tangentialspannung:

$$\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{t}_T \quad \text{am Rand } \Gamma.$$

Für Ränder oder Teile von Rändern, die Quelle oder Senke laminarer Strömungen sind, kann man die Tangentialkomponenten von \mathbf{v} auf Null festlegen und folgende Randbedingungen angeben:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{am Rand } \Gamma,$$

und dazu die komplementäre Randbedingung

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_N \quad \text{am Rand } \Gamma.$$

Als Anfangsbedingung kann man

$$\mathbf{v}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$$

für ein gegebenes Feld $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ angeben.

2.2 Elektrodynamik

Dieser Abschnitt ist an [3] angelehnt. Die folgenden Gleichungen beschreiben die Erzeugung von elektrischen und magnetischen Feldern durch Ladungen und Ströme und die Wechselwirkungen zwischen den Feldern.

2.2.1 Maxwellgleichungen

- Durchflutungsgesetz:

$$\nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{j}(t, \mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Wirbel in der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} bewirken zeitliche Änderungen der elektrischen Flussdichte \mathbf{D} und induzieren elektrische Ströme durch die elektrische Stromdichte \mathbf{j} .

- Gauß'sches Gesetz:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \rho_c(t, \mathbf{x}). \quad (2.7)$$

Die Ladungsdichte ρ_c ist Quelle des Feldes der elektrischen Flussdichte \mathbf{D} .

- Induktionsgesetz:

$$\frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (2.8)$$

Zeitliche Änderungen der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} bewirken Wirbel in der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} .

- Gauß'sches Gesetz für Magnetfelder:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (2.9)$$

Magnetische Felder sind quellfrei.

Bei linearen isotropen Materialien gelten lineare Zusammenhänge der Flussdichten mit den Feldstärken:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (2.10)$$

Hierbei steht ε für die Permittivität und μ für die Permeabilität. Beides sind Materialeigenschaften, die im wesentlichen temperatur- und frequenz-abhängig sind. Hier seien ε und μ konstant in Raum und Zeit, und bekannt.

Setzt man die Zusammenhänge (2.10) in die Maxwellgleichungen ein, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \varepsilon^{-1} \rho_c \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{in } \Omega. \quad (2.11)$$

2.2.2 Anfangs- und Randbedingungen

Für Teile des Randes Γ des Gebietes Ω , welche auch das Medium beranden, fordert man die Stetigkeit der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes \mathbf{E} , und die Stetigkeit der Normalkomponente der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} (siehe z.B. [16, S.117]):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} &= g_2. \end{aligned}$$

Als Lösbarkeitsbedingung muss $\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_1 = 0$ gefordert werden. Falls ein Teil des Randes Γ des Gebietes Ω innerhalb des Mediums liegt fordert man Stetigkeit aller Komponenten der gesuchten Felder. Als Anfangsbedingung seien hier

$$\mathbf{B}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x})$$

und

$$\mathbf{E}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x})$$

angeführt.

2.3 Magnetohydrodynamik

Magnetohydrodynamik kann als Spezialisierung der Plasmaelektrodynamik betrachtet werden. MHD kommt zur Anwendung wenn die Stärke des elektrischen Feldes gegenüber der des magnetischen Feldes vernachlässigbar ist.

2.3.1 Kopplung

Um die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen (2.5) mit den Maxwell–Gleichungen (2.11) zu koppeln, ist es nötig, die in der Impulserhaltungsgleichung auftretende

Kraft \mathbf{f} genauer anzugeben. Eine Zerlegung von \mathbf{f} als

$$\mathbf{f} = \bar{\rho}\mathbf{f}_m + \mathbf{f}_V$$

ist, wegen zweier verschieden wirkenden Kräften, vernünftig. Hierbei stehe \mathbf{f}_m für Kräfte, die pro Masseneinheit, und \mathbf{f}_V für Kräfte, die pro Volumseinheit wirken. Dadurch ist es möglich, gravitative und elektromagnetische Kräfte zu modellieren. Bei bewegten Ladungen bzw. Leitern tritt eine Kraft auf, die Lorentzkraft genannt wird. Nach Landau–Lifschitz [17, S. 258] kann der Einfluss der Lorentzkraft in der Impulsgleichung, als $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ modelliert werden:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_V + \bar{\rho}\mathbf{f}_m = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \bar{\rho}\mathbf{g}.$$

Für den Vektor der Schwerebeschleunigung steht \mathbf{g} . Das allgemeine Ohm'sche Gesetz für bewegte Leiter lautet:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.12)$$

σ steht für die elektrische Leitfähigkeit, ein Materialwert, und ist hier als konstant in Raum und Zeit, und bekannt vorausgesetzt.

2.3.2 MHD-Modell

Fasst man die Ergebnisse der vorigen Kapitel zusammen, so erhält man ein allgemeines Modell für magnetohydrodynamische Vorgänge in inkompressiblen Newton'schen Fluiden:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \bar{\rho}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \bar{\mu}\Delta\mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \bar{\rho}\mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \varepsilon^{-1} \rho_c \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \right\} \text{in } \Omega. \quad (2.13)$$

Als Rand- und Anfangsbedingungen können zum Beispiel:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(t=0, \mathbf{x}) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}(t=0, \mathbf{x}) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}(t=0, \mathbf{x}) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \text{in } \Omega,$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} &= g_2 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{rb} \end{aligned} \right\} \text{auf } \Gamma$$

verwendet werden.

2.3.3 Modellreduktion

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein besseres Verständnis im mathematischen Umgang mit der nichtlinearen Koppelung zu erarbeiten. Daher werden hier einige Annahmen getroffen, die dazu dienen, das Modell zu vereinfachen. Unter anderem wird angenommen, dass die Strömung und die elektromagnetischen Felder stationär seien. Durch die Annahmen ergibt sich die Beschränkung auf zwei Raumdimensionen, wodurch das Modell erheblich vereinfacht wird. Das vereinfachte Modell setzt sich aus folgenden Teilen zusammen: für die Hydrodynamik, das Stokes-System erweitert um die nichtlineare Kopplung, und für die Elektrodynamik, die Laplacegleichung mit einem nichtlinearen Kopplungsterm.

Die Modellreduktion wird ausgehend vom System für inkompressible Newton'sche Fluide

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
 \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \bar{\rho}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \bar{\mu} \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \bar{\rho} \mathbf{g} \\
 -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{j} \\
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \varepsilon^{-1} \rho_c \\
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{in } \Omega \\ \\ \\ \text{in } \Omega \end{array} \quad (2.14)$$

beschrieben.

Maxwell-Gleichungen

Dieser Abschnitt orientiert sich an [3, Seite 360 - 372]. Durch die Einschränkung auf den stationären Fall bleibt vom Durchflutungsgesetz:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \quad (2.15)$$

und vom Induktionsgesetz bleibt:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.16)$$

Mit dem Vektorpotential-Ansatz für \mathbf{B} ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

und mit dem Potential-Ansatz für \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi,$$

2 Modellierung

ist sowohl das stationäre Induktionsgesetz (2.16), als auch die Divergenzfreiheit von Magnetfeldern (2.9) erfüllt. Aus dem Gaußschen Gesetz (2.7) folgt:

$$-\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon}\rho_c. \quad (2.17)$$

Mit der Identität

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

und der Coloumb-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

folgt aus (2.15):

$$-\frac{1}{\mu}\Delta \mathbf{A} = \mathbf{j}.$$

Aus dem Ohm'schen Gesetz (2.12) folgt durch Einsetzen der Potentialansätze für \mathbf{B} und \mathbf{E} :

$$\mathbf{j} = \sigma(-\nabla\phi + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})).$$

Durch Gleichsetzen der vorigen zwei Gleichungen lässt sich \mathbf{j} eliminieren:

$$-\frac{1}{\mu}\Delta \mathbf{A} = \sigma(-\nabla\phi + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})). \quad (2.18)$$

Annahmen zur Vereinfachung

In technischen Anwendungen ist es oft möglich, aufgrund von Symmetrien die Dimension der Gleichungen zu verringern. Um eine Dimensionsreduktion zur Vereinfachung des vorliegenden Modells zu erreichen, werden folgende Annahmen getroffen:

$$\mathbf{A} = (0, 0, A_3(x_1, x_2))^T, \quad (2.19)$$

weilers:

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_2 = 0, \quad (2.20)$$

und:

$$E_3 = 0 = -\frac{\partial}{\partial x_3}\phi \quad \text{also} \quad \phi = \phi(x_1, x_2).$$

Betrachtet man nun die 3. Komponente der Gleichung (2.18)₃, so erhält man folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu}\Delta A_3 &= \sigma(E_3 + v_1(\frac{\partial}{\partial x_3}A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}A_3) - v_2(\frac{\partial}{\partial x_2}A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}A_2)) \\ &= \sigma(v_1(-\frac{\partial}{\partial x_1}A_3) + v_2(-\frac{\partial}{\partial x_2}A_3)) \\ &= \sigma(\mathbf{v} \cdot (-\nabla A_3)) \end{aligned}$$

Insgesamt bleibt eine Gleichung für A_3 in zwei Dimensionen:

$$-\frac{1}{\mu}\Delta A_3 + \sigma(\mathbf{v} \cdot (\nabla A_3)) = 0. \quad (2.21)$$

Als Randbedingung ist hier die Dirichletrandbedingung

$$A_3 = g_{A_3} \quad \text{auf } \Gamma$$

gewählt.

Stokes-System mit Koppelung

Falls im gesamten Strömungsfeld die Geschwindigkeiten klein sind, kann der nichtlineare konvektive Trägheitsterm gegenüber dem Reibungsterm vernachlässigt werden. (siehe z.B.: [19, S. 42]). Mit der Annahme eines stationären Strömungsfeldes bleiben von den hydrodynamischen Erhaltungsgleichungen folgende Gleichungen übrig:

$$-\bar{\mu}\Delta\mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \bar{\rho}\mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Mit den Vektorpotentialansatz und der Dimensionsreduktion (2.19) aus dem vorigen Abschnitt gilt für die magnetische Flußdichte \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} A_3, -\frac{\partial}{\partial x_1} A_3, 0 \right)^\top.$$

Mit den Annahmen (2.20) über die Stromdichte \mathbf{j} gilt für den Kopplungsterm:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = (-j_3 B_2, j_3 B_1, 0)^\top = \left(j_3 \frac{\partial}{\partial x_1} A_3, j_3 \frac{\partial}{\partial x_2} A_3, 0 \right)^\top = j_3 \nabla A_3.$$

Setzt man für j_3 die rechte Seite der 3. Komponente von (2.18) so erhält man:

$$-\bar{\mu}\Delta\mathbf{v} + \nabla p = -\sigma(\mathbf{v} \cdot (\nabla A_3))\nabla A_3 + \rho\mathbf{g}. \quad (2.22)$$

Als Randbedingungen können Dirichletrandbedingung für \mathbf{v} gesetzt werden:

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}_v \quad \text{auf } \Gamma$$

In diesem Fall ist p nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Mit einer Skalierungsbedingung kann p festgesetzt werden.

Gesamtsystem

Zusammenfassend aus der reduzierten Form der Maxwell-Gleichungen (2.21) und Kontinuitätsgleichung (2.1) und der angepassten Impulserhaltungsgleichung (2.22) ergibt sich folgendes Gesamtsystem:

$$\left. \begin{aligned} -\bar{\mu}\Delta\mathbf{v} + \nabla p + \sigma(\mathbf{v} \cdot (\nabla A_3))\nabla A_3 &= \bar{\rho}\mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ -\frac{1}{\mu\sigma}\Delta A_3 + \mathbf{v} \cdot (\nabla A_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{in } \Omega \quad (2.23)$$

mit den Dirichletrandbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{g}_v \\ A_3 &= g_{A_3} \end{aligned} \right\} \text{auf } \Gamma.$$

3 Analysis

In diesem Kapitel wird die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung des Randwertproblems (2.23) erarbeitet. Im ersten Abschnitt werden Definitionen und Sätze angeführt, welche im zweiten und dritten Abschnitt benutzt werden, um die gewünschten Aussagen herzuleiten.

3.1 Grundlagen

Hier werden einige grundlegende Definitionen und Sätze angeführt.

3.1.1 Funktionenräume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet.

Definition 3.1. Durch $C^\infty(\Omega)$ wird der Raum der auf Ω beschränkten und unendlich oft differenzierbaren Funktionen bezeichnet.

Definition 3.2. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist durch $C^{k,\kappa}(\Omega)$ der Raum der auf Ω Hölder-stetigen und k -mal stetig differenzierbaren Funktionen definiert.

Definition 3.3 ($C^{k,1}$). Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir schreiben $\Omega \in C^{k,1}$ falls zu jedem $\mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega = \overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ existiert, so dass es eine bijektive Abbildung $\phi : U \rightarrow K_1(0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| < 1\}$ gibt mit

$$\begin{aligned}\phi &\in C^{k,1}(\overline{U}), & \phi^{-1} &\in C^{k,1}(\overline{K_1(0)}), \\ \phi(U \cap \Gamma) &= \{\xi \in K_1(0) : \xi_2 = 0\}, \\ \phi(U \cup \Omega) &= \{\xi \in K_1(0) : \xi_2 > 0\}, \\ \phi(U \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)) &= \{\xi \in K_1(0) : \xi_2 < 0\}.\end{aligned}$$

Definition 3.4. Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ ist der Raum der Funktionen aus $C^\infty(\Omega)$ mit kompaktem Träger:

$$C_0^\infty(\Omega) := \left\{ u \in C^\infty(\Omega) : \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) \neq 0\}} \subset \Omega \right\}.$$

Definition 3.5. Der Raum $L_2(\Omega)$ ist der Raum der Äquivalenzklassen der auf Ω quadratintegrierbaren Funktionen. Er wird mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\Omega)} := \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

zum Hilbertraum.

Definition 3.6 (Sobolev-Raum [13, S.110]). Für $\ell \in \mathbb{N}_0$ ist der Sobolev-Raum $H^\ell(\Omega)$ der Raum der Funktionen $u \in L_2(\Omega)$, deren schwache Ableitungen ℓ -ter Ordnung ($|\alpha| = \ell$) $D^\alpha u$ in $L_2(\Omega)$ sind:

$$H^\ell(\Omega) := \{u \in L_2(\Omega) : D^\alpha u \in L_2(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq \ell\}.$$

Durch

$$\|u\|_{H^\ell(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq \ell} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist eine Norm in $H^\ell(\Omega)$ gegeben.

Mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^\ell(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq \ell} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L_2(\Omega)}$$

ist $H^\ell(\Omega)$ ein Hilbertraum.

Bemerkung. Man kann den Raum $H^\ell(\Omega)$ auch als Vervollständigung des $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^\ell(\Omega)}$ definieren.

$$H^\ell(\Omega) := \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^\ell(\Omega)}},$$

Unter gewissen Voraussetzungen an das Gebiet mit der Raum $W_2^\ell(\Omega)$ überein. (z.B.: wenn Ω ein Lipschitzgebiet ist.)

Definition 3.7. Der Raum $H_0^\ell(\Omega)$ wird als Vervollständigung des $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^\ell(\Omega)}$ definiert:

$$H_0^\ell(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^\ell(\Omega)}}.$$

Definition 3.8. Mit $H^{-\ell}(\Omega)$ sei der Dualraum von $H_0^\ell(\Omega)$ bezeichnet:

$$H^{-\ell}(\Omega) := [H_0^\ell(\Omega)]'.$$

Eine Norm ist durch

$$\|f\|_{H^{-\ell}(\Omega)} := \sup_{v \in H_0^\ell(\Omega)} \frac{\langle f, v \rangle_\Omega}{\|v\|_{H^\ell(\Omega)}}$$

definiert, wobei

$$\langle f, v \rangle_\Omega := \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

das Dualitätsprodukt bezeichnet.

Definition 3.9. Sei $\Omega \in C^{k-1,1}$. Am Rand $\Gamma := \partial\Omega$ kann ein Sobolevraum durch

$$H^{\ell-\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{g = \gamma_0^{\text{int}} v : v \in H^\ell(\Omega)\}$$

definiert werden, wobei für $\frac{1}{2} < \ell \leq k + \frac{1}{2}$

$$\|g\|_{H^{\ell-\frac{1}{2}}(\Gamma)} := \inf_{v \in H^\ell(\Omega), g = \gamma_0^{\text{int}} v} \|v\|_{H^\ell(\Omega)}$$

eine Norm ist. Hierbei wird mit

$$\gamma_0^{\text{int}} v(\mathbf{x}) := \lim_{\tilde{\mathbf{x}} \in \Omega \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} v(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma$$

die **innere Spur** definiert.

3.1.2 Einige Sätze aus der Funktionalanalysis

Satz 3.1 (Darstellungssatz von Riesz [12, S.130]). *Jedes stetige lineare Funktional $F(v)$ über einem Hilbertraum X ist darstellbar in der Form*

$$F(v) = \langle u_F, v \rangle_X \quad \text{für alle } v \in X.$$

Dabei ist $u_F \in X$ eindeutig durch das Funktional $F \in X'$ bestimmt und es gilt $\|F\|_{X'} = \|u_F\|_X$.

Satz 3.2 (Lemma von Lax–Milgram [25]). *Sei $A : X \rightarrow X'$ ein X -elliptischer und beschränkter Operator auf einem Hilbertraum X . Dann ist die Operatorgleichung*

$$\text{Suche } u \in X : \quad Au = f$$

für alle $f \in X'$ eindeutig lösbar und es gilt

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{c_1^A} \|f\|_{X'}.$$

Beweis. siehe z.B.: [25, S.50], [21, S. 181]. □

Die Spezialisierung des Sobolev'schen Einbettungssatzes (siehe z.B.: [26, S.385]), wie er hier gebraucht wird, lautet:

Satz 3.3. *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt mit stückweise glattem Rand, d.h. $\partial\Omega \in C^{0,1}$ gilt: Die Einbettung*

$$H^\ell(\Omega) \subseteq C^j(\bar{\Omega}) \quad \text{für } \ell > j + 1$$

ist kompakt.

3.2 Variationsformulierung

Um die Lösbarkeit des Randwertproblems (2.23) im schwachen Sinne zu zeigen, wird das System im folgenden zu einer äquivalenten Variationsformulierung (3.5) umgeformt.

Als erstes muss folgende Bedingung gestellt werden: Da die Kontinuitätsgleichung Divergenzfreiheit von \mathbf{v} fordert, muss eine **Lösbarkeitsbedingung** an die Randdaten \mathbf{g}_v gestellt werden:

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} (\mathbf{n}(\mathbf{x}))^{\top} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}} = \int_{\Gamma} (\mathbf{n}(\mathbf{x}))^{\top} \mathbf{g}_v(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}}. \quad (3.1)$$

Die einzelnen Gleichungen im Gesamtsystem (2.23) werden, durch Multiplikation mit einer passenden Testfunktion und Integration über Ω , in schwache Formulierungen umformuliert.

Multipliziert man die erste Gleichung aus dem System (2.23) mit einer geeigneten Testfunktion \mathbf{w} , welche später spezifiziert wird, und integriert man über Ω , so erhält man:

$$-\bar{\mu} \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla p) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \sigma \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot (\nabla A_3)) (\nabla A_3 \cdot \mathbf{w}) \, d\mathbf{x} = \bar{\rho} \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

Die Kontinuitätsgleichung aus (2.23) wird mit einer Testfunktion q multipliziert, und dann integriert:

$$\int_{\Omega} q(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Ebenso mit der dritten Gleichung aus (2.23), mit einer Testfunktion \tilde{A}_3 :

$$-\frac{1}{\mu\sigma} \int_{\Omega} \Delta A_3(\mathbf{x}) \tilde{A}_3(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla A_3(\mathbf{x})) \tilde{A}_3(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.3)$$

Mit dem Integralsatz von Gauß–Ostrogradski erhält man eine Formel für partielle Integration. Damit lässt sich der erste Term aus (3.2) als

$$\begin{aligned} -\bar{\mu} \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} &= -\bar{\mu} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i(\mathbf{x})) \gamma_0^{\text{int}} w_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \bar{\mu} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x_j} w_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

schreiben.

Bemerkung. Der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^2 n_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i(\mathbf{x}) =: \gamma_1^{\text{int}} v_i(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma$$

entspricht der **inneren Konormalenableitung**.

In ähnlicher Weise kann der erste Term in (3.3) umgeformt werden

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu\sigma} \int_{\Omega} \Delta A_3(\mathbf{x}) \tilde{A}_3(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= -\frac{1}{\mu\sigma} \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{int}} A_3(\mathbf{x}) \gamma_0^{\text{int}} \tilde{A}_3(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \frac{1}{\mu\sigma} \int_{\Omega} \nabla A_3(\mathbf{x}) \cdot \nabla \tilde{A}_3(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Der zweite Term aus (3.2) kann auch durch partielle Integration umgeschrieben werden.

$$\int_{\Omega} \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} p(\mathbf{x}) \mathbf{n}^{\top}(\mathbf{x}) \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}.$$

Insgesamt lauten die **Variationsformulierungen**, erstens für die Impulserhaltungsgleichung, wie folgt:

$$\begin{aligned} a(A_3)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \bar{\mu} \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{int}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}} \\ - b(p, \mathbf{w}) + \int_{\Gamma} p(\mathbf{x}) \mathbf{n}^{\top}(\mathbf{x}) \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $a(A_3)(\cdot, \cdot)$ eine Bilinearform in \mathbf{v} und \mathbf{w}

$$a(A_3)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \bar{\mu} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \sigma \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla A_3) (\nabla A_3 \cdot \mathbf{w}) \, d\mathbf{x}$$

und die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ lautet

$$b(\mathbf{w}, p) := \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{w}) \, d\mathbf{x}.$$

Die rechte Seite ist durch

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{\Omega} := \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x},$$

mit $\mathbf{f} = \bar{\rho} \mathbf{g}$, definiert. Für die Kontinuitätsgleichung lautet die Variationsformulierung

$$b(\mathbf{v}, q) = 0,$$

und für die reduzierte Form der Maxwellgleichungen

$$d(\mathbf{v})(A_3, \tilde{A}_3) - \frac{1}{\mu\sigma} \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{int}} A_3(\mathbf{x}) \gamma_0^{\text{int}} \tilde{A}_3(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}} = 0,$$

mit der Bilinearform $d(\mathbf{v})(\cdot, \cdot)$, bilinear in A_3 und \tilde{A}_3 ,

$$d(\mathbf{v})(A_3, \tilde{A}_3) := \frac{1}{\sigma\mu} \int_{\Omega} \nabla A_3 \cdot \nabla \tilde{A}_3 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla A_3) \tilde{A}_3 \, d\mathbf{x}.$$

Die Funktionenräume für $\mathbf{v}, \mathbf{w}, p, q, A_3$ und \tilde{A}_3 werden so gewählt, dass die Variationsformulierungen sinnvoll sind, d.h. dass die vorkommenden Integrale endlich sind. Dazu bietet sich, für Funktionen, deren Ableitungen vorkommen, der Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$ an. Für p und q reicht der Raum der auf Ω quadrat-integrierbaren Funktionen $L_2(\Omega)$ aus. So gelte also

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^2, \quad p, q \in L_2(\Omega), \quad \text{und} \quad A_3, \tilde{A}_3 \in H^1(\Omega).$$

Skalierungsbedingung Da p in (2.23) nur als Gradient vorkommt, kann nur Eindeutigkeit bis auf Addition einer Konstanten gezeigt werden. Um diese Konstante festzusetzen, wird

$$p \in L_{2,0}(\Omega) := \left\{ q \in L_2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

als Skalierungsbedingung gefordert.

Da das Randwertproblem (2.23) ein reines Dirichlet-Randwertproblem ist, kann man die Suche nach der Lösung auf Funktionen beschränken, deren Werte am Rand Null sind. Addiert man eine geeignete, vorerst als bekannt vorausgesetzte Fortsetzungen $\mathbf{v}_g, A_{3,g}$ der Randdaten (existiert lt. inversem Spursatz [25, S. 44]), so erhält man die Lösung des ursprünglichen Problems durch

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_g \quad \text{bzw.} \quad A_3 = A_{3,0} + A_{3,g}$$

mit den gesuchten Funktionen $\mathbf{v}_0 \in [H_0^1(\Omega)]^2$ und $A_{3,0} \in H_0^1(\Omega)$.

Hier werden die selben Räume für Ansatzfunktionen der gesuchten Funktionen, und Testfunktionen gewählt:

$$\mathbf{v}_0, \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \quad p, q \in L_{2,0}(\Omega), \quad \text{und} \quad A_{3,0}, \tilde{A}_3 \in H_0^1(\Omega).$$

Dadurch verschwinden die Werte der Testfunktionen \mathbf{w} und \tilde{A}_3 am Rand und die Randintegrale, die von der partielle Integration herkommen, fallen weg. Insgesamt lautet die kontinuierliche Variationsformulierung dann:

Suche $\mathbf{u}_0^\top = (\mathbf{v}_0, p, A_{3,0}) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_{2,0}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ sodass:

$$\begin{aligned} a(A_3)(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}) - b(\mathbf{w}, p) + a(A_3)(\mathbf{v}_g, \mathbf{w}) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_\Omega \\ b(\mathbf{v}_0, q) &= -b(\mathbf{v}_g, q) \\ d(\mathbf{v})(A_{3,0}, \widetilde{A}_3) + d(\mathbf{v})(A_{3,g}, \widetilde{A}_3) &= \langle f_{A_3}, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

für alle Testfunktionen $(\mathbf{w}, q, \widetilde{A}_3) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_{2,0}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Bemerkung. Die rechte Seite f_{A_3} der dritten Gleichung kann ab hier als beliebige Funktion aus $H^{-1}(\Omega)$ gewählt werden. Diese Modifikation stellt eine Verallgemeinerung dar, und erleichtert das Testen (Kapitel 6) der Löser, in Kapitel 5 beschrieben.

Die Skalierungsbedingung $p \in L_{2,0}(\Omega)$ kann, wie in [25, S. 85], mittels eines Lagrange-Multiplikators $\lambda \in \mathbb{R}$ mit in die Variationsformulierung genommen werden.

Suche $\mathbf{u}_0^\top = (\mathbf{v}_0, p, A_{3,0}) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ sodass:

$$\begin{aligned} a(A_3)(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}) - b(\mathbf{w}, p) + a(A_3)(\mathbf{v}_g, \mathbf{w}) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_\Omega \\ b(\mathbf{v}_0, q) + \lambda \int_\Omega q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= -b(\mathbf{v}_g, q) \\ \int_\Omega p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= 0 \\ d(\mathbf{v})(A_{3,0}, \widetilde{A}_3) + d(\mathbf{v})(A_{3,g}, \widetilde{A}_3) &= \langle f_{A_3}, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega \end{aligned}$$

für alle Testfunktionen $(\mathbf{w}, q, \widetilde{A}_3) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Testet man die zweite Gleichung mit der Funktion $q \equiv 1$, so folgt mit der Lösbarkeitsbedingung (3.1):

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}_0, 1) + \lambda|\Omega| &= -b(\mathbf{v}_g, 1) = - \int_\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{x}))^\top \mathbf{g}_v(\mathbf{x}) \, ds_{\mathbf{x}} = 0 \\ \Rightarrow \lambda|\Omega| &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Daher kann λ als rechte Seite der dritten Gleichung gesetzt werden

$$\int_\Omega p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lambda,$$

und in der zweiten Gleichung eliminiert werden.

$$b(\mathbf{v}_0, q) + \int_\Omega p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \int_\Omega q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = -b(\mathbf{v}_g, q)$$

Insgesamt ergibt sich eine zu (3.4) äquivalente Formulierung der **kontinuierlichen Variationsformulierung**:

Suche $\mathbf{u}_0^\top = (\mathbf{v}_0, p, A_{3,0}) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ sodass:

$$\begin{aligned} a(A_3)(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}) - b(\mathbf{w}, p) + a(A_3)(\mathbf{v}_g, \mathbf{w}) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_\Omega \\ b(\mathbf{v}_0, q) + c(p, q) &= -b(\mathbf{v}_g, q) \\ d(\mathbf{v})(A_{3,0}, \widetilde{A}_3) + d(\mathbf{v})(A_{3,g}, \widetilde{A}_3) &= \langle f_{A_3}, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

für alle Testfunktionen $(\mathbf{w}, q, \widetilde{A}_3) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

mit den Bilinearformen $a(A_3)(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$ und $d(\mathbf{v})(\cdot, \cdot)$:

- $$a(A_3)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \bar{\mu} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \sigma \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla A_3)(\nabla A_3 \cdot \mathbf{w}) \, d\mathbf{x}, \quad (3.6)$$

- $$b(\mathbf{w}, q) := \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{w}) \, d\mathbf{x}, \quad (3.7)$$

- $$c(p, q) := \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x}, \quad (3.8)$$

- $$d(\mathbf{v})(A_3, \widetilde{A}_3) := \frac{1}{\sigma \mu} \int_{\Omega} \nabla A_3 \cdot \nabla \widetilde{A}_3 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla A_3) \widetilde{A}_3 \, d\mathbf{x}. \quad (3.9)$$

3.2.1 Zerlegung in lineare Teilprobleme

Für die oben beschriebene Variationsformulierung (3.5) kann eine Methode gewählt werden, so dass sich eine Folge von Näherungslösungen des nichtlinearen Gesamtproblems, durch abwechselndes Lösen von zwei linearen Teilproblemen, wobei die jeweils andere Teillösung als Eingangsdatum in das eine Teilproblem eingeht, ergibt. Das Vorgehen ist dieses:

1. Wahl einer Startfunktion für $A_3 \in H^1(\Omega)$
2. Mit bekanntem A_3 bleibt aus den ersten zwei Gleichungen der kontinuierlichen Variationsformulierung (3.5), im wesentlichen, die Variationsformulierung des Stokes-Systems übrig. (Der Unterschied liegt nur in einem Term nullter Ordnung in der Bilinearform $a(A_3)(\cdot, \cdot)$, welcher aber weder Beschränktheit, Elliptizität oder Bilinearität stört. Siehe Lemma 3.1)

Suche $(\mathbf{v}_0, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega)$ sodass:

$$\begin{aligned} a(A_3)(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}) - b(\mathbf{w}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_\Omega - a(A_3)(\mathbf{v}_g, \mathbf{w}) \\ b(\mathbf{v}_0, q) + c(p, q) &= -b(\mathbf{v}_g, q) \end{aligned} \quad (3.10)$$

für alle Testfunktionen $(\mathbf{w}, q) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega)$. Dies ist ein lineares, elliptisches Sattelpunktproblem (siehe nächsten Abschnitt 3.3.1).

3. Mit der bekannten Funktion $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_g$ aus der Lösung von (3.10), bleibt von der dritten Gleichung in der kontinuierlichen Variationsformulierung (3.5), eine Poisson-Gleichung mit einem Term erster Ordnung übrig.

Suche $A_{3,0} \in H_0^1(\Omega)$ sodass:

$$d(\mathbf{v})(A_{3,0}, \widetilde{A}_3) = \langle f_{A_3}, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega - d(\mathbf{v})(A_{3,g}, \widetilde{A}_3) \quad (3.11)$$

für alle Testfunktionen $\widetilde{A}_3 \in H_0^1(\Omega)$. Auch hier kann Elliptizität, und eindeutige Lösbarkeit gezeigt werden (siehe Abschnitt 3.3.2).

4. Mit dem neu berechneten A_3 kann wieder zu Punkt 2 gesprungen werden.
5. Um Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $(\mathbf{v}, p, A_3) \in [H^1(\Omega)]^2 \times L_{2,0}(\Omega) \times H^1(\Omega)$ fürs Gesamtsystem (3.5) zu garantieren, wird im Abschnitt 3.3.3 gezeigt, dass eine äquivalente Fixpunktgleichung eindeutig lösbar ist.

3.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

In diesem Abschnitt werden die Existenz und Eindeutigkeits-Aussagen, zuerst für die linearen Teilprobleme (3.10) und (3.11), und dann für die gesamte nichtlineare Variationsformulierung (3.5), erarbeitet. Für die linearen Teile liefert das Lemma von Lax–Milgram (Satz 3.2) die gewünschte Aussage. Für das Gesamtproblem wird, ähnlich wie im Beweis für das Lemma von Lax–Milgram, die gewünschte Aussage über eine Fixpunktgleichung mit kontrahierendem Operator, hergeleitet.

3.3.1 Stokes-Problem mit vorgegebenem Potential

In diesem Abschnitt wird das erste Teilproblem in Operatorschreibweise umformuliert, und die Voraussetzungen des Lemmas von Lax–Milgram nachgewiesen, womit die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung folgt. Ausgehend von der Variationsformulierung (3.10)

Suche $(\mathbf{v}_0, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega)$ sodass:

$$\begin{aligned} a(A_3)(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}) - b(\mathbf{w}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_\Omega - a(A_3)(\mathbf{v}_g, \mathbf{w}) \\ b(\mathbf{v}_0, q) + c(p, q) &= -b(\mathbf{v}_g, q) \end{aligned}$$

für alle Testfunktionen $(\mathbf{w}, q) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega)$, kann das Problem in eine Operatorgleichung ungeschrieben werden. Für beliebige be-

kannte Funktionen $A_3 \in C^1(\Omega)$ induzieren die Bilinearformen, wie in [25, S. 86],

$$\begin{aligned}\langle A(A_3)\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_\Omega &:= a(A_3)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ \langle \tilde{A}(A_3)\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{w} \rangle_\Omega &:= a(A_3)(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{w}) \\ \langle B\mathbf{v}, q \rangle_{L_2(\Omega)} &:= b(\mathbf{v}, q) \\ \langle \mathbf{w}, B'p \rangle_\Omega &:= b(\mathbf{w}, p) \\ \langle Cp, q \rangle_{L_2(\Omega)} &:= c(p, q),\end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2$, $\tilde{\mathbf{v}} \in [H^1(\Omega)]^2$ und $p, q \in L_2(\Omega)$, lineare Operatoren

$$\begin{aligned}A(A_3) &: [H_0^1(\Omega)]^2 \rightarrow [H^{-1}(\Omega)]^2 \\ \tilde{A}(A_3) &: [H^1(\Omega)]^2 \rightarrow [H^{-1}(\Omega)]^2 \\ B &: [H_0^1(\Omega)]^2 \rightarrow L_2(\Omega) \\ B' &: L_2(\Omega) \rightarrow [H^{-1}(\Omega)]^2 \\ C &: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega).\end{aligned}$$

Die Einschränkung des Operators $\tilde{A}(A_3)$ auf $H_0^1(\Omega)$ entspricht dem Operator $A(A_3)$. Damit lautet die Operatorgleichung zur Variationsformulierung (3.10):

$$\begin{pmatrix} A(A_3) & -B' \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_v - \tilde{A}(A_3)\mathbf{v}_g \\ -B\mathbf{v}_g \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Eigenschaften der Operatoren bzw. der Bilinearformen

Lemma 3.1. *Für $\nabla A_3 \in [C(\Omega)]^2$ ist die Bilinearform (3.6) $a(A_3)(\cdot, \cdot) : [H_0^1(\Omega)]^2 \times [H_0^1(\Omega)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, und $[H_0^1(\Omega)]^2$ -elliptisch.*

Beweis. • Beschränktheit: Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2$. Dann gilt

$$|a(A_3)(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq |\bar{\mu}| \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla v_i \cdot \nabla w_i| \, d\mathbf{x} + |\sigma| \int_{\Omega} |(\mathbf{v} \cdot \nabla A_3)(\nabla A_3 \cdot \mathbf{w})| \, d\mathbf{x}$$

Der erste Term entspricht nach Anwendung der Cauchy–Schwarz–Ungleichung, der $[H^1(\Omega)]^2$ -Halbnorm und kann durch die $[H^1(\Omega)]^2$ -Norm abgeschätzt werden:

$$|\bar{\mu}| \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla v_i \cdot \nabla w_i| \, d\mathbf{x} \leq c \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq c \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2}.$$

Der zweite Term kann mit Cauchy–Schwarz–Ungleichung, Dreiecksungleichung

und der Normdefinition in $H^1(\Omega)$ und der Supremumsnorm in $C(\Omega)$, wie folgt

$$\begin{aligned}
 |\sigma| \int_{\Omega} |(\mathbf{v} \cdot \nabla A_3)(\nabla A_3 \cdot \mathbf{w})| \, d\mathbf{x} &\leq |\sigma| \|\nabla A_3\|_{[C(\Omega)]^2}^2 \int_{\Omega} |v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + v_2 w_2| \, d\mathbf{x} \\
 &\leq |\sigma| \|\nabla A_3\|_{[C(\Omega)]^2}^2 \left[(\|v_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \|w_1\|_{L_2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} + (\|v_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \|w_2\|_{L_2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + (\|v_2\|_{L_2(\Omega)}^2 \|w_1\|_{L_2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} + (\|v_2\|_{L_2(\Omega)}^2 \|w_2\|_{L_2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &\leq |\sigma| \|\nabla A_3\|_{[C(\Omega)]^2}^2 \left[(\|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_{L_2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} + (\|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_{L_2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + (\|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_{L_2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} + (\|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_{L_2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &\leq |\sigma| \|\nabla A_3\|_{[C(\Omega)]^2}^2 \left[\left(\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &\leq c \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2}
 \end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Insgesamt gilt,

$$|a(A_3)(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq c_2^A \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2}$$

für ein $0 < c_2^A \in \mathbb{R}$.

- $[H_0^1(\Omega)]^2$ -Elliptizität: Für $\mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ gilt, wegen der Äquivalenz zwischen Halbnorm und Norm:

$$\begin{aligned}
 a(A_3)(\mathbf{w}, \mathbf{w}) &= \bar{\mu} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\nabla w_i)^2 \, d\mathbf{x} + \sigma \int_{\Omega} \underbrace{(\mathbf{w} \cdot \nabla A_3)^2}_{\geq 0} \, d\mathbf{x} \\
 &\geq \bar{\mu} |\mathbf{w}|_{[H^1(\Omega)]^2}^2 \geq c_1^A \|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2}^2
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die Beschränktheit von $a(A_3)(\cdot, \cdot)$ gilt auch für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^2$ und damit ist auch $\tilde{A}(A_3)$ beschränkt.

Lemma 3.2. Die Bilinearform (3.7) $b(\cdot, \cdot) : [H^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Beweis. Sei $\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^2$, $q \in L_2(\Omega)$. Dann gilt

$$|b(\mathbf{w}, q)| = \left| \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{w}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \|q\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{w}\|_{L_2(\Omega)} \leq c_2^B \|q\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2}.$$

□

Lemma 3.3. Die Bilinearform (3.8) $c(\cdot, \cdot) : L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt.

3 Analysis

Beweis. Seien $p, q \in L_2(\Omega)$. Dann gilt wegen der Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$|c(p, q)| = \left| \int_{\Omega} p \, dx \right| \left| \int_{\Omega} q \, dx \right| \leq |\Omega| \|p\|_{L_2(\Omega)} \|q\|_{L_2(\Omega)}.$$

□

Stabilitätsbedingung Für das nächste Lemma 3.5 wird eine **Stabilitätsbedingung** benötigt:

Lemma 3.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes zusammenhängendes Lipschitz–Gebiet. Dann gilt*

$$c_{St} \|q\|_{L_2(\Omega)} \leq \sup_{0 \neq \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^d} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^d}} \quad \text{für alle } q \in L_{2,0}(\Omega). \quad (3.13)$$

Beweis. (Siehe [25, S. 85] oder [2, S. 137]) Nach der Ungleichung von Nečas (siehe [8]), gilt für alle $q \in L_{2,0}(\Omega)$:

$$\|q\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|\nabla q\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d}.$$

Mit der Normdefinition für den Dualraum und mit $c_{St} = \frac{1}{c}$, gilt

$$\begin{aligned} c_{St} \|q\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|\nabla q\|_{[H^{-1}(\Omega)]^d} = \sup_{0 \neq \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^d} \frac{\langle \mathbf{w}, \nabla q \rangle_{\Omega}}{\|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^d}} \\ &\quad - \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{w}) \, dx \\ &= \sup_{0 \neq \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^d} \frac{\int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{w}) \, dx}{\|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^d}} = \sup_{0 \neq \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^d} \frac{-b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^d}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung (3.13).

□

Schur–Komplement–System Aus der Beschränktheit und $H_0^1(\Omega)$ –Elliptizität des Operators $A(A_3)$ folgt mit dem Lemma von Lax–Milgram (Satz 3.2), die Existenz des inversen Operators $(A(A_3))^{-1}$. Damit kann die erste Gleichung in (3.12) in

$$\mathbf{v}_0 = (A(A_3))^{-1} \left[B'p + \mathbf{f}_v - \tilde{A}(A_3)\mathbf{v}_g \right] \quad (3.14)$$

umgeschrieben werden und in die zweite Gleichung eingesetzt werden

$$\left[B(A(A_3))^{-1}B' + C \right] p = -B(A(A_3))^{-1}\mathbf{f}_v + B \left[(A(A_3))^{-1}\tilde{A}(A_3) - I \right] \mathbf{v}_g. \quad (3.15)$$

Dadurch entsteht das **Schur–Komplement–System**

$$Sp = f_S$$

mit dem Operator

$$S := [B(A(A_3))^{-1}B' + C] : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$$

und mit der rechten Seite

$$f_S = -B(A(A_3))^{-1}\mathbf{f}_v + B \left[(A(A_3))^{-1}\tilde{A}(A_3) - I \right] \mathbf{v}_g.$$

Für den Operator S kann Beschränktheit und $L_2(\Omega)$ -Elliptizität gezeigt werden (siehe auch in [25, S. 87]):

Lemma 3.5. *Der Operator $S : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ ist beschränkt und $L_2(\Omega)$ -elliptisch.*

Beweis. Für $p \in L_2(\Omega)$ sei \mathbf{v}_p die eindeutige Lösung (existiert lt. Satz 3.2, mit Lemma 3.1 und 3.2) von

$$a(A_3)(\mathbf{v}_p, \mathbf{w}) = b(\mathbf{w}, p) \quad \text{für alle } \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2,$$

dann gilt $\mathbf{v}_p = (A(A_3))^{-1}B'p$.

- Beschränktheit: Aus der $[H_0^1(\Omega)]^2$ -Elliptizität von $a(A_3)(\cdot, \cdot)$ und der Beschränktheit von $b(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\begin{aligned} c_1^A \|\mathbf{v}_p\|_{[H^1(\Omega)]^2}^2 &\leq a(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_p) = b(\mathbf{v}_p, p) \leq c_2^B \|\mathbf{v}_p\|_{[H^1(\Omega)]^2} \|p\|_{L_2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|\mathbf{v}_p\|_{[H^1(\Omega)]^2} &\leq \frac{c_2^B}{c_1^A} \|p\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Somit gilt, mit der Beschränktheit des Operators D lt. Lemma 3.6,

$$\begin{aligned} \|Sp\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|B(A(A_3))^{-1}B'p\|_{L_2(\Omega)} + c_2^D \|p\|_{L_2(\Omega)} = \|B\mathbf{v}_p\|_{L_2(\Omega)} + c_2^D \|p\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq c_2^B \|\mathbf{v}_p\|_{[H^1(\Omega)]^2} + c_2^D \|p\|_{L_2(\Omega)} \leq \max \left\{ \frac{(c_2^B)^2}{c_1^A}, c_2^D \right\} \|p\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

die Beschränktheit von S mit der Konstante $c_2^S = \max \left\{ \frac{(c_2^B)^2}{c_1^A}, c_2^D \right\}$.

- $L_2(\Omega)$ -Elliptizität: Für $p \in L_2(\Omega)$ ist

$$p = p_0 + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x}$$

mit $p_0 \in L_{2,0}(\Omega)$. Damit gilt

$$\|p\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|p_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} \right)^2.$$

Wegen der Stabilitätsbedingung (3.13) gilt für alle $p_0 \in L_{2,0}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} c_{St} \|p_0\|_{L_2(\Omega)} &\leq \sup_{0 \neq \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2} \frac{b(\mathbf{w}, p_0)}{\|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2}} \\ &= \sup_{0 \neq \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2} \frac{a(A_3)(\mathbf{v}_{p_0}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2}} \leq c_2^A \|\mathbf{v}_{p_0}\|_{[H^1(\Omega)]^2}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \|p_0\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \left(\frac{c_2^A}{c_{St}}\right)^2 \|\mathbf{v}_{p_0}\|_{[H^1(\Omega)]^2}^2 \leq \left(\frac{c_2^A}{c_{St}}\right)^2 c_1^A a(A_3)(\mathbf{v}_{p_0}, p_0) = \left(\frac{c_2^A}{c_{St}}\right)^2 c_1^A b(\mathbf{v}_{p_0}, p_0) \\ &= \left(\frac{c_2^A}{c_{St}}\right)^2 c_1^A \langle B \mathbf{v}_{p_0}, p_0 \rangle_{L_2(\Omega)} = \left(\frac{c_2^A}{c_{St}}\right)^2 c_1^A \langle B(A(A_3))^{-1} B' p_0, p_0 \rangle_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Weiters gilt für alle $\mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2$

$$b(\mathbf{w}, p) = \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{w}) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{w} \, dx = - \int_{\Omega} \nabla p_0 \cdot \mathbf{w} \, dx = b(\mathbf{w}, p_0),$$

und daher $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{p_0}$.

Insgesamt gilt also, für alle $p \in L_2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle Sp, p \rangle_{L_2(\Omega)} &= \langle B(A(A_3))^{-1} B' p, p \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle Dp, p \rangle_{L_2(\Omega)} \\ &= \langle B(A(A_3))^{-1} B' p_0, p \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle Dp, p \rangle_{L_2(\Omega)} \\ &= \langle B(A(A_3))^{-1} B' p_0, p_0 \rangle_{L_2(\Omega)} + \left(\int_{\Omega} p \, dx \right)^2 \\ &\geq \frac{c_{St}^2}{(c_2^A)^2 c_1^A} \|p_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left(\int_{\Omega} p \, dx \right)^2 \\ &\geq \min \left\{ \frac{c_{St}^2}{(c_2^A)^2 c_1^A}, |\Omega| \right\} \|p\|_{L_2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

□

Damit sind alle Vorarbeiten erledigt, um die eindeutige Lösbarkeit des Stokessystems mit vorgegebenem Potential (3.10) in einem Satz zu formulieren:

Satz 3.4. *Sei $\Omega \in C^{0,1}$ beschränkt. Das Stokessystem (3.10) mit vorgegebenem Potential $A_3 \in C^1(\Omega)$ ist, für alle $\mathbf{f}_v \in [H^{-1}(\Omega)]^2$, für alle Randdaten $\mathbf{g}_v \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2$ welche die Lösbarkeitsbedingung (3.1) erfüllen, unabhängig von der Wahl der Fortsetzung $\mathbf{v}_g \in [H^1(\Omega)]^2$, eindeutig lösbar. Weiters gelten die Abschätzungen:*

$$\|p\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{c_1^S} \left[\frac{c_2^B}{c_1^A} \|\mathbf{f}_v\|_{[H^{-1}(\Omega)]^2} + c_2^B \left(\frac{c_2^A}{c_1^A} + 1 \right) c_{IT} \|\mathbf{g}_v\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2} \right],$$

und

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} &\leq \frac{1}{c_1^A} \left(1 + \frac{(c_2^B)^2}{c_1^S c_1^A} \right) \|\mathbf{f}_v\|_{[H^{-1}(\Omega)]^2} \\ &\quad + \left(\frac{(c_2^B)^2}{c_1^S c_1^A} \left(\frac{c_2^A}{c_1^A} + 1 \right) + \frac{c_2^A}{c_1^A} + 1 \right) c_{IT} \|\mathbf{g}_v\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Omega)]^2}. \end{aligned}$$

Beweis. • Existenz der Lösung:

Das Schurkomplementsystem (3.15) ist mit Lemma 3.5 laut Satz 3.2, dem Lemma von Lax–Milgram, eindeutig lösbar, mit der Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|p\|_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{1}{c_1^S} \|B(A(A_3))^{-1} [-\mathbf{f}_v + \tilde{A}(A_3)\mathbf{v}_g] - B\mathbf{v}_g\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \frac{c_2^B}{c_1^S c_1^A} \|\mathbf{f}_v\|_{[H^{-1}(\Omega)]^2} + \frac{c_2^B}{c_1^S} \left(\frac{c_2^A}{c_1^A} + 1 \right) c_{IT} \|\mathbf{g}_v\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2}. \end{aligned}$$

Setzt man die eindeutige Lösung p in (3.14) ein, so erhält man das gesuchte Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v}_0 , und damit hat man, für eine Wahl der Fortsetzung $\mathbf{v}_g \in [H_g^1(\Omega)]$, eine Lösung $(\mathbf{v}_0, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_{2,0}(\Omega)$ des Stokesystems mit vorgegebenem Potential (3.12). Wegen den Lemmata 3.1 und 3.2 und dem inversen Spursatz (siehe z.B.: [25, S. 44]) gilt mit (3.14):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_0\|_{[H^1(\Omega)]^2} &= \|(A(A_3))^{-1} [\mathbf{f}_v + B'p - \tilde{A}(A_3)\mathbf{v}_g]\|_{[H^1(\Omega)]^2} \\ &\leq \frac{1}{c_1^A} \|\mathbf{f}_v + B'p\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \frac{c_2^A}{c_1^A} c_{IT} \|\mathbf{g}\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2} \\ &\leq \frac{1}{c_1^A} \|\mathbf{f}_v\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \frac{c_2^B}{c_1^A} \|p\|_{L_2(\Omega)} + \frac{c_2^A}{c_1^A} c_{IT} \|\mathbf{g}\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2} \\ &\leq \frac{1}{c_1^A} \left(1 + \frac{(c_2^B)^2}{c_1^S c_1^A} \right) \|\mathbf{f}_v\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \left(\frac{(c_2^B)^2}{c_1^S c_1^A} \left(\frac{c_2^A}{c_1^A} + 1 \right) + \frac{c_2^A}{c_1^A} \right) c_{IT} \|\mathbf{g}\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2}. \end{aligned}$$

Damit gilt Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} &\leq \|\mathbf{v}_0\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|\mathbf{v}_g\|_{[H^1(\Omega)]^2} \\ &\leq \frac{1}{c_1^A} \left(1 + \frac{(c_2^B)^2}{c_1^S c_1^A} \right) \|\mathbf{f}_v\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \left(\frac{(c_2^B)^2}{c_1^S c_1^A} \left(\frac{c_2^A}{c_1^A} + 1 \right) + \frac{c_2^A}{c_1^A} + 1 \right) c_{IT} \|\mathbf{g}\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2}. \end{aligned}$$

• Eindeutigkeit der Lösung:

Seien (\mathbf{v}^*, p^*) und $(\mathbf{v}^{**}, p^{**})$ zwei Lösungen aus $H_{g_{v_1}}^1(\Omega) \times H_{g_{v_2}}^1(\Omega) \times L_{2,0}(\Omega)$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}(A_3) & -B' \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^* \\ p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}(A_3) & -B' \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{**} \\ p^{**} \end{pmatrix},$$

und wegen $\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{**} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ folgt

$$\begin{pmatrix} A(A_3) & -B' \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{**} \\ p^* - p^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung des obigen Systems und folgt

$$\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^{**} = (A(A_3))^{-1} B'(p^* - p^{**}). \quad (3.16)$$

Das zugehörige Schurkomplementsystem ist

$$[B(A(A_3))^{-1} B' + C] (p^* - p^{**}) = 0.$$

Aufgrund der $L_2(\Omega)$ -Elliptizität von $S = B(A(A_3))^{-1} B' + C$ (Lemma 3.5) ist das System wegen dem Lemma von Lax–Milgram (Satz 3.2) eindeutig lösbar mit $\|p^* - p^{**}\|_{L_2(\Omega)} \leq 0$. Damit gilt:

$$p^* = p^{**} \quad \text{in } L_2(\Omega).$$

Setzt man dies in (3.16) ein, so erhält man mit ähnlicher Argumentation

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^{**} \quad \text{in } [H^1(\Omega)]^2.$$

Damit ist die Lösung eindeutig, unabhängig von der Wahl der Fortsetzung \mathbf{v}_g . \square

3.3.2 Vektorpotential-Variationsformulierung mit vorgegebenem Geschwindigkeitsfeld

Im folgenden wird für die Operatorschreibweise des Vektorpotentialproblems mit vorgegebenem Geschwindigkeitsfeld, mit dem Lemma von Lax–Milgram (Lemma 3.2), die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, bewiesen.

Für $\mathbf{v} \in [C(\Omega)]^2$ definiert die Bilinearform (3.9) Operatoren

$$D(\mathbf{v}) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$$

durch

$$\langle D(\mathbf{v}) A_3, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega := d(\mathbf{v})(A_3, \widetilde{A}_3),$$

für $A_3, \widetilde{A}_3 \in H_0^1(\Omega)$, und

$$\widetilde{D}(\mathbf{v}) : H^1(\Omega) \rightarrow \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$$

durch

$$\langle \widetilde{D}(\mathbf{v}) A_3, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega := d(\mathbf{v})(A_3, \widetilde{A}_3),$$

für $A_3, \widetilde{A}_3 \in H^1(\Omega)$.

Eigenschaften der Bilinearform bzw. des Operators

Lemma 3.6. *Für $\mathbf{v} \in [C(\Omega)]^2$ ist die Bilinearform (3.9) $d(\mathbf{v})(\cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, und für $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ist sie $H_0^1(\Omega)$ -elliptisch.*

Beweis. • Beschränktheit: Seien $A_3, \widetilde{A}_3 \in H^1(\Omega)$. Dann gilt mit der Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$\begin{aligned} |d(\mathbf{v})(A_3, \widetilde{A}_3)| &\leq \left| \frac{1}{\mu\sigma} \right| \left| \int_{\Omega} \nabla A_3 \cdot \nabla \widetilde{A}_3 \, d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla A_3) \widetilde{A}_3 \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\mu\sigma} \right| |A_3|_{H^1(\Omega)} |\widetilde{A}_3|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{v}\|_{[C(\Omega)]^2} |A_3|_{H^1(\Omega)} \|\widetilde{A}_3\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq c_2^D \|A_3\|_{H^1(\Omega)} \|\widetilde{A}_3\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

- $[H_0^1(\Omega)]^2$ –Elliptizität: Für $A_3 \in H_0^1(\Omega)$, mit $i \in \{1, 2\}$ und wegen dem Integralsatz von Gauß–Ostrogradski gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \gamma_0^{\text{int}}(v_i(A_3)^2) n_i \, ds_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i(A_3)^2) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i) (A_3)^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v_i 2A_3 \frac{\partial}{\partial x_i} (A_3) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

und damit

$$d(\mathbf{v})(A_3, A_3) = \frac{1}{\mu\sigma} \int_{\Omega} (\nabla A_3)^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} -\frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{v}) A_3^2 \, d\mathbf{x}.$$

Für $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ gilt

$$d(\mathbf{v})(A_3, A_3) \geq |A_3|_{H^1(\Omega)}^2 \geq c_1^D \|A_3\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

□

Bemerkung. Die Beschränktheit ist für $A_3, \widetilde{A}_3 \in H^1(\Omega)$ gültig.

Damit ist der Operator $D(\mathbf{v})$ beschränkt und $H_0^1(\Omega)$ -elliptisch, und der Operator $\widetilde{D}(\mathbf{v})$ ist beschränkt. Somit sind alle Voraussetzungen vom Lemma von Lax–Milgram (Satz 3.2) erfüllt, und es kann ein zusammenfassender Satz für diesen Abschnitt formuliert werden.

Satz 3.5. *Die Operatorgleichung*

$$\text{Suche } u \in X : \quad D(\mathbf{v})A_{3,0} = \widetilde{f}_{A_3}$$

mit $\widetilde{f}_{A_3} = f_{A_3} - \widetilde{D}(\mathbf{v})A_{3,g} \in H^{-1}(\Omega)$, und damit die äquivalente Variationsformulierung (3.11) ist für alle $f_{A_3} \in H^{-1}(\Omega)$ und für alle Randdaten $g_{A_3} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ eindeutig lösbar, falls gilt $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ für $\mathbf{v} \in [C(\Omega)]^2$. Die dadurch entstehende schwache Lösung $A_3 = A_{3,0} + A_{3,g} \in H^1(\Omega)$ des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sigma\mu} \Delta A_3 + \mathbf{v} \cdot \nabla A_3 &= f_{A_3} && \text{in } \Omega \\ \gamma_0^{\text{int}} A_3 &= g_{A_3} && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

3 Analysis

ist unabhängig von der Wahl der Fortsetzung der Randdaten $A_{3,g} \in H_g^1(\Omega)$, eindeutig. Weiters gilt die Abschätzung

$$\|A_3\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c_1^D} \|f_{A_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \left(1 + \frac{c_2^D}{c_1^D}\right) c_{IT} \|g_{A_3}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Beweis. (analog zu : [25, S. 65]) Wegen Lemma 3.6 ist der Operator $D(\mathbf{v})$ $H_0^1(\Omega)$ -elliptisch, falls $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ für $\mathbf{v} \in [C(\Omega)]^2$. Damit liefert das Lemma von Lax–Milgram Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $A_{3,0} \in H_0^1(\Omega)$, und die Abschätzung:

$$\|A_{3,0}\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c_1^D} \|\widetilde{f}_{A_3}\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Mit der Einsetzung für \widetilde{f}_{A_3} , der Beschränktheit des Operators $D(\mathbf{v})$ und dem inversen Spursatz (siehe [25, S.44]) folgt:

$$\begin{aligned} \|A_{3,0}\|_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{c_1^D} \|f_{A_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{c_2^D} \|D(\mathbf{v})A_{3,g}\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{c_2^D} \|f_{A_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{c_2^D}{c_1^D} \|A_{3,g}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{c_2^D} \|f_{A_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{c_2^D c_{IT}}{c_1^D} \|g_{A_3}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

wobei $0 < c_{IT} \in \mathbb{R}$ die Konstante aus dem inversen Spursatz ist. Insgesamt gilt für $A_3 = A_{3,0} + A_{3,g}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|A_3\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|A_{3,0}\|_{H^1(\Omega)} + \|A_{3,g}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|A_{3,0}\|_{H^1(\Omega)} + c_{IT} \|g_{A_3}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq \frac{1}{c_1^D} \|f_{A_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \left(1 + \frac{c_2^D}{c_1^D}\right) c_{IT} \|g_{A_3}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Lösung unabhängig von der Wahl der Fortsetzung ist: Seien $A'_3 = A'_{3,0} + A'_{3,g}$ und $A''_3 = A''_{3,0} + A''_{3,g}$ zwei Lösungen

$$D(\mathbf{v})A'_3 = f_{A_3} \quad \text{und} \quad D(\mathbf{v})A''_3 = f_{A_3} \quad (3.17)$$

mit zwei Fortsetzungen $A'_{3,g}, A''_{3,g} \in H_g^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\gamma_0^{\text{int}} A'_{3,g} = \gamma_0^{\text{int}} A''_{3,g} = g \Rightarrow \gamma_0^{\text{int}}(A'_{3,g} - A''_{3,g}) = 0,$$

und somit $A'_{3,g} - A''_{3,g} \in H_0^1(\Omega)$. Aus (3.17) folgt

$$0 = D(\mathbf{v})(A'_3 - A''_3) = D(\mathbf{v})(A'_{3,0} - A''_{3,0} + (A'_{3,g} - A''_{3,g})).$$

Da $A'_{3,0} - A''_{3,0} + (A'_{3,g} - A''_{3,g}) \in H_0^1(\Omega)$ gilt, folgt aus der $H_0^1(\Omega)$ -Elliptizität:

$$0 = \|A'_3 - A''_3\|_{H^1(\Omega)},$$

und somit $A'_3 = A''_3$ in $H^1(\Omega)$. □

3.3.3 Gesamtsystem

Um Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Gesamtsystems zu zeigen, werden die Ergebnisse aus den letzten Abschnitten über die Lösbarkeit der linearen Teilprobleme gebraucht. Dann kann mit einer Fixpunktgleichung die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Gesamtsystems gezeigt werden.

Kurz zusammengefasst, kann man \mathbf{v} und A_3 als

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(A_3, \mathbf{f}_v, \mathbf{g}_v) \quad \text{und} \quad A_3 = A_3(\mathbf{v}, f_{A_3}, g_{A_3})$$

eindeutige Lösungen der Teilprobleme, in Abhängigkeit der Eingangsdaten, schreiben. Setzt man die Rechte-Seite-Funktionen \mathbf{f}_v und f_{A_3} , und die Randdaten \mathbf{g}_v und g_{A_3} fest, so bleibt jeweils die Lösung des einen Problems in Abhängigkeit der Lösung des anderen. Hieraus lassen sich zwei Fixpunktgleichungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(A_3(\mathbf{v})) \quad \text{und} \quad A_3 = A_3(\mathbf{v}(A_3))$$

konstruieren. Es ist ausreichend, eine der beiden zu betrachten. An dieser Stelle werden noch Aussagen über die Regularität der Lösungen gebraucht.

Regularität der Lösungen

Um die Voraussetzungen zur Lösbarkeit des Stokesproblems mit vorgegeben Potential A_3 (siehe Satz 3.4) zu erfüllen, ist es notwendig, dass das Potential A_3 zu $C^1(\Omega)$ gehört. Andererseits ist es für die Voraussetzungen zur Lösbarkeit des Potentialproblems mit vorgegeben Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} (siehe Satz 3.5) notwendig, dass das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} zu $[C(\Omega)]^2$ gehört. Um dies zu garantieren, werden hier Regularitätssätze aus z.B [13] gebraucht:

Für die Regularität der Lösung des Stokesproblems wird auf folgendes Resultat verwiesen:

Satz 3.6 (siehe z.B: [13, Seite 257, Satz 12.2.18]). *Sei $\Omega \in C^{0,1}$ beschränkt. \mathbf{u} und p seien die schwache Lösung des Stokesproblems*

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, & -\nabla \cdot \mathbf{u} &= g & \text{in } \Omega, \\ \gamma_0^{int} \mathbf{u} &= 0 & & & \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

mit $\mathbf{f} \in [H^k(\Omega)]^2$, $g \in H^{k+1}(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\mathbf{u} \in [H^{k+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2$, $p \in H^{k+1} \cap L_{2,0}(\Omega)$ und es gibt ein von Ω unabhängiges c , so dass

$$\|\mathbf{u}\|_{[H^{k+2}(\Omega)]^2} + \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq c [\|\mathbf{f}\|_{[H^k(\Omega)]} + \|g\|_{H^{k+1}(\Omega)}].$$

Um diesen Satz anwenden zu können müssen die Voraussetzungen erfüllt sein. Die Voraussetzung $g \in H^{k+1}(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega)$ ist für $k = 0$ äquivalent zu $g = -B\mathbf{v}_g = -\nabla \cdot \mathbf{v}_g \in H^1(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega)$ Wegen der Lösbarkeitsbedingung (3.1) gilt

$$0 = \int_{\Gamma} (\mathbf{n}(\mathbf{x}))^\top \mathbf{g}_v(\mathbf{x}) \, ds_x = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}_g \, d\mathbf{x},$$

3 Analysis

womit $\nabla \cdot \mathbf{v}_g \in L_{2,0}(\Omega)$ erfüllt ist. Setzt man für die Randdaten $\mathbf{g}_v \in [H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)]^2$ voraus, so gibt es laut dem inversen Spursatz (siehe z.B.: [25, Seite 44, Satz 2.10]) eine Fortsetzung $\mathbf{v}_g \in [H^2(\Omega)]^2$, und somit $\nabla \cdot \mathbf{v}_g \in H^1(\Omega)$. Damit liefert der Satz, falls $\mathbf{f}_v \in [L_2(\Omega)]^2$ gilt, die Regularitätsaussage

$$\mathbf{v}_0 \in [H^2(\Omega)]^2.$$

Somit gilt für das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_g \in [H^2(\Omega)]^2.$$

Mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz (Satz 3.3) kann somit das benötigte Ergebnis

$$\mathbf{v} \in [C(\Omega)]^2$$

gefolgert werden. Zusammenfassend ist nun folgender Satz bewiesen:

Satz 3.7. *Sei $\Omega \in C^{0,1}$ beschränkt. $\mathbf{f}_v \in [L_2(\Omega)]^2$ und $\mathbf{g}_v \in [H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)]^2$ ist die Lösung \mathbf{v} des Stokesproblems stetig:*

$$\mathbf{v} \in [C(\Omega)]^2. \quad (3.18)$$

Für das Potentialproblem wird folgender Regularitätssatz verwendet:

Satz 3.8 ([13, Seite 197, Satz 9.1.16]). *Sei $\Omega \in C^{t+1}$ für ein $t \geq 0$. Die Bilinearform*

$$a(u, v) := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})(D^{\alpha}u)(D^{\beta}v) \, d\mathbf{x}$$

sei $H_0^1(\Omega)$ -koerziv. Sei $s \geq 0$ sodass

$$s \neq \frac{1}{2}; \quad 0 \leq s \leq t, \quad \text{falls } t \in \mathbb{N}; \quad 0 \leq s < t, \quad \text{falls } t \notin \mathbb{N}.$$

Für die Koeffizienten gelte

$$D^{\gamma}a_{\alpha\beta} \in L_{\infty}(\Omega) \quad \text{für alle } \alpha, \beta, \gamma \quad \text{mit } |\gamma| \leq \max\{0, t + |\beta| - 1\}, \quad \text{falls } t \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Und } a_{\alpha\beta} \in C^{t+|\beta|-1}(\overline{\Omega}) \quad \text{für } |\beta| > 1 - t, \quad a_{\alpha\beta} \in L_{\infty}(\Omega) \quad \text{sonst, falls } t \notin \mathbb{N}.$$

Dann gehört jede Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ der Aufgabe

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

mit $f \in H^{-1+s}(\Omega)$ zu $H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und erfüllt die Abschätzungen

$$\|u\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq c_s \left[\|f\|_{H^{-1+s}(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right].$$

Damit kann mit den Voraussetzungen: $\Omega \in C^{0,1}$ beschränkt und $f_{A_3} \in H^{-1+s}(\Omega)$ für $s > 1$, gewährleistet werden, dass für die Lösung A_3 des Potentialproblems gilt: $A_3 \in H^{2+\varepsilon}(\Omega)$, für ein $\varepsilon > 0$. Wiederum erhält man mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz (Satz 3.3) das gewünschte Resultat

$$A_3 \in C^1(\Omega). \quad (3.19)$$

Definition des nichtlinearen Operators Ausgehend von der Variationsformulierung (3.11) in Operatorschreibweise

$$\langle D(\mathbf{v})A_{3,0}, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega = \langle f_{A_3}, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega - \langle D(\mathbf{v})A_{3,g}, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega \quad \text{für alle } \widetilde{A}_3 \in H_0^1(\Omega)$$

kann statt dem lineare Operator $D(\mathbf{v})$ hier nun ein nichtlinearer Operator F wie folgt definiert werden:

Weil für ein fixes $A_{3,0} \in H_0^1(\Omega)$ die Lösung $\mathbf{v}(A_{3,0})$ des Stokes-Problems eindeutig ist, kann die Bilinearform (3.9) als Funktional

$$\widetilde{F}_{A_{3,0}}(\widetilde{A}_3) := d(\mathbf{v}(A_{3,0}))(A_{3,0}, \widetilde{A}_3) = \frac{1}{\sigma\mu} \int_\Omega \nabla A_{3,0} \cdot \nabla \widetilde{A}_3 \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{v}(A_{3,0}) \cdot \nabla A_{3,0}) \widetilde{A}_3 \, d\mathbf{x}.$$

über $H_0^1(\Omega)$ aufgefasst werden. So kann der Operator

$$F : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$$

durch

$$F(A_{3,0}) := \widetilde{F}_{A_{3,0}} \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{für alle } A_{3,0} \in H_0^1(\Omega)$$

definiert werden. Somit lautet die Variationsformulierung

$$\langle F(A_{3,0}), \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega = \langle \widetilde{f}_{A_3}, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega \quad \text{für alle } \widetilde{A}_3 \in H_0^1(\Omega),$$

mit $\widetilde{f}_{A_3} = f_{A_3} - F(A_{3,g}) \in H^{-1}(\Omega)$ für eine feste Wahl der Fortsetzung $A_{3,g}$ der Randdaten. Damit ist es gelungen eine Formulierung zu finden, in der beide Teilprobleme enthalten sind. Die dazu äquivalente Operatorgleichung lautet:

$$F(A_{3,0}) = \widetilde{f}_{A_3}. \quad (3.20)$$

Satz 3.9. Die Operatorgleichung (3.20) ist für alle $\widetilde{f}_{A_3} \in H^{-1}(\Omega)$ eindeutig lösbar.

Beweis. Weil $\mathbf{v}(A_3)$ als Lösung des Stokesproblems für alle $A_3 \in H^1(\Omega)$ divergenzfrei ist, und unter den Voraussetzungen von Satz 3.7 zum Raum $[C(\Omega)]^2$ gehört, und somit die Voraussetzungen von Lemma 3.6 erfüllt, so übertragen sich die Eigenschaften der Bilinearform $d(\mathbf{v})(\cdot, \cdot)$ durch

$$\langle F(A_3), \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega = d(\mathbf{v}(A_3))(A_3, \widetilde{A}_3)$$

auf F :

$$\begin{aligned} \|F(A_3)\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{0 \neq \widetilde{A}_3 \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle F(A_3), \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega}{\|\widetilde{A}_3\|_{H^1(\Omega)}} \\ &= \sup_{0 \neq \widetilde{A}_3 \in H_0^1(\Omega)} \frac{d(\mathbf{v}(A_3))(A_3, \widetilde{A}_3)}{\|\widetilde{A}_3\|_{H^1(\Omega)}} \\ &\leq c_2^D \|A_3\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } A_3 \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

3 Analysis

und es gilt weiter

$$\langle F(\widetilde{A}_3), \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega \geq c_1^D \|\widetilde{A}_3\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } \widetilde{A}_3 \in H_0^1(\Omega).$$

Mit dem Riesz–Isomorphismus $J : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ kann eine, der Operatorgleichung äquivalente, Fixpunktgleichung

$$\widetilde{A}_3 = \widetilde{A}_3 - \rho J(F(\widetilde{A}_3) - \widetilde{f}_{A_3}) = (I - \rho JF)(\widetilde{A}_3) + \rho J\widetilde{f}_{A_3}$$

mit $\rho \in \mathbb{R}$, formuliert werden. Für den Operator

$$T_\rho := I - \rho JF : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

lässt sich Kontraktion zeigen

$$\begin{aligned} \|T_\rho \widetilde{A}_3\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|(I - \rho JF)(\widetilde{A}_3)\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq \|\widetilde{A}_3\|_{H^1(\Omega)}^2 - 2\rho \langle JF(\widetilde{A}_3), \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega + \rho^2 \|JF(\widetilde{A}_3)\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq (1 - 2\rho c_1^D + \rho^2 (c_2^D)^2) \|\widetilde{A}_3\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

falls $\rho \in (0, 2 \frac{c_1^D}{(c_2^D)^2})$ ist. Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz (siehe [12, S.101]) folgt Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes, und damit der Lösung der Operatorgleichung (3.20). \square

4 Diskretisierung

Die Diskretisierung des Randwertproblems (2.23) erfolgt mit der Finiten-Elemente-Methode, wie zum Beispiel in [13, 15, 23, 25] und [20] beschrieben. Als Elemente werden lineare Dreieckselemente verwendet.

4.1 Diskrete Variationsformulierung

Die diskreten Variationsformulierungen entstehen durch Ersetzen der kontinuierlichen Funktionen aus den kontinuierlichen Formulierungen durch Ansätze aus endlich-dimensionalen Ansatzräumen, welche in Abschnitt 4.1.3 genauer beschrieben werden.

4.1.1 Ansätze

Ausgehend von der kontinuierlichen Variationsformulierung (3.5):

Suche $\mathbf{u}_0^\top = (\mathbf{v}_0, p, A_{3,0}) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ sodass:

$$\begin{aligned} a(A_3)(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}) - b(\mathbf{w}, p) + a(A_3)(\mathbf{v}_g, \mathbf{w}) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_\Omega, \\ b(\mathbf{v}_0, q) + c(p, q) &= -b(\mathbf{v}_g, q), \\ d(\mathbf{v})(A_{3,0}, \widetilde{A}_3) + d(\mathbf{v})(A_{3,g}, \widetilde{A}_3) &= \langle f_{A_3}, \widetilde{A}_3 \rangle_\Omega, \end{aligned}$$

für alle Testfunktionen $(\mathbf{w}, q, \widetilde{A}_3) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, ersetzt man die gesuchten Funktionen durch deren Approximationen in geeigneten Ansatzräumen. Die gesuchten Funktionen $\mathbf{u}_0 = (\mathbf{v}_0, p, A_{3,0}) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ werden durch die Ansatzfunktionen $\mathbf{u}_{0,h} = (\mathbf{v}_{0,h}, p_h, A_{3,0,h}) \in (X_{v_{1,0,h}} \times X_{v_{2,0,h}} \times X_{p_h} \times X_{A_{3,0,h}}) = X_{0,h}$ aus endlich-dimensionalen Ansatzräumen ersetzt. Die Ansatzräume werden später festgelegt. Es sei nur erwähnt, dass hier die Dimension des Raumes $X_{0,h}$ mit \tilde{N} und die Dimension der Räume für die jeweiligen Funktion mit entsprechendem Index bezeichnet werden ($\tilde{N} = \tilde{N}_{v_1} + \tilde{N}_{v_2} + N_p + \tilde{N}_{A_3}$). Die Ansatzräume für Funktionen mit Randwerten ungleich null seien mit $X_{v_{1,h}} \times X_{v_{2,h}} \times X_{p_h} \times X_{A_{3,h}} = X_h$ bezeichnet. Die Dimensionen von diesen Ansatzräumen sind $N := \dim(X_h) = N_{v_1} + N_{v_2} + N_p + N_{A_3}$. In Abschnitt 4.1.3 werden diese Räume so gewählt, dass die Basis des Raumes $X_{0,h}$ eine Teilmenge der Basis von X_h ist. Die Darstellung der Ansatzfunktionen bezüglich der Basen der Ansatzräume lautet:

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_{v_1}} v_{1,k} \begin{pmatrix} \varphi_{1,k}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{N_{v_2}} v_{2,k} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{2,k}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N_{v_1} + N_{v_2}} v_k \varphi_k(\mathbf{x}),$$

4 Diskretisierung

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_p} p_k \psi_k(\mathbf{x}),$$

$$A_{3,h}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_{A_3}} A_{3,k} \phi_k(\mathbf{x}).$$

Als Testfunktionen werden die Basisfunktionen der jeweiligen Ansatzräume verwendet. Dies entspricht dem *Galerkin–Bubnov–Verfahren*, im Gegensatz zum *Galerkin–Petrov–Verfahren*, wo Ansatz- und Testräume verschieden gewählt werden. (siehe z.B.: [25]). Setzt man dies in die Bilinearformen ein, so erhält man

•

$$\begin{aligned} a(A_{3,h})(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\varphi}_\ell) &= \bar{\mu} \sum_{k=1}^{N_{v_1}} v_{1,k} \int_{\Omega} \nabla \varphi_{1,k}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \\ &\quad \bar{\mu} \sum_{k=1}^{N_{v_2}} v_{2,k} \int_{\Omega} \nabla \varphi_{2,k}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_{2,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \\ &\quad \sigma \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{N_{v_i}} v_{i,k} \int_{\Omega} \left(\varphi_{i,k}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} A_{3,h}(\mathbf{x}) \right) (\nabla A_{3,h}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\ell(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

für $\ell = 1, \dots, N_{v_1} + N_{v_2}$, mit $A_{3,h}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \phi_j(\mathbf{x})$

•

$$b(\boldsymbol{\varphi}_\ell, p_h) = \sum_{k=1}^{N_p} p_k \int_{\Omega} \psi_k(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_\ell(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}$$

für $\ell = 1, \dots, N_{v_1} + N_{v_2}$,

•

$$b(\mathbf{v}_h, \psi_\ell) = \sum_{k=1}^{N_{v_1}} v_{1,k} \int_{\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_{1,k}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{N_{v_2}} v_{2,k} \int_{\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_{2,k}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

für $\ell = 1, \dots, N_p$,

•

$$c(p_h, \psi_\ell) = \sum_{k=1}^{N_p} p_k \int_{\Omega} \psi_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \int_{\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

für $\ell = 1, \dots, N_p$,

•

$$d(\mathbf{v}_h)(A_{3,h}, \phi_\ell) = \frac{1}{\mu\sigma} \sum_{k=1}^{N_{A_3}} A_{3,k} \int_{\Omega} \nabla \phi_k(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi_\ell(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{N_{A_3}} A_{3,k} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_h \cdot \nabla) \phi_k(\mathbf{x}) \phi_\ell(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

$$\text{für } \ell = 1, \dots, N_{A_3} \text{ mit } \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_{v_1}+N_{v_2}} v_j \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{x}).$$

Somit lautet die zur kontinuierlichen Variationsformulierung (3.5) gehörende **diskrete Variationsformulierung** für das Gesamtsystem:

Suche $\mathbf{u}_{0,h} = (\mathbf{v}_{0,h}, p_h, A_{3,0,h}) \in X_{0,h}$ sodass:

$$\begin{aligned} a(A_{3,h})(\mathbf{v}_{0,h}, \boldsymbol{\varphi}_\ell) + a(A_{3,h})(\mathbf{v}_{g,h}, \boldsymbol{\varphi}_\ell) - b(\boldsymbol{\varphi}_\ell, p_h) &= \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_\ell \rangle_{\Omega} \\ b(\mathbf{v}_{0,h}, \psi_k) + c(p_h, \psi_k) &= -b(\mathbf{v}_{g,h}, \psi_k) \quad (4.1) \\ d(\mathbf{v}_h)(A_{3,0,h}, \phi_m) + d(\mathbf{v}_h)(A_{3,g,h}, \phi_m) &= \langle f_{A_3}, \phi_m \rangle_{\Omega} \end{aligned}$$

für alle Testfunktionen $(\boldsymbol{\varphi}_\ell, \psi_k, \phi_m) \in X_{0,h}$, mit $\ell = 1, \dots, \tilde{N}_{v_1} + \tilde{N}_{v_2}$, $k = 1, \dots, \tilde{N}_p$ und $m = 1, \dots, \tilde{N}_{A_3}$.

4.1.2 Netze

Die folgenden Abschnitte orientieren sich an [25]. Sei \mathcal{T}_M eine zulässige, formreguläre und global gleichmäßige Unterteilung eines polygonal berandeten Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dreieckige Elemente τ_ℓ :

$$\bar{\Omega} = \bar{\mathcal{T}}_M = \bigcup_{\ell=1}^M \bar{\tau}_\ell,$$

wobei M die Anzahl der Elemente sei. Die lokale Maschenweite sei

$$h_\ell = \sqrt{\Delta_\ell},$$

wobei mit Δ_ℓ die Fläche des Elements τ_ℓ bezeichnet wird. Mit h sei die globale Maschenweite

$$h = \max_{\ell=1, \dots, M} h_\ell$$

bezeichnet. Die für die Beispielrechnungen (vgl.: Abschnitt 6) verwendeten Unterteilungen sind Triangulationen des Gebiets $\Omega = (0, 1)^2$ in rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke derselben Größe. Dadurch sind die obigen Anforderungen erfüllt.

4 Diskretisierung

Somit können die zu berechnenden Integrale als Summe von Integralen über die Elemente betrachtet werden. Das Auswerten der Integrale auf den Elementen kann auf ein Referenzelement

$$\tau = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_1\}$$

zurückgeführt werden, indem man für ein $\mathbf{x} \in \tau_\ell$ die Darstellung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\ell_1} + \sum_{i=1}^2 \xi_i (\mathbf{x}_{\ell_{i+1}} - \mathbf{x}_{\ell_1}) = \mathbf{x}_{\ell_1} + J_\ell \boldsymbol{\xi}$$

benutzt, wobei \mathbf{x}_{ℓ_i} , $i = 1, 2, 3$, die Ecken des Elements τ_ℓ bezeichnen, und

$$J_\ell = \begin{pmatrix} x_{\ell_2,1} - x_{\ell_1,1} & x_{\ell_3,1} - x_{\ell_1,1} \\ x_{\ell_2,2} - x_{\ell_1,2} & x_{\ell_3,2} - x_{\ell_1,2} \end{pmatrix}.$$

Die Basisfunktionen der Ansatzräume können durch lokale Formfunktionen auf dem Referenzelement τ dargestellt werden.

4.1.3 Ansatzräume

Um Konvergenz von $\mathbf{u}_h \in X_h$ gegen $\mathbf{u} \in X$ zu ermöglichen, $\mathbf{u}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathbf{u}$ (entspricht $\mathbf{u}_h \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \mathbf{u}$) ist es notwendig eine **Approximationseigenschaft**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\mathbf{u}_h \in X_h} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_X = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in X$$

für den Ansatzraum X_h , und damit für die einzelnen Ansatzräume $X_{v_1,h}$, $X_{v_2,h}$, X_{p_h} und $X_{A_3,h}$, zu fordern.

In dieser Arbeit sind als Ansatzräume die Räume der stückweise linearen und global stetigen Funktionen $S_h^1(\mathcal{T}_h)$ auf einer Triangulation mit globaler Maschenweite h gewählt. Dabei werden als Basisfunktionen sog. ‘‘Hütchenfunktionen’’ verwendet. Dies sind lineare, global stetige Funktionen und haben in einem Knoten den Wert 1 und in den restlichen Knoten 0:

$$\chi_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_j & \text{wenn } i \neq j \\ 1 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_j & \text{wenn } i = j \\ \text{linear} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörigen Formfunktionen auf dem Referenzelement τ lauten:

$$\begin{aligned} \omega_1(\boldsymbol{\xi}) &:= \xi_1, \\ \omega_2(\boldsymbol{\xi}) &:= \xi_2, \\ \omega_3(\boldsymbol{\xi}) &:= 1 - \xi_1 - \xi_2. \end{aligned}$$

Für den Ansatzraum $S_h^1(\mathcal{T}_h)$ ist die Approximationseigenschaft

$$\inf_{u_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h)} \|u - u_h\|_{H^\sigma(\Omega)} \leq ch^{s-\sigma} |u|_{H^s(\Omega)} \quad (4.2)$$

für $u \in H^s(\Omega)$ mit $s \in [\sigma, 2]$ mit $\sigma = 0, 1$, nachweisbar (siehe z.B.: [25], [13]). Ansätze höherer Ordnungen sind auch möglich; (siehe z.B.: [2], [25], [13]).

Für die Approximationen der Komponenten $v_{i,h}$ ($i = 1, 2$) des Geschwindigkeitsvektors, und für die Vektorpotentialkomponente $A_{3,h}$, wurde jeweils ein Netz mit globaler Maschenweite h gewählt. (für $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$). Um die Stabilität zu garantieren (vgl. (4.6)), wurde als Netz für die Approximation des Druckes p_h das Netz mit doppelter Maschenweite $2h$ verwendet. Für die hier verwendeten Ansatzräume gelte

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{v}_h} &:= [S_h^1(\mathcal{T}_h) \cap H^1(\Omega)]^2, \\ X_{p_h} &:= S_{2h}^1(\mathcal{T}_{2h}), \\ X_{A_{3,h}} &:= S_h^1(\mathcal{T}_h) \cap H^1(\Omega), \\ X_h &:= X_{\mathbf{v}_h} \times X_{p_h} \times X_{A_{3,h}}. \end{aligned}$$

Die Ansatzräume für die Funktionen deren Werte am Rand verschwinden $v_{i,0,h}, A_{3,0,h} \in H_0^1(\Omega)$ ($i = 1, 2$) seien

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{v}_{0,h}} &:= [S_h^1(\mathcal{T}_h) \cap H_0^1(\Omega)]^2, \\ X_{p_h} &:= S_{2h}^1(\mathcal{T}_{2h}), \\ X_{A_{3,0,h}} &:= S_h^1(\mathcal{T}_h) \cap H_0^1(\Omega), \\ X_{0,h} &:= X_{\mathbf{v}_{0,h}} \times X_{p_h} \times X_{A_{3,0,h}}. \end{aligned}$$

Bei linearen Elementen sind die einzelnen Basisfunktionen der Ansatzräume jeweils genau einem Netzknoten zugeordnet, wobei der zugehörige Koeffizient dem Funktionswert am Knoten entspricht. Durch Sortierung der Indizes der Netzknoten, $i = 1, \dots, \tilde{N}$ für innere Knoten und $i = \tilde{N} + 1, \dots, N$ für Randknoten, können Funktionen mit bekannten Randwerten wie folgt dargestellt werden: z.B.:

$$A_{3,h}(\mathbf{x}) = A_{3,0,h}(\mathbf{x}) + A_{3,g,h}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_{A_3}} A_{3,0,i} \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\tilde{N}_{A_3}} A_{3,g,i} \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=\tilde{N}_{A_3}+1}^{N_{A_3}} g_{A_3}(\mathbf{x}_i) \phi_i(\mathbf{x}).$$

4.1.4 Lineare Teilprobleme

Für die linearen Teilprobleme ergeben sich aus den diskreten Variationsformulierungen lineare Gleichungssysteme. Im folgenden werden Lösbarkeitsaussagen und Fehlerabschätzungen erarbeitet.

Vektorpotential-Problem: Für bekannte \mathbf{v} ist für das Vektorpotential-Teilproblem die diskrete Variationsformulierung durch

$$\sum_{k=1}^{\tilde{N}_{A_3}} A_{3,0,k} d(\mathbf{v})(\phi_k, \phi_\ell) = \langle f_{A_3}, \phi_\ell \rangle_\Omega - \sum_{k=1}^{N_{A_3}} A_{3,g,k} d(\mathbf{v})(\phi_k, \phi_\ell) \quad \text{für } \ell = 1, \dots, \tilde{N}_{A_3}$$

gegeben. Wenn man auch \mathbf{v} durch eine Approximation \mathbf{v}_h ersetzt, so ist die Bilinearform $d(\mathbf{v}_h)(\cdot, \cdot)$ gegenüber der Bilinearform $d(\mathbf{v})(\cdot, \cdot)$ als gestört zu betrachten. In diesem Fall liefert das Strang–Lemma die gewünschten Aussagen über Lösbarkeit und Fehlerabschätzung. Die gestörte Formulierung lautet:

$$\sum_{k=1}^{\tilde{N}_{A_3}} \tilde{A}_{3,0,k} d(\mathbf{v}_h)(\phi_k, \phi_\ell) = \langle f_{A_3}, \phi_\ell \rangle_\Omega - \sum_{k=1}^{N_{A_3}} A_{3,g,k} d(\mathbf{v}_h)(\phi_k, \phi_\ell) \quad \text{für } \ell = 1, \dots, \tilde{N}_{A_3}, \quad (4.3)$$

An dieser Stelle muss vorausgesetzt werden, dass die Approximation des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v}_h divergenzfrei ist. Wenn \mathbf{v}_h Lösung des Stokesproblems ist, so ist \mathbf{v}_h divergenzfrei im schwachen Sinn. Damit ist $d(\mathbf{v}_h)(\cdot, \cdot) : X_{A_3} \times X_{A_3}$ analog zu Lemma 3.6 $X_{A_{3,0}}$ -elliptisch und beschränkt.

$$\langle D(\mathbf{v}_h)A_{3,0,h}, A_{3,0,h} \rangle \geq \tilde{c}_1^D \|A_{3,0,h}\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } A_{3,0,h} \in X_{A_{3,0,h}}.$$

Damit sind die Voraussetzungen für das Strang–Lemma erfüllt:

Satz 4.1 (Strang–Lemma). *Der gestörte Operator $D(\mathbf{v}_h)$ sei $X_{A_{3,0,h}}$ -elliptisch. Dann ist das gestörte Variationsproblem (4.3) eindeutig lösbar und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\begin{aligned} \|A_{3,0} - \tilde{A}_{3,0,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq & \left[1 + \frac{1}{\tilde{c}_1^D} (c_2^D + \tilde{c}_2^D) \right] \frac{c_2^D}{c_1^D} \inf_{\hat{A}_{3,0,h} \in X_{A_{3,0}}} \|A_{3,0} - \hat{A}_{3,0,h}\|_{H^1(\Omega)} \\ & + \frac{1}{\tilde{c}_1^D} \|(D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{v}_h))A_{3,0}\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Beweis. siehe z.B.: [25, Seite 179, Satz 8.3]. □

Um eine Aussage über den Approximationsfehler in Abhängigkeit der Maschenweite h zu erhalten, muss noch der letzte Term $\|(D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{v}_h))A_{3,0}\|_{H^{-1}(\Omega)}$ der obigen Fehlerabschätzung betrachtet werden.

Lemma 4.1. *Für den Operator $D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{v}_h)$ gilt die Abschätzung*

$$\|(D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{v}_h))A_{3,0}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} \|A_{3,0}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Beweis. Es gilt

$$\|(D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{v}_h))A_{3,0}\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{0 \neq \tilde{A}_3 \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle (D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{v}_h))A_{3,0}, \tilde{A}_3 \rangle_\Omega}{\|\tilde{A}_3\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Der Operator $D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{v}_h)$ ist durch $d(\mathbf{v})(\cdot, \cdot) - d(\mathbf{v}_h)(\cdot, \cdot)$ induziert. Wegen der Definition von $d(\cdot)(\cdot, \cdot)$ und der Cauchy–Schwarz–Ungleichung und der stetigen Einbettung

von $H^1(\Omega)$ in $L_4(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 d(\mathbf{v})(A_{3,0}, \widetilde{A}_3) - d(\mathbf{v}_h)(A_{3,0}, \widetilde{A}_3) &= \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla A_{3,0}) \widetilde{A}_3 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{v}_h \cdot \nabla A_{3,0}) \widetilde{A}_3 \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \cdot \nabla A_{3,0}) \widetilde{A}_3 \, d\mathbf{x} \\
 &\leq \|\nabla A_{3,0}\|_{[L_2(\Omega)]^2} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{[L_4(\Omega)]^2} \|\widetilde{A}_3\|_{L_4(\Omega)} \\
 &\leq \|A_{3,0}\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} \|\widetilde{A}_3\|_{H^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\|(D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{v}_h))A_{3,0}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} \|A_{3,0}\|_{H^1(\Omega)}.$$

□

An dieser Stelle muss vorausgesetzt werden dass, $\mathbf{v} \in [H^s(\Omega)]^2$ und es gelte die Fehlerabschätzung:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq ch^{s-1} |\mathbf{v}|_{[H^s(\Omega)]^2},$$

für $s \in [1, 2]$. Wenn man $|\mathbf{v}|_{[H^s(\Omega)]^2}$ in die Konstante c steckt ergibt sich mit der Approximationseigenschaft (4.2) unter der Voraussetzung $A_{3,0} \in H^s(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
 \|A_{3,0} - \widetilde{A}_{3,0,h}\|_{H^1(\Omega)} &\leq \widetilde{c} \inf_{\hat{A}_{3,0,h} \in X_{A_{3,0,h}}} \|A_{3,0} - \hat{A}_{3,0,h}\|_{H^1(\Omega)} \\
 &\quad + \frac{1}{\widetilde{c}_1} \|(D(\mathbf{v}) - D(\mathbf{v}_h))A_{3,0}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \hat{c}h^{s-1} |A_{3,0}|_{H^s(\Omega)}, \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

für $s \in [1, 2]$.

Stokesproblem: Die diskrete Variationsformulierung für das Stokesproblem mit vorgegebenem Potential lautet:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_{\mathbf{v}}} v_{0,i} a(A_3)(\varphi_i, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N_p} p_k b(\psi_k, \varphi_j) &= \langle \mathbf{f}_{\mathbf{v}}, \varphi_j \rangle_{\Omega} - \sum_{\ell=1}^{N_{\mathbf{v}}} v_{g,\ell} a(A_3)(\varphi_{\ell}, \varphi_j), \\
 \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_{\mathbf{v}}} v_{0,i} b(\psi_m, \varphi_i) + \sum_{k=1}^{N_p} p_k c(\psi_m, \psi_k) &= - \sum_{\ell=1}^{N_{\mathbf{v}}} v_{g,\ell} b(\psi_m, \varphi_{\ell}),
 \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, \widetilde{N}_{\mathbf{v}}$ und $m = 1, \dots, N_p$. Ähnlich wie beim Vektorpotentialproblem, wird das System durch Ersetzen von A_3 durch die Approximation $A_{3,h}$ gestört. Die gestörte diskrete Variationsformulierung lautet:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_{\mathbf{v}}} \widetilde{v}_{0,i} a(A_{3,h})(\varphi_i, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N_p} \widetilde{p}_k b(\psi_k, \varphi_j) &= \langle \mathbf{f}_{\mathbf{v}}, \varphi_j \rangle_{\Omega} - \sum_{\ell=1}^{N_{\mathbf{v}}} v_{g,\ell} a(A_{3,h})(\varphi_{\ell}, \varphi_j), \\
 \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_{\mathbf{v}}} \widetilde{v}_{0,i} b(\psi_m, \varphi_i) + \sum_{k=1}^{N_p} \widetilde{p}_k c(\psi_m, \psi_k) &= - \sum_{\ell=1}^{N_{\mathbf{v}}} v_{g,\ell} b(\psi_m, \varphi_{\ell}), \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

4 Diskretisierung

für $j = 1, \dots, \tilde{N}_{\mathbf{v}}$ und $m = 1, \dots, N_p$.

Bemerkung. Um die eindeutige Lösbarkeit dieses Systems zu garantieren, muss die Dimension des Ansatzraumes $X_{\mathbf{v}_{0,h}} = X_{v_{1,0,h}} \times X_{v_{2,0,h}}$ für $\mathbf{v}_{0,h}$ größer oder gleich der Dimension des Ansatzraumes X_{p_h} für p_h sein.

$$\tilde{N}_{v_1} + \tilde{N}_{v_2} \geq N_p$$

Dies gilt allgemein für Sattelpunktprobleme. Siehe auch [13, S.261], [25, S.183].

Weil $A_{3,h} \in S_h^1(\mathcal{T}_h)$ sind die ersten Ableitungen im schwachen Sinn beschränkt. Der durch die gestörte Bilinearform $a(A_{3,h})(\cdot, \cdot)$ induzierte gestörte Operator $A(A_{3,h})$ ist analog zu Lemma 3.1 wegen $X_{\mathbf{v}_{0,h}} \subset [H_0^1(\Omega)]^2$ beschränkt und $X_{\mathbf{v}_{0,h}}$ -elliptisch. Weiters ist für die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Stokesproblems die folgende **diskrete Stabilitätsbedingung** notwendig:

$$\tilde{c}_s \|q\|_{L_2(\mathcal{T}_{2h})} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in X_{\mathbf{v}_h}} \frac{|b(\mathbf{v}_h, q)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{[H^1(\mathcal{T}_h)]^2}} \quad \text{für alle } q \in X_{p_h}. \quad (4.6)$$

Dies kann in zwei Schritten gezeigt werden. (siehe z.B.: [13]). Als erstes Teilergebnis wird eine $H_1(\mathcal{T}_{2h})$ Abschätzung

$$\tilde{c}_s \|q\|_{H^1(\mathcal{T}_{2h})} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in X_{\mathbf{v}_h}} \frac{|b(\mathbf{v}_h, q)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{[L_2(\mathcal{T}_h)]^2}} \quad \text{für alle } q \in X_{p_h} \quad (4.7)$$

bewiesen:

Lemma 4.2 (siehe z.B [13, S.264-265, Satz 12.3.12]). *Für lineare Elemente auf Netzen mit Maschenweite h für $v_{i,0,h}$ ($i = 1, 2$) und doppelte Maschenweite $2h$ für p_h gilt die Stabilitätsbedingung (4.7).*

Beweis. Seien $X_{\mathbf{v}_h} = [S_h^1(\mathcal{T}_h) \cap H_0^1(\Omega)]^2$ und $X_{p_h} = S_{2h}^1(\mathcal{T}_{2h}) \cap H^1(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega)$ die Ansatzräume für die Druckapproximation und der Approximationen der Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes (sowie auch des Potentials). Der Beweis besteht darin, für alle Funktionen $q \in X_{p_h}$ eine Funktion $\mathbf{v} \in X_{\mathbf{v}_h}$ so zu konstruieren, dass die Ungleichung (4.6) erfüllt ist. Zu jeder inneren Dreiecksseite γ der Triangulation \mathcal{T}_{2h} gibt es zwei Dreiecke $\tau_{1\gamma}, \tau_{2\gamma} \in \mathcal{T}_{2h}$ mit $\gamma = \overline{\tau_{1\gamma}} \cap \overline{\tau_{2\gamma}}$. Sei $\partial/\partial t$ die Ableitung in Richtung der Strecke γ , $\partial/\partial n$ die Ableitung in Richtung der Normalen zur Strecke γ . Es gibt a_γ und b_γ mit

$$a_\gamma^2 + b_\gamma^2 = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x} = a_\gamma \frac{\partial}{\partial n} + b_\gamma \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = b_\gamma \frac{\partial}{\partial n} - a_\gamma \frac{\partial}{\partial t}.$$

Im Gegensatz zu $\partial q/\partial n$ ist $\partial q/\partial t$ auf $\tau_{1\gamma} \cup \tau_{2\gamma} \cup \gamma$ konstant. Wir bezeichnen diesen Wert mit $q_{t|\gamma}$. Der Mittelpunkt \mathbf{x}^γ von γ ist ein Knoten von \mathcal{T}_h . Wir definieren die stückweise lineare Funktion u_γ über \mathcal{T}_h durch die Knotenwerte

$$u_\gamma(\mathbf{x}^\gamma) = q_{t|\gamma}, \quad u_\gamma(\mathbf{x}^j) = 0, \quad \text{in den übrigen Knoten}$$

und setzen

$$\mathbf{v} := \sum_{\gamma} \begin{pmatrix} b_{\gamma} \\ -a_{\gamma} \end{pmatrix} q_{t|\gamma} u_{\gamma} \in X_{\mathbf{v}_h}, \quad \tilde{\mathbf{v}} := \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{[L_2(\Omega)]^2}}.$$

Die Summe \sum_{γ} erstreckt sich über alle inneren Kanten von \mathcal{T}_{2h} . In $\tau_{1\gamma} \cup \tau_{2\gamma}$ gilt

$$\langle \nabla q, \begin{pmatrix} b_{\gamma} \\ -a_{\gamma} \end{pmatrix} \rangle q_{t|\gamma} = |q_{t|\gamma}|^2,$$

so dass

$$b(q, \mathbf{v}) = \sum_{\gamma} \int_{\tau_{1\gamma} \cup \tau_{2\gamma}} \langle \nabla q, \begin{pmatrix} b_{\gamma} \\ -a_{\gamma} \end{pmatrix} \rangle q_{t|\gamma} u_{\gamma} \, d\mathbf{x} = \sum_{\gamma} |q_{t|\gamma}|^2 \int_{\tau_{1\gamma} \cup \tau_{2\gamma}} u_{\gamma} \, d\mathbf{x} \geq c(2h)^2 \sum_{\gamma} |q_{t|\gamma}|^2.$$

Sind $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Kanten von $\tau \in \mathcal{T}_{2h}$ (\mathcal{T}_{2h} quasiuniform), so ist

$$\int_{\tau} |\nabla q|^2 \, d\mathbf{x} \leq ch^2 \sum_{i=1}^3 |q_{t|\gamma_i}|^2.$$

Damit gilt $b(q, \mathbf{v}) \geq c' \|q\|_{L_2(\Omega)}^2$, und wegen der Normäquivalenz $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} \sim \|\nabla \cdot\|_{L_2(\Omega)}$ auf $H^1(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega)$ folgt

$$|b(q, \mathbf{v})| \geq c' \|q\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla q\|_{L_2(\Omega)}, \quad \text{und} \quad |b(q, \tilde{\mathbf{v}})| \geq c' \frac{\|q\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla q\|_{L_2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}\|_{[L_2(\Omega)]^2}}.$$

Ähnlich zeigt man $\|\mathbf{v}\|_{[L_2(\Omega)]^2} \leq c'' \|\nabla q\|_{L_2(\Omega)}$ und erhält $|b(q, \tilde{\mathbf{v}})| \geq \tilde{\beta} \|q\|_{H^1(\Omega)}$ mit $\tilde{\beta} := c'/c''$ unabhängig von h , womit die Behauptung folgt. \square

Bemerkung. Die diskrete Stabilitätsbedingung (4.7) kann auch für anders gewählte Ansatzräume gezeigt werden. Für Bubblefunktionen für \mathbf{v}_h und lineare Elemente für p_h auf derselben Triangulierung, siehe [13, S.263]. Ansonsten sind auch Taylor–Hood–Elemente gebräuchlich (siehe z.B.: [2, S. 144]).

Als zweiten Schritt folgt:

Satz 4.2. Sei $\Omega \in C^{0,1}$ ein beschränktes, konvexes Lipschitzgebiet. $X_{\mathbf{v}_h}$ erfülle die Approximationseigenschaft

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in X_{\mathbf{v}_h}} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq c_A h \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)} \quad \text{für alle} \quad \mathbf{v} \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2$$

und es gelte die inverse Abschätzung

$$\|\mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq c_I h^{-1} \|\mathbf{v}_h\|_{[L_2(\Omega)]^2}. \quad (4.8)$$

Dann ist die Bedingung (4.7) hinreichend für die diskrete Stabilitätsbedingung (4.6).

4 Diskretisierung

Beweis. (siehe z.B.: [13, Seite 262, Satz 12.3.8]) Zu gegebenem $p \in X_{p_h}$ gibt es laut der kontinuierlichen Stabilitätsbedingung (3.13) ein $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ mit $\|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} = 1$ sodass

$$|b(p, \mathbf{v})| \geq \beta \|p\|_{L_2(\Omega)}.$$

Die orthogonale $[H_0^1(\Omega)]^2$ -Projektion \mathbf{v}_h von \mathbf{v} auf $X_{\mathbf{v}_h}$ erfüllt die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_h + \mathbf{e}, \\ \|\mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} &\leq \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} = 1, \quad \|\mathbf{e}\|_{[L_2(\Omega)]^2} \leq Ch \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} = Ch, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{e} den Fehler bezeichnet. Aus

$$\begin{aligned} b(p, \mathbf{v}_h) &= b(p, \mathbf{v}) - b(p, \mathbf{e}) \geq \beta \|p\|_{L_2(\Omega)} - b(p, \mathbf{e}) \geq \beta \|p\|_{L_2(\Omega)} - \|p\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{e}\|_{[L_2(\Omega)]^2} \\ &\geq \beta \|p\|_{L_2(\Omega)} - Ch \|p\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

und $\|\mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq 1$ schließt man

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in X_{\mathbf{v}_h}, \|\mathbf{u}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} = 1} |b(p, \mathbf{u}_h)| \geq \beta \|p\|_{L_2(\Omega)} - Ch \|p\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.9)$$

Wegen (4.7) und (4.8) gibt es ein $\mathbf{v}^* \in X_{\mathbf{v}_h}$ mit $\|\mathbf{v}^*\|_{[L_2(\Omega)]^2} = 1$ und

$$|b(p, \mathbf{v}^*)| \geq \tilde{\beta} \|p\|_{H^1(\Omega)} = \tilde{\beta} \|p\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}^*\|_{[L_2(\Omega)]^2} \geq \frac{\tilde{\beta}}{c_I} h \|p\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}^*\|_{[H^1(\Omega)]^2}$$

Hieraus folgt

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in X_{\mathbf{v}_h}, \|\mathbf{u}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} = 1} |b(p, \mathbf{u}_h)| \geq \hat{\beta} h \|p\|_{H^1(\Omega)}, \quad \text{mit } \hat{\beta} := \frac{\tilde{\beta}}{c_I}. \quad (4.10)$$

Multipliziert man (4.9) mit $\hat{\beta}/(C + \hat{\beta})$ und (4.10) mit $C/(C + \hat{\beta})$, so lautet die Summe

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in X_{\mathbf{v}_h}, \|\mathbf{u}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} = 1} |b(p, \mathbf{u}_h)| \geq \bar{\beta} \|p\|_{L_2(\Omega)}, \quad \text{mit } \bar{\beta} := \frac{\beta \hat{\beta}}{C + \hat{\beta}}.$$

Da $\bar{\beta}$ unabhängig von p und h ist, ist (4.6) bewiesen. \square

Mit der diskreten Stabilitätsbedingung (4.6) kann wie in Lemma 3.5 die X_{p_h} -Elliptizität des Schurkomplementoperators $S_h = B(A(A_{3,h}))^{-1}B' + C$ gezeigt werden. Damit erhält man, analog zum Strang-Lemma (Satz 4.1) für das Vektorpotentialproblem, die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Schurkomplementsystems mit der Fehlerabschätzung:

$$\|p - \tilde{p}_h\|_X \leq c_1 \inf_{q_h \in X_h} \|p - q_h\|_X + c_2 \|(S - S_h)p\|_{L_2(\Omega)}.$$

Weiter wie in [25, S. 184ff] über allgemeine Sattelpunktprobleme, folgt schließlich die Fehlerabschätzung

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|p - p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq c \left\{ \inf_{\mathbf{w}_h \in X_{\mathbf{v}_h}} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \inf_{q_h \in X_{p_h}} \|p - q_h\|_{L_2(\Omega)} \right\}. \quad (4.11)$$

Mit den Annahmen über die Störungsterme

$$\|(A(A_3) - A(A_{3,h}))\mathbf{v}_0\|_{[H^{-1}(\Omega)]^2} \leq ch^{s-1}|\mathbf{v}_0|_{[H^s(\Omega)]^2},$$

und

$$\|(S - S_h)p\|_{L_2(\Omega)} \leq ch^t|p|_{H^t(\Omega)},$$

(Der Beweis ist aufwendiger als im Fall des Vektorpotentialproblems (vgl. Lemma 4.1), da A_3 nichtlinear in die Bilinearform $a(A_3)(\cdot, \cdot)$ eingeht, und wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht erbracht.) Mit den Approximationseigenschaften (4.2) der einzelnen Ansatzräume folgt

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|p - p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq c \{h^{s-1}|\mathbf{v}|_{[H^s(\Omega)]^2} + h^t|p|_{H^t(\Omega)}\}$$

mit $s \in [1, 2]$ und $t \in [0, 2]$. (vgl. auch [13, Seite 266, Satz 12.3.14]). Konkret ergibt sich für $s = 2, t = 1$:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|p - p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq ch \{|\mathbf{v}|_{[H^2(\Omega)]^2} + |p|_{H^1(\Omega)}\}$$

für $\mathbf{v} \in H^2(\Omega)$ und $p \in H^1(\Omega)$. Eine $L_2(\Omega)$ -Fehlerabschätzung wird in Abschnitt 4.2 angegeben.

4.1.5 Newtonverfahren

Kurz zur allgemeinen Theorie:

Eine gängige Methode zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0,$$

mit $\mathbf{F} : D \subset X \rightarrow Y$, in Banachräumen X, Y , ist das Newtonverfahren. (siehe z.B.: [7]). Die Grundidee besteht darin, schrittweise, durch Lösen des linearisierten Gleichungssystems

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u}^k)\mathbf{u}^{k+1} = -\mathbf{F}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{F}'(\mathbf{u}^k)\mathbf{u}^k,$$

eine konvergente Folge von Näherungslösungen zu generieren. Mit den Voraussetzungen, dass \mathbf{F} im ganzen Definitionsbereich Fréchet-differenzierbar ist, die Fréchet-Ableitung \mathbf{F}' invertierbar ist, und die Startnäherung \mathbf{u}^0 "hinreichend" nahe an der Lösung ist, wird in [22, Seite 126, Satz 8.6.12] gezeigt, dass eine Lösung existiert und sie mit dem Newtonverfahren gefunden wird. (siehe auch [2, S.223]). Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Lipschitzstetigkeit der Fréchet-Ableitung \mathbf{F}' kann auch quadratische Konvergenz gezeigt werden. (siehe z.B.: [7], [22]).

Die diskrete Variationsformulierung des Gesamtsystems (4.1) entspricht einem nicht-linearen Gleichungssystem:

$$\mathbf{F}_h(\mathbf{u}_h) = 0,$$

mit $\mathbf{F}_h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Die allgemeinen Banachräume werden durch endlichdimensionale Ansatzräume ersetzt, in denen Funktionen auch durch den Vektor ihrer Koeffizienten zu den Basisfunktionen identifiziert werden können. Anstelle der Fréchet–Ableitung tritt die Jacobimatrix.

4.2 L_2 -Fehlerabschätzungen

Die wichtige Aussage in diesem Abschnitt liefert der

Lemma 4.3 (Aubin–Nitsche–Trick, [25, Seite 227, Satz 11.1]). *Sei Ω entweder glatt berandet oder konvex. Für $f \in L_2(\Omega)$ und $g = \gamma_0^{int} u_g$ mit $u_g \in H^2(\Omega)$ sei $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung von*

$$a(u_0, v) = \langle f, v \rangle - a(u_g, v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega),$$

und es gelte

$$\|u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq c \{ \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u_g\|_{H^2(\Omega)} \}.$$

Für die Näherungslösung $u_{0,h} \in X_h$ der diskreten Variationsformulierung

$$a(u_{0,h}, v_h) = \langle f, v_h \rangle - a(u_g, v_h) \quad \text{für alle } v_h \in X_h,$$

gilt dann die Fehlerabschätzung

$$\|u_0 - u_{0,h}\|_{L_2(\Omega)} \leq ch^2 [\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u_g\|_{H^2(\Omega)}].$$

Angewandt auf das Potentialproblem erhält man mit dem Spursatz

$$\|A_3 - A_{3,h}\|_{L_2(\Omega)} \leq ch^2 [\|f_{A_3}\|_{L_2(\Omega)} + \|g_{A_3}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}], \quad (4.12)$$

unter den Voraussetzungen des Lemmas.

Im Falle des Stokesproblems gilt ähnliches

Satz 4.3 ([13, Seite 266, Satz 12.3.15 und Korollar 12.3.16]). *Für alle $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega)$ habe das Stokesproblem*

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, & -\nabla \cdot \mathbf{u} &= g & \text{in } \Omega, \\ & & \gamma_0^{int} \mathbf{u} &= 0 & \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

eine Lösung $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2$, $p \in H^1(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega)$ mit

$$\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)} \leq c [\|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}].$$

Es gelte die diskrete Stabilitätsbedingung (4.6). Dann gilt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L_2(\Omega)]^2} + h\|p - p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq ch^2 [\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} + \|p\|_{H^1(\Omega)}].$$

In der Notation, wie sie hier verwendet wird, und mit den geforderten Regularitätsannahmen an die Lösung und die Fortsetzung der Randdaten, und dem Spursatz, lautet die $L_2(\Omega)$ -Fehlerabschätzung

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{[L_2(\Omega)]^2} + h\|p - p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq ch^2 \left[\|\mathbf{f}_v\|_{[L_2(\Omega)]^2} + \|\mathbf{g}_v\|_{[H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)]^2} \right]. \quad (4.13)$$

5 Löser

In diesem Abschnitt werden die zu lösenden linearen Gleichungssysteme, welche durch die Diskretisierung der Variationsformulierungen in Kapitel 4 entstanden, explizit angeführt, und die eingesetzten numerischen Löser genannt, mit welchen die Näherungen berechnet werden können.

5.1 Aufteilung in lineare Teilprobleme

Wie in Kapitel 3.2.1 kann das nichtlineare Gesamtproblem in zwei lineare Teilprobleme aufgespalten werden. Die Lösung des Gesamtproblems ergibt sich als Grenzwert der Folge der alternierend gelösten linearen Teilprobleme.

5.1.1 Vektorpotential-Problem mit vorgegebenem Geschwindigkeitsfeld

Das zur gestörten Formulierung (4.3) äquivalente lineare Gleichungssystem, das laut Satz 4.1 eindeutig lösbar ist, lautet:

$$D_h(\mathbf{v}_h)\tilde{\mathbf{A}}_{3,0} = \tilde{\mathbf{f}}_{A_3}, \quad (5.1)$$

mit der Matrix

$$D_h(\mathbf{v}_h)[i, j] := d(\mathbf{v}_h)(\phi_j, \phi_i) \quad (5.2)$$

$$= \frac{1}{\mu\sigma} \int_{\Omega} \nabla\phi_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{v}_h \cdot \nabla\phi_j(\mathbf{x}))\phi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (5.3)$$

für $i, j \in \{1, \dots, \tilde{N}_{A_3}\}$ mit $\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_{v_1}+N_{v_2}} v_k \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})$, dem Vektor der Unbekannten

$$\tilde{\mathbf{A}}_{3,0}[i] := \tilde{A}_{3,0,i}$$

und dem rechte-Seite Vektor

$$\tilde{\mathbf{f}}_{A_3}[i] := \langle f_{A_3}, \phi_i \rangle_{\Omega} - \sum_{k=1}^{N_{A_3}} A_{3,g,k} d(\mathbf{v}_h)(\phi_k, \phi_i).$$

Umgehung der Fortsetzung: Bisher reichte das Wissen um die Existenz der Fortsetzung $A_{3,g,h}$ der Randdaten aus. Die explizite Kenntnis der Fortsetzung ist auch hier nicht erforderlich, wenn man die Summanden mit Indizes von inneren Knoten auf die linke Seite als Unbekannte

$$\hat{A}_{3,0,k} := \tilde{A}_{3,0,k} + A_{3,g,k} \quad \text{für } k = 1, \dots, \tilde{N}_{A_3}$$

schreibt. Damit lautet das zu lösende System:

$$\sum_{k=1}^{\tilde{N}_{A_3}} \hat{A}_{3,0,k} d(\mathbf{v}_h)(\phi_k, \phi_\ell) = \langle f_{A_3}, \phi_\ell \rangle_\Omega - \sum_{k=\tilde{N}_{A_3}+1}^{N_{A_3}} g_{A_3}(\mathbf{x}_k) d(\mathbf{v}_h)(\phi_k, \phi_\ell),$$

für $\ell = 1, \dots, \tilde{N}_{A_3}$, beziehungsweise

$$D_h(\mathbf{v}_h) \hat{\mathbf{A}}_{3,0} = \hat{\mathbf{f}}_{A_3}, \quad (5.4)$$

mit der Matrix $D_h(\mathbf{v}_h)$ wie oben beschrieben, und für $i = 1, \dots, \tilde{N}_{A_3}$:

$$\hat{\mathbf{A}}_{3,0}[i] := \tilde{A}_{3,0,i} + A_{3,g,i},$$

dem Vektor der Unbekannten, und dem rechte-Seite-Vektor

$$\hat{\mathbf{f}}_{A_3}[i] := \langle f_{A_3}, \phi_i \rangle_\Omega - \sum_{k=\tilde{N}_{A_3}+1}^{N_{A_3}} g_{A_3}(\mathbf{x}_k) d(\mathbf{v}_h)(\phi_k, \phi_i).$$

Lösung des Systems: Weil die Matrix $D_h(\mathbf{v}_h)$ aufgrund des Koppelungsterms nicht symmetrisch ist, wurde auf das GMRES-Verfahren (Verfahren des verallgemeinerten minimalen Residuums) zurückgegriffen (siehe z.B.: [18, S. 156]). (Alternativ kann man auch das stabilisierte Verfahren biorthogonaler Richtungen (BiCGStab) verwenden (siehe z.B.: [18, S. 181])). Die in der Berechnung des rechte-Seite-Vektors auftretenden Integrale, über die Funktion f_{A_3} welche nicht im Ansatzraum liegt, wurde durch numerische Integration mittels 7-Punkt-Integrationsformel realisiert. Die Näherungslösung des Vektorpotentialproblems mit vorgegebenem Geschwindigkeitsfeld ist dann durch

$$A_{3,h}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{A_3}} \hat{A}_{3,0,k} \phi_k(\mathbf{x}) + \sum_{k=\tilde{N}_{A_3}+1}^{N_{A_3}} g_{A_3}(\mathbf{x}_k) \phi_k(\mathbf{x})$$

gegeben.

5.1.2 Stokes-Problem mit vorgegebenem Potential

Analog wie beim Vektorpotentialproblem kann auch hier die Umgehung der expliziten Kenntnis der Fortsetzung \mathbf{v}_g der Randdaten erreicht werden, indem man die unbekannt Werte der Fortsetzung an inneren Knoten mit als Variable schreibt:

$$\hat{v}_{0,i} = \tilde{v}_{0,i} + v_{g,i} \quad \text{für } i = 1, \dots, \tilde{N}_v.$$

Das System (4.5) für das Stokes-Problem mit vorgegebenem Potential lautet:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\tilde{N}_v} \hat{v}_{0,i} a(A_{3,h})(\varphi_i, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N_p} p_k b(\psi_k, \varphi_j) &= \langle \mathbf{f}_v, \varphi_j \rangle_\Omega - \sum_{\ell=\tilde{N}_v+1}^{N_v} g_\ell(\mathbf{x}_\ell) a(A_{3,h})(\varphi_\ell, \varphi_j), \\ \sum_{i=1}^{\tilde{N}_v} \hat{v}_{0,i} b(\psi_m, \varphi_i) + \sum_{k=1}^{N_p} p_k c(\psi_m, \psi_k) &= - \sum_{\ell=\tilde{N}_v+1}^{N_v} g_\ell(\mathbf{x}_\ell) b(\psi_m, \varphi_\ell), \end{aligned} \quad (5.5)$$

für $j = 1, \dots, \tilde{N}_v$ und $m = 1, \dots, N_p$, Hier ist mit $g_\ell(\mathbf{x}_\ell)$ der Randwert am Knoten \mathbf{x}_ℓ der entsprechenden Komponente des Randwertvektors \mathbf{g}_v bezeichnet. Die kompakte Schreibweise lautet:

$$\begin{pmatrix} A_h(A_{3,h}) & -B_h^\top \\ B_h & C_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{0,h} \\ \mathbf{p}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix},$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned} A_h(A_{3,h})[j, i] &:= \bar{\mu} \int_{\Omega} \nabla \varphi_{1,i}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_{1,j}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \\ &\bar{\mu} \int_{\Omega} \nabla \varphi_{2,i}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_{2,j}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sigma \int_{\Omega} (\varphi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla A_{3,h}(\mathbf{x})) (\nabla A_{3,h}(\mathbf{x}) \cdot \varphi_j(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

für $i, j = 1, \dots, \tilde{N}_{v_1} + \tilde{N}_{v_2}$, mit $A_{3,h}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \phi_j(\mathbf{x})$, mit

$$B_h[k, i] := \int_{\Omega} \psi_k(\mathbf{x}) (\nabla \cdot \varphi_i(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}, \quad (5.7)$$

für $k = 1, \dots, N_p$ und

$$C_h[k, \ell] = \int_{\Omega} \psi_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \int_{\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (5.8)$$

für $\ell = 1, \dots, N_p$, und mit den Vektoren

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_{0,h}[j] &:= \hat{v}_{0,j}, \\ \mathbf{p}_h[\ell] &:= p_\ell, \\ \mathbf{f}_1[j] &:= \langle \mathbf{f}_v, \varphi_j \rangle_\Omega - \sum_{\ell=\tilde{N}_v+1}^{N_v} g_\ell(\mathbf{x}_\ell) a(A_{3,h})(\varphi_\ell, \varphi_j), \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{f}_2[\ell] := - \sum_{k=\tilde{N}_v+1}^{N_v} g_k(\mathbf{x}_k) b(\psi_\ell, \varphi_k).$$

Lösung des Systems: Es wurde die in [25, S. 300] beschriebene Lösungsstrategie, zur Lösung des Schurkomplementsystems verwendet. Aufgrund der Symmetrie der Matrix $A_h(A_{3,h})$ und damit der Schurkomplementmatrix

$$S_h = B_h(A_h(A_{3,h}))^{-1}B_h^\top + D_h \quad (5.9)$$

fiel die Wahl des numerischen Löser auf das CG–Verfahren. (siehe z.B.: [2, 22, 25] u.v.m.) Die Produktbildung mit der Inversen der Matrix $(A_h(A_{3,h}))^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$ kann durch Lösen des Systems

$$(A_h(A_{3,h}))\mathbf{y}^* = \mathbf{y}$$

mittels CG–Verfahren realisiert werden, wodurch man sich die explizite Invertierung erspart.

5.2 Newtonverfahren

Für das hier betrachtete Problem lautet das nichtlineare Gleichungssystem

$$\mathbf{F}_h(\mathbf{u}_h) := M(\mathbf{u}_h)\mathbf{u}_{0,h} - \tilde{\mathbf{f}} = 0, \quad (5.10)$$

mit

$$M(\mathbf{u}_h) := \begin{pmatrix} A_h(\mathbf{A}_{3,h}) & -B_h^\top & 0 \\ B_h & C & 0 \\ 0 & 0 & D_h(\mathbf{v}_h) \end{pmatrix},$$

wobei die Matrizen wie oben in (5.6),(5.7),(5.8) und (5.3) gegeben sind, und

$$\mathbf{u}_{0,h} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{0,h} \\ \mathbf{p}_h \\ \hat{\mathbf{A}}_{3,0,h} \end{pmatrix},$$

sowie

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_v \\ 0 \\ \hat{\mathbf{f}}_{A_3} \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix $\mathbf{F}'_h(\mathbf{u}_h)$ an der Stelle \mathbf{u}_h ist durch 16 Teilmatrizen mit jeweiliger lokaler Indizierung $[\ell, k]$ beschrieben:

1. in den Zeilen 1 bis \tilde{N}_{v_1} :

von Spalte 1 bis \tilde{N}_{v_1} :

$$\frac{\partial}{\partial v_{1,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = \bar{\mu} \int_{\Omega} \nabla \varphi_{1,k}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sigma \int_{\Omega} \varphi_{1,k}(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j(\mathbf{x}) \right)^2 \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalte $1 + \tilde{N}_{v_1}$ bis $\tilde{N}_{v_1} + \tilde{N}_{v_2} = \tilde{N}_v$:

$$\frac{\partial}{\partial v_{2,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = \sigma \int_{\Omega} \varphi_{2,k}(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{N_{A_3}} A_{3,i} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j(\mathbf{x}) \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalte $1 + \tilde{N}_v$ bis $\tilde{N}_v + \tilde{N}_p$:

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{F}_h[\ell, k] = - \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalte $1 + \tilde{N}_v + \tilde{N}_p$ bis $\tilde{N}_v + \tilde{N}_p + \tilde{N}_{A_3} = \tilde{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_{3,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = & \sigma \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{N_{v_i}} v_{i,m} \int_{\Omega} \varphi_{i,m}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_k(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j(\mathbf{x}) \cdot \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & + \sigma \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{N_{v_i}} v_{i,m} \int_{\Omega} \varphi_{i,m}(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_k(\mathbf{x}) \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

2. in den Zeilen $1 + \tilde{N}_{v_1}$ bis \tilde{N}_v :

von Spalte 1 bis \tilde{N}_{v_1} :

$$\frac{\partial}{\partial v_{1,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = \sigma \int_{\Omega} \varphi_{1,k}(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{N_{A_3}} A_{3,i} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j(\mathbf{x}) \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalte $1 + \tilde{N}_{v_1}$ bis \tilde{N}_v :

$$\frac{\partial}{\partial v_{2,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = \bar{\mu} \int_{\Omega} \nabla \varphi_{2,k}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_{2,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sigma \int_{\Omega} \varphi_{2,k}(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_j(\mathbf{x}) \right)^2 \varphi_{2,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalte $1 + \tilde{N}_v$ bis $\tilde{N}_v + \tilde{N}_p$:

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{F}_h[\ell, k] = - \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_{2,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalte $1 + \tilde{N}_v + \tilde{N}_p$ bis \tilde{N} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_{3,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = & \\ & \sigma \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{N_{v_i}} v_{i,m} \int_{\Omega} \varphi_{i,m}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_k(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j(\mathbf{x}) \cdot \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & + \sigma \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{N_{v_i}} v_{i,m} \int_{\Omega} \varphi_{i,m}(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_k(\mathbf{x}) \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

3. in den Zeilen $1 + \tilde{N}_v$ bis $\tilde{N}_v + \tilde{N}_p$:

von Spalte 1 bis \tilde{N}_{v_1} :

$$\frac{\partial}{\partial v_{1,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_{1,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalte $1 + \tilde{N}_{v_1}$ bis \tilde{N}_v :

$$\frac{\partial}{\partial v_{2,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_{2,\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalte $1 + \tilde{N}_v$ bis $\tilde{N}_v + \tilde{N}_p$:

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{F}_h[\ell, k] = \int_{\Omega} \psi_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \int_{\Omega} \psi_{\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalte $1 + \tilde{N}_v + \tilde{N}_p$ bis \tilde{N} :

$$\frac{\partial}{\partial A_{3,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = 0,$$

4. in den Zeilen $1 + \tilde{N}_v + \tilde{N}_p$ bis \tilde{N} :

von Spalte 1 bis \tilde{N}_{v_1} :

$$\frac{\partial}{\partial v_{1,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = \sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \int_{\Omega} \varphi_{1,k} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j(\mathbf{x}) \phi_{\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalten $1 + \tilde{N}_{v_1}$ bis \tilde{N}_v :

$$\frac{\partial}{\partial v_{2,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] = \sum_{j=1}^{N_{A_3}} A_{3,j} \int_{\Omega} \varphi_{2,k} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_j(\mathbf{x}) \phi_{\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

von Spalten $1 + \tilde{N}_v$ bis $\tilde{N}_v + \tilde{N}_p$:

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{F}_h[\ell, k] = 0,$$

von Spalten $1 + \tilde{N}_v + \tilde{N}_p$ bis \tilde{N} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_{3,k}} \mathbf{F}_h[\ell, k] &= \frac{1}{\mu\sigma} \int_{\Omega} \nabla \phi_k(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi_{\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{N_{v_i}} v_{i,j} \int_{\Omega} \varphi_{i,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_k(\mathbf{x}) \phi_{\ell}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

In jedem Schritt k des Verfahrens muss

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u}_h^k) \mathbf{u}_h^{k+1} = -\mathbf{F}(\mathbf{u}_h^k) + \mathbf{F}'(\mathbf{u}_h^k) \mathbf{u}_h^k, \quad (5.11)$$

gelöst werden. Die hier auftretenden Gleichungssysteme, haben die Jacobimatrix als nichtsymmetrische Systemmatrix. Daher wird das GMRES-Verfahren verwendet. Aufgrund der Größe der Jacobimatrix des Gesamtproblems, stösst man hier, da in jedem Schritt über die vorigen Näherungen orthogonalisiert wird, schneller auf Grenzen, als im Fall des alternierenden Lösens "kleiner" linearer Probleme. Durch eine geeignete Vorkonditionierung kann eine höhere Genauigkeit bzw. eine Verkleinerung der Anzahl der Iterationen (siehe z.B.: [25, Kapitel 13]).

6 Beispiele

6.1 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel werden einige numerische Beispiele angeführt. Um die Konvergenz bei Verfeinerung des Netzes zu untersuchen, war die Vorgangsweise so:

- Wahl des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
- Wahl der Funktionen $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$, $p \in L_{2,0}(\Omega)$, $A_3 \in H^1(\Omega)$, die die Lösung sein sollen, wobei \mathbf{v} divergenzfrei sein muss.
- Randbedingungen, als Einschränkung der gewählten Funktionen auf den Rand, festsetzen.
- Wahl der Konstanten $\bar{\mu}, \sigma, \mu \in \mathbb{R}$. (In den Beispielen die hier gezeigt werden, sind alle Werte der Konstanten 1 gewählt.)
- Bestimmung der rechten Seite des Systems (2.23), durch Einsetzen der gewählten Funktionen.
- Berechnung der Näherungslösungen \mathbf{v}_{h,p_h} und $A_{3,h}$.
- Berechnung der Fehler $\|v_1 - v_{1,h}\|_{L_2(\mathcal{T}_h)}$, $\|v_2 - v_{2,h}\|_{L_2(\mathcal{T}_h)}$, $\|p - p_h\|_{L_2(\mathcal{T}_{2h})}$ und $\|A_3 - A_{3,h}\|_{L_2(\mathcal{T}_h)}$ für mehrere Feinheitsstufen, verfeinert durch Halbierung der Maschenweite $h \rightarrow h/2$.

Um mehrere Levels beobachten zu können, fiel die Wahl des Gebiets, vorerst auf $\Omega = (0,1)^2$. Dieses Gebiet ist in der größten Stufe in vier finite Dreiecks-Elemente geteilt, welche bei einem Verfeinerungsschritt wieder jeweils in vier weitere geteilt werden. Dadurch ist es möglich, Ergebnisse aus vorherigen Levels, einfach durch lineare Interpolation, in das aktuelle Level zu übernehmen. Als Ansatzraum für die Näherungen der Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes $v_{i,h}$, ($i = 1, 2$), sowie der Vektorpotentialkomponente $A_{3,h}$ wird der Raum der stückweise linearen und global stetigen Funktionen $S_h^1(\mathcal{T}_h)$ gewählt. Für Approximation des Drucks p_h wird der Raum der stückweise linearen und global stetigen Funktionen, jedoch mit einem zugrundeliegendem Netz mit doppelter Maschenweite, $S_{2h}^1(\mathcal{T}_{2h})$, verwendet. Die Anzahl der Knoten N , der inneren Knoten N^i und die Anzahl der Elemente M , sowie die Gesamtzahl der Unbekannten des vollständigen Systems DoF , sind für verschiedene Feinheitsstufen S , in der Tabelle 6.1 dargestellt.

S	N	N^i	M	DoF
0	13	5	16	20
1	41	25	64	88
2	145	113	256	380
3	545	481	1024	1588
4	2113	1985	4096	6500
5	8321	8065	16384	26308

Tabelle 6.1: Netzgrößen für $\Omega = (0, 1)^2$, bei verschiedene Stufen

In den folgenden Tabellen sind die Konvergenzgeschwindigkeiten bei verschiedenen Rechenbeispiele dargestellt. In den meisten Fällen liefern das Newtonverfahren und die Methode mit dem alternierendem Lösen vergleichbare Ergebnisse, sowohl in den Werten der Fehler als auch in der Konvergenzgeschwindigkeit. In den Tabellen 6.2 und 6.3, sowie in den Tabellen 6.6 und 6.7 und in den Tabellen 6.8 und 6.9 kann man eine quadratische Konvergenzordnung in der $L_2(\mathcal{T}_h)$ -Norm für \mathbf{v}_h und $A_{3,h}$ beobachten. Dies entspricht den Fehlerabschätzungen (4.13) und (4.12). Die Konvergenzordnung von p_h übertrifft die lineare Erwartung. In den Tabellen 6.4 und 6.5 ist für alle Funktionen quadratische Ordnung zu beobachten. Die schlechten Werte in der letzten Feinheitsstufe S beim Newtonverfahren sind dadurch erklärbar, die Absolutwerte der Fehler schon in der Größenordnung der Rechenungenauigkeiten, des Lösers (GMRES) liegen. (vgl Tabelle 6.11). In den Tabellen 6.10 und 6.11 sind die Rechenungenauigkeiten der Gleichungssystemlöser in den verschiedenen Stufen abzulesen. Durch die Wahl der zu approximierenden Funktionen aus den Ansatzräumen könnten die Approximationen exakt sein.

S	$\ v_1 - v_{1,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ v_2 - v_{2,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\mathcal{T}_{2h})}$	eoc	$\ A_3 - A_{3,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	It
0	4.63511 e-2	-	4.63475 e-2	-	2.17567 e-1	-	2.93354 e-2	-	5
1	1.15836 e-2	2.00	1.15843 e-2	2.00	9.74677 e-2	1.15	7.37889 e-3	1.99	4
2	2.86048 e-3	2.01	2.85981 e-3	2.01	3.07253 e-2	1.66	1.85732 e-3	1.99	4
3	7.13116 e-4	2.00	7.12883 e-4	2.00	9.07612 e-3	1.76	4.65556 e-4	1.99	4
4	1.78096 e-4	2.00	1.78034 e-4	2.00	2.66102 e-3	1.77	1.16503 e-4	1.99	3
5	4.45034 e-5	2.00	4.44876 e-5	2.00	7.90525 e-4	1.75	2.91322 e-5	1.99	3

Tabelle 6.2: Alternierender Löser auf $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{v} = (y^2, x^2)^\top$, $p = x - 0.5$, $A_3 = y^2$

S	$\ v_1 - v_{1,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ v_2 - v_{2,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\mathcal{T}_{2h})}$	eoc	$\ A_3 - A_{3,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	It
0	4.63511 e-2	-	4.63475 e-2	-	2.17567 e-1	-	2.93354 e-2	-	5
1	1.15836 e-2	2.00	1.15843 e-2	2.00	9.74672 e-2	1.15	7.37889 e-3	1.99	4
2	2.86049 e-3	2.01	2.85981 e-3	2.01	3.07256 e-2	1.66	1.85738 e-3	1.99	4
3	7.13122 e-4	2.00	7.12853 e-4	2.00	9.07626 e-3	1.76	4.65557 e-4	1.99	5
4	1.78108 e-4	2.00	1.78025 e-4	2.00	2.66146 e-3	1.77	1.16504 e-4	2.00	18
5	4.45776 e-5	1.99	4.45381 e-5	1.99	8.70232 e-4	1.61	2.91618 e-5	2.00	8

Tabelle 6.3: Newtonlöser auf $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{v} = (y^2, x^2)^\top$, $p = x - 0.5$, $A_3 = y^2$

S	$\ v_1 - v_{1,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ v_2 - v_{2,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ A_3 - A_{3,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	It
0	7.00078 e-4	-	7.2025 e-4	-	1.82964 e-2	-	3.137964 e-2	-	5
1	1.12932 e-4	2.63	7.98392 e-5	3.17	4.82895 e-3	1.92	7.90117 e-3	1.98	4
2	1.60188 e-5	2.81	1.12723 e-5	2.82	1.2671 e-3	1.93	1.98642 e-3	1.99	4
3	2.40102 e-6	2.73	2.17869 e-6	2.37	3.24027 e-4	1.96	4.9783 e-4	1.99	4
4	4.488702 e-7	2.29	5.35856 e-7	2.02	8.19363 e-5	1.98	1.24571 e-4	1.99	4
5	1.17179 e-7	2.06	1.33417 e-7	2.00	2.05999 e-5	1.99	3.11482 e-5	1.99	4

Tabelle 6.4: Alternierender Löser auf $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{v} = (x, -y)^\top$, $p = 0$, $A_3 = x^2$

S	$\ v_1 - v_{1,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ v_2 - v_{2,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ A_3 - A_{3,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	It
0	7.00004 e-4	-	7.20333 e-4	-	1.82981 e-2	-	3.13798 e-2	-	5
1	1.12932 e-4	2.63	7.98378 e-5	3.17	4.82891 e-3	1.92	7.90117 e-3	1.98	4
2	1.60163 e-5	2.82	1.12611 e-5	2.82	1.2673 e-3	1.93	1.98642 e-3	1.99	4
3	2.40849 e-6	2.73	2.17152 e-6	2.37	3.24351 e-4	1.96	4.97832 e-4	1.99	4
4	5.22622 e-7	2.20	5.6991 e-7	1.92	8.75942 e-5	1.88	1.24573 e-4	1.99	4
5	3.74821 e-7	0.48	3.85876 e-7	0.56	1.47759 e-4	-0.75	3.11459 e-5	2.00	4

Tabelle 6.5: Newtonlöser auf $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{v} = (x, -y)^\top$, $p = 0$, $A_3 = x^2$

S	$\ v_1 - v_{1,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ v_2 - v_{2,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\mathcal{T}_{2h})}$	eoc	$\ A_3 - A_{3,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	It
0	4.72536 e-3	-	1.17415 e-2	-	7.0021 e-2	-	4.24104 e-4	-	5
1	1.13929 e-3	2.05	2.92858 e-3	2.00	3.02294 e-2	1.21	1.12353 e-4	1.91	4
2	2.63523 e-4	2.11	7.26465 e-4	2.01	9.09921 e-3	1.73	2.72297 e-5	2.04	4
3	6.35712 e-5	2.05	1.81068 e-4	2.00	2.73756 e-3	1.73	6.81123 e-6	1.99	4
4	1.56605 e-5	2.02	4.5212 e-5	2.00	8.10792 e-4	1.75	1.70066 e-6	2.00	4
5	3.89239 e-6	2.00	1.12974 e-5	2.00	2.40782 e-4	1.75	4.26633 e-7	1.99	3

Tabelle 6.6: Alternierender Löser auf $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{v} = (\sin(x), -\cos(x)y)^\top$, $p = 0$, $A_3 = x + y$

S	$\ v_1 - v_{1,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ v_2 - v_{2,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\mathcal{T}_{2h})}$	eoc	$\ A_3 - A_{3,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	It
0	4.72542 e-3	-	1.17413 e-2	-	7.00245 e-2	-	4.24103 e-4	-	5
1	1.13927 e-3	2.05	2.92866 e-3	2.00	3.02295 e-2	1.21	1.12352 e-4	1.99	3
2	2.63531 e-4	2.11	7.26488 e-4	2.01	9.09814 e-3	1.73	2.72318 e-5	1.99	3
3	6.35715 e-5	2.05	1.81059 e-4	2.00	2.73607 e-3	1.73	6.81142 e-6	1.99	3
4	1.56223 e-5	2.02	4.51705 e-5	2.00	8.00086 e-4	1.77	1.70337 e-6	1.99	3
5	3.87035 e-6	2.01	1.11211 e-5	2.02	2.78671 e-4	1.52	4.24383 e-7	2.00	3

Tabelle 6.7: Newtonlöser auf $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{v} = (\sin(x), -\cos(x)y)^\top$, $p = 0$, $A_3 = x + y$

S	$\ v_1 - v_{1,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ v_2 - v_{2,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\mathcal{T}_{2h})}$	eoc	$\ A_3 - A_{3,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	It
0	4.64584 e-2	-	4.64530 e-2	-	2.24670 e-1	-	2.93641 e-2	-	5
1	1.15871 e-2	2.00	1.15877 e-2	2.00	9.82785 e-2	1.18	7.37998 e-3	1.99	4
2	2.86064 e-3	2.02	2.85995 e-3	2.02	3.08645 e-2	1.67	1.85733 e-3	1.99	4
3	7.13121 e-4	2.00	7.12888 e-4	2.00	9.10263 e-3	1.76	4.65556 e-4	2.00	4
4	1.78096 e-4	2.00	1.78034 e-4	2.00	2.66634 e-3	1.77	1.16503 e-4	2.04	3
5	4.45034 e-5	2.00	4.44876 e-5	2.00	7.91608 e-4	1.75	2.91322 e-5	1.96	3

Tabelle 6.8: Alternierender Löser auf $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{v} = (y^2, x^2)^\top$, $p = x^2 - \frac{1}{3}$, $A_3 = y^2$

S	$\ v_1 - v_{1,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ v_2 - v_{2,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\mathcal{T}_{2h})}$	eoc	$\ A_3 - A_{3,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	It
0	4.64561 e-2	-	4.64514 e-2	-	2.24647 e-1	-	2.93641 e-2	-	5
1	1.15871 e-2	2.00	1.15877 e-2	2.00	9.82781 e-2	1.19	7.37998 e-3	1.99	4
2	2.86065 e-3	2.02	2.85996 e-3	2.02	3.08655 e-2	1.67	1.85732 e-3	1.99	4
3	7.13132 e-4	2.00	7.12862 e-4	2.00	9.10346 e-3	1.76	4.65557 e-4	2.00	4
4	1.78107 e-4	2.00	1.78030 e-4	2.00	2.66682 e-3	1.77	1.16503 e-4	2.04	11
5	4.46205 e-5	2.00	4.44899 e-5	2.00	8.75625 e-4	1.61	2.91346 e-5	1.96	5

Tabelle 6.9: Newtonlöser auf $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{v} = (y^2, x^2)^\top$, $p = x^2 - \frac{1}{3}$, $A_3 = y^2$

Rechnungengenauigkeiten Die gewählten Lösungen liegen in den jeweiligen Ansatzräumen. Die Löser könnten exakt lösen. Was hier zu beobachten ist, resultiert aus den Ungenauigkeiten der iterativen Linearen-Gleichungssystem-Löser, die mit der Dimension der Systeme wächst.

S	$\ v_1 - v_{1,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ v_2 - v_{2,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\mathcal{T}_{2h})}$	eoc	$\ A_3 - A_{3,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	It
0	1.09024 e-16	-	7.16325 e-17	-	8.50548 e-16	-	8.26517 e-17	-	5
1	8.84383 e-11	-	5.00480 e-11	-	2.15666 e-9	-	3.49416 e-9	-	3
2	3.58733 e-10	-	1.86042 e-10	-	1.07198 e-8	-	1.30487 e-8	-	3
3	2.3199 e-10	-	1.44874 e-10	-	8.58825 e-9	-	8.78427 e-9	-	3
4	4.3267 e-10	-	3.3853 e-10	-	1.9988 e-8	-	2.18987 e-8	-	3
5	9.70447 e-10	-	8.47715 e-10	-	4.87393 e-8	-	5.3064 e-8	-	3

Tabelle 6.10: Alternierender Löser auf $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{v} = (x, -y)^\top$, $p = x - \frac{1}{2}$, $A_3 = x$

S	$\ v_1 - v_{1,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ v_2 - v_{2,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\mathcal{T}_{2h})}$	eoc	$\ A_3 - A_{3,h}\ _{L_2(\mathcal{T}_h)}$	eoc	It
0	1.62613 e-13	-	3.54489 e-12	-	6.72534 e-12	-	8.0439 e-10	-	5
1	7.52107 e-8	-	7.73978 e-8	-	2.68678 e-6	-	8.0439 e-10	-	2
2	6.63518 e-8	-	5.6885 e-8	-	1.62292 e-6	-	1.25766 e-9	-	2
3	1.26918 e-7	-	1.21706 e-7	-	8.30686 e-6	-	2.30503 e-9	-	2
4	1.9846 e-7	-	2.02875 e-7	-	2.74652 e-5	-	7.50398 e-9	-	11
5	8.26963 e-7	-	9.26691 e-7	-	2.48936 e-4	-	7.30922 e-9	-	7

Tabelle 6.11: Newtonlöser auf $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{v} = (x, -y)^\top$, $p = x - \frac{1}{2}$, $A_3 = x$

6.2 Ausblick

In dieser Arbeit wurde das nichtlineare Dirichletrandwertproblem (2.23) in einer Variationsformulierung (3.5) angegeben. Für diese Variationsformulierung wurde Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung im schwachen Sinn gezeigt.

Offen ist der Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit unter schwächeren Voraussetzungen, siehe: Lemma 3.1, Lemma 3.6.

In Kapitel 4 wurde (3.5) auf finiten Elementen diskretisiert. Das dadurch entstandene nichtlineare Gleichungssystem (4.1) wurde auf zwei Arten behandelt. Eine Methode war das Zerlegen in eine Folge linearer Teilprobleme. Als Vorteil hat sich herausgestellt, dass die Dimensionen der hier auftretenden Gleichungssysteme kleiner ist als die des Gesamtsystems. Genauer: einerseits N_{p_h} Unbekannte fürs Schurkomplementsystem (5.9), und andererseits $N_{A_{3,h}}$ Unbekannte fürs Vektorpotential–Teilproblem (5.4). Dadurch ist schnelleres Lösen möglich bzw. eine höhere Genauigkeit zu erreichen, sodass die Rechenzeit noch in einem vernünftigen Rahmen bleibt.

Als zweiter Weg wurde das nichtlineare Gesamtsystem mit der Newton-Methode gelöst. Die hier auftretenden Gleichungssysteme (5.11) sind wesentlich größer ($N_{\mathbf{v}_h} + N_{p_h} + N_{A_{3,h}}$ Unbekannte) als im ersten Fall. Hier zeigt sich die Notwendigkeit für die Verwendung einer geeigneten Vorkonditionierung.

Weiters fällt auf, dass die Konvergenzordnung der Druckapproximation p_h in allen Rechenbeispielen höher ist, als bewiesen wurde. In dieser Arbeit wurde dem nicht auf den Grund gegangen.

Ebenfalls unbeleuchtet blieb die Frage, welchen Einfluss die Werte der Materialparameter $\mu, \sigma, \bar{\mu}$ auf die Kondition der Gleichungssysteme haben.

Ein weitere interessante offene Frage, die auch mehr Anwendungen beinhaltet, ist die Betrachtung des Gesamtsystems (2.13), welches in $3D$ gerechnet werden müsste.

Literaturverzeichnis

- [1] BATHE, Klaus-Jürgen ; ZIMMERMANN, Peter: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 1990
- [2] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1992
- [3] BRANDT, Sigmund ; DAHMEN, Hans D.: *Elektrodynamik*. 4. Auflage. Springer, 2005
- [4] BRIS, Claude L. ; LIEVRE, Toni L. ; GERBEAU, Jean-Frederik: *Mathematical methods of the magnetohydrodynamics of liquid metals*. Oxford University Press, 2006
- [5] BURLAGA, Leonard F.: *Interplanetary Magnetohydrodynamics*. Oxford University Press, 1995
- [6] DAVIDSON, Peter A.: *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2001
- [7] DEUFLHARD, Peter: *Newton Methods for Nonlinear Problems*. Springer, 2004
- [8] DUVAUT, G. ; LIONS, Jacques L.: *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976
- [9] ECK, Bruno: *Technische Strömungslehre*. Bd. 1. Springer, 1978
- [10] ENGELN-MÜLLGES, Gisela ; REUTTER, Fritz: *Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit C-Programmen*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990
- [11] FAIRES, J. D. ; BURDEN, Richard L.: *Numerische Methoden*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 1994
- [12] GROSSMANN, Siegfried: *Funktionalanalysis*. 4. Auflage. AULA-Verlag Wiesbaden, 1988
- [13] HACKBUSCH, Wolfgang: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. B.G.Teubner, 1996
- [14] HUTTER, Kolumban: *Fluid- und Thermodynamik*. Springer, 1995
- [15] KNOTHE, Klaus ; WESSELS, Heribert: *Finite Elemente*. Springer, 1991

- [16] KRÖGER, Roland ; UNBEHAUEN, Rolf: *Elektrodynamik*. B.G.Teubner, 1993
- [17] LANDAU, Lew D. ; LIFSCHITZ, E. M. ; PITAJESWSKI, L. P.: *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Bd. X. Akademie-Verlag Berlin, 1983
- [18] MEISTER, Andreas: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Vieweg + Teubner, 2011
- [19] OERTEL, Herbert jr. ; LAURIEN, Eckard: *Numerische Strömungsmechanik*. Springer, 1995
- [20] RIEG, Frank ; HACKENSCHMIDT, Reinhard: *Finite Element Analyse für Ingenieure*. 2. Auflage. Hanser, 2003
- [21] RŮŽIČKA, Michael: *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer, 2004
- [22] SCHABACK, Robert ; WERNER, Helmut: *Numerische Mathematik*. 4. Auflage. Springer, 1992
- [23] SCHWARZ, Hans R.: *Methode der finiten Elemente*. 3. Auflage. B.G.Teubner, 1991
- [24] SPURK, Joseph H. ; AKSEL, Nuri: *Strömungslehre*. 6. Auflage. Springer, 2005
- [25] STEINBACH, Olaf: *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme*. B.G.Teubner, 2003
- [26] ZEIDLER, E. u. a.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Bd. 2. B.G.Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1995