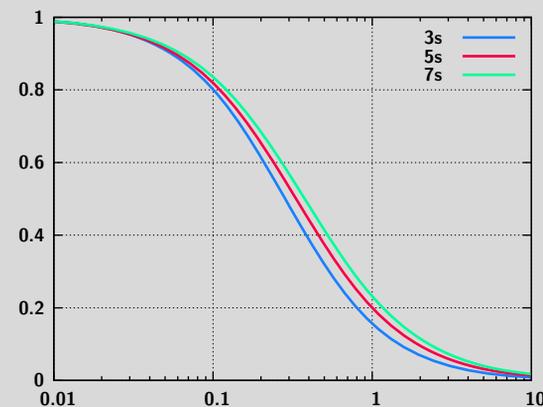
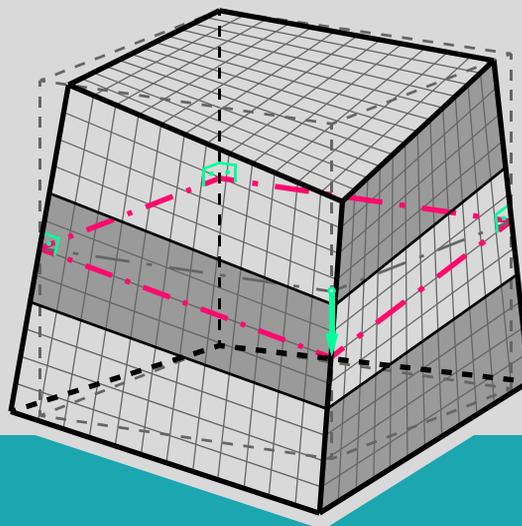


Numerische Studien zur Drill- und Schubsteifigkeit von Brettsperrholz (BSP)

Einführung und Problemstellung | Stand des Wissens | Entwicklung eines FE-Modells | Drill- und Schubsteifigkeitsuntersuchungen | Schubkraftverteilung am RPE | Resümee und Ausblick

D-4-06/2010



Gregor Silly

Institut für Holzbau und Holztechnologie
Technische Universität Graz

Numerische Studien zur Drill- und Schubsteifigkeit von Brettsperrholz (BSP)

Diplomarbeit von

Gregor Silly

Eingereicht am

Institut für Holzbau und Holztechnologie



Fakultät für Bauingenieurwissenschaften
Technische Universität Graz

Begutachter

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Gerhard Schickhofer

Betreuer

Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Bogensperger

Graz, 10. Juni 2010

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und/oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Ich versichere, dass ich dieses Diplomarbeitsthema bisher weder im In- noch im Ausland (einem Beurteiler oder Beurteilerin) in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe.

Graz, am 02. Juni 2010

Gregor Silly

Danksagung

Keine Schuld ist dringender, als die, Dank zu sagen.

(Marcus Tullius Cicero)

Diese Arbeit bietet mir nicht nur die Möglichkeit, meine interessante Tätigkeit der letzten Monate zu dokumentieren, sondern eröffnet mir vielmehr die Gelegenheit, den Menschen zu danken, die zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen haben.

Ich möchte diese Diplomarbeit meinen Eltern widmen, die nicht nur mein Studium zum größten Teil finanziert, sondern mich auch moralisch unterstützt und mir immer den Rücken gestärkt haben.

Ein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Thomas Bogensperger für die intensive Zusammenarbeit und seinen unermüdlichen Einsatz in jeder Phase meines Diplomandendaseins.

Weiters danke ich Prof. Werner Guggenberger der mir stets mit sehr viel Engagement und guten Ideen zur Seite stand.

Dem Institutsvorstand Prof. Gerhard Schickhofer danke ich für die abschließende Begutachtung meiner Diplomarbeit und die großzügige Bereitstellung der notwendigen Infrastruktur.

Kurzfassung

Der Einsatz von Brettspertholz (BSP), als großformatige Platte für die Herstellung von Decken, gewinnt im Bauwesen immer mehr an Bedeutung.

Bei einer punktgestützten Lagerung oder zweiachsigen Lastabtragung von BSP-Plattenelementen wird das Tragverhalten auch von der Drillsteifigkeit beeinflusst. Ziel dieser Diplomarbeit ist somit die Ermittlung der bislang nicht bekannten Drillsteifigkeit von BSP-Platten ohne Schmalseitenverklebung. Weiters wird der Einfluss des Randeffectes auf die Schubsteifigkeit von BSP-Scheiben mit endlicher Schichtanzahl untersucht.

Nach einer kurzen Einführung in die Plattentheorie, sowie einer Literaturstudie zur Drill- und Schubsteifigkeit von geschichteten, orthotropen Platten, erfolgt die Finite Elemente Modellierung im Programm ABAQUS. In der darauffolgenden numerischen Berechnung werden 3-, 5- und 7-schichtige BSP-Platten zur Drillsteifigkeits-, sowie 3- und 5-schichtige BSP-Scheiben zur Schubsteifigkeitsbestimmung, jeweils mit und ohne seitliche Fugen, untersucht. Die aus der Berechnung resultierenden Ergebnisse werden entsprechend ausgewertet und dokumentiert. Als Grundlage zur Ermittlung des Widerstandswertes für Drillmomente kann die ermittelte Schubkraftverteilung in den einzelnen Schichten herangezogen werden.

Der abschließende Ausblick zeigt offene Fragen sowie weiteren Forschungsbedarf zum behandelten Thema auf.

Abstract

The use of Cross Laminated Timber (CLT), as large-size plate for ceilings, becomes an increasingly important product in civil engineering.

In case of point supports or biaxial load transfer of CLT-plates, the load bearing behavior depends on the twisting stiffness to a certain extent. The main focus of the work lies on the investigation of the so far unknown twisting stiffness of CLT-plates without glued narrow faces. Furthermore the weight of the edge effect on the shear stiffness of CLT wall elements with a finite number of layers is reviewed.

After a brief introduction into plate theory and a literature review on the twisting and shear stiffness of multi-layered, orthotropic plates, the modeling with finite elements using ABAQUS makes up the main part of this work. In the numerical simulations, CLT-plates with 3, 5 and 7 layers are modeled to investigate the twisting stiffness. 3- and 5-layered plates with and without distance between the narrow faces are modeled to find out about the shear stiffness. The results are evaluated and documented. The distribution of the shear forces in the single layers can be utilized to determine the twisting resistance.

The concluding remarks show some open questions and point out fields for future research.

Zielsetzung, Gliederung und Inhalt

Für die Berechnung von Platten in herkömmlichen FE-Programmen ist es notwendig, über die Steifigkeiten des verwendeten Bauteils Bescheid zu wissen. Im Falle von Brettsperrholzplatten ohne Schmalseitenverklebung ist die anzusetzende Drillsteifigkeit unbekannt.

Diese Arbeit – welche in sechs Kapitel mit Unterkapiteln gegliedert ist – beschäftigt sich primär mit der Ermittlung der Drillsteifigkeit von nicht schmalseitenverklebten BSP-Platten. Ein weiteres Ziel ist die Untersuchung der Schubsteifigkeit von 3- und 5-schichtigen BSP-Scheiben. Hier gilt es, den unbekanntem Einfluss des Randeffektes von BSP-Elementen mit endlicher Schichtanzahl zu analysieren und die in [4] angegebenen Werte zu ergänzen.

- **Kapitel 1** beinhaltet eine kurze Einführung und beschäftigt sich mit den Grundlagen zur Ermittlung der oben genannten Steifigkeiten. Im Detail sind dies die Theorie der transversal-schubnachgiebigen Platte sowie der konstante Drill- bzw. Schubzustand.
- **Kapitel 2** betrachtet den Stand des Wissens zum Thema Drillen und Schub von Brettsperrholz.
- **Kapitel 3** – der Hauptteil dieser Arbeit – zeigt die Entwicklung eines FE-Modells zur Drill- und Schubsteifigkeitsbestimmung von der großformatigen BSP-Platte bzw. BSP-Scheibe bis hin zum weitestmöglich reduzierten Teilelement. Weiters sind alle für die FE-Berechnung notwendigen Eingabedaten ermittelt und dargestellt.
- **Kapitel 4** wertet die Ergebnisse der numerischen Studien zur Drill- und Schubsteifigkeit aus und dokumentiert diese ausführlich. Die oben genannten Ziele werden in diesem Abschnitt mit der Darstellung der Abminderungskurven für die Drill- und Schubsteifigkeit von Brettsperrholz erreicht.
- **Kapitel 5** beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen den Drillmomenten und Schubkräften an den Brettstirnflächen. Mit den daraus gewonnenen Daten wird ein Vorschlag für die Durchführung eines Drillfestigkeitsnachweises von BSP-Platten gezeigt.
- **Kapitel 6** fasst die Ergebnisse und Erkenntnisse dieser Arbeit zu einem Resümee zusammen und zeigt im Ausblick weiteren Forschungsbedarf zum Thema „Brettsperrholz unter Drillbeanspruchung“ auf.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Problemstellung	5
1.1	Aufbau einer Brettsperrholzplatte	5
1.2	Allgemeines zur Lastabtragung von Brettsperrholz	5
1.2.1	Einsatzbereiche von BSP	6
1.3	Transversal-schubnachgiebige Platte	7
1.3.1	Plattenkinematik	7
1.3.2	Konstitution	7
1.3.3	Kinetik – Gleichgewichtsgleichungen	9
1.3.4	Differentialgleichungssystem der transversal-schubnachgiebigen Platte	9
1.4	Plattensteifigkeiten	10
1.4.1	Steifigkeiten der geschichteten Platte mit homogenen Einzelschichten	10
1.4.2	BSP – Orthotropes Material Holz und geschichtete Struktur	10
1.5	Randbedingungen im FE-Modell	11
1.5.1	Allgemeines	11
1.5.2	Konstanter Verdrillungszustand	12
1.5.3	Konstanter Schubzustand	13
2	Stand des Wissens	17
2.1	Grundlagen der Scheibentheorie für BSP-Strukturen	17
2.1.1	Einleitung	17
2.1.2	Scheibensteifigkeiten eines BSP-Elementes – Grundlagen	17
2.1.3	Dehnsteifigkeiten D_x und D_y für ein BSP-Element	18
2.1.4	Schubsteifigkeit S_{xy} für ein gedanklich ∞ -dickes BSP-Element mit konstanten Schichtdicken	18
2.1.5	Schubsteifigkeit S_{xy} für Elemente mit endlicher Schichtanzahl und variablen Schichtdicken	21
2.2	Tagungsbeitrag	22
2.2.1	Zusätzlicher Effekt von kleinen Fugen zwischen den Brettern der Einzelschicht	22
2.2.2	Finite Elemente Ergebnisse	22
2.3	Flächentragwerke	22
2.3.1	Orthotrope Platten	22
2.4	DIN 1052:2008-12	23
3	Entwicklung eines FE-Modells	25
3.1	Einleitung	25
3.1.1	Reduktion der Brettsperrholzplatte	25
3.2	Schritt 1: Isotrope, homogene Platte	25
3.2.1	Geometrie	25

3.2.2	Element- und Netzgenerierung	26
3.2.3	Material	26
3.2.4	Randbedingungen	26
3.2.5	Berechnung in ABAQUS und Vergleich mit der analytischen Lösung	27
3.3	Schritt 2: Platte mit BSP-Struktur jedoch isotropem Material	27
3.3.1	Geometrie	27
3.3.2	Element- und Netzgenerierung	28
3.3.3	Material	28
3.3.4	Randbedingungen	28
3.3.5	Berechnung in ABAQUS	28
3.3.6	Auswirkung der BSP-Struktur auf die Drill-steifigkeit	29
3.4	Schritt 3: Platte mit BSP-Struktur und orthotropem Material (Holz)	29
3.4.1	Material und Materialorientierung	29
3.4.2	Randbedingungen	30
3.4.3	Ergebnisvergleich Schritt 2 – Schritt 3	30
3.4.4	Fazit	30
3.5	Schritt 4: FE-Modellierung des RPEs	31
3.5.1	Geometrie des RPEs	31
3.5.2	Material und Materialorientierung	31
3.5.3	Randbedingungen	31
3.5.4	Rückrechnung der Drillsteifigkeit	32
3.5.5	Modellierung der Klebefugen	32
3.5.6	Element- und Netzstudie	32
3.5.7	Netzverfeinerung in Dickenrichtung	34
3.6	RVE und RVSE der BSP-Scheibe	36
3.6.1	Geometrie des RVEs	36
3.6.2	Material und Materialorientierung	36
3.6.3	Randbedingungen	36
3.6.4	Rückrechnung der Schubsteifigkeit	36
4	Drill- und Schubsteifigkeitsuntersuchungen	37
4.1	Berechnungsvarianten	37
4.1.1	Streubereich des Brettparameters t_i/a	37
4.1.2	Ergebnisdarstellung	37
4.2	Numerische Studien zur Drillsteifigkeit der fugenlosen BSP-Platte	43
4.2.1	Ergebnisse der 3-schichtigen, fugenlosen BSP-Platte	43
4.2.2	Ergebnisse der 5-schichtigen, fugenlosen BSP-Platte	45
4.2.3	Ergebnisse der 7-schichtigen, fugenlosen BSP-Platte	46

4.3	Numerische Studien zur Drillsteifigkeit der BSP-Platte mit Fugen	47
4.3.1	Ergebnisse der 3-schichtigen BSP-Platte mit Fugen	47
4.3.2	Ergebnisse der 5-schichtigen BSP-Platte mit Fugen	48
4.3.3	Ergebnisse der 7-schichtigen BSP-Platte mit Fugen	49
4.4	Zusammenfassung der Ergebnisse aus den Drillsteifigkeitsstudien	50
4.4.1	Vergleich der 3-, 5- und 7-schichtigen, fugenlosen BSP-Platte	50
4.4.2	Vergleich der 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Platte mit Fugen	50
4.5	Numerische Studien zur Schubsteifigkeit der fugenlosen BSP-Scheibe	51
4.5.1	Ergebnisse der gedanklich ∞ -dicken (RVSE), fugenlosen BSP-Scheibe	51
4.5.2	Ergebnisse der 3-schichtigen, fugenlosen BSP-Scheibe	53
4.5.3	Ergebnisse der 5-schichtigen, fugenlosen BSP-Scheibe	53
4.6	Numerische Studien zur Schubsteifigkeit der BSP-Scheibe mit Fugen	54
4.6.1	Ergebnisse der gedanklich ∞ -dicken (RVSE), fugenlosen BSP-Scheibe	54
4.6.2	Ergebnisse der 3-schichtigen BSP-Scheibe mit Fugen	55
4.6.3	Ergebnisse der 5-schichtigen BSP-Scheibe mit Fugen	55
4.7	Zusammenfassung der Ergebnisse aus den Schubsteifigkeitsstudien	56
4.7.1	Vergleich der ∞ -dicken, sowie der 3-, und 5-schichtigen, fugenlosen BSP-Scheibe	56
4.8	Gegenüberstellung der Drill- und Schubsteifigkeitsstudien	57
4.8.1	Vergleich der 7-schichtigen BSP-Platte mit und ohne Fugen unter Drillbeanspruchung	57
4.8.2	Vergleich der ∞ -dicken BSP-Scheibe mit und ohne Fugen unter Schubbeanspruchung	57
4.8.3	Vergleich der Drill- und Schubsteifigkeit des 5-schichtigen BSP-Elements ohne Fugen	57
5	Schubkraftverteilung am RPE	59
5.1	Ablauf einer BSP-Plattenberechnung	59
5.2	Schubkraft- und Momentenauswertung	59
5.2.1	Schubkraftverteilung	59
5.2.2	Schubkräfte aus den Knotenfesthaltekräften	60
5.2.3	Drillmomente aus den Schubkräften	61
5.3	Vergleich der Schubkräfte	63
5.3.1	Schubkräfte aus den Schubspannungen	63
5.4	Vorschlag für einen Drillfestigkeitsnachweis	66
5.4.1	Bemessungsschubspannungen	66
5.4.2	Klebeflächentorsionsmomente	67
5.4.3	Beispiel	68
6	Resümee und Ausblick	71
6.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	71
6.2	Empfehlungen für die Praxis	71

6.3	Zukünftiger Forschungsbedarf	71
A	Anhang	73
A.1	OCTAVE Programm – Randbedingungen des RPEs	73
A.2	MATHEMATICA File – Anpassungsfunktion	75
A.3	Python Script – Schubkraftauswertung	76
	Literaturverzeichnis	79

1 Einführung und Problemstellung

1.1 Aufbau einer Brettsperrholzplatte

Brettsperrholz (BSP) besteht aus einzelnen Lagen von Mann-an-Mann angeordneten Brettern bzw. keilgezinkten Brettlamellen. Diese Schichten sind orthogonal zueinander zu Brettsperrholzplatten verklebt (Abb. 1.1).

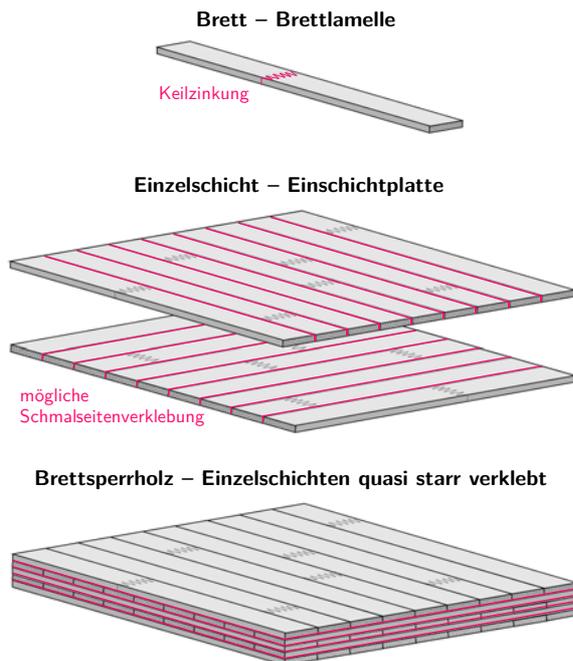


Abb. 1.1 Allgemeiner Aufbau von Brettsperrholz [4]

Brettsperrholz gibt es mittlerweile in den unterschiedlichsten Dimensionen und Aufbauten. Handelsüblich sind Elemente mit einer ungeraden Anzahl von 3, 5, oder 7 Schichten und Gesamtdicken von 51 bis 341 mm (Abb. 1.2).

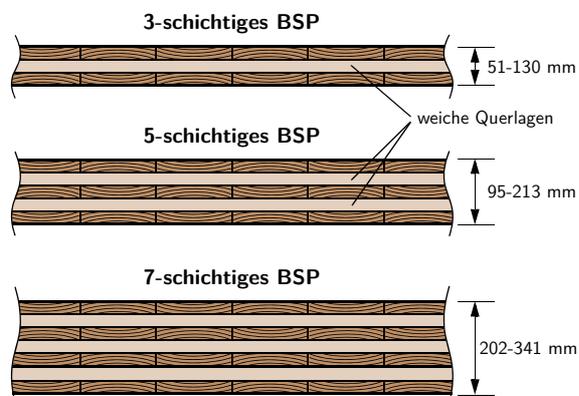


Abb. 1.2 Querschnittsaufbauten verschiedener BSP-Platten

Mit Breiten bis zu 3 m und Längen bis zu 16,5 m sind großformatige Wand- bzw. Deckenkonstruktionen realisierbar.

1.2 Allgemeines zur Lastabtragung von Brettsperrholz

Die seit den letzten Jahren stetig steigende Nachfrage nach Brettsperrholz (BSP) führte zu intensiven Untersuchungen auf dem Gebiet der Berechnung dieser Elemente. Es gibt aber nach wie vor genügend unbehandelte Fragestellungen wie z. B. die zweiachsige Plattenbiegung, Punktstützung (Durchstanzen), Drillfestigkeit sowie die Drillsteifigkeit von BSP.

Wie bereits in Kap. 1.1 gezeigt, bestehen BSP-Platten aus einer orthogonal geschichteten Struktur. Aus der ungeraden Schichtanzahl resultieren unterschiedliche Steifigkeiten für die beiden Lastabtragsrichtungen. Weiters sind die Querlagen (siehe Abb. 1.2) wegen des orthotropen Materials Holz als schubweich anzusehen. Der Grund dafür liegt in den unterschiedlichen Schubmoduln „in“ (G_0) und „quer“ (G_{90}) zur Faserrichtung. Als Querlagen gelten immer jene Schichten, die senkrecht zur Lastabtragsrichtung bzw. Schnittführung orientiert sind. Diese Tatsache führt zu einem erhöhten Schubverformungsanteil im Vergleich zur Gesamtverformung. Für ein Längen zu Höhen (L/H) Verhältnis von 20 beträgt dieser Anteil ca. 10 % (vgl. [4]).

Aufgrund ihrer wesentlich höheren Biegesteifigkeit in Längsrichtung (im Vergleich zur Querrichtung), werden BSP-Platten hauptsächlich zur Lastabtragung in einer Richtung verwendet. Diese Haupttragsrichtung wird durch den Verlauf der äußeren Lamellen gekennzeichnet. Für die Bemessung reichen somit in den meisten Fällen Modelle auf Basis der 1D-Balkentheorie aus. Der klassische Timoshenko-Balken (transversal-schubnachgiebiger Balken) liefert für baupraktisch relevante L/H -Verhältnisse ($15 < L/H < 30$) genaue Ergebnisse und hat sich bei der Berechnung von 1D-Plattenstreifen unter Querkraftbiegung bewährt.

Im Falle der einachsigen Lastabtragung wird die Drillsteifigkeit der Platte nicht aktiviert und ist somit bei der Berechnung nicht von Bedeutung. Da BSP-Platten in Sonderfällen aber auch z. B. als allseitig gelagerte oder punktgestützte Elemente eingesetzt werden, hat die zweiachsige Lastabtragung sowie die Drillsteifigkeit Einfluss auf das Tragverhalten.

In Kap. 1.3 wird die Plattentheorie der transversal-schubnachgiebigen Platte (Reissner-Mindlin) näher erläutert.

1.2.1 Einsatzbereiche von BSP

Die folgenden Bilder zeigen Beispiele von punktgestützten BSP-Plattenelementen. Wie schon in

Kap. 1.2 erwähnt wird bei dieser Lagerungsart das Tragverhalten unter anderem auch von der Drillsteifigkeit beeinflusst.



Abb. 1.3 Ausführungsbeispiele von punktgestützten Brettsperrholzplatten (vgl. [4], Kap. B)

1.3 Transversal-schubnachgiebige Platte

Bei der Beanspruchung von flächigen Bauteilen wird zwischen Scheiben- und Plattenbeanspruchung unterschieden. Scheibenwirkung entsteht bei Belastungen parallel zur Bauteilmittelfläche. Die BSP-Scheibe unter Schubbeanspruchung wird in Kapitel 2 näher behandelt. Treten Lasten quer zur Bauteilmittelfläche auf spricht man von Plattentragwirkung. Bei Platten erfolgt also eine Beanspruchung des Bauteils auf Biegung.

Im folgenden Abschnitt ist die Plattentheorie nach Reissner-Mindlin, auch als Theorie der schubnachgiebigen Platte bekannt, angeführt (vgl. [2]).

1.3.1 Plattenkinematik

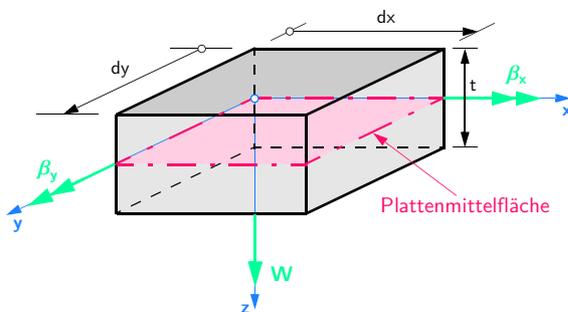


Abb. 1.4 Plattenelement und Verformungsparameter der Plattenmittelfläche

Kinematische Annahmen

Das „Ebenbleiben der Querschnitte“ sowie die „Erhaltung der Querschnittsform“ wird vorausgesetzt.

Verschiebungsansatz

Der folgende Verschiebungsansatz führt zu zwei Plattenbiegemomenten, zwei transversalen Schubkräften und einem Drillmoment.

$$U_{3D} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{3D} = \begin{bmatrix} z \cdot \beta_y(x, y) \\ z \cdot \beta_x(x, y) \\ W(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ W \end{bmatrix}$$

Punkte auf der Plattenmittelfläche ($z = 0$) erfahren ausschließlich Transversalverschiebungen w , jedoch keine Horizontalverschiebungen.

Plattenverzerrungen

Durch Einsetzen des zuvor angeschriebenen Verschiebungsansatzes in die kinematische Beziehung können

die Plattenverzerrungen bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \cdot \kappa$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} + \beta_y \\ \frac{\partial W}{\partial y} + \beta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \gamma$$

Die Plattenverzerrungsparameter sind ein Produkt zweier Faktoren, welche einerseits von den Flächenkoordinaten (x, y) und andererseits von den Querschnittskoordinaten ($1, z$) abhängen. Sie setzen sich aus drei Krümmungsgrößen (zwei Plattenverkrümmungen, eine Plattenverdrillung) und zwei Transversalschubverzerrungsgrößen zusammen.

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} + \beta_y \\ \frac{\partial W}{\partial y} + \beta_x \end{bmatrix}$$

1.3.2 Konstitution

Konstitutive Annahmen

In parallelen Schichten zur Mittelfläche wird ein ebener Spannungszustand (ESZ) angenommen, d. h. die Normalspannungen in Dickenrichtung sind null.

Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

Die Verzerrungen sind über die Materialgleichungen mit den Spannungen verknüpft. Bei der Betrachtung von isotropem bzw. orthotropem Material tritt keine Kopplung zwischen Längs- und Schubspannungen, sowie den Schubspannungen untereinander, auf.

Den weiteren Betrachtungen wird orthotropes Materialverhalten zugrundegelegt.

Anmerkung: Die Grundgleichungen der Kinematik bleiben unabhängig vom verwendeten Material immer gültig. Die Materialgleichungen müssen entsprechend angepasst werden.

$$C_{\text{ortho(ESZ)}} = \begin{bmatrix} 1 & \nu_y & 0 \\ E_x & E_y & 0 \\ \nu_x & 1 & 0 \\ E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & G_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu_x \nu_y & 0 \\ \nu_x \nu_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix}}_{D_K} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Alternativ kann das Materialgesetz auch folgendermaßen dargestellt werden:

mit $\nu_x E_y \quad \nu_y E_x$

$$\nu_{\text{ortho}} = \frac{\nu_x \nu_y}{\sqrt{E_x E_y}} \quad E_{\text{ortho}} = \sqrt{E_x E_y}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\text{ortho}} & \sqrt{E_x / E_y} & \nu_{\text{ortho}} \\ 1 & \nu_{\text{ortho}}^2 & \nu_{\text{ortho}} \\ & \nu_{\text{ortho}} & \sqrt{E_y / E_x} \\ & 0 & 0 \\ & & & G_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix}}_{D_S} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Plattenschnittgrößen

Durch Integration der Plattenspannungen über die Plattendicke ergeben sich fünf Plattenschnittgrößen. Diese setzen sich aus zwei Biegemomenten, einem Drillmoment und zwei transversalen Querkräften zusammen.

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} z \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \cdot dz$$

Der Zusammenhang zwischen Plattenverzerrungen und Plattenschnittgrößen führt zu den gesuchten Plattensteifigkeiten (siehe auch Kap. 1.4).

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} D_K \cdot z^2 dz \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} D_S dz \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ W \end{bmatrix}$$

Plattensteifigkeiten der homogenen (1-schichtigen) Platte

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_x & K_\nu & 0 & 0 & 0 \\ K_\nu & K_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_y \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \nu_{\text{ortho}} \sqrt{E_x E_y} \\ E_{\text{ortho}} \sqrt{E_x E_y} \end{matrix}$$

$$K_{\text{ortho}} = \frac{t^3}{12} \cdot \begin{pmatrix} E_{\text{ortho}} \\ 1 & \nu_{\text{ortho}}^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} K_\nu & K_{\text{ortho}} \cdot \nu_{\text{ortho}} \\ K_x & K_{\text{ortho}} \cdot \sqrt{E_x / E_y} \\ K_y & K_{\text{ortho}} \cdot \sqrt{E_y / E_x} \end{matrix}$$

$$K_{xy} = G_{xy} \cdot \frac{t^3}{12} \quad \begin{matrix} S_x & G_{xz} \cdot t \\ S_y & G_{yz} \cdot t \end{matrix}$$

Schubkorrekturfaktoren

Die konstitutiven Beziehungen zwischen den transversalen Schubverzerrungen und den Plattenquerkräften sind in beide Richtungen mit den Schubkorrekturfaktoren κ_x bzw. κ_y zu ergänzen.

$$S_x = G_{xz} \cdot t / \kappa_x \quad S_y = G_{yz} \cdot t / \kappa_y$$

1.3.3 Kinetik – Gleichgewichtsgleichungen

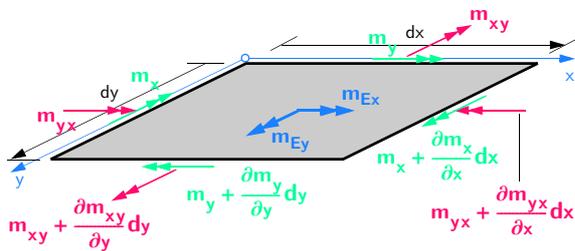


Abb. 1.5 Momentengleichgewicht um die x- bzw. y-Achse

Mit den vorliegenden Plattenschnittgrößen ist ein Kräftegleichgewicht in Transversalrichtung, sowie je ein Momentengleichgewicht um die x- bzw. y-Achse zu erfüllen.

$$\begin{aligned} \Sigma V = 0 & \quad \Sigma M_x = 0 \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + q_z = 0 & \quad \frac{\partial m_y}{\partial y} \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + q_y + m_{Ex} = 0 \\ & \quad \Sigma M_y = 0 \\ & \quad \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad q_x + m_{Ey} = 0 \end{aligned}$$

Zusammenfassung in Matrix-Differentialoperator Darstellung

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{Ex} \\ m_{Ey} \\ q_z \end{bmatrix} = 0$$

1.3.4 Differentialgleichungssystem der transversal-schubnachgiebigen Platte mit orthotropem Materialverhalten

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_x & K_y & 0 & 0 & 0 \\ K_y & K_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{Ex} \\ m_{Ey} \\ q_z \end{bmatrix} = 0$$

Gleichungsbilanz

Tab. 1.1 Anzahl der Unbekannten und der zur Verfügung stehenden Gleichungen

	Unbekannte	Gleichungen
Kinematik	$\beta_x, \beta_y, W = 3$	5
Konstitution	$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} = 5$	5
Kinetik	$m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y = 5$	3
Bilanz	13	13

In Tab. 1.1 ist zu sehen, dass die Anzahl der Unbekannten der Anzahl der vorhandenen Gleichungen entspricht. Die Gleichungen setzen sich aus fünf Verschiebungs-Verzerrungsdifferentialgleichungen, fünf konstitutiven, algebraischen Gleichungen sowie den drei Gleichgewichtsdifferentialgleichungen zusammen.

Nach Elimination der fünf Plattenverzerrungen durch die drei Verschiebungen entstehen fünf konstitutive, partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Plattenschnittgrößen mit den Verschiebungen verbinden. Durch Einsetzen in die Gleichgewichtsdifferentialgleichungen resultieren drei lineare, partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Unbekannten β_x, β_y und W . Dies sind die Grundgleichungen der transversal schubnachgiebigen Platte.

Drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung erlauben die Erfüllung von drei Verformungs- oder Kräfte- und Randbedingungen je Rand, welche den vorhandenen Unbekannten genau entsprechen.

1.4 Plattensteifigkeiten

1.4.1 Steifigkeiten der geschichteten Platte mit homogenen Einzelschichten

Bei geschichteten Strukturen können die einzelnen Schichten unterschiedliche Materialkennwerte und/oder verschiedene Materialorientierungen aufweisen. In beiden Fällen sind sämtliche Materialparameter von der Querschnittsordinate z abhängig. Die Integrale zur Ermittlung der Steifigkeiten können allgemein für Schichten mit unterschiedlichen Materialien wie folgt angeschrieben werden:

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} K_x & K_v & 0 & 0 & 0 \\ K_v & K_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{matrix} v_{\text{ortho}}(z) & \sqrt{v_x(z)v_y(z)} \\ E_{\text{ortho}}(z) & \sqrt{E_x(z)E_y(z)} \end{matrix}$$

$$K_x = \int_{t/2}^{t/2} \frac{E_{\text{ortho}}(z)}{v_{\text{ortho}}^2(z)} \cdot \sqrt{\frac{E_x(z)}{E_y(z)}} \cdot z^2 dz$$

$$K_y = \int_{t/2}^{t/2} \frac{E_{\text{ortho}}(z)}{v_{\text{ortho}}^2(z)} \cdot \sqrt{\frac{E_y(z)}{E_x(z)}} \cdot z^2 dz$$

$$K_v = \int_{t/2}^{t/2} \frac{E_{\text{ortho}}(z)}{v_{\text{ortho}}^2(z)} \cdot v_{\text{ortho}}(z) \cdot z^2 dz$$

$$K_{xy} = \int_{t/2}^{t/2} G_{xy}(z) \cdot z^2 dz$$

$$S_x = \int_{t/2}^{t/2} G_{xz}(z) dz \qquad S_y = \int_{t/2}^{t/2} G_{yz}(z) dz$$

Anmerkung: Die transversalen Schubsteifigkeiten S_{xz} und S_{yz} sind in beide Richtungen mit den Schubkorrekturfaktoren κ_x bzw. κ_y zu ergänzen.

1.4.2 BSP – Orthotropes Material Holz und geschichtete Struktur

Nachfolgend werden die in Kap. 1.4.1 angeführten Integrale ausgewertet. Für Brettsperrholz sind die folgenden Annahmen sinnvoll:

- Die Elastizitätsmoduln E_x und E_y wechseln schichtweise zwischen $E_{0,mean}$ und $E_{90,mean}$.

- Wegen auftretender Risse und/oder fehlender Seitenverklebung wird empfohlen E_y , insbesondere für die Spannungsberechnung, mit 0 anzusetzen.
- Vernachlässigung aller Querkontraktionszahlen, $v_{\text{ortho}} = 0$.
- Der Schubmodul G_{xy} ist über die gesamte Plattendicke t konstant. G_{xz} und G_{yz} nehmen abwechselnd die Werte für Schubmodul und Rollschubmodul ein.
- Gesonderte Ermittlung der Drillsteifigkeit aufgrund der fehlenden Schmalseitenverklebung (siehe unten).

Für den Sonderfall gleicher Schichtdicken ergeben sich für 3-, 5- und 7-schichtige BSP-Elemente, unter Berücksichtigung von E_y , die folgenden Biegesteifigkeiten K_x und K_y .

$$K_x = K_{\text{ref}} \cdot \frac{12}{n^3} \cdot \left[\alpha + \beta \cdot \frac{E_y}{E_x} \right]$$

$$K_y = K_{\text{ref}} \cdot \frac{12}{n^3} \cdot \left[\beta + \alpha \cdot \frac{E_y}{E_x} \right]$$

$$K_{\text{ref}} = \frac{E_x \cdot t^3}{12} \qquad \begin{matrix} t \dots & \text{Gesamtdicke der Platte} \\ n \dots & \text{Schichtanzahl} \end{matrix}$$

Tab. 1.2 Variablen zur Bestimmung der Biegesteifigkeiten der orthotropen Platte

Schichten	α	β
3	13/6	1/12
5	33/4	13/6
7	61/3	33/4

Um die oben stehenden Formeln der Biegesteifigkeiten besser deuten zu können, werden für E_x und E_y die Elastizitätsmoduln der Festigkeitsklasse C24 (vgl. [8], Tab. 1) eingesetzt. Die Steifigkeiten in Faserrichtung (E_x) und quer zur Faser (E_y) sind mit 1100 kN/cm^2 und 37 kN/cm^2 anzusetzen. Als Schichtstärke t/n werden 3 cm angenommen. In Tab. 1.3 sind die Biegesteifigkeiten K_x und K_y , bezogen auf die Referenzbiegesteifigkeit K_{ref} der homogenen Platte, dargestellt.

Tab. 1.3 Auswertung der Biegesteifigkeiten

Schichten	t [cm]	K_x/K_{ref} [%]	K_y/K_{ref} [%]
3	9	96	7
5	15	80	24
7	21	72	31

Drillsteifigkeit

Aufgrund des orthotropen, elastischen Materialgesetzes gibt es keine Kopplung zwischen der Schubspannungssteifigkeit und den Normalspannungssteifigkeiten (siehe D_K -Matrix Kap. 1.3.2). Das Gleiche gilt auch für die, über die Querschnittshöhe integrierten, Plattensteifigkeiten. Die Drillsteifigkeit D_{xy} ($= K_{xy}$) ist deshalb entkoppelt von den ausschließlich E -Modul gesteuerten Plattenbiegesteifigkeiten zu berechnen. Bei einer homogenen Platte mit orthotropem Material ergibt sich der folgende Wert, wobei der Schubmodul G_{xy} über die gesamte Dicke t konstant sein muss.

$$D_{xy} = K_{xy} \int_{-t/2}^{t/2} G_{xy} \cdot z^2 dz = \frac{G_{xy} \cdot t^3}{12}$$

Im Falle von Brettsper Holz trifft dies nur auf seitenverklebte Platten, bei denen Schubspannungen an den Brettschmalseiten übertragen werden können, zu.

Kann keine völlig rissfreie bzw. seitenflächenverklebte Struktur gewährleistet werden, so ist die Drillsteifigkeit aus obiger Formel, in Abhängigkeit der Schichtanzahl und der Brettgeometrie, abzumindern.

$$D_{xy}^* = \kappa_{\text{BSP,P}} \cdot D_{xy} = \kappa_{\text{BSP,P}} \cdot \frac{G_{xy} \cdot t^3}{12}$$

Der Reduktionsfaktor $\kappa_{\text{BSP,P}}$ zur Abminderung der Plattendrillsteifigkeit ist für nicht schmalseitenverklebtes Brettsper Holz unbekannt.

Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist folglich die Bestimmung der reduzierten Drillsteifigkeit D_{xy}^* für BSP-Platten ohne Schmalseitenverklebung.

1.5 Randbedingungen im FE-Modell

1.5.1 Allgemeines

Wie bereits in Kap. 1.3.3 beschrieben, sind bei einer Platte pro Rand immer drei Randbedingungen zu erfüllen. Das können entweder Kräfte- oder Verformungsrandbedingungen sein. Es gibt somit für die FE-Modellierung zwei Möglichkeiten um einen Drillzustand auf die BSP-Platte aufzubringen.

Kräfteorientierte Vorgehensweise

An den Plattenrändern werden Schubkräfte aufgebracht und die daraus resultierende Drillverformung numerisch bestimmt. Problematik hierbei ist die nicht bekannte Verteilung der Kräfte über die Schichtdicke.

Verformungsorientierte Vorgehensweise

Es werden Drillverformungen aufgebracht und die entstehenden Drillmomente aus den numerischen Ergebnissen ermittelt. Die Kinematik des Drillens ist für eine BSP-Platte (geschichtete Struktur) ohne Schmalseitenverklebung, wie auch die Schubkraftverteilung, unbekannt. Im Vergleich zur bekannten isotropen homogenen Platte, wird der Fehler aber wesentlich geringer als bei der kräfteorientierten Vorgehensweise sein.

Das Plattendrillen wird von Verschiebungen senkrecht zur Plattenmittelfläche hervorgerufen. Diese treten bei einer BSP-Platte ident zur homogenen Platte auf. Wesentlicher Unterschied ist, dass die Schubverzerrungen in Dickenrichtung nicht mehr linear zunehmen und somit die Querschnitte im Drillzustand nicht mehr eben bleiben.

Um gewöhnliche FE-Software für die Berechnung der Plattenverdrillung nutzbar zu machen, wird für die folgenden Herleitungen die Kinematik der homogenen Platte verwendet.

1.5.2 Konstanter Verdrillungszustand

Plattenelemente unter reiner Drillbeanspruchung weisen eine Verformungsfigur, welche ausschließlich aus den auftretenden Drillmomenten resultiert, auf. Plattenstreifen parallel zu den Plattenrändern bleiben eben und weisen keine Biegeverformung auf. Dieses Verhalten kann gleichermaßen auch bei orthotropen Platten angewendet werden.

Eine ideale Plattenverdrillung hat zur Folge, dass die Plattenverkrümmungen κ_x und κ_y sowie die Plattenschubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} null sein müssen.

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_x(x,y) \\ \beta_y(x,y) \\ W(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\kappa_x \quad \frac{\partial \beta_y(x,y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \beta_y = \beta_y(y)$$

$$\kappa_y \quad \frac{\partial \beta_x(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \beta_x = \beta_x(x)$$

$$\kappa_{xy} \quad \underbrace{\frac{\partial \beta_y(y)}{\partial y}}_{f(y)} \quad \underbrace{\frac{\partial \beta_x(x)}{\partial x}}_{g(x)} = \text{konst.}$$

Die Plattenverdrillung κ_{xy} kann für jeden beliebigen Punkt der Platte nur dann konstant sein, wenn auch die Funktionen $f(y)$ und $g(x)$ konstant sind.

$$\begin{aligned} f(y) &= \text{konst.} = C_1 \\ g(x) &= \text{konst.} = C_2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \beta_y(y)}{\partial y} = C_1 \Rightarrow \beta_y(y) = C_1 \cdot y + D_1$$

$$\frac{\partial \beta_x(x)}{\partial x} = C_2 \Rightarrow \beta_x(x) = C_2 \cdot x + D_2$$

Eingestzt in die Schubverzerrungen ergibt sich:

$$\gamma_x = \frac{\partial W}{\partial x} + \beta_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial x} = C_1 \cdot y - D_1$$

$$W_1(x,y) = C_1 \cdot x \cdot y - D_1 \cdot x + E_1$$

$$\gamma_y = \frac{\partial W}{\partial y} + \beta_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial y} = C_2 \cdot x - D_2$$

$$W_2(x,y) = C_2 \cdot x \cdot y + D_2 \cdot y + E_2$$

Die Verschiebungen $W_1(x,y)$ und $W_2(x,y)$ müssen gleich sein.

$$W_1(x,y) \equiv W_2(x,y) \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} C_2 & C_1 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ E_1 & E_2 & (\text{Annahme: } E_1 & E_2 & 0) \end{matrix}$$

$$W(x,y) = C_1 \cdot x \cdot y - C_2 \cdot x \cdot y$$

Die Einheitsplattenverdrillung $\kappa_{xy,0}$ kann somit wie folgt bestimmt werden:

$$\beta_x = C_2 \cdot x$$

$$\beta_y = C_1 \cdot y$$

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \beta_y(y)}{\partial y} - \frac{\partial \beta_x(x)}{\partial x} = C_1 - C_2 = 2 \cdot C_2 \equiv \kappa_{xy,0}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\kappa_{xy,0}}{2}$$

Daraus ergeben sich die endgültigen Verdrehungen β_x und β_y , sowie die Verschiebung W für eine konstante Plattenverdrillung.

$$\beta_x(x,y) = \frac{\kappa_{xy,0}}{2} \cdot x$$

$$\beta_y(x,y) = \frac{\kappa_{xy,0}}{2} \cdot y$$

$$W(x,y) = \frac{\kappa_{xy,0}}{2} \cdot x \cdot y$$

Plattenschnittgrößen des Einheitsdrillzustandes

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \kappa_{xy,0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{xy} \cdot \kappa_{xy,0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Anmerkung: Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} kann für unterschiedliches Materialverhalten eingesetzt werden (siehe Kap. 1.3.2 und Kap. 1.4.1).

Darstellung des Einheitsdrillzustandes

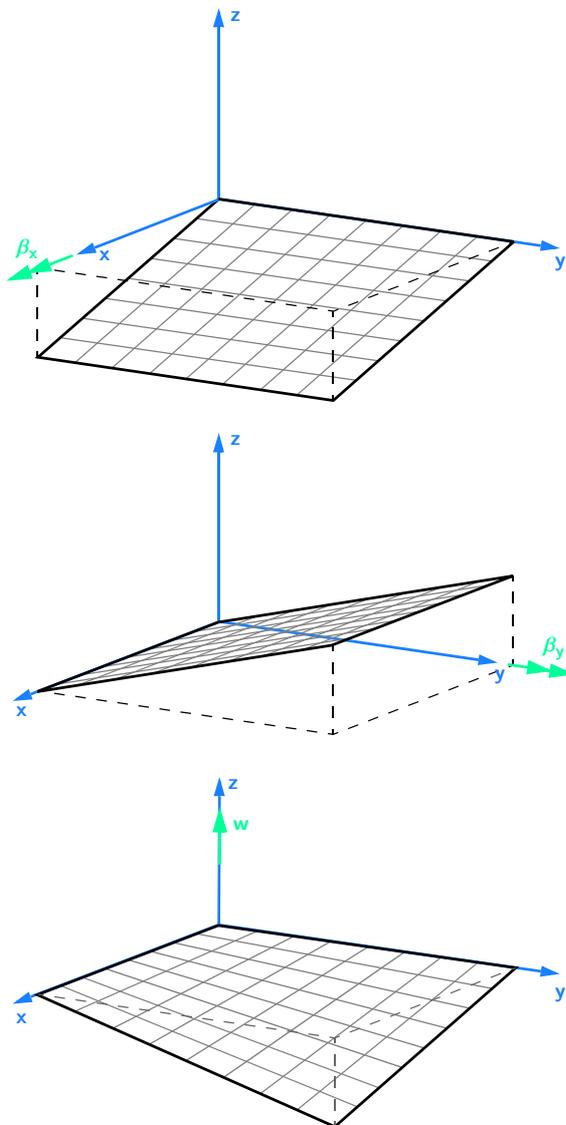


Abb. 1.6 Darstellung von β_x , β_y und w

Siehe auch Abb. 1.8 oben.

1.5.3 Konstanter Schubzustand

Bislang ist nur die Schubsteifigkeit einer gedanklich ∞ -dicken BSP-Scheibe (RVSE, siehe Kap. 2.1) bekannt. Ein Nebenziel dieser Arbeit ist somit die Untersuchung des Einflusses des Randeffektes auf die Schubsteifigkeit S_{xy} von 3- und 5-schichtigen BSP-Scheiben. Dazu ist die Kenntnis über den, in der FE-Berechnung aufzubringenden, konstanten Schubzustand, nötig.

Scheibenelemente unter reiner Schubbeanspruchung weisen nur eine konstante Schubverzerrung γ_{xy} , jedoch keine Normalverzerrungen ϵ_x und ϵ_y auf.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_x \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y)$$

$$\epsilon_y \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = v(x)$$

$$\gamma_{xy} \quad \frac{\partial u(y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} = \text{konst.}$$

$$f(y) \quad g(x)$$

Analog zu Kap. 1.5.2 ist die Schubverzerrung γ_{xy} nur dann konstant wenn auch die Funktionen $f(y)$ und $g(x)$ konstant sind.

$$\begin{matrix} f(y) & \text{konst.} & C_1 \\ g(x) & \text{konst.} & C_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u(y)}{\partial y} = C_1 \Rightarrow u(y) = C_1 \cdot y + D_1$$

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = C_2 \Rightarrow v(x) = C_2 \cdot x + D_2$$

Die Schubverzerrung der Scheibe lässt sich somit wie folgt anschreiben:

mit $D_1 = D_2 = 0$ (Annahme)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u(y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} = C_1 + C_2$$

Es ist zu erkennen, dass γ_{xy} von zwei Konstanten abhängig ist. Wird $C_1 = C_2$ gewählt, ergeben sich die Verschiebungen u und v zu:

mit $C_1 = C_2$ (Annahme)

$$u(x,y) = C_1 \cdot y$$

$$v(x,y) = C_2 \cdot x = C_1 \cdot x$$

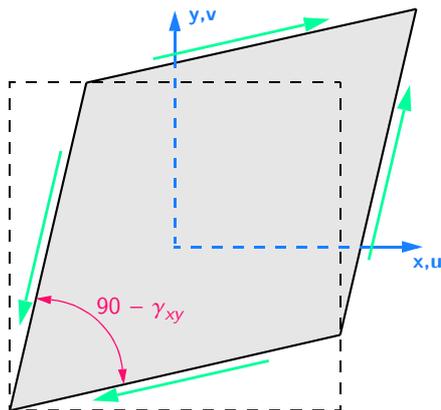


Abb. 1.7 Konstanter Schubverzerrungszustand ($C_1 = C_2$)

Plattenschnittgrößen des Einheitsschubzustandes

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & C_{xy} & 0 \\ C_{xy} & D_y & 0 \\ 0 & 0 & S_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{xy} \cdot \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Darstellung des Einheitsschubzustandes

Siehe Abb. 1.8 unten.

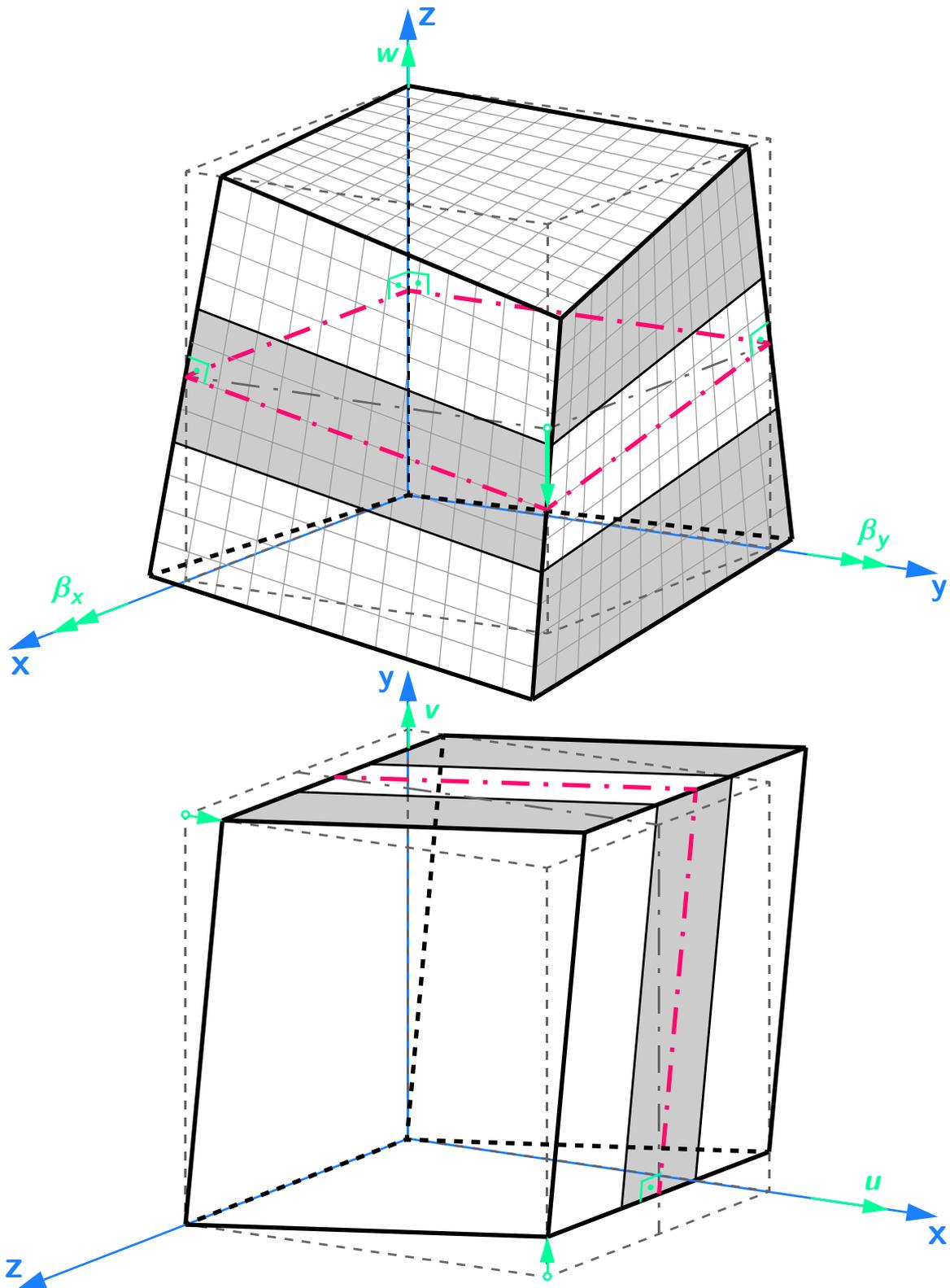


Abb. 1.8 Oben: Platten-Element unter konstanter Verdrillung; Unten: Scheiben-Element unter konstanter Schubbeanspruchung

2 Stand des Wissens

Kapitel 2.1 wird als Grundlage zur Ermittlung der Schubsteifigkeit von BSP-Scheiben direkt aus [4], Kap. D-7 übernommen. Aufgrund der Ähnlichkeit zum Plattendrillen dient dieser Abschnitt in weiterer Folge auch als Basis zur Bestimmung der Drillsteifigkeit von BSP-Platten.

2.1 Grundlagen der Scheibentheorie für BSP-Strukturen [4]

2.1.1 Einleitung

Im folgenden Kapitel wird die statische Berechnung von Wandscheiben als Teil von Gebäuden sowohl in Bezug auf deren Steifigkeiten als auch hinsichtlich der Tragfähigkeit dargestellt. Eine typische Wandscheibe ist in Abb. 2.1 dargestellt.

Das RVE (Repräsentatives Volumen-Element) erstreckt sich über die Kreuzungsfläche benachbarter Bretter inkl. eventueller anteiliger Fugenbreiten und die Gesamtdicke der BSP-Scheibe. Erhöht man ge-

danklich die Schichtanzahl n gegen ∞ , entstehen in allen Brettmittelflächen Symmetrieebenen. Das RVE kann daher weiter zum RVSE (Repräsentatives Volumen Sub-Element) reduziert werden (siehe Abb. 2.1).

2.1.2 Scheibensteifigkeiten eines BSP-Elementes – Grundlagen

Unter „Scheibenberechnung“ wird hier die Ermittlung der inneren Schnittgrößen einer Wandscheibe unter der Wirkung von Lasten in Scheibenebene verstanden. Weiters müssen noch Belastungen quer zur BSP-Scheibe berücksichtigt werden, welche im Gegensatz zu den Scheibenkräften jedoch Plattenbiegemomente hervorrufen. Im Folgenden wird jedoch nur auf die Nachweise in der Scheibenebene eingegangen, da der Nachweis der Plattenbeanspruchung gleich wie bei Deckenplatten zu führen ist. Genau genommen ist bei gleichzeitiger Wirkung von Scheibenkräften und Plattenbiegemomenten ein Interaktionsnachweis zu führen. Hier stehen allerdings Forschungsergebnisse zur Thematik Biegemoment und Zug- bzw. Drucknormalkraft aus.

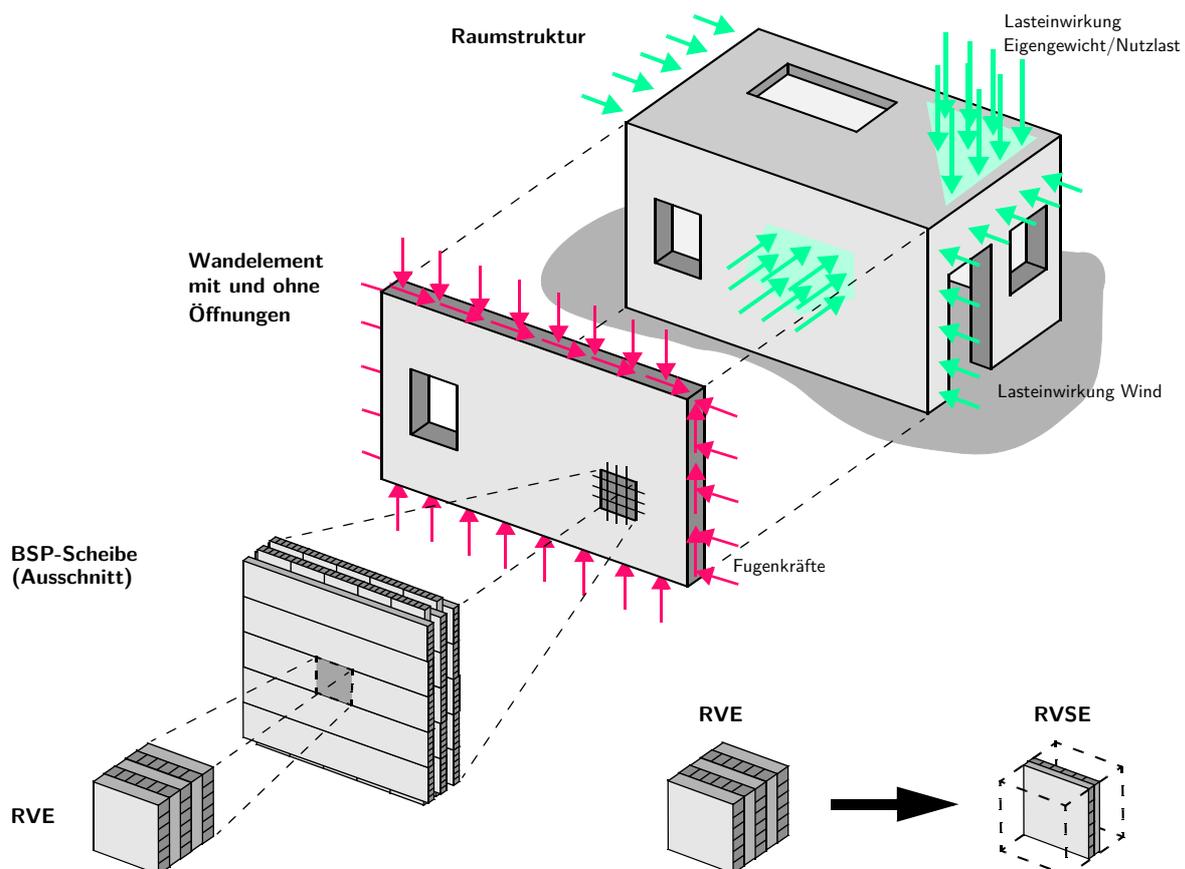


Abb. 2.1 Reduktion: Von der BSP-Scheibe eines Gebäudes über das RVE (Repräsentatives Volumen-Element) bis zum RVSE (Repräsentatives Volumen Sub-Element)

In einer Brettsperrholzscheibe treten bekanntermaßen drei Scheibenkräfte auf: Normalkraft n_x , Normalkraft n_y und Schubkraft n_{xy}

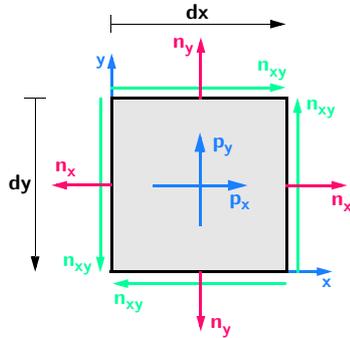


Abb. 2.2 Scheibenkräfte n_x , n_y und n_{xy}

Die konstitutiven Gleichungen für das „Material BSP-Scheibe“ verknüpfen über die Dehnsteifigkeiten D_x , D_y über die Schubsteifigkeit S_{xy} sowie über die gekoppelte Dehnsteifigkeit C_{xy} die Scheibenverformungen bzw. genauer die drei inneren Scheibenverzerrungen ϵ_x , ϵ_y und γ_{xy} mit den 3 Scheibenkräften n_x , n_y und n_{xy} . Diese 4 Werte D_x , D_y , S_{xy} und C_{xy} müssen für eine orthotrope Scheibenberechnung nach der FE-Methode im Allgemeinen zur Verfügung gestellt werden, wenn nicht das Programm die Struktur der „BSP-Scheibe“ implementiert hat. Die Scheibensteifigkeitsmatrix für eine allgemeine orthotrope Platte sieht wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & C_{xy} & 0 \\ C_{xy} & D_y & 0 \\ 0 & 0 & S_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

2.1.3 Dehnsteifigkeiten D_x und D_y für ein BSP-Element

Die Dehnsteifigkeiten D_x und D_y sind einfach zu bestimmen. Effekte aus den Dehnsteifigkeiten der Brettlamellen quer zur Faser sowie gekoppelte Steifigkeiten (gekoppelte Steifigkeiten zufolge Querkontraktionseffekte) werden vernachlässigt ($C_{xy} \approx 0$).

Die Scheibendeinheitssteifigkeiten D_x und D_y für z. B. eine 3-schichtige BSP-Scheibe mit Decklagen in y -Richtung (Dicke t_1) und in x -Richtung (Dicke t_2), so wie sie auch im anschließenden Beispiel zum Einsatz kommt, werden im Folgenden bestimmt. Es wird angenommen, dass der E -Modul $E_{0,mean}$ in Faserrichtung in allen drei Schichten gleich ist. Beim E -Modul quer zur Faserrichtung $E_{90,mean}$ wird die Annahme getroffen $E_{90,mean} = 0$.

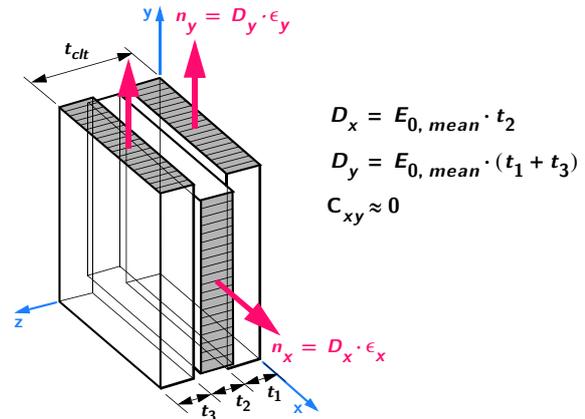


Abb. 2.3 BSP-RVE unter Normalkraftbeanspruchung

Im Falle unterschiedlicher E -Moduln der einzelnen Schichten sind die einzelnen Schichten mit dem jeweiligen E -Modul gewichtet in die Ermittlung der Steifigkeiten einzusetzen.

2.1.4 Schubsteifigkeit S_{xy} für ein gedanklich ∞ -dickes BSP-Element mit konstanten Schichtdicken

Unterschied von BSP-Platten mit und ohne Schmalseitenverklebungen für die Bestimmung der Schubsteifigkeit S_{xy}

Im Falle von BSP-Scheiben mit Seitenverklebung an den Brettseiten könnte analog zur Bestimmung der Scheibendeinheitssteifigkeit die Schubsteifigkeit mit $S_{xy} = G_{0,mean} \cdot t$ angesetzt werden. Risse, die mit großer Wahrscheinlichkeit in einem BSP-Element auftreten werden, führen zu einer Reduktion der effektiven Schubsteifigkeit analog einer BSP-Scheibe ohne Seitenverklebung. Begründet darauf wird im Weiteren kein Unterschied zwischen Scheiben mit und ohne Seitenverklebungen gemacht. Mit „ a “ wird entweder die Brettbreite oder ein mittlerer Rissabstand bezeichnet.

Die wesentlichen Voraussetzungen für die folgenden Ausführungen in diesem Unterkapitel zur Schubsteifigkeit S_{xy} sind:

- Die Schichtdicke der Einzellamelle i wird mit t_i bezeichnet. Alle Schichtdicken sind gleich und werden in diesem Unterkapitel mit t bezeichnet.
- Aufgrund des gedanklich ∞ -dicken BSP-Elementes und der Symmetrieebenen in allen Brettmittelflächen kann anstatt des RVE das RVSE mit zwei halben Einzelschichten für die folgenden Ausführungen verwendet werden (RVE und RVSE: siehe Abb. 2.1).

- Die Fugenbreiten zwischen benachbarten Brettern in einer Einzelschicht bleiben vernachlässigbar gering.

Modell für die Schubsteifigkeit S_{xy} [6]

Die Schubverzerrung der BSP-Scheibe setzt sich aus den beiden Anteilen „Schub der ungerissenen, perfekten BSP-Scheibe“ (Mechanismus I – „Schub“, siehe Abb. 2.4 a), und einem Mechanismus II – „Torsion“ (Abb. 2.4 b) zusammen. Beide Anteile zusammen ergeben das BSP-Scheibenmodell mit der nominellen Schubbeanspruchung $\tau_0 = n_{xy}/t$. Im ungerissenen Zustand wirkt nur der Mechanismus I – „Schub“. Die Schubverzerrung ist mit $\gamma_I = \tau_0/G_{0,mean}$ gegeben (Abb. 2.4 a).

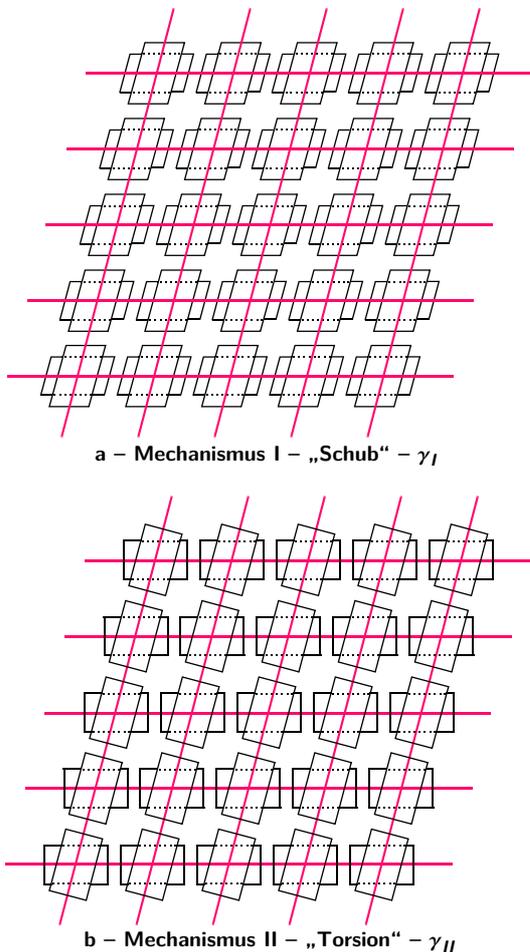


Abb. 2.4 Schubmechanismen I und II der BSP-Scheibe

Nun werden gedanklich alle Schmalseiten aufgeschnitten. Die dort wirkenden Schubspannungen müssen daher verschwinden. Dadurch kommt es zu einer inneren Spannungumlagerung. Der daraus re-

sultierende Mechanismus II – „Torsion“ (Abb. 2.4 b) führt zu einer zusätzlichen Schubverformung γ_{II} . Der ursprüngliche Mechanismus I – „Schub“ reduziert sich auf Querkraftschub in den einzelnen Brettlagen. Aus diesem Grund müssen die Bretter zweier benachbarter Schichten gemeinsam wirken, um ein Schubfeld bilden zu können. Das lokale Gleichgewicht zwischen den beiden Querkraftpaaren wird über das innere Torsionsmoment an den Klebeflächen aufrecht erhalten. Dies bedeutet, dass für eine Schubbeanspruchung beide Mechanismen (Mechanismus I – „Schub“ und Mechanismus II – „Torsion“) gleichzeitig wirken müssen.

Die Schubverzerrung γ_I kann für den Mechanismus I – „Schub“, wie bereits ausgeführt, exakt bestimmt werden.

$$\gamma_I = \frac{\tau_0}{G_{0,mean}}$$

Mit einem Torsionsmodell lässt sich γ_{II} näherungsweise abschätzen. Als effektiver Schubmodul für das Torsionsmodell auf Basis einer komplett wölbbehinderten Torsion (die Torsionssteifigkeit ergibt sich in diesem Fall aus dem polaren Trägheitsmoment) wird näherungsweise $G_{0,mean}/2$ verwendet, da der Anteil des Rollschubmoduls, im Vergleich zur Schubsteifigkeit in Faserrichtung vernachlässigbar gering ist.

$$\phi \quad \gamma_{II} = \frac{M_T}{G_{Torsion} \cdot J_p} \cdot \frac{t}{2} = \frac{\tau_0 \cdot t \cdot a^2}{G_{Torsion} \cdot a^4} \cdot \frac{t}{2} \approx \frac{6 \cdot \tau_0}{G_{0,mean}} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^2$$

mit $G_{Torsion} \approx \frac{G_{0,mean}}{2}$ (Annahme)

Die gesamte Schubverzerrung γ unter der wirkenden nominellen Schubspannung τ_0 ergibt sich als Summe der beiden Nachgiebigkeiten des Mechanismus I – „Schub“ und Mechanismus II – „Torsion“:

$$\gamma = \gamma_I + \gamma_{II} = \frac{\tau_0}{G_{0,mean}} + \frac{6 \cdot \tau_0}{G_{0,mean}} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^2$$

Durch Invertieren von γ erhält man den effektiven Schubmodul G^* einer BSP-Struktur (siehe Abb. 2.6).

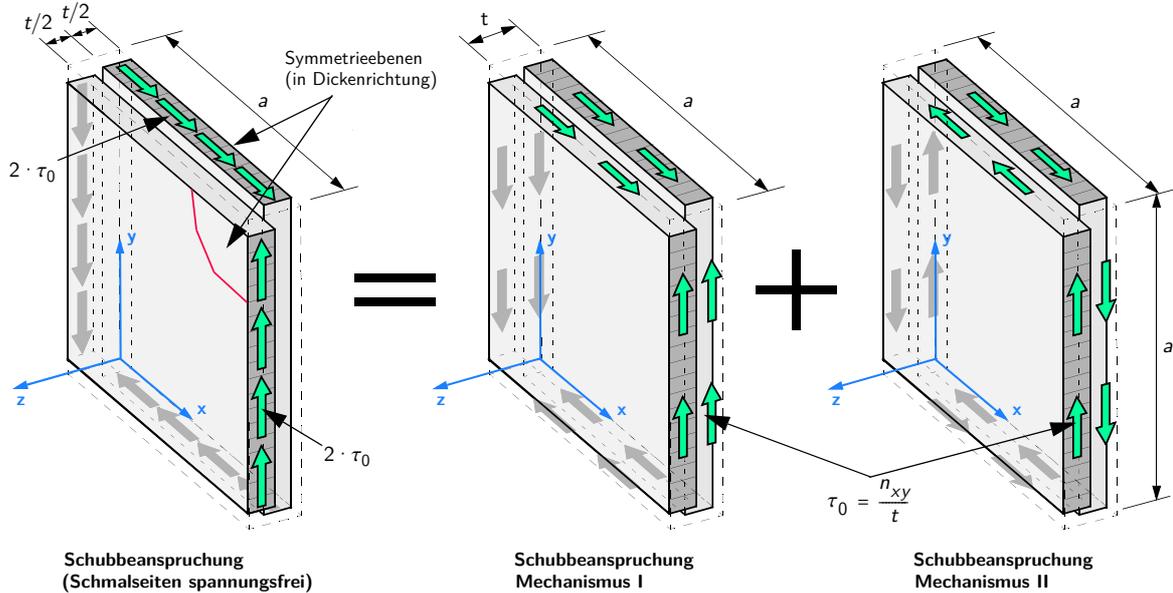


Abb. 2.5 Schubkräfte am RVSE-Knotenelement einer BSP-Scheibe

$$G^* = \gamma \left(\tau_0 + \frac{6 \cdot \tau_0}{G_{0,mean}} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^2 \right) = G_{0,mean} \left(1 + 6 \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^2 \right)$$

$$S_{xy} = G^* \cdot t_{cIt}$$

$G_{0,mean}$ Schubmodul des Grundmaterials

Die Schubsteifigkeit S_{xy} der BSP-Scheibe ergibt sich als Produkt des effektiven Schubmoduls G^* und der Gesamtdicke t_{cIt} .

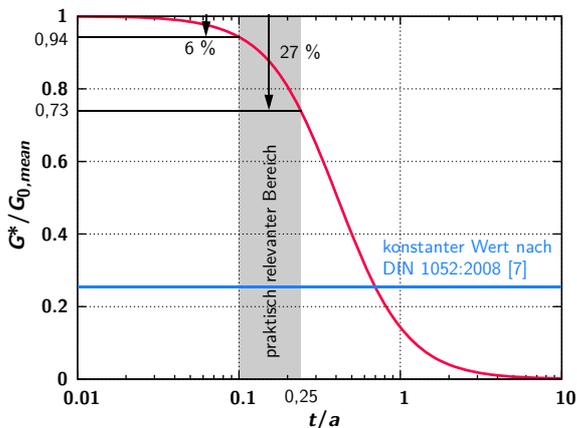


Abb. 2.6 Effektive Schubsteifigkeit einer BSP-Scheibe

Der Abfall der Schubsteifigkeiten im praktisch relevanten Bereich liegt nach diesem einfachen Modell bei einer BSP-Scheibe im Bereich von 6 % bis 27 %.

Eine genaue Lösung nach der linearen Elastizitätstheorie erhält man über eine FE-Studie (FE - Modell siehe Abb. 2.8), da das hier angesetzte Torsionsmodell die Nachgiebigkeit γ_{II} nur näherungsweise erfasst. In dieser FE-Studie wird die Dicke t_i der Einzelschicht i in Relation zur Brettbreite bzw. dem Rissabstand a variiert. Durch Vergleich der FE-Lösungen mit der oben aufgestellten Formel kommt man zur folgenden Formel für die Schubsteifigkeit von BSP-Scheiben (Abb. 2.7), in der im Vergleich zum vorher aufgestellten einfachen Torsionsmodell zusätzlich eine Korrekturfunktion $\alpha_T = f(t/a)$ eingefügt wurde. Der Abfall der Schubsteifigkeiten im praktisch relevanten Bereich nach dieser korrigierten Funktion liegt bei 11 % bis 26 %.

$$G^* = \frac{1}{G_{0,mean} \left(1 + 6 \cdot \alpha_{FIT} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^2 \right)}$$

$$\alpha_{FIT} = 0,32 \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{0,77} \text{ (Korrekturfunktion)}$$

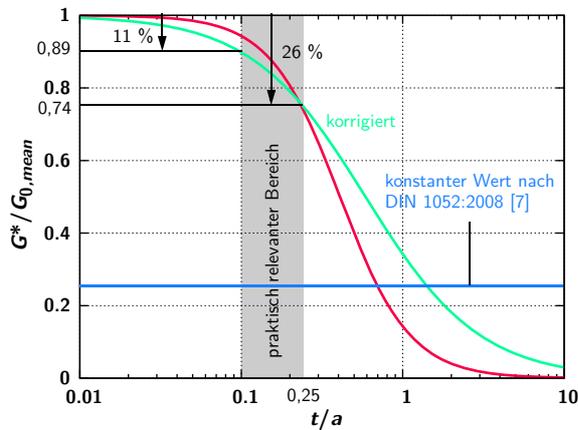


Abb. 2.7 Effektive Schubsteifigkeit einer BSP-Scheibe, korrigiert auf Basis einer FE-Analyse

FE-Modell für die Bestimmung der effektiven Scheibenschubsteifigkeiten ohne Randeffekt aus dem Endevaluierungsbericht [3]

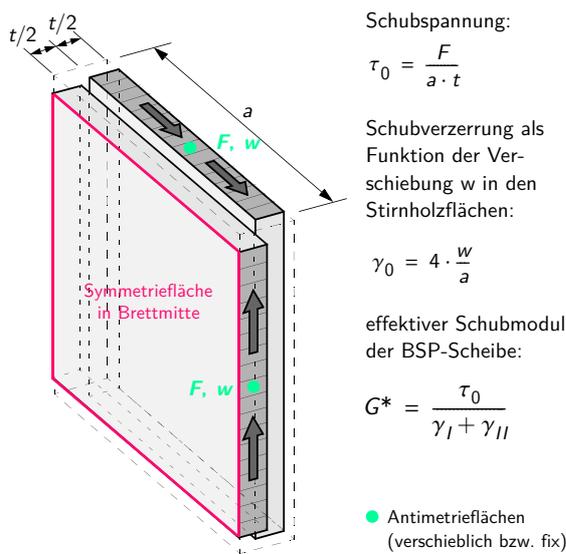


Abb. 2.8 FE-Modell für die FE-Studie von S_{xy} anhand eines RVSEs

Eine experimentelle Überprüfung ist an der holz.bau forschung gmbh Graz erfolgt [9].

2.1.5 Schubsteifigkeit S_{xy} für Elemente mit endlicher Schichtanzahl und variablen Schichtdicken (t_i)

Randeffekt

Bei BSP-Scheiben mit endlicher Schichtanzahl kommt zusätzlich zu den bisherigen Ausführungen in Kapitel 2.1.4 ein Randeffekt zum Tragen. In der Praxis werden 3-, 5-, 7- oder auch 9-schichtigen BSP-Scheiben nachzuweisen sein.

Der Einfluss dieses Randeffektes wird ebenfalls über eine FE-Studie bestimmt. Für eine 3- bzw. 5-schichtige BSP-Struktur ist der Randeffekt (ohne Randeffekt: Schichtanzahl $n \rightarrow \infty$) in Abb. 2.9 dargestellt.

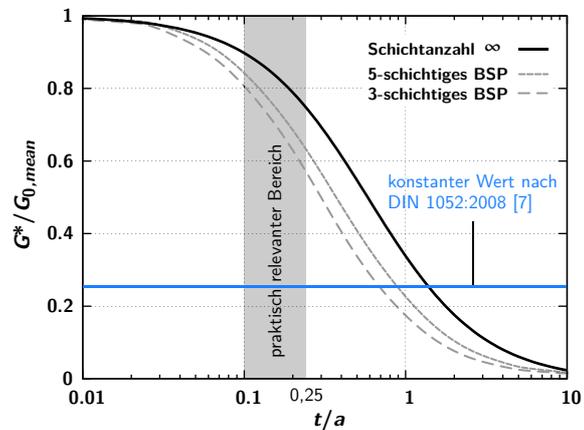


Abb. 2.9 BSP-Scheibe mit und ohne Randeffekte

Zum Randeffekt sei noch angemerkt, wie aus Abb. 2.9 ersichtlich ist, dass der reduzierende Einfluss des Randeffektes mit Zunahme der Schichtanzahl deutlich abnimmt. Für eine 3-schichtige Platte beträgt die Abnahme der Schubsteifigkeit maximal 14 %, bezogen auf den vorher erwähnten Sonderfall des RVSE (RVSE: siehe Abb. 2.1).

Unterschiedliche Schichtstärken

Sind die Schichtdicken t_i unterschiedlich, wird t näherungsweise als Mittelwert der Schichtdicken t_i bestimmt.

2.2 Tagungsbeitrag (vgl. [5])

2.2.1 Zusätzlicher Effekt von kleinen Fugen zwischen den Brettern der Einzelschicht (vgl. [5], Kap. 3.2)

Zur Berücksichtigung von Fugen (u) zwischen den Brettern der Einzelschicht wird die Gleichung [3-4] in Kapitel 3.2 angegeben.

$$G^* = \frac{1}{G \left(1 + \frac{u}{a} \left(1 + 2 \frac{G}{G_Q} \right) + 3 \frac{G}{G_{\text{eff}}} \left(1 + \frac{u}{a} \right)^2 \left(\frac{t_i}{a} \right)^2 + 2 \frac{G}{E} \left(\frac{u}{a} \right)^3 \right)}$$

2.2.2 Finite Elemente Ergebnisse (vgl. [5], Kap. 4.1)

Um eine bessere Anpassung der oben gezeigten Funktion an die FE-Lösung zu erlangen, wird die Formel mit einer Korrekturfunktion $\alpha_{\text{FE-FIT}}$ erweitert.

$$G^* = \frac{1}{G \left(1 + \frac{u}{a} \left(1 + 2 \frac{G}{G_Q} \right) + 3 \frac{G}{G_{\text{eff}}} \left(1 + \frac{u}{a} \right)^2 \left(\frac{t_i}{a} \right)^2 + 2 \frac{G}{E} \left(\frac{u}{a} \right)^3 \right)}$$



 $\alpha_{\text{FE-FIT}} \cdot 3 \frac{G}{G_{\text{eff}}} \left(1 + \frac{u}{a} \right)^2 \left(\frac{t_i}{a} \right)^2$

Fazit

Wird für $G_{\text{eff}} = G/2$ und für $u = 0$ eingesetzt, so ergibt sich die bereits in Kap. 2.1.4 enthaltene Formel:

$$G_{0, \text{mean}}^* = \frac{1}{1 + 6 \cdot \alpha_{\text{FIT}} \cdot \left(\frac{t_i}{a} \right)^2}$$

$$\alpha_{\text{FIT}} = p \cdot \left(\frac{t_i}{a} \right)^q \quad (\text{Korrekturfunktion})$$

2.3 Flächentragwerke (vgl. [1])

2.3.1 Orthotrope Platten (vgl. [1], 3. Absch., Kap. XVI)

GIRKMANN weist darauf hin, die Drillsteifigkeit C ($= D_{xy}$) von orthotropen Platten nach Möglichkeit experimentell zu bestimmen. Als Näherungswert wird in Glg. (820) auf S. 302 folgende Formel angegeben:

$$D_{xy} = C \cdot \frac{(1 + \sqrt{\mu_x \mu_y}) \cdot \sqrt{K_x K_y}}{2}$$

mit $\sqrt{K_x K_y}$... Mittelwert der Biegesteifigkeiten

$\sqrt{\mu_x \mu_y}$... Mittelwert der Querdehnungszahlen

Für isotrope Platten, sowie für orthotrope Platten konstanter Stärke, gilt laut Glg. (821):

$$D_{xy} = C = G \cdot \frac{h^3}{12}$$

mit h ... Plattenstärke

Fazit

Für Holz ist es durchaus üblich, die Querdehnungszahlen gleich null zu setzen. Eingesetzt in die vorgeschlagene Näherungsformel ergibt dies für die Drillsteifigkeit C , die Hälfte des Mittelwertes der beiden Biegesteifigkeiten.

$$C = \frac{\sqrt{K_x K_y}}{2}$$

Gleichung (821) kann als Drillsteifigkeit für schmalseitenverklebte BSP-Platten verwendet werden.

2.4 DIN 1052:2008-12 [7]

Flächen aus zusammengeklebten Schichten ([7], Kap. 8.9.2, S. 61)

8.9.2 Flächen aus zusammengeklebten Schichten

(1) Für Flächentragwerke mit Querschnitten aus geklebten Schichten (z. B. aus Holzwerkstoffplatten, Brettern oder Bohlen) sind die auf die Mittelfläche bezogenen Steifigkeitswerte nach der Verbundtheorie mit starrem Verbund zu berechnen. Dies gilt auch für die Spannungsberechnung.

(2) Rechenregeln sind in Anhang D angegeben.

Anhang D ([7], Kap. D.1, S. 174)

D.1 Allgemeines

(1) Für ebene Flächentragwerke mit einem Querschnittsaufbau aus Schichten werden Rechenregeln für Steifigkeitswerte angegeben. Mit diesen Steifigkeitswerten können Systemberechnungen mit EDV Programmen durchgeführt oder Tabellenwerke verwendet werden. Bei großen Steifigkeitsunterschieden eignen sich Stabprogramme gut. Schnittgrößen und Verformungen sind das Ergebnis.

(2) Aus den Schnittgrößen werden für die einzelnen Schichten entsprechend der technischen Biegelehre Spannungen berechnet. Die Querdehnung wird dabei vernachlässigt.

(3) Der Querschnitt des Flächentragwerks aus n Schichten ist symmetrisch aufgebaut. Die Schichten sind zueinander parallel oder orthogonal ausgerichtet.

(4) Bestehen die Schichten aus nebeneinander liegenden Brettern, die an den Schmalseiten nicht miteinander verklebt sind, so ist der Elastizitätsmodul rechtwinklig zur Faserrichtung gleich null zu setzen. Der Schubmodul für die Rollschub Beanspruchung ist nach Tabelle F.5 anzunehmen.

(5) Für den Elastizitätsmodul, den Schubmodul und die Verbindungsmittelsteifigkeiten sind für den Nachweis der Tragsicherheit die durch den Sicherheitsbeiwert geteilten Mittelwerte zu verwenden.

$$E = \frac{E_{\text{mean}}}{\gamma_M}; \quad G = \frac{G_{\text{mean}}}{\gamma_M}; \quad K = \frac{\frac{2}{3} \cdot K_{\text{ser}}}{\gamma_M} \quad (\text{D.1})$$

Anhang D ([7], Kap. D.2, S. 174-175)

D.2 Flächen aus zusammengeklebten Schichten

D.2.1 Allgemeines

(1) Die Schichten des Flächentragwerks sind miteinander verklebt. Es besteht keine Nachgiebigkeit zwischen benachbarten Schichten (starrer Verbund).

(2) Die für die Plattenwirkung maßgebenden Steifigkeiten werden mit Biege- und Drillsteifigkeiten B bezeichnet. Sie setzen sich aus einem Steineranteil B_S und den Eigenbiegesteifigkeiten B_E der einzelnen Schichten zusammen. Die Schubsteifigkeiten für die Verformungen infolge der Querkräfte q_x und q_y in z Richtung werden mit S bezeichnet.

(3) Die für die Scheibenwirkung maßgebenden Steifigkeiten werden mit D bezeichnet.

(4) Für die Bezeichnungen gilt 8.9, Bilder 16a, 16b und 16c. Für die Schicht i sind die entsprechenden Elastizitäts- und Schubmoduln sowie die Koordinate z_i einzusetzen.

(5) Grundlage ist die technische Biegelehre mit Berücksichtigung der Schubverformung.

D.2.2 Plattenbeanspruchung

(1) Die Biegesteifigkeiten und die Drillsteifigkeit werden auf eine Breite 1 bezogen (Kraft · Länge²/Länge). z_i ist der Abstand der Mittelfläche der Schicht i von der Mittelfläche des Gesamtquerschnitts. Bei der Spannungsberechnung ist z der Abstand von der Mittelfläche des Gesamtquerschnitts. Für eine Schicht i gilt $-d/2 \leq z \leq z_i + d/2$. Bei der Berechnung der Spannungen sind jeweils der zur Schicht i und zur Richtung gehörende Modul sowie die zur Richtung gehörende Steifigkeit einzusetzen. Für die Berechnung der Schubspannungen ist das gewichtete statische Moment $E \cdot S$ der mit dem Elastizitätsmodul multiplizierten Flächen notwendig.

(2) Biegung um die y Achse (Biegemoment m_x), Biegesteifigkeit B_x und Biegespannung in x Richtung:

$$B_x = B_{xS} + B_{xE} = \sum B_{xS,i} + \sum B_{xE,i} = \sum E_{x,i} \cdot d_i \cdot z_i^2 + \sum E_{x,i} \cdot \frac{d_i^3}{12} \quad (D.2)$$

$$\sigma_x = E_x \cdot \frac{m_x}{B_x} \cdot z \quad (D.3)$$

(3) Biegung um die x Achse (Biegemoment m_y), Biegesteifigkeit B_y und Biegespannung in y Richtung:

$$B_y = B_{yS} + B_{yE} = \sum B_{yS,i} + \sum B_{yE,i} = \sum E_{y,i} \cdot d_i \cdot z_i^2 + \sum E_{y,i} \cdot \frac{d_i^3}{12} \quad (D.4)$$

$$\sigma_y = E_y \cdot \frac{m_y}{B_y} \cdot z \quad (D.5)$$

(4) Verwindung der xy Ebene (Drillmoment $m_{xy} = m_{yx}$), Drillsteifigkeit B_{xy} und Schubspannung $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ für auch an den Schmalseiten verklebte Brettlagen:

$$B_{xy} = B_{xyS} + B_{xyE} = \sum B_{xyS,i} + \sum B_{xyE,i} = \sum 2 \cdot G_{xy,i} \cdot d_i \cdot z_i^2 + \sum G_{xy,i} \cdot \frac{d_i^3}{6} \quad (D.6)$$

$$\tau_{xy} = G_{xy} \cdot \frac{m_{xy}}{B_{xy}} \cdot z \quad (D.7)$$

(5) Für an den Schmalseiten nicht verklebte Brettlagen ist die Drillsteifigkeit geringer. Näherungsweise darf sie null gesetzt werden.

Fazit

Für BSP-Platten aus schmalseitenverklebten Brettlagen wird zur Ermittlung der Drillsteifigkeit B_{xy} ($= D_{xy}$) die Gleichung (D.6) auf S. 175 der DIN 1052:2008-12 angegeben. Bestehen die einzelnen Schichten aus der gleichen Festigkeitsklasse, vereinfacht sich die Gleichung (D.6) folgendermaßen:

$$D_{xy, \text{DIN}} = B_{xy} = \frac{G_{xy} \cdot d^3}{6} \quad \text{mit } d \dots \text{ Plattenstärke}$$

Dieser Wert entspricht der Torsionssteifigkeit bei einer Trägerrostberechnung mit einem Abstand von 1 m und nicht der Drillsteifigkeit einer schmalseitenverklebten BSP-Platte (siehe Kap. 1.4.2 und Kap. 2.3.1).

Die mechanische Drillsteifigkeit einer schmalseitenverklebten BSP-Platte berechnet sich wie folgt:

$$D_{xy, \text{MECH}} = \frac{G_{xy} \cdot d^3}{12} \quad \text{mit } d \dots \text{ Plattenstärke}$$

Für eine EDV gestützte Plattenberechnung würde nach Gleichung (D.6) eine um den Faktor 2 zu hohe Drillsteifigkeit eingesetzt werden.

Für an den Schmalseiten nicht verklebte Brettlagen wird in D.2.2 (5) empfohlen, die Drillsteifigkeit näherungsweise null zu setzen.

3 Entwicklung eines FE-Modells

3.1 Einleitung

Dieser Abschnitt beschreibt das mechanische Modell zur Bestimmung der Drillsteifigkeit, insbesondere die Definition der Randbedingungen. Diese setzen sich aus möglichen Antimetrie- bzw. Symmetriebedingungen, sowie den eingepprägten Verschiebungen für den reinen Drillzustand zusammen (siehe Kap. 1.5.2). Die Entwicklung des endgültigen Modells erfolgt dabei in vier wesentlichen Schritten:

- Schritt 1: isotrope, homogene Platte
- Schritt 2: isotrope Platte mit BSP-Struktur
- Schritt 3: orthotrope Platte mit BSP-Struktur
- Schritt 4: Modellierung des RPEs

Die Schritte 1 bis 3 sollen den Unterschied einer homogenen, isotropen Platte zur vorhandenen Struktur orthogonaler Bretter und orthotropem Material bei Brettspertholz zeigen. Diese Untersuchungen werden an einem BSP-Plattenausschnitt (siehe Abb. 3.1) durchgeführt.

In Schritt 4 erfolgt dann die eigentliche FE-Modellierung am Repräsentativen Platten-Element (RPE) mit ABAQUS.

3.1.1 Reduktion der Brettspertholzplatte

Zellartige Bauwerke bestehen meist aus ebenen, flächigen Bauteilen, welche als Platten und/oder Wandscheiben eingesetzt werden. In der Praxis sind die Dimensionen und Belastungen dieser Bauteile fast immer unterschiedlich. Deshalb ist für die mechanische Untersuchung dieser Platten bzw. Wandscheiben eine Reduktion der einzelnen BSP-Elemente auf ein geeignetes Grundelement unveränderter Struktur notwendig. Wie in Abb. 3.1 gezeigt, ist das RPE das kleinstmögliche Platten-Teilelement um das mechanische Verhalten unter Drillbeanspruchung genau abbilden zu können.

Als Grundlage für Schritt 1 bis 3 dient ein Teil aus einer BSP-Plattenstruktur mit je sieben Brettern in jeder Schicht. Aufgrund des „1 m Plattenstreifens“ wäre es naheliegend gewesen einen quadratischen Plattenausschnitt mit einer Größe von 100 cm zu wählen. Durch die angenommene Brettbreite von 15 cm ergibt sich ein BSP-Ausschnitt mit 105 cm Seitenlänge.

Das in Schritt 4 behandelte RPE erstreckt sich über die Kreuzungsflächen benachbarter Bretter (inkl. eventueller anteiliger Fugenbreiten) und die Gesamtdicke t der BSP-Platte. Im Falle einer fugenlosen Platte entspricht die Seitenlänge a des RPEs der Brettbreite b von 15 cm.

Die Schritte 1 bis 4 behandeln nur die Modellierung der 3-schichtigen Platte. Dieses Kapitel gilt sinngemäß auch für 5- und 7-schichtige BSP-Elemente.

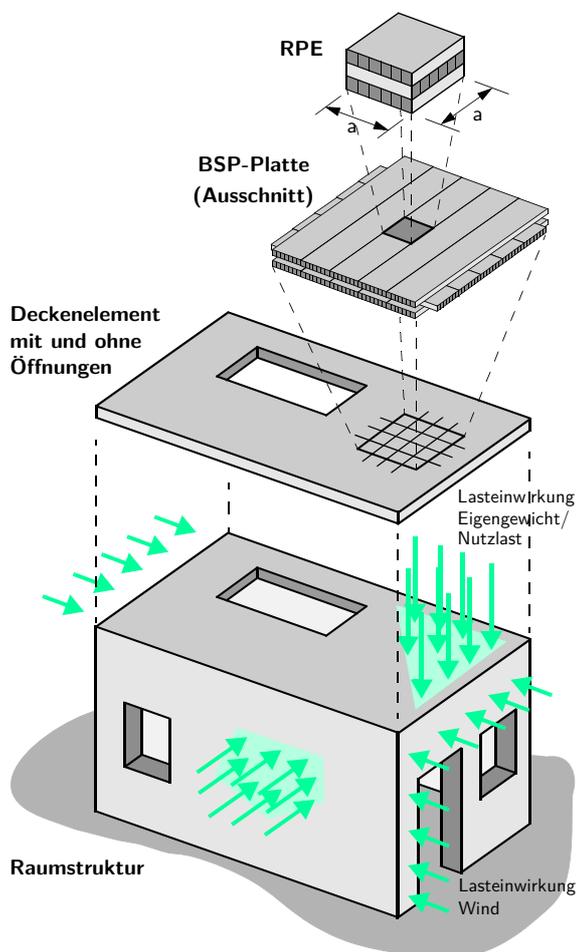


Abb. 3.1 Ausschnitt aus einem BSP-Deckenelement als Grundlage der FE-Modellierung, sowie weitere Reduktion auf das RPE (Repräsentatives Platten-Element)

3.2 Schritt 1: Isotrope, homogene Platte

3.2.1 Geometrie

Die Kantenlänge L der homogenen Platte beträgt, wie in Kap. 3.1.1 festgelegt, 105 cm. Als Plattendicke t werden 9 cm angenommen. Dies entspricht einer 3-schichtigen BSP-Platte mit konstanten Schichtdicken von je 3 cm.

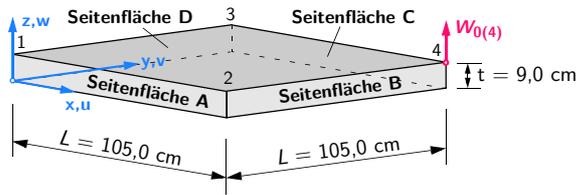


Abb. 3.2 Geometrie und Bezeichnungen der BSP-Platte

3.2.2 Element- und Netzgenerierung

Für die Plattenmodellierung werden dreidimensionale Solid-Elemente mit der Bezeichnung C3D27 verwendet. Dabei handelt es sich um 27-knotige, quadratische Kontinuums-elemente. Die Untersuchung anderer Elemente erfolgt in Kap. 3.5.6.

3.2.3 Material

Der Schubmodul ist beim Drillen der mechanisch relevante Steifigkeitsparameter. Die isotropen Materialkennwerte sind so gewählt, dass eine „Gleichwertigkeit“ zum Schubmodul des realen, orthotropen Materials Holz gegeben ist.

Isotropes Materialverhalten kann durch zwei unabhängige Materialkonstanten E und ν beschrieben werden. Der Schubmodul G ist dabei vom Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl ν abhängig.

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Die Material-Elastizitätsbeziehung lautet:

$$C_{\text{ISO}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ E & \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu \\ \nu & 1 & \nu \\ \nu & \nu & 1 \end{bmatrix} & & & & \\ & & \mathbf{0}_{(3,3)} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & G & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \end{bmatrix}$$

Unter der Annahme von $\nu = 0$ wird über den Schubmodul der Festigkeitsklasse C24 (vgl. [8], Tab. 1) auf den gesuchten Elastizitätsmodul E_{ISO} rückgerechnet.

$$G_{\text{mean}(C24)} = 69,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{\text{ISO}} = G_{\text{mean}(C24)} \cdot [2 \cdot (1 + \nu)] = 2 \cdot G_{\text{mean}(C24)}$$

$$E_{\text{ISO}} = 2 \cdot 69,0 = 138,0 \text{ kN/cm}^2$$

3.2.4 Randbedingungen

Das Aufbringen der Randbedingungen erfolgt, wie bereits in Kap. 1.5 beschrieben, verformungsorientiert. Aus der Kinematik des Drillens (siehe Kap. 1.5.2) können für jeden Knoten der Seitenflächen die dazugehörigen Verschiebungen in $u(x)$, $v(y)$ und $w(z)$ Richtung bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{3D} = \begin{bmatrix} z \cdot \beta_y(x, y) \\ z \cdot \beta_x(x, y) \\ W(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \cdot \frac{\kappa_{xy,0} \cdot y}{2} \\ z \cdot \left(\frac{\kappa_{xy,0} \cdot x}{2} \right) \\ \frac{\kappa_{xy,0} \cdot x \cdot y}{2} \end{bmatrix}$$

Die Verschiebung W_0 des Punktes 4 (siehe Abb. 3.2) wird mit 15 cm (in z -Richtung) angenommen. Damit können alle Verschiebungen, welche zum Aufbringen des Drillzustandes erforderlich sind, berechnet werden.

$$\begin{matrix} W_{(1)} & W_{(2)} & W_{(3)} & 0 \\ W_{(4)} & 15 \text{ cm (Annahme)} & & \end{matrix}$$

$$W_{(4)}(x, y) = \frac{\kappa_{xy,0}}{2} \cdot x \cdot y \Rightarrow \kappa_{xy,0} = \frac{2 \cdot W_{(4)}}{x \cdot y}$$

$$\kappa_{xy,0} = \frac{2 \cdot 15}{105^2} = 2,72109 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}}$$

Verschiebungsrandbedingungen der Seitenfläche A (siehe Abb. 3.2)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z \cdot \left(\frac{\kappa_{xy,0} \cdot x}{2} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit: } \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ y = 0 \end{cases}$$

Seitenfläche B (siehe Abb. 3.2)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \cdot \frac{\kappa_{xy,0} \cdot y}{2} \\ z \cdot \left(\frac{\kappa_{xy,0} \cdot x}{2} \right) \\ \frac{\kappa_{xy,0} \cdot x \cdot y}{2} \end{bmatrix} \quad \text{mit: } \begin{cases} x = L \\ 0 \leq y \leq L \end{cases}$$

Seitenfläche C (siehe Abb. 3.2)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \cdot \frac{\kappa_{xy,0}}{2} \cdot y \\ z \cdot \left(\frac{\kappa_{xy,0}}{2} \cdot x \right) \\ \frac{\kappa_{xy,0}}{2} \cdot x \cdot y \end{bmatrix} \quad \text{mit: } \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ y & L \end{cases}$$

Seitenfläche D (siehe Abb. 3.2)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \cdot \frac{\kappa_{xy,0}}{2} \cdot y \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit: } \begin{cases} x & 0 \\ 0 \leq y \leq L \end{cases}$$

Es ist erkennbar, dass an den Seitenflächen A und D (siehe Abb. 3.2) nur Verschiebungen senkrecht zur jeweiligen Fläche auftreten.

Da die Randbedingungen für jeden Knotenpunkt des FE-Netzes definiert werden müssen, ist es sinnvoll, ein Script zur automatischen Generierung dieser Werte zu programmieren. In dieser Arbeit wird dazu die freie Software GNU Octave verwendet. Der Aufbau eines solchen Programmes ist in Kap. A.1 exemplarisch dargestellt.

3.2.5 Berechnung in ABAQUS und Vergleich mit der analytischen Lösung

Ziel dieser Berechnung ist die Ermittlung der Drillsteifigkeit D_{xy} der in Abb. 3.2 dargestellten Platte auf Basis der inneren Verzerrungsenergie U . Die folgenden Gleichungen zeigen die Zusammenhänge zwischen U und D_{xy} , wobei U_{Platte} eine Annahme der Plattenverzerrungsenergie unter konstanter Verdrehung und Momentenverteilung darstellt.

$$U_{\text{FE}} = \frac{1}{2} \cdot \int \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \cdot dV$$

$$U_{\text{FE}} \equiv U_{\text{Platte}} = \frac{1}{2} \cdot m_{xy} \cdot \kappa_{xy} \cdot L^2$$

$$D_{xy} \begin{matrix} m_{xy} \\ \kappa_{xy} \end{matrix} \Rightarrow m_{xy} = D_{xy} \cdot \kappa_{xy}$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot D_{xy} \cdot \kappa_{xy}^2 \cdot L^2$$

Mit der Verzerrungsenergie U_{FE} kann die gesuchte Drillsteifigkeit der isotropen, homogenen Platte berechnet werden. In weiterer Folge werden alle aus ei-

ner numerischen Analyse stammenden Ergebnisse mit einem * gekennzeichnet.

$$U^* = \frac{1}{2} \cdot D_{xy}^* \cdot \kappa_{xy,0}^2 \cdot L^2 \Rightarrow D_{xy}^* = \frac{2 \cdot U^*}{\kappa_{xy,0}^2 \cdot L^2}$$

$$U_{\text{FE}} = U_{(1)}^* = 171,092 \text{ kNcm}$$

$$\kappa_{xy,0} = 2,72109 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{cm}}$$

$$D_{xy(1)}^* = \frac{2 \cdot 171,092}{(2,72109 \cdot 10^3)^2 \cdot 105^2} = 4191,75 \frac{\text{kNcm}^2}{\text{cm}}$$

Zum Vergleich das Ergebnis aus der analytischen Berechnung.

$$D_{xy} = G_{0,mean} \cdot \frac{t^3}{12} = 69,0 \cdot \frac{9,0^3}{12} = 4191,75 \frac{\text{kNcm}^2}{\text{cm}}$$

Es ist festzustellen, dass das Ergebnis aus ABAQUS den exakten Wert der Plattendrillsteifigkeit D_{xy} liefert. Somit zeigt sich, dass in diesem einfachen Fall die Rückrechnung von U zum bekannten Ergebnis von D_{xy} führt. Die aufgebrachten Randbedingungen können daher für die isotrope, homogene Platte als „richtig“ eingestuft werden.

3.3 Schritt 2: Platte mit BSP-Struktur jedoch isotropem Material

In diesem Teil erfolgt die Erweiterung der in Kap. 3.2 behandelten homogenen Platte auf eine 3-schichtige BSP-Platte mit gedachtem, isotropem Material.

3.3.1 Geometrie

Die in Kap. 3.1.1 angenommenen Abmessungen sind auch für diesen Abschnitt gültig. Zur Modellierung der 3-schichtigen Platte werden Bretter mit einer Breite b von 15 cm und einer Dicke t_i von 3 cm verwendet. Die Brettlänge von 105 cm ist ident mit der Kantenlänge L aus Abb. 3.2 und setzt sich aus 7 Brettern zu je 15 cm zusammen (siehe Abb. 3.3).

Bei der fugenlosen BSP-Platte ist die Brettbreite b gleich der Seitenlänge a des Repräsentativen Volumen-Elements. Die gewählten Dimensionen entsprechen also einem t_i/a -Verhältnis von 0,2.

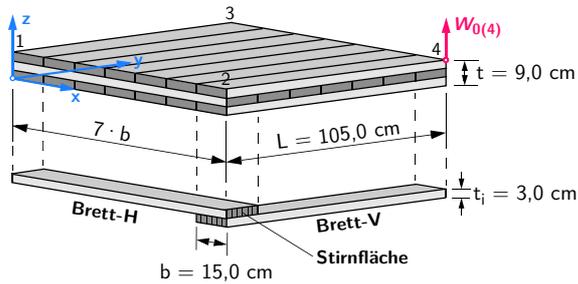


Abb. 3.3 Aufbau einer 3-schichtigen BSP-Platte

3.3.2 Element- und Netzgenerierung

Die einzelnen Schichten werden aus x -parallelen (horizontalen) und y -parallelen (vertikalen) Brettern (ohne Schmalseitenverklebung) zusammengesetzt.

Aufgrund einiger Vorteile bei der Modellierung wird die Verklebung der Schichten durch Federn simuliert. Jeder Punkt eines vertikalen Brettes wird mit dem koordinativ gleichen Punkt des horizontalen Brettes, in allen drei Richtungen u , v und w , verknüpft. Die unbekannte Federsteifigkeit muss groß genug sein, um eine praktisch starre Kopplung zu erreichen, jedoch klein genug, um numerische Probleme bei der Berechnung zu vermeiden. Es wird ein Wert von 10^6 kN/cm angesetzt. Genauere Untersuchungen zur Federsteifigkeit folgen in Kap. 3.5.3.

3.3.3 Material

Es werden die isotropen Materialkennwerte aus Kap. 3.2.3 verwendet.

3.3.4 Randbedingungen

Aufgrund der jetzt vorhandenen BSP-Struktur müssen die in Kap. 3.2.4 ermittelten Randbedingungen modifiziert werden.

Ein aus der Platte herausgelöstes Brett ist an den Schmalseiten spannungsfrei. Weil es sich dabei um eine Kräfte-Randbedingung handelt, dürfen an den Brettschmalseiten keine Verformungsrandbedingungen mehr angesetzt werden.

Plattendrillen führt zu Schubspannungen in der Plattenebene. Diese Spannungen sind jedoch bei einer BSP-Struktur mit den einzelnen Brettern nicht konstant über die Brettdicke verteilt, sondern werden der Schubspannungsverteilung eines Rechteckquerschnittes (quadratische Parabel) ähnlich sein. Aufgrund der nicht konstanten Spannungsverteilung kommt es zu Schubverwölbungen und somit zu Verschiebungen in Brett-Längsrichtung. Durch die Spannungsfreiheit der Brettschmalseiten muss der rechte Winkel zwischen Schmalseiten- und Stirnfläche erhalten bleiben (siehe Abb. 3.4 b). Um diese Schubver-

wölbung nicht zu behindern, dürfen Verschiebungen senkrecht zur jeweiligen Stirnfläche nicht angesetzt werden.

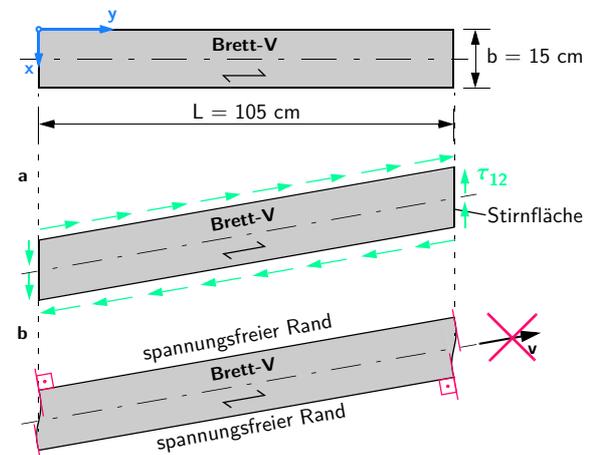


Abb. 3.4 Schubverwölbung der Stirnflächen an einem y -parallelen (vertikalen) Brett

Somit sind für Stirnflächen der vertikalen Bretter die Verschiebungen u und w , und für horizontale Bretter die Verschiebungen v und w , aufzubringen.

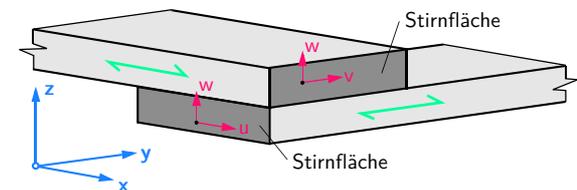


Abb. 3.5 Modifizierte Randbedingungen

3.3.5 Berechnung in ABAQUS

Um die Auswirkungen der freien Schubverwölbungsmöglichkeit der einzelnen Bretter darzustellen, werden zwei Fälle untersucht.

- Fall A: Verschiebungen aus Kap. 3.2.4 (u , v , w)
- Fall B: Modifizierte, für eine BSP-Struktur „richtige“, Randbedingungen (siehe Abb. 3.5)

Wie in Kap. 3.2.5 gezeigt, kann über die berechneten Verzerrungsenergien auf die Drillsteifigkeit der Platte rückgerechnet werden.

3.4.2 Randbedingungen

Es gelten die modifizierten Randbedingungen aus Kap. 3.3.5, Fall B (siehe Abb. 3.5).

3.4.3 Ergebnisvergleich Schritt 2 – Schritt 3

Tab. 3.4 Vergleich der Ergebnisse aus der FE-Berechnung

	U^* [kNcm]	D_{xy}^* [kNcm ² /cm]
Modell 2	121,058	2965,92
Modell 3	109,322	2678,37
Differenz		9,7 %

Der Umstieg auf das orthotrope Materialgesetz bewirkt eine Verringerung der Drillsteifigkeit um ca. 10 % im Vergleich zu der in Schritt 2 behandelten Platte (BSP-Struktur und isotropes Material).

3.4.4 Fazit

Aus den bisherigen Untersuchungen ist zu erkennen, dass die Reduktion der Drillsteifigkeit im Wesentlichen von der Struktur der BSP-Platte beeinflusst wird. Ihr Anteil an der gesamten Abminderung von 38,9 % beträgt ca. 3/4. Der Einfluss des orthotropen Materials „Holz“ ist mit ca. 25 % deutlich geringer.



Abb. 3.7 Ergebnisvergleich der Modelle 1, 2 und 3

3.5 Schritt 4: FE-Modellierung des RPEs

Um Rechenzeit zu sparen, bzw. ein feineres FE-Netz verwenden zu können, ist die Reduktion der Platte aus Schritt 3 auf ein Repräsentatives Platten-Element (RPE) erforderlich (siehe Abb. 3.1).

Im Anschluss erfolgt die Modellierung des Drillzustandes am „Repräsentativen Platten-Element“ RPE unter Verwendung des FE-Programmes ABAQUS.

3.5.1 Geometrie des RPEs

Das RPE ist ein aus der Platte herausgelöster Würfel mit der Kantenlänge a und Plattendicke t . Das Volumen dieses Würfels entspricht also einem 49stel der Platte aus Modell 3.

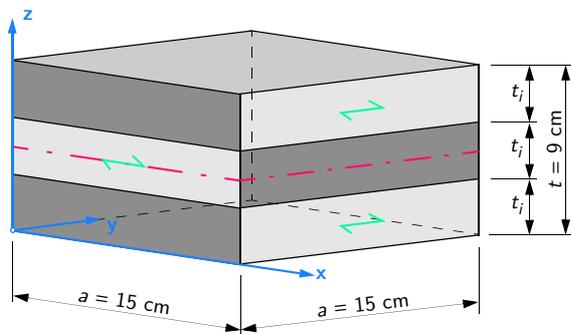


Abb. 3.8 Abmessungen des RPEs für $t_i/a = 0,2$

RPE der BSP-Platte mit Fugen

In Kap. 3.2 bis Kap. 3.5 wurde der Aufbau einer BSP-Platte ohne Fugen gezeigt. Das trifft auf eine Brettsperrholzplatte ohne Seitenverklebung und ohne herstellungsbedingte Fugen, bzw. durch z. B. Schwinden entstandene Risse, zu. Um dies zu simulieren wird auch eine Platte mit planmäßigen Fugen von 2 mm modelliert. Die Fugenbreite von 2 mm ist frei gewählt, entspricht aber durchaus üblichen, in der Praxis auftretenden, Werten.

Bei der Modellierung des RPEs müssen die vorhandenen Fugen anteilig berücksichtigt werden. Das Platten-Teilelement weist dadurch eine Größe von $a = 15,2$ cm auf.

3.5.2 Material und Materialorientierung

Siehe Kap. 3.4.1.

3.5.3 Randbedingungen

Weitere Vereinfachung des RPEs

Da eine BSP-Platte unter reiner Drillbeanspruchung ein antisymmetrisches Verformungsverhalten aufweist, stellt die Plattenmittelfläche eine Antimetriefläche dar. Im Falle einer 3-schichtigen Platte kann das RPE somit auf 1,5 Schichten reduziert werden (siehe Abb. 3.9).

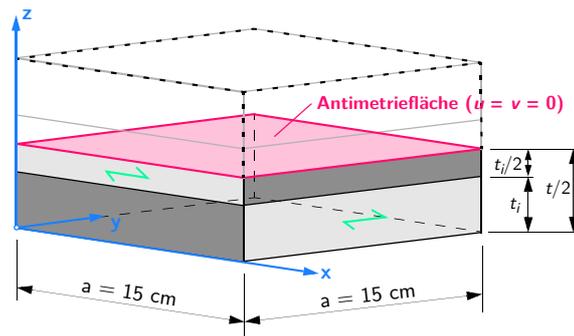


Abb. 3.9 Halbiertes RPE mit Antimetriefläche

Um eine Antimetriebedingung in einer x - y parallelen Fläche (Plattenmittelfläche) zu erreichen, müssen die Verschiebungen in u - und v -Richtung null sein.

Verschiebungsrandbedingungen

Für das RPE gelten die selben Randbedingungen wie für die Platte in Schritt 3. An jedem Knotenpunkt des FE-Netzes sind an den Brettstirnflächen analog zu Abb. 3.5 entweder Verschiebungen in x - und z - oder y - und z -Richtung aufzubringen. Die Berechnung von u , v und w erfolgt mit der in Kap. 3.2.4 angenommenen Verdrillung $\kappa_{xy,0}$.

$$\kappa_{xy,0} = 2,72109 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{3D} = \begin{bmatrix} z \cdot \beta_y(x, y) \\ z \cdot \beta_x(x, y) \\ W(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \cdot \frac{\kappa_{xy,0}}{2} \cdot y \\ z \cdot \left(\frac{\kappa_{xy,0}}{2} \cdot x \right) \\ \kappa_{xy,0} \cdot x \cdot y \end{bmatrix}$$

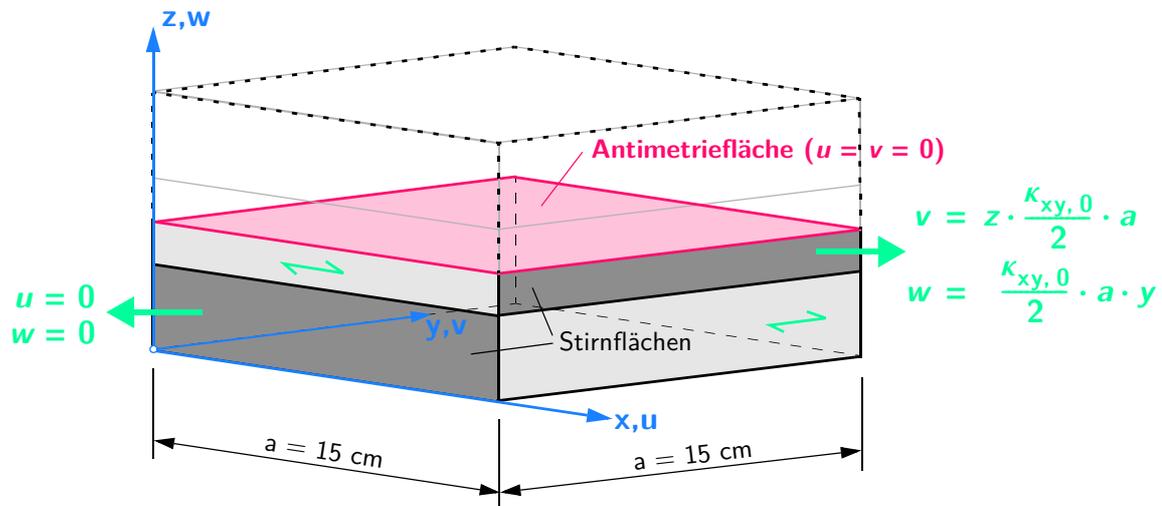


Abb. 3.10 Randbedingungen (eingeprägte Verschiebungen) des RPE

3.5.4 Rückrechnung der Drillsteifigkeit

Wie bereits erläutert wird die Verzerrungsenergie aus ABAQUS zur Errechnung der Drillsteifigkeit herangezogen. Für das RPE ändern sich die Kap. 3.2.5 angeführten Formeln wie folgt:

$$U_{FE} = U^* \cdot \frac{1}{2} \cdot D_{xy}^* \cdot \kappa_{xy,0}^2 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$D_{xy}^* = \frac{2 \cdot U^*}{\kappa_{xy,0}^2 \cdot a^2} \quad \kappa_{xy,0} = 2,72109 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{cm}}$$

3.5.5 Modellierung der Klebefugen

Die Klebefugen einer Brettsperrholzplatte können als starre Verbindung der einzelnen Brettschichten betrachtet werden.

Erfolgt der Aufbau des Modells in ABAQUS mit einzelnen Parts, kommt es bei einer starren Kopplung der Brettkreuzungsflächen zu Problemen beim Aufbringen der Randbedingungen. Grund dafür sind die nach dem Verbinden nicht mehr vorhandenen Slave-Knoten in der Klebefläche. Deshalb werden, wie schon in Kap. 3.3.2 beschrieben, die einzelnen Schichten der BSP-Platte über Federn miteinander „verklebt“.

Zur Ermittlung der Federsteifigkeit erfolgt die Berechnung eines RPEs ohne Klebeflächen. Das Platten-Teilelement wird dabei als einzelner Block mit wechselnden Materialorientierungen modelliert, was einer völlig unnachgiebigen Verbindung der einzelnen Schichten entspricht.

Die Federn müssen somit so steif gewählt werden, damit die Ergebnisse mit denen des starr gekoppelten

RPEs übereinstimmen. Das ist bei einer Steifigkeit von 10^6 kN/cm der Fall. Wird der Wert auf 10^8 kN/cm erhöht, kommt es zu numerischen Problemen bei der Berechnung.

3.5.6 Element- und Netzstudie

Da das Ergebnis einer numerischen Näherungsrechnung von vielen Faktoren beeinflusst wird, müssen diese vorher genau definiert werden. Die wichtigsten Faktoren sind:

- Elementtyp
- Elementgröße bzw. Netzteilung

Elementauswahl

In ABAQUS steht eine Unzahl verschiedener Elemente zur Verfügung. Die Modellierung einer BSP-Platte erfolgt mit dreidimensionalen Kontinuums-elementen. Die Auswirkungen des Elementtyps wurden mit einem 8-knotigen linearen (C3D8) und einem 27-knotigen quadratischen (C3D27) Element, jeweils ohne reduzierte Integration, untersucht.

Die Knotenverteilung der beiden Elemente ist in Abb. 3.11 dargestellt. Das quadratische Element setzt sich aus einem 20-knotigen Würfel, sechs Knoten in den Würfelseitenflächen und einem Knoten im Schwerpunkt zusammen.

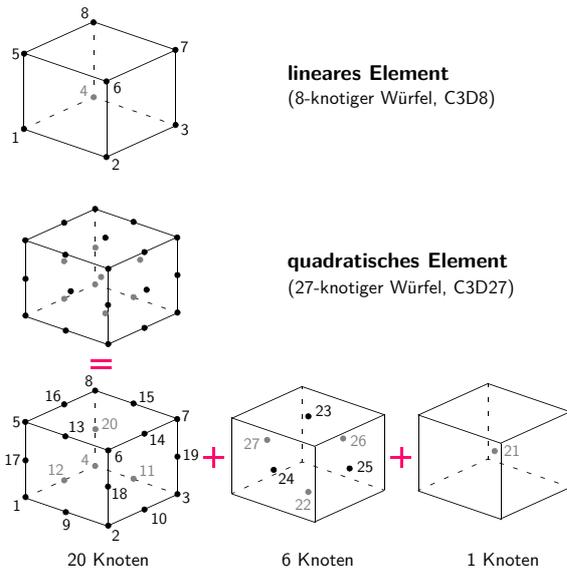


Abb. 3.11 ABAQUS Elemente C3D8 und C3D27

Netzteilung

Ein weiterer wichtiger Faktor ist die Elementgröße und somit die Anzahl der verwendeten Elemente. Eine kleine Netzteilung erfordert viele Elemente und führt zu einer großen Anzahl an Unbekannten im Gleichungssystem. Der Rechenaufwand steigt dabei überproportional. Um einen vernünftigen Kompromiss zwischen Rechenzeit und Ergebnisgenauigkeit zu erreichen, werden verschiedene Diskretisierungen mit den vorhin beschriebenen Elementen untersucht. Alle Untersuchungen erfolgen an dem, in Abb. 3.9 gezeigten, 3-schichtigen RPE mit einem Brettparameter t_i/a von 0,2. Bei einer Brettbreite a von 15 cm ergibt sich eine Brettdicke t_i von 3 cm. Diese Werte entsprechen durchaus üblichen Brettgeometrien bei BSP-Platten. Wie in Tab. 3.5 zu sehen ist, werden Knotenabstände zwischen 1 und 5 mm gewählt. Da quadratische im Vergleich zu linearen Elementen einen zusätzlichen Mittelknoten aufweisen, halbiert sich die Elementanzahl bei gleichbleibendem Knotenabstand. Die Anzahl der Elemente bezieht sich immer auf eine Schicht aus dem RPE in x -, y - und z -Richtung.

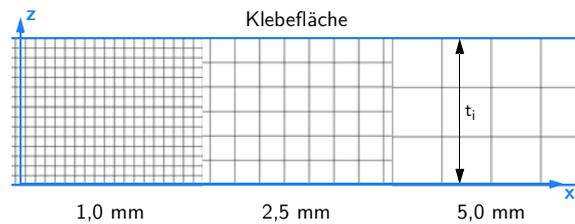


Abb. 3.12 Untersuchte Netzteilungen mit quadratischen Elementen (C3D27)

Tab. 3.5 Knotenabstände und Elementanzahl der Varianten

Knotenabstand [mm]	C3D8	C3D27
	[Elementanzahl x-y-z]	[Elementanzahl x-y-z]
5,0	30-30-6	15-15-3
2,5	60-60-12	30-30-6
1,0	150-150-30	75-75-15

Ergebnisvergleich

$$D_{xy}^* = \frac{2 \cdot U^*}{\kappa_{xy,0} \cdot a^2} = 2,72109 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{cm}}$$

Tab. 3.6 Vergleich der Ergebnisse

Knotenabstand [mm]	U^* [kNcm]		D_{xy}^* [kNcm ² /cm]	
	C3D8	C3D27	C3D8	C3D27
5,0	1,137	1,116	1364,49	1339,19
2,5	1,104	1,091	1325,14	1309,23
1,0	1,078	1,071	1294,54	1285,58

Modelle mit den quadratischen Elementen C3D27 sind bei gleichem Knotenabstand etwas nachgiebiger und weisen somit eine leicht reduzierte Drillsteifigkeit auf. Ebenso ist zu erkennen, dass lineare Elemente (C3D8) bei ausreichend feiner Diskretisierung für diese Aufgabenstellung durchaus zufriedenstellende Werte liefern.

Aufgrund der besseren Ergebnisse bei gleicher Teilung und im Hinblick auf spätere Spannungsauswertungen werden für weitere Berechnungen die Elemente C3D27 verwendet. Noch nicht geklärt ist die Frage der Netzteilung. Ein Knotenabstand von 1 mm führt zwar zu den besten Ergebnissen, höhere Brettparameter ($t_i/a > 2,0$) wären damit aber nicht mehr berechenbar. Es gilt also, den bereits vorhin angesprochenen Kompromiss zwischen Ergebnisgenauigkeit und Rechenaufwand zu finden.

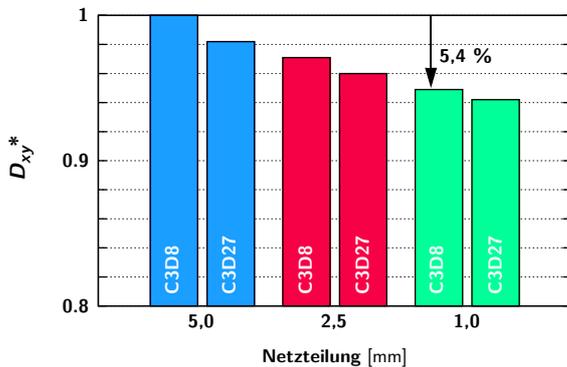


Abb. 3.13 Vergleich der Elemente C3D8 und C3D27

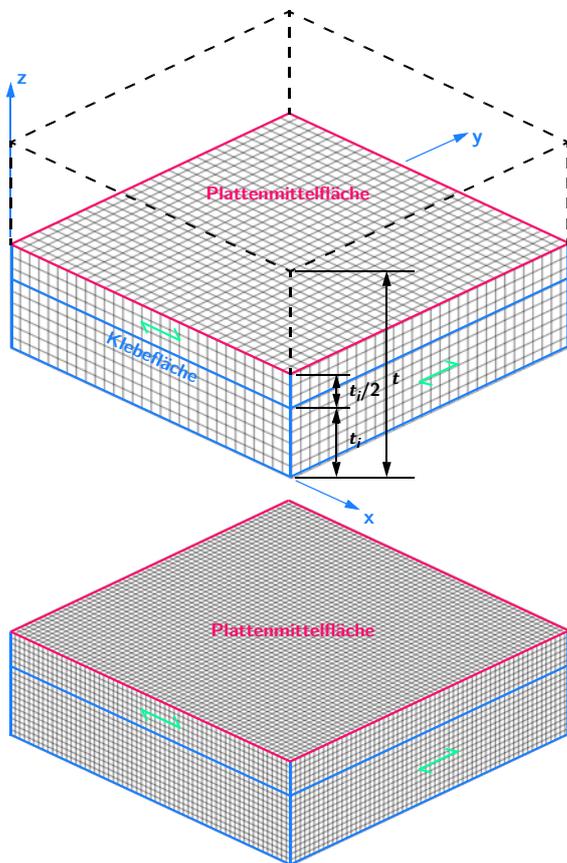


Abb. 3.14 RPE unter Ausnutzung der Antimetrie und einem Knotenabstand von 5 und 2,5 mm

3.5.7 Netzverfeinerung in Dickenrichtung

Eine Drillbeanspruchung der Platte wird im Wesentlichen durch eine Verschiebung in z -Richtung (Dickenrichtung) hervorgerufen. Es ist also zu erwarten, dass im Bereich der Klebefugen enorme numerische Spannungsgradienten, welche wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis haben, entstehen. Durch eine Netzverfeinerung im Bereich der Klebeflächen kann dieser Effekt deutlich abgeschwächt werden.

Als Grundlage dient das Netz mit einem Knotenabstand von 2,5 mm. Anschließend wird versucht durch eine Verfeinerung im Klebepbereich das Ergebnis zu verbessern. In ABAQUS ist es möglich mit der Option BIAS beim Befehl *NFILL eine kontinuierlich kleiner- oder größerwerdende Teilung zu erreichen. Dazu muss festgelegt werden über welchen Bereich sich die feinere Diskretisierung erstrecken soll und in welchem Verhältnis die Elemente verkleinert werden. Gewählt wird eine Verfeinerung über 1,5 cm auf beiden Seiten der Klebeflächen. Die Verkleinerung bzw. Vergrößerung der Elemente soll in 20 % Schritten erfolgen.

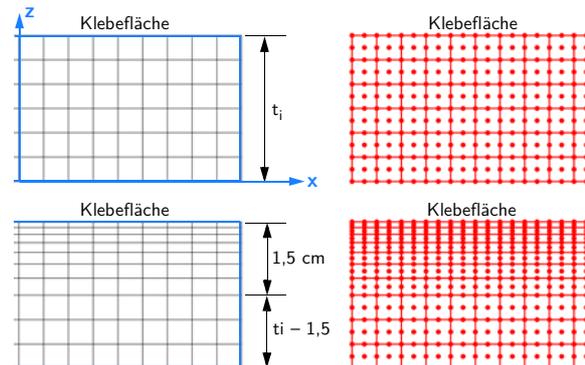


Abb. 3.15 Oben: Quadratische Elemente mit einem Knotenabstand von 2,5 mm ohne Verfeinerung; Unten: Verfeinerung über eine Länge von 1,5 cm

Bei Brettdicken größer als 1,5 cm wird die verbleibende Länge mit einem Knotenabstand von 2,5 mm aufgefüllt. Dies führt bei hohen Brettparametern zu einer deutlichen Reduktion der Elementanzahl und somit auch des Rechenaufwandes. Für Bretter mit einer Dicke von unter 1,5 cm wird die Netzverfeinerung entsprechend angepasst.

Die feinere Netzteilung im Bereich der Klebeflächen bewirkt auch eine Verbesserung des Ergebnisses. Der Unterschied zum Knotenabstand von 1 mm beträgt jetzt weniger als 1 % und ist als ausreichend genau anzusehen.

Tab. 3.7 Verzerrungsenergie und Drillsteifigkeit bei einem Knotenabstand von 1 mm und 2,5 mm mit BIAS

Knotenabstand [mm]	U^* [kNcm]	D_{xy}^* [kNcm ² /cm]
1,0	1,071	1285,58
2,5 mit BIAS	1,081	1298,10
Abweichung		0,96 %

Die folgenden Parameterstudien werden mit einem generellen Knotenabstand von 2,5 mm und der oben beschriebenen Netzverfeinerung durchgeführt.

Anmerkung: Die Studien zur Netzgröße wurden an BSP-Plattenelementen unter Drillbeanspruchung durchgeführt. Für die in Kap. 3.6 behandelte BSP-Scheibe unter Schubbeanspruchung werden die selben Netzteilungen verwendet.

3.6 RVE und RVSE der BSP-Scheibe

3.6.1 Geometrie des RVEs

Das in Kap. 3.5 modellierte Repräsentative Platten-Element (RPE) kann auch zur Berechnung der in Kap. 2.1 beschriebenen Scheibe verwendet werden. Die Abmessungen bleiben dabei im Vergleich zum RPE unverändert (siehe Abb. 3.8).

3.6.2 Material und Materialorientierung

Siehe Kap. 3.4.1.

3.6.3 Randbedingungen

Aufgrund der Scheibenrandbedingungen ändert sich die Antimetriefläche des RPEs in eine Symmetrieffläche. Für Flächen parallel zur x - y Ebene gilt somit $w = 0$.

Um einen konstanten Schubverzerrungszustand der BSP-Scheibe zu erreichen, müssen wie in Kap. 1.5.3 beschrieben, Verschiebungen parallel zur Brettstirnfläche aufgebracht werden. Für u und v wird eine Einheitsverschiebung von 1 cm gewählt.

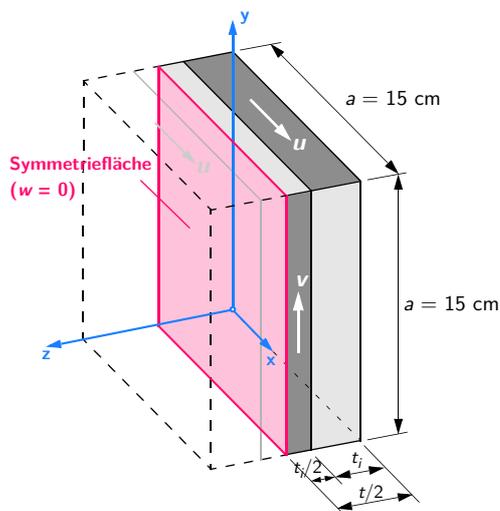


Abb. 3.16 Randbedingungen (eingeprägte Verschiebungen) des RVEs für einen konstanten Schubzustand

RVSE der BSP-Scheibe

Im Falle einer gedanklich ∞ -dicken BSP-Scheibe kann eine Reduktion auf das Repräsentative Volumen-Sub-Element (RVSE, siehe Abb. 2.1) erfolgen. Die Vorgehensweise wurde bereits in Kap. 2.1.4 näher erläutert.

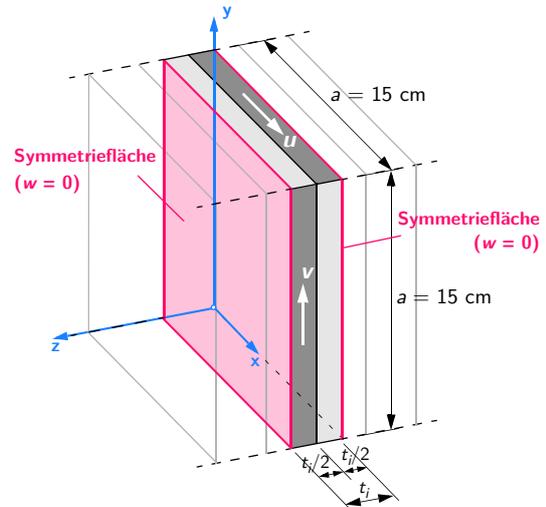


Abb. 3.17 RVSE der BSP-Scheibe

3.6.4 Rückrechnung der Schubsteifigkeit

Die Ermittlung der Schubsteifigkeit S_{xy}^* erfolgt wie beim RPE aus der inneren Verzerrungsenergie U^* . Aus dem aufgetragenen Einheitsverschiebungszustand kann die Schubverzerrung $\gamma_{xy,0}$ wie folgt berechnet werden:

$$\begin{array}{rcl} u & v & 1 \text{ cm} \\ \gamma_{xy,0} & \frac{4 \cdot u}{a} & \frac{4 \cdot 1}{15} = 0,2667 \frac{1}{\text{cm}} \end{array}$$

Die Schubsteifigkeit des RVE bzw. RVSE ist mit den in Kap. 3.5.4 angegebenen Formeln zu ermitteln. Anstatt der Plattenverdrillung $\kappa_{xy,0}$ ist nun die Schubverzerrung $\gamma_{xy,0}$ einzusetzen.

$$U_{\text{FE}} = U^* = \frac{1}{2} \cdot S_{xy}^* \cdot \gamma_{xy,0}^2 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$S_{xy}^* = \frac{2 \cdot U^*}{\gamma_{xy,0}^2 \cdot a^2}$$

4 Drill- und Schubsteifigkeitsuntersuchungen

Nachdem in Kap. 3 ausführlich auf die Modellierung der BSP-Platte bzw. des RPEs eingegangen wurde, folgt in diesem Abschnitt die detaillierte FE-Berechnung im Programm ABAQUS.

4.1 Berechnungsvarianten

4.1.1 Streubereich des Brettparameters t_i/a

Fast jeder BSP-Platten-Hersteller verwendet unterschiedliche Brettdimensionen zum Aufbau seiner Produkte. Bei 3-schichtigen Elementen werden in der Regel Brettdicken zwischen 19 und 44 mm verwendet. Um Aussagen über die Drill- bzw. Schubsteifigkeit, unabhängig von der Brettgeometrie machen zu können, müssen verschiedene Brettparameter t_i/a untersucht werden. Der praktisch relevante Bereich liegt bei einem t_i/a -Verhältnis von 0,1 – 0,25. Nachfolgend werden die Parameter 0,01 (Furniersperrholz) – 10,0 untersucht.

Die Variation des Brettparameters erfolgt über die Brettdicke t_i . Für die Brettbreite a wird ein fixer Wert von 15 cm gewählt. Die angenommenen Parameter gelten sowohl für die Drillsteifigkeits- als auch für die Schubsteifigkeitsberechnung.

Tab. 4.1 Übersicht der gewählten Brettparameter

Parameter t_i/a [-]	Brettbreite a [cm]	Brettdicke t_i [cm]
0,010	15,00	0,150
0,025		0,375
0,050		0,750
0,10		1,500
0,20		3,00
0,40		6,00
0,60		9,00
1,00		15,00
2,00		30,00
4,00		60,00
10,0		150,00

11 Parameter liefern also 11 verschieden große Repräsentative Volumen-Elemente. Ein Berechnungsdurchgang besteht somit aus 11 Teilberechnungen. Dies bedeutet, dass zur Berechnung der 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Platte unter Drillbeanspruchung (jeweils mit und ohne Fugen) insgesamt 66 ABAQUS Jobs notwendig sind. Da auch die 3- und 5-schichtige BSP-Scheibe unter Schubbeanspruchung (jeweils mit und ohne Fugen) behandelt wird, folgen noch 44 weitere Jobs. Die numerischen Studien zu Drillen und Schub bestehen also insgesamt aus 110 Berechnun-

gen. Einen Überblick zeigen Abb. 4.2 bis Abb. 4.4. In Abb. 4.5 sind die wichtigsten Parameter einer 3-schichtigen Platte inklusive des verwendeten FE-Netzes abgebildet. Auf eine Darstellung der Parameter 2,0, 4,0 und 10,0 wird aufgrund ihrer baupraktischen Irrelevanz verzichtet.

4.1.2 Ergebnisdarstellung

Die in der numerischen Studie errechneten Drill- bzw. Schubsteifigkeiten werden in Diagrammen dargestellt. Der Brettparameter t_i/a wird dazu auf der logarithmisch skalierten Abszisse und die zugehörigen Steifigkeitsverhältnisse D_{xy}^*/D_{xy} bzw. S_{xy}^*/S_{xy} auf der Ordinate, aufgetragen.

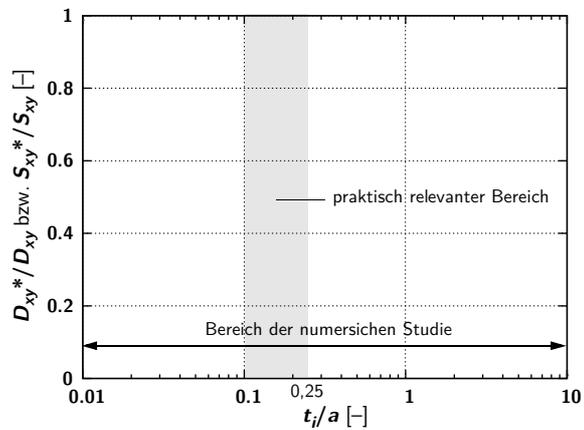


Abb. 4.1 Diagramm zur Darstellung der errechneten Drill- bzw. Schubsteifigkeiten

Als Grundlage zur Anpassung an die FE-Lösungen dient die Funktion aus Kap. 2.2.2. Dabei werden die errechneten Werte bestmöglich mit einer homogenen Funktion angepasst. Da der Brettabstand u mit 2 mm sehr klein ist, können Terme in denen u kubisch oder quadratisch vorkommt, vernachlässigt werden.

$$G^* = \frac{1}{G} \left(1 + \frac{u}{a} \left(1 + 2 \frac{G}{G_Q} \right) + \alpha_{FIT} \cdot 3 \frac{G}{G_{eff}} \left(1 + 2 \frac{u}{a} \right) \left(\frac{t_i}{a} \right)^2 \right)$$

mit $G_Q = \frac{G}{\kappa}$ und $G_{eff} = \frac{G}{2}$

$$G^* = \frac{1}{G} \left(1 + (1 + 2\kappa) \frac{u}{a} + 6 \cdot \alpha_{FIT} \cdot \left(1 + 2 \frac{u}{a} \right) \left(\frac{t_i}{a} \right)^2 \right)$$

Anstelle des Verhältnisses der Schubmoduln G^*/G werden die Steifigkeitsverhältnisse D_{xy}^*/D_{xy} bzw. S_{xy}^*/S_{xy} eingesetzt.

Anpassungsfunktion für $u = 0$

Wird u gleich null gesetzt, ergibt sich die bekannte Gleichung aus Kap. 2.1.4:

$$\frac{D_{xy}^*}{D_{xy}} = \frac{1}{1 + 6 \cdot \alpha_{\text{FIT}} \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^2} \quad \text{mit } \alpha_{\text{FIT}} = p \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^q$$

Anpassungsfunktion für $u > 0$

Bei Fugen zwischen den benachbarten Brettern wird die oben gezeigte Formel verwendet und der Term $(1 + 2\kappa) \cdot (u/a)$ erneut durch eine Funktion $\alpha_{(u)}$ erweitert. Für kleine Fugen (bis 4 mm) kann somit die folgende Anpassungsfunktion angeschrieben werden:

$$\frac{D_{xy}^*}{D_{xy}} = \frac{1}{1 + \alpha_{(u)} \cdot (1 + 2\kappa) \frac{u}{a} + 6 \cdot \alpha_{\text{FIT}} \cdot \left(1 + 2 \frac{u}{a}\right) \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$\text{mit } \alpha_{(u)} = r \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^s \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{\text{FIT}} = p \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^q$$

κ Schubkorrekturfaktor

Für den Schubkorrekturfaktor wird in weiterer Folge der Wert 1,2 (Rechteckquerschnitt) eingesetzt.

Anmerkung: Die Anpassungsfunktionen sind sowohl für die Drill- als auch für die Schubsteifigkeitsstudien gültig.

Ermittlung der unbekannt Parameter

Mit den Parametern p , q , r und s in den Funktionen α_{FIT} bzw. $\alpha_{(u)}$ erfolgt eine bestmögliche Anpassung an die FE-Ergebnisse. Diese Unbekannten werden durch Minimierung der Fehlerquadratsumme mit Hilfe des Programms MATHEMATICA ermittelt. Dazu ist es notwendig, die entsprechenden Ableitungen der Anpassungsfunktionen null zu setzen. In MATHEMATICA ist das mit dem Befehl *FindRoot* möglich. Das Eingabefile für eine 3-schichtige Platte (ohne Fugen) unter Drillbeanspruchung kann dem Kap. A.2 entnommen werden.

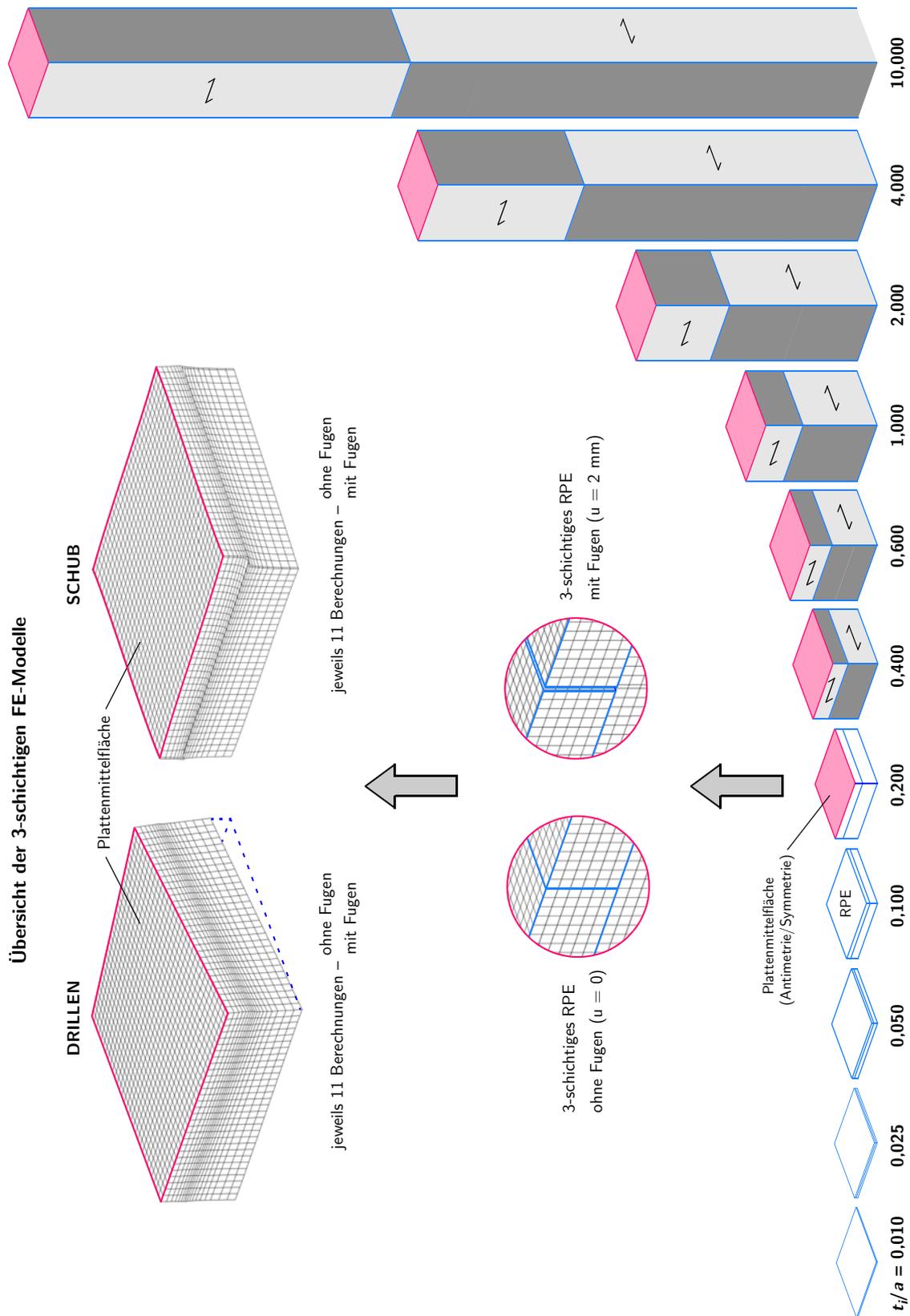


Abb. 4.2 Übersicht der RPE-Modelle für eine 3-schichtige BSP-Platte

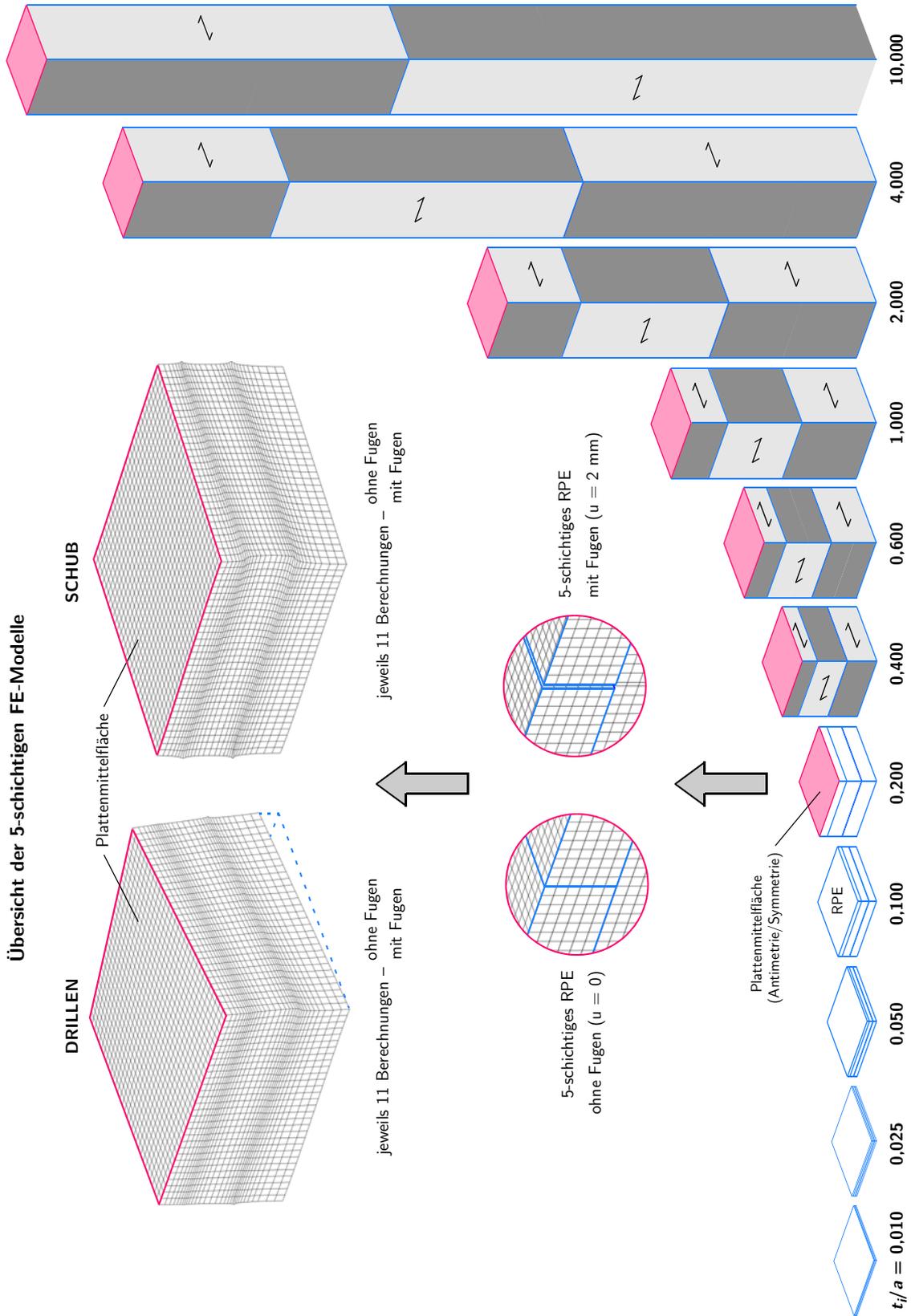


Abb. 4.3 Übersicht der RPE-Modelle für eine 5-schichtige BSP-Platte

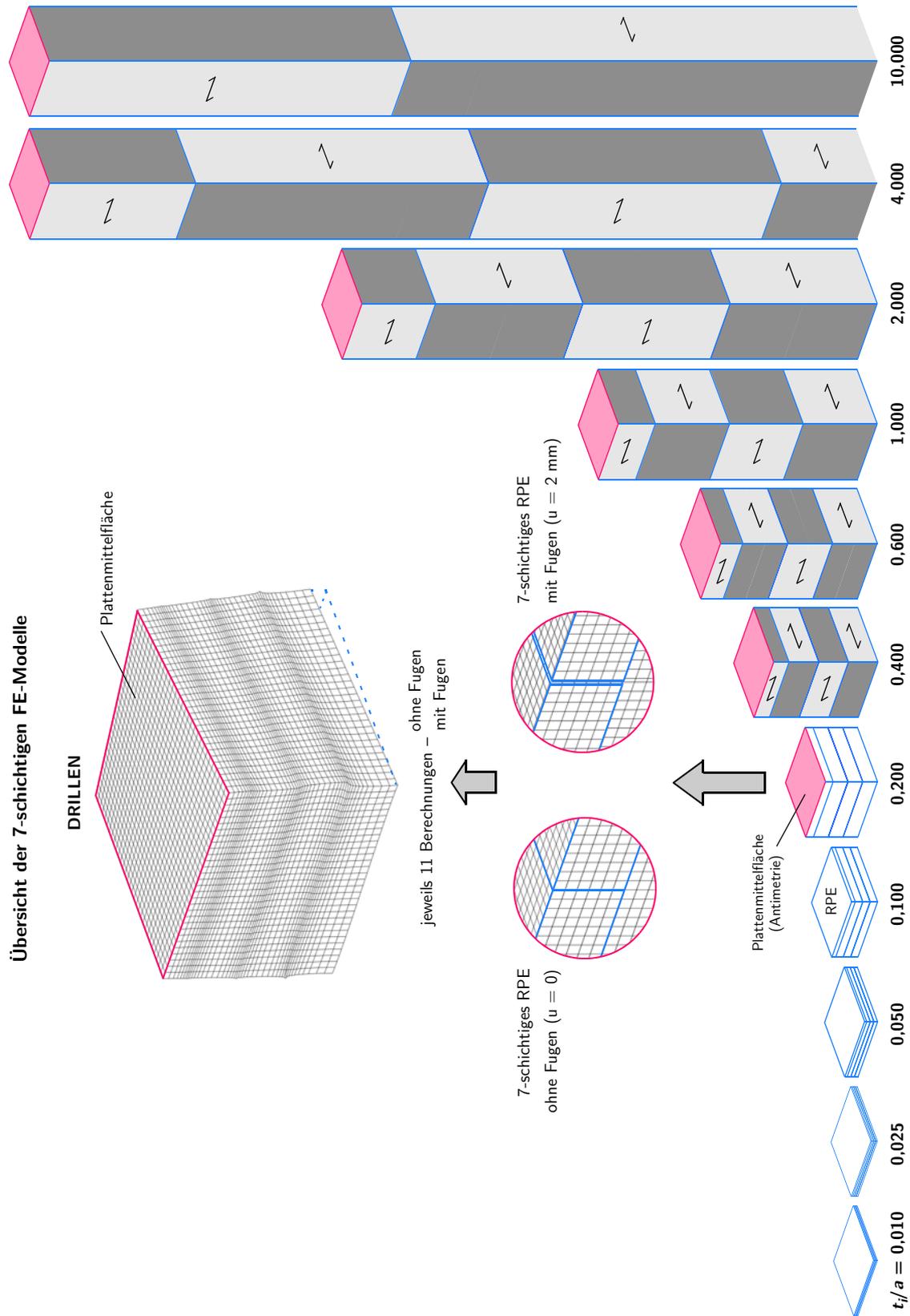


Abb. 4.4 Übersicht der RPE-Modelle für eine 7-schichtige BSP-Platte

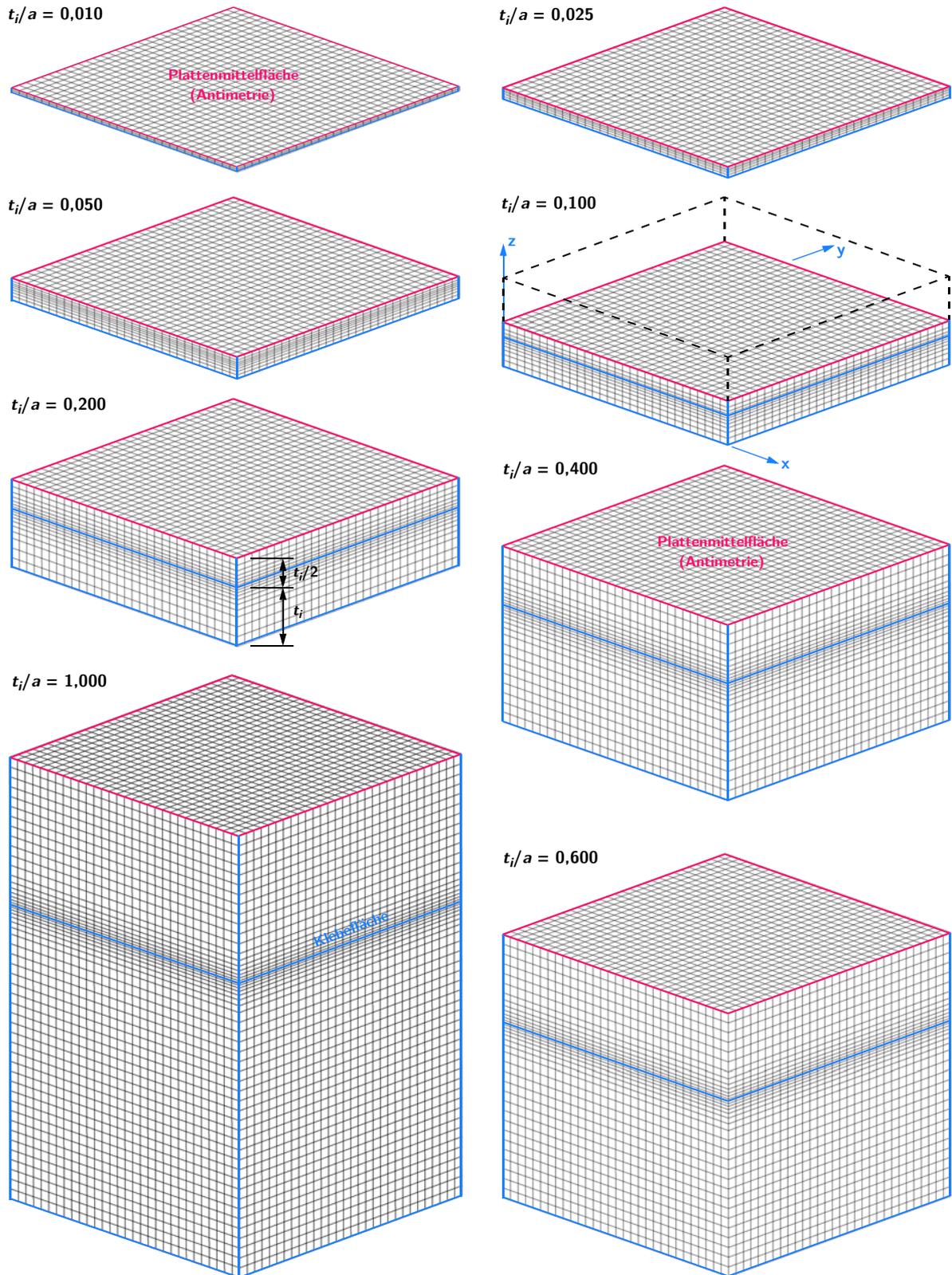


Abb. 4.5 Repräsentative Volumen-Elemente einer 3-schichtigen BSP-Platte mit Darstellung der Netzteilung

4.2 Numerische Studien zur Drillsteifigkeit der fugenlosen BSP-Platte

Nachdem alle zur FE-Analyse notwendigen Eingabedaten bekannt sind, kann nun die Berechnung in ABAQUS erfolgen. Es werden 3-, 5- und 7-schichtige Plattenelemente unter Drillbeanspruchung (jeweils mit und ohne Fugen) behandelt. Der Aufbau des 5- und 7-schichtigen Repräsentativen Platten-Elementes erfolgt dabei analog zu Kap. 3.5.

Nachstehend erfolgt die Darstellung der numerischen Ergebnisse aus ABAQUS in tabellarischer und grafischer Form. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die errechneten, inneren Verzerrungsenergien und die dazugehörigen Verformungsfiguren gelegt.

4.2.1 Ergebnisse der 3-schichtigen, fugenlosen BSP-Platte

Innere Verzerrungsenergien U^* ($3s, u = 0$)

Um mit diesen Ergebnissen eine Aussage über die Drillsteifigkeit einer beliebigen, 3-schichtigen BSP-Platte ohne Fugen machen zu können, werden die Steifigkeiten D_{xy}^* auf die Drillsteifigkeit der homogenen Grundstruktur D_{xy} bezogen. Somit ist die Bestimmung der Drillsteifigkeit unabhängig vom verwendeten Material möglich. Die Berechnung von D_{xy}^*/D_{xy} erfolgt exemplarisch an einem t_i/a -Verhältnis von 0,2 und ist sinngemäß auf die anderen Parameter übertragbar. Der dazu notwendige Schubmodul $G_{0,mean}$ des Grundmaterials (Brettware) entspricht dem der gewählten Festigkeitsklasse C24. Da sämtliche ABAQUS Ergebnisse am antisymmetrischen RVE berechnet werden, muss die Steifigkeit der homogenen Grundstruktur halbiert werden. Eine Übersicht aller Steifigkeitsverhältnisse zeigt Tab. 4.2.

$$D_{xy} = G_{0,mean} \cdot \frac{t^3}{12}$$

$$D_{xy} = \frac{69,0 \cdot (3 \cdot 3,0)^3}{2} = 2095,875 \frac{\text{kNcm}^2}{\text{cm}}$$

$$\frac{D_{xy}^*}{D_{xy}} = \frac{1298,104}{2095,875} = 0,62 [-]$$

Tab. 4.2 Verzerrungsenergien und Drillsteifigkeiten der 3-schichtigen, fugenlosen BSP-Platte

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	D_{xy}^* [kNcm ² /cm]	D_{xy}^*/D_{xy} [-]
0,010	0,0002	0,259	0,99
0,025	0,0033	3,916	0,96
0,050	0,0247	29,596	0,90
0,10	0,1743	209,220	0,80
0,20	1,0813	1298,104	0,62
0,40	5,4912	6592,198	0,39
0,60	12,6900	15234,285	0,27
1,00	32,8455	39431,009	0,15
2,00	109,3292	131249,734	0,06
4,00	368,0386	441830,384	0,03
10,0	1985,3597	2383424,263	0,01

Anpassungsfunktion ($3s, u = 0$)

Die Angleichung an die FE-Lösung erfolgt mit der in Kap. 4.1.2 gezeigten Funktion.

$$\frac{D_{xy}^*}{D_{xy}} = \frac{1}{1 + 6 \cdot \alpha_{FIT-3s} \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^2} = \alpha_{FIT-3s} \cdot p \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^q$$

Die unbekannt Parameter p und q werden mit dem Programm MATHEMATICA und dem Befehl *FindRoot* ermittelt. In diesem Fall ergeben sich die folgenden Parameter:

$$\begin{matrix} p_{3s} & 0,89 \\ q_{3s} & 0,67 \end{matrix} \Rightarrow \alpha_{FIT-3s} = 0,89 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,67}$$

Für den praktisch relevanten Bereich kann mit der gewählten Funktion eine sehr gute Übereinstimmung mit den FE-Ergebnissen erreicht werden.

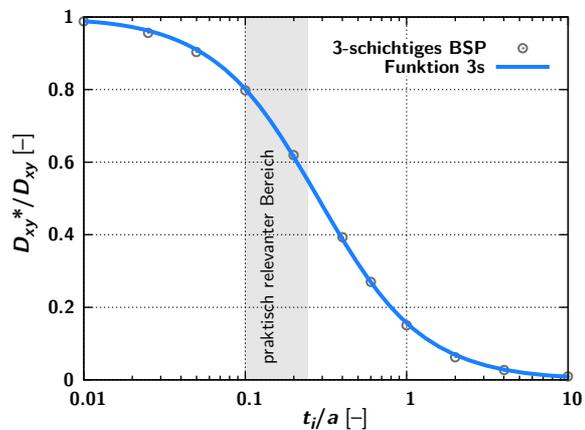
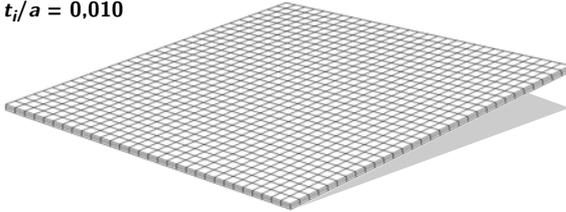


Abb. 4.6 Anpassungsfunktion an die 3-schichtige FE-Lösung

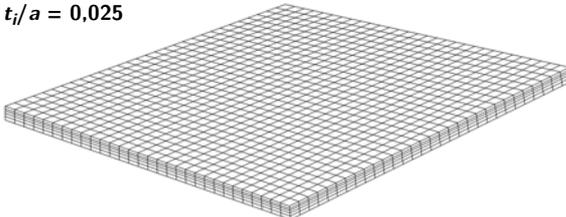
Verformungsfiguren der RPEs ($3s, u = 0$)

Die nachstehenden Bilder zeigen die verformten Repräsentativen Volumen-Elemente der 3-schichtigen BSP-Platte. Aufgrund der ausgenutzten Antimetrie in der Plattenmittelfläche sind bei einer 3-schichtigen Platte nur 1,5 Schichten dargestellt.

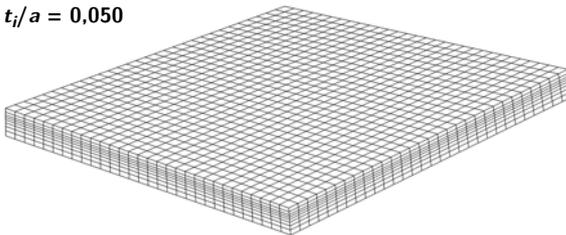
$t_i/a = 0,010$



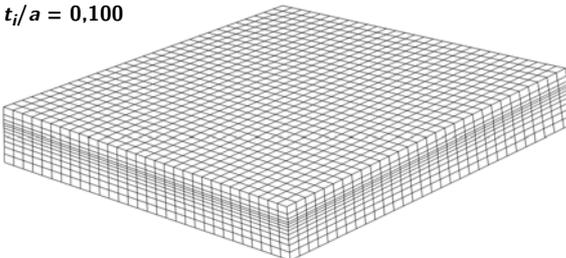
$t_i/a = 0,025$



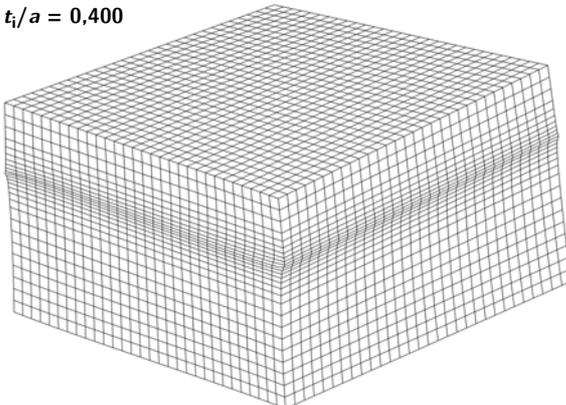
$t_i/a = 0,050$



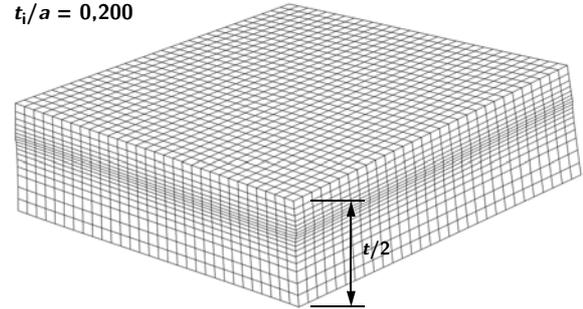
$t_i/a = 0,100$



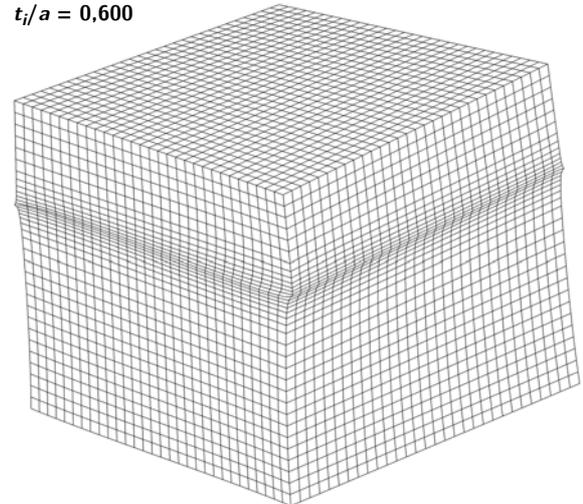
$t_i/a = 0,400$



$t_i/a = 0,200$



$t_i/a = 0,600$



$t_i/a = 1,000$

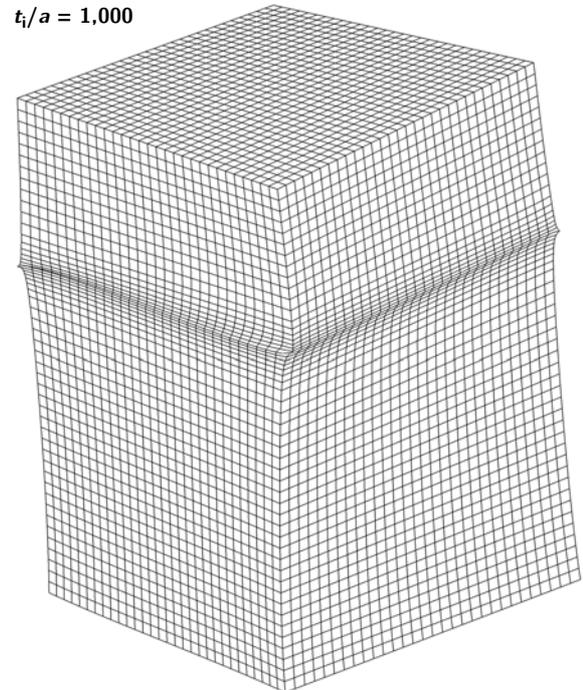


Abb. 4.7 Verformungsfiguren der 3-schichtigen BSP-Platte ohne Fugen für verschiedene t_i/a -Verhältnisse

4.2.2 Ergebnisse der 5-schichtigen, fugenlosen BSP-Platte

Die Vorgehensweise zur Auswertung der ABAQUS Ergebnisse wurde in Kap. 4.2.1 näher behandelt. Dieser Ablauf kann analog auf die 5- und 7-schichtige BSP-Platte übertragen werden.

Innere Verzerrungsenergien U^* (5s, $u = 0$)

Tab. 4.3 Verzerrungsenergien und Drillsteifigkeiten der 5-schichtigen, fugenlosen BSP-Platte

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	D_{xy}^* [kNcm ² /cm]	D_{xy}^*/D_{xy} [-]
0,010	0,0010	1,200	0,99
0,025	0,0152	18,229	0,96
0,050	0,1153	138,466	0,91
0,10	0,8263	991,972	0,82
0,20	5,3056	6369,332	0,66
0,40	28,6717	34420,340	0,44
0,60	70,0545	84100,461	0,32
1,00	199,1224	239046,458	0,20
2,00	767,7320	921662,23	0,09
4,00	2951,6336	3543436,097	0,05
10,0	18184,0019	21829894,281	0,02

Anpassungsfunktion (5s, $u = 0$)

$$D_{xy}^* = \frac{1}{1 + 6 \cdot \alpha_{FIT-5s} \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$p_{5s} = 0,67 \Rightarrow \alpha_{FIT-5s} = 0,67 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,74}$$

$$q_{5s} = 0,74$$

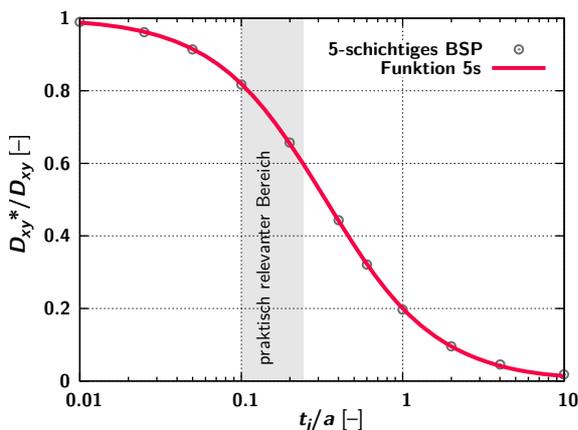
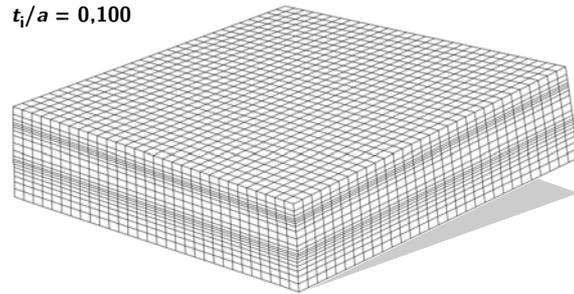


Abb. 4.8 FE-Ergebnisse der 5-schichtigen BSP-Platte ohne Fugen ($u = 0$) und zugehörige Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

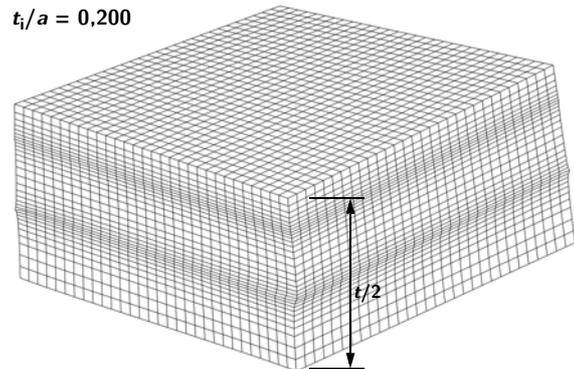
Verformungsfiguren der RPEs (5s, $u = 0$)

Es werden nur mehr die Brettparameter (t_i/a) 0,1, 0,2 und 0,4 dargestellt. Auf die restlichen Bilder wird zugunsten der besseren Übersicht und wegen ihrer Irrelevanz in der Praxis verzichtet.

$t_i/a = 0,100$



$t_i/a = 0,200$



$t_i/a = 0,400$

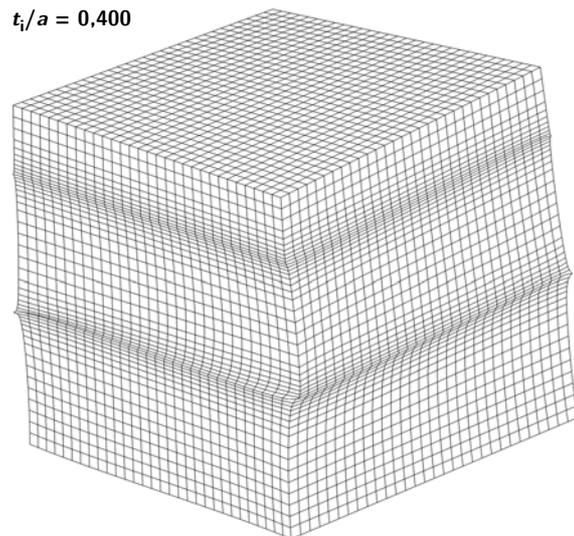


Abb. 4.9 Verformungsfiguren der 5-schichtigen BSP-Platte ohne Fugen, $t_i/a = 0,1, 0,2$ und $0,4$

4.2.3 Ergebnisse der 7-schichtigen, fugenlosen BSP-Platte

Innere Verzerrungsenergien U^* ($7s, u = 0$)

Tab. 4.4 Drillsteifigkeit der FE-Berechnung, bezogen auf die Drillsteifigkeit der homogenen Grundstruktur

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	D_{xy}^* [kNcm ² /cm]	D_{xy}^*/D_{xy} [-]
0,010	0,0027	3,297	0,99
0,025	0,0418	50,239	0,97
0,050	0,3194	383,472	0,92
0,10	2,3147	2778,787	0,83
0,20	15,2173	18268,335	0,69
0,40	85,5681	102724,503	0,48
0,60	215,3896	258575,168	0,36
1,00	635,7603	763230,225	0,23
2,00	2545,8218	3056259,130	0,11
4,00	10020,8086	12029980,751	0,06
10,0	61799,6129	74190435,286	0,02

Anpassungsfunktion ($7s, u = 0$)

$$D_{xy}^* = \frac{1}{1 + 6 \cdot \alpha_{\text{FIT-7s}} \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$p_{7s} = 0,55 \quad q_{7s} = 0,77 \Rightarrow \alpha_{\text{FIT-7s}} = 0,55 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,77}$$

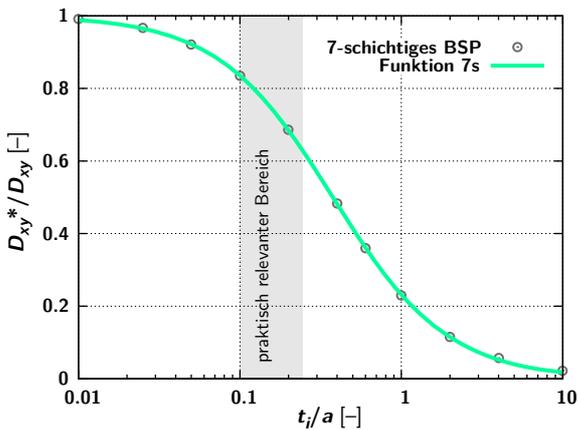
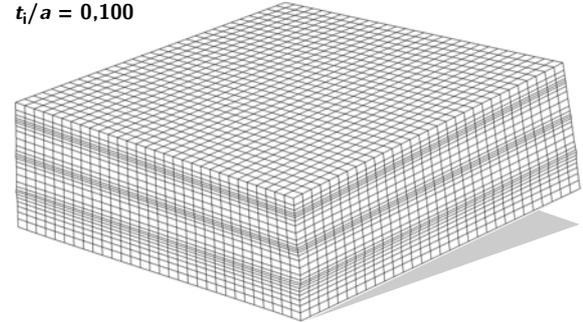


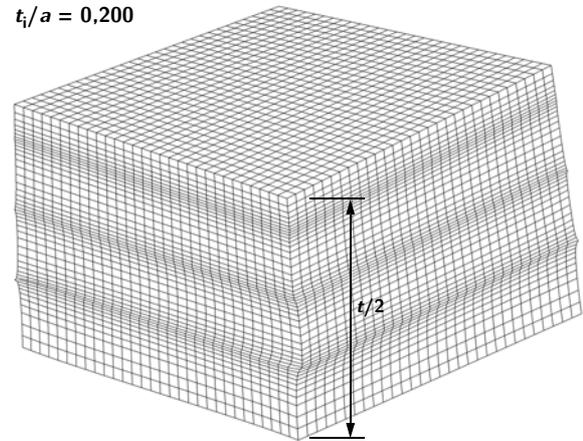
Abb. 4.10 FE-Ergebnisse der 7-schichtigen BSP-Platte ohne Fugen ($u = 0$) und zugehörige Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

Verformungsfiguren der RPEs ($7s, u = 0$)

$t_i/a = 0,100$



$t_i/a = 0,200$



$t_i/a = 0,400$

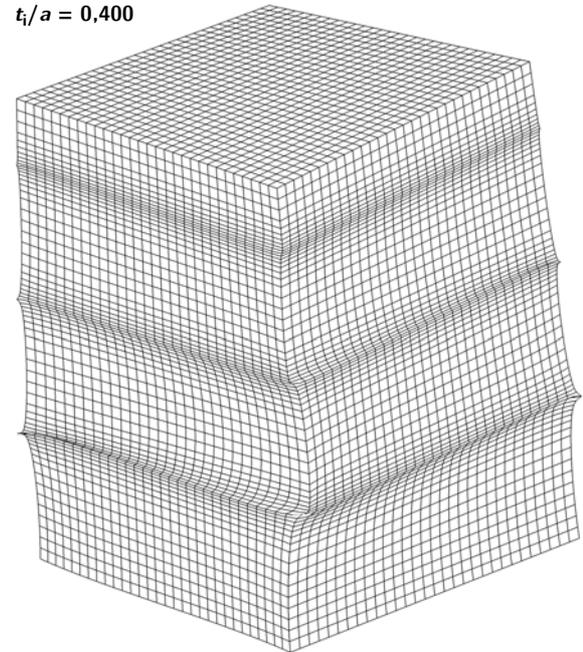


Abb. 4.11 Verformungsfiguren der 7-schichtigen BSP-Platte ohne Fugen, $t_i/a = 0,1, 0,2$ und $0,4$

4.3 Numerische Studien zur Drillsteifigkeit der BSP-Platte mit Fugen

4.3.1 Ergebnisse der 3-schichtigen BSP-Platte mit Fugen

Auch bei der BSP-Platte mit Fugen zwischen den einzelnen Brettern ist die Vorgehensweise von Kap. 4.2.1 anwendbar. Einzig bei der Rückrechnung von der inneren Verzerrungsenergie auf die Drillsteifigkeit D_{xy}^* muss jetzt für a ein Wert von 15,2 cm (= 15,0 cm + u) eingesetzt werden (siehe Kap. 3.2.5). Die Drillsteifigkeiten der homogenen Grundstruktur bleiben unverändert zur Platte ohne Fugen und werden somit nicht mehr explizit angeführt.

Innere Verzerrungsenergien U^* (3s, $u = 2$ mm)

Tab. 4.5 Drillsteifigkeit der FE-Berechnung, bezogen auf die Drillsteifigkeit der homogenen Grundstruktur

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	D_{xy}^* [kNcm ² /cm]	D_{xy}^*/D_{xy} [-]
0,010	0,0002	0,251	0,96
0,025	0,0032	3,744	0,91
0,050	0,0238	27,853	0,85
0,100	0,1641	191,830	0,73
0,200	0,9889	1156,182	0,55
0,400	4,9507	5787,964	0,35
0,600	11,4550	13392,259	0,24
1,000	29,7941	34832,797	0,13
2,000	98,7475	115447,231	0,06
4,000	327,1340	382457,534	0,02
10,00	1729,5839	2022083,710	0,01

Anpassungsfunktion (3s, $u = 2$ mm)

Für BSP-Platten mit Fugen muss zur Anpassung an die FE-Lösung die Funktion aus Kap. 4.1.2 verwendet werden. Die Parameter p und q wurden bereits in Kap. 4.2.1 ermittelt und können für die BSP-Platte mit Fugen übernommen werden.

$$D_{xy}^* = \frac{1}{1 + 3,4 \cdot \alpha_{u-3s} \cdot \frac{u}{a} + 6 \cdot \alpha_{FIT-3s} \cdot \left(1 + 2 \frac{u}{a}\right) \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$\alpha_{FIT-3s} = 0,89 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,67}$$

$$\begin{matrix} r_{u-3s} & 10,95 \\ s_{u-3s} & 0,62 \end{matrix} \Rightarrow \alpha_{u-3s} = 10,95 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,62}$$

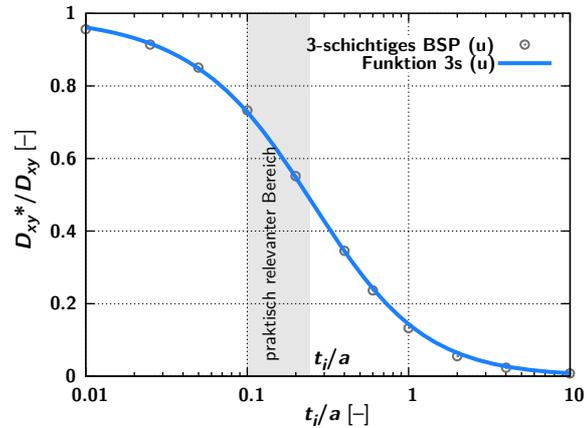


Abb. 4.12 FE-Ergebnisse der 3-schichtigen BSP-Platte mit Fugen ($u = 2$ mm) und Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

Verformungsfiguren der RPEs (3s, $u = 2$ mm)

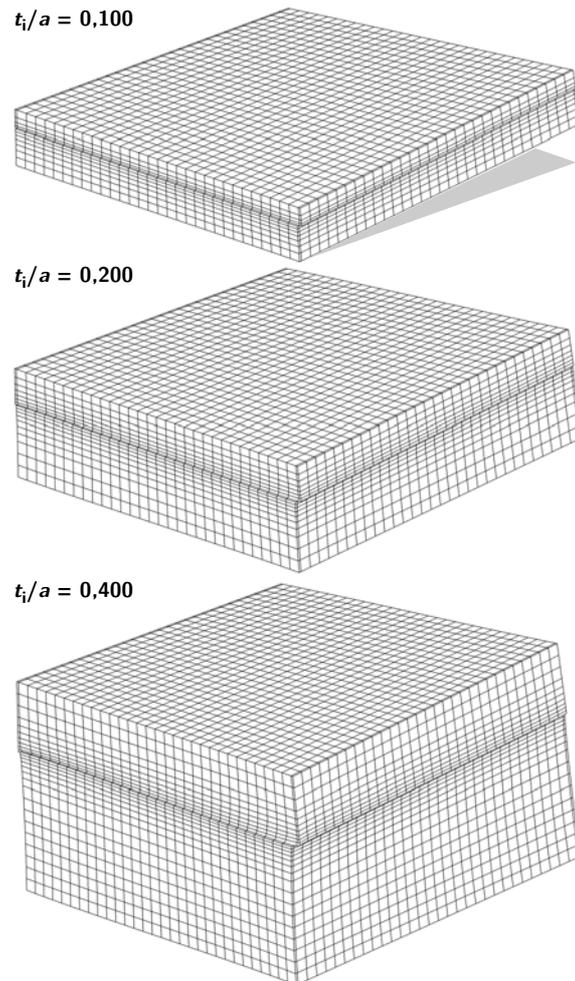


Abb. 4.13 Verformungsfiguren der 3-schichtigen BSP-Platte mit Fugen, $t_i/a = 0,1, 0,2$ und $0,4$

4.3.2 Ergebnisse der 5-schichtigen BSP-Platte mit Fugen

Innere Verzerrungsenergien U^* (5s, $u = 2$ mm)

Tab. 4.6 Drillsteifigkeit der FE-Berechnung, bezogen auf die Drillsteifigkeit der homogenen Grundstruktur

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	D_{xy}^* [kNcm ² /cm]	D_{xy}^*/D_{xy} [-]
0,010	0,0010	1,157	0,95
0,025	0,0148	17,305	0,91
0,050	0,1103	128,983	0,85
0,10	0,7699	900,121	0,74
0,20	4,7893	5599,210	0,58
0,40	25,2707	29544,362	0,38
0,60	61,2509	71609,433	0,27
1,00	173,1471	202429,018	0,17
2,00	663,9602	776246,311	0,08
4,00	2539,0834	2968482,383	0,04
10,0	15496,1043	18116739,408	0,01

Anpassungsfunktion (5s, $u = 2$ mm)

$$D_{xy}^* = \frac{1}{1 + 3,4 \cdot \alpha_{u-5s} \cdot \frac{u}{a} + 6 \cdot \alpha_{FIT-5s} \cdot \left(1 + 2 \frac{u}{a}\right) \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$\alpha_{FIT-5s} = 0,67 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,74}$$

$$\begin{matrix} r_{u-5s} & 13,19 \\ s_{u-5s} & 0,66 \end{matrix} \Rightarrow \alpha_{u-5s} = 13,19 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,66}$$

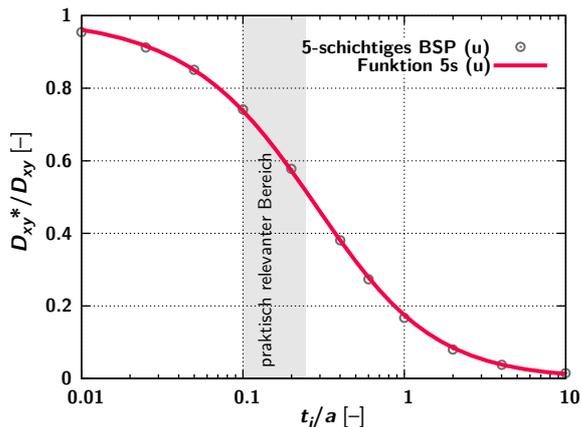
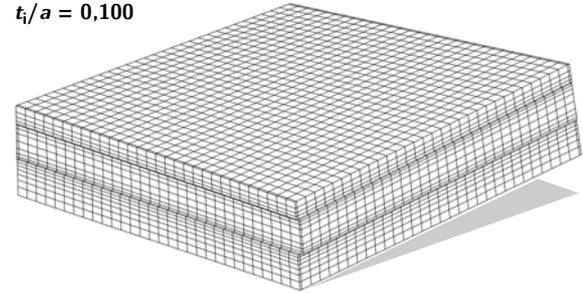


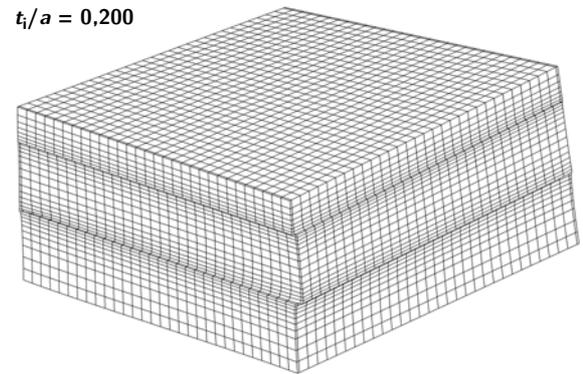
Abb. 4.14 FE-Ergebnisse der 5-schichtigen BSP-Platte mit Fugen ($u = 2$ mm) und Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

Verformungsfiguren der RPEs (5s, $u = 2$ mm)

$t_i/a = 0,100$



$t_i/a = 0,200$



$t_i/a = 0,400$

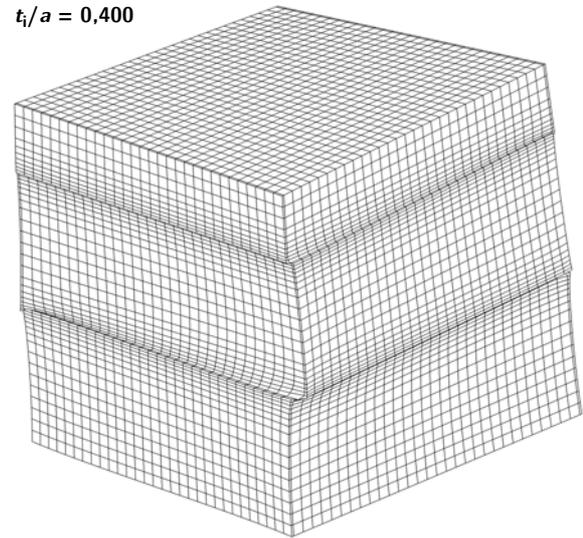


Abb. 4.15 Verformungsfiguren der 5-schichtigen BSP-Platte mit Fugen, $t_i/a = 0,1, 0,2$ und $0,4$

4.3.3 Ergebnisse der 7-schichtigen BSP-Platte mit Fugen

Innere Verzerrungsenergien U^* ($7s, u = 2 \text{ mm}$)

Tab. 4.7 Drillsteifigkeit der FE-Berechnung, bezogen auf die Drillsteifigkeit der homogenen Grundstruktur

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	D_{xy}^* [kNcm ² /cm]	D_{xy}^*/D_{xy} [-]
0,010	0,0027	3,175	0,95
0,025	0,0407	47,554	0,91
0,050	0,3045	355,984	0,86
0,10	2,1499	2513,522	0,76
0,20	13,7367	16059,846	0,60
0,40	75,2056	87924,005	0,41
0,60	187,2214	218883,477	0,30
1,00	548,0340	640715,231	0,19
2,00	2184,1009	2553466,741	0,10
4,00	8575,8586	10026171,219	0,05
10,0	53739,8723	62828130,439	0,02

Anpassungsfunktion ($7s, u = 2 \text{ mm}$)

$$D_{xy}^* = \frac{1}{1 + 3,4 \cdot \alpha_{u-7s} \cdot \frac{u}{a} + 6 \cdot \alpha_{FIT-7s} \cdot \left(1 + 2 \frac{u}{a}\right) \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$\alpha_{FIT-7s} = 0,55 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,77}$$

$$\begin{matrix} r_{u-7s} & 13,28 \\ s_{u-7s} & 0,65 \end{matrix} \Rightarrow \alpha_{u-7s} = 13,28 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,65}$$

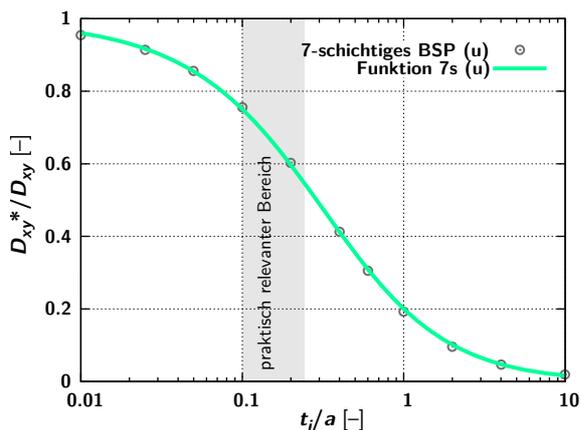
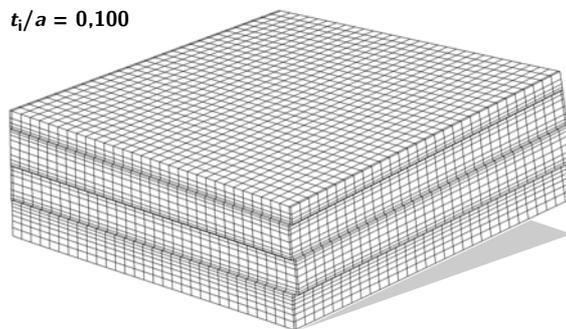


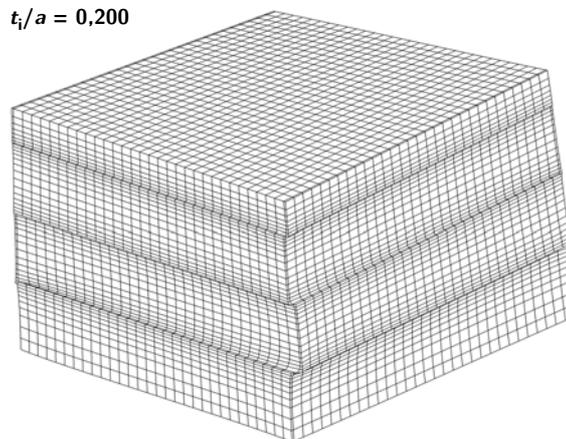
Abb. 4.16 FE-Ergebnisse der 7-schichtigen BSP-Platte mit Fugen ($u = 2 \text{ mm}$) und Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

Verformungsfiguren der RPEs ($7s, u = 2 \text{ mm}$)

$t_i/a = 0,100$



$t_i/a = 0,200$



$t_i/a = 0,400$

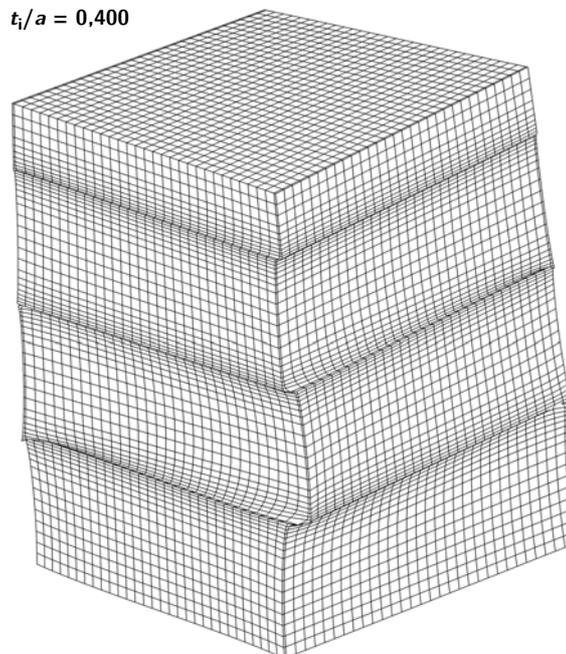


Abb. 4.17 Verformungsfiguren der 7-schichtigen BSP-Platte mit Fugen, $t_i/a = 0,100, 0,200$ und $0,400$

4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse aus den Drillsteifigkeitsstudien

4.4.1 Vergleich der 3-, 5- und 7-schichtigen, fugenlosen BSP-Platte

Tab. 4.8 Übersicht der Drillsteifigkeitsverhältnisse ($u = 0$)

t_i/a [-]	D_{xy}^*/D_{xy} [-]		
	3-schichtig	5-schichtig	7-schichtig
0,010	0,99	0,99	0,99
0,025	0,96	0,96	0,97
0,050	0,90	0,91	0,92
0,10	0,80	0,82	0,83
0,20	0,62	0,66	0,69
0,40	0,39	0,44	0,48
0,60	0,27	0,32	0,36
1,00	0,15	0,20	0,23
2,00	0,06	0,09	0,11
4,00	0,03	0,05	0,06
10,0	0,01	0,02	0,02

Anpassungsfunktionen (3s, 5s und 7s, $u = 0$)

$$D_{xy}^* = \frac{1}{1 + 6 \cdot \alpha_{FIT} \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^2} \cdot \alpha_{FIT} \cdot p \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^q$$

Tab. 4.9 Parameter der 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Platte ($u = 0$) zur Anpassung der Funktionen an die FE-Lösung

Parameter [-]	Parameter		
	3-schichtig	5-schichtig	7-schichtig
p	0,89	0,67	0,55
q	-0,67	-0,74	-0,77

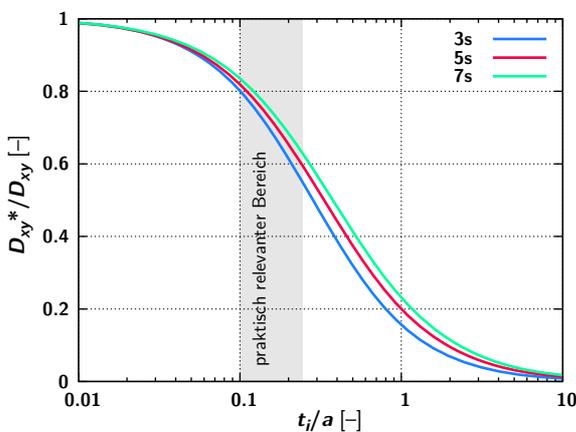


Abb. 4.18 Anpassungsfunktionen der 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Platte ohne Fugen

4.4.2 Vergleich der 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Platte mit Fugen

Tab. 4.10 Übersicht der Drillsteifigkeitsverhältnisse ($u = 2$ mm)

t_i/a [-]	D_{xy}^*/D_{xy} [-]		
	3-schichtig	5-schichtig	7-schichtig
0,010	0,96	0,95	0,95
0,025	0,91	0,91	0,91
0,050	0,85	0,85	0,86
0,10	0,73	0,74	0,76
0,20	0,55	0,58	0,60
0,40	0,35	0,38	0,41
0,60	0,24	0,27	0,30
1,00	0,13	0,17	0,19
2,00	0,06	0,08	0,10
4,00	0,02	0,04	0,05
10,0	0,01	0,01	0,02

Anpassungsfunktionen (3s, 5s und 7s, $u = 2$ mm)

$$D_{xy}^* = \frac{1}{1 + 3,4 \cdot \alpha_{(u)} \cdot \left(\frac{u}{a}\right) + 6 \cdot \alpha_{FIT} \cdot \left(1 + 2 \frac{u}{a}\right) \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$\text{mit } \alpha_{(u)} = r \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^s \text{ bzw. } \alpha_{FIT} \cdot p \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^q$$

Tab. 4.11 Parameter der 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Platte ($u = 2$ mm) zur Anpassung der Funktionen an die FE-Lösung

Parameter [-]	Parameter		
	3-schichtig	5-schichtig	7-schichtig
r	10,95	13,19	13,28
s	0,62	0,66	0,65

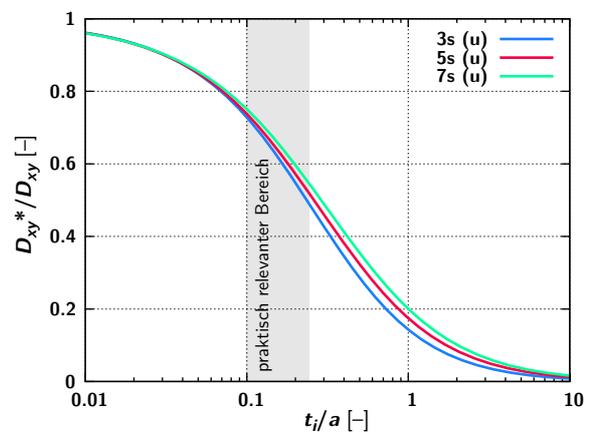


Abb. 4.19 Anpassungsfunktionen der 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Platte mit Fugen

4.5 Numerische Studien zur Schubsteifigkeit der fugenlosen BSP-Scheibe

Das mechanische Modell zur Bestimmung der Schubsteifigkeit von BSP-Scheiben wurde bereits in Kap. 2.1 näher erläutert. Dieser Abschnitt soll die in [4] (vgl. auch Kap. 2.1.4) publizierten Ergebnisse kontrollieren und den Randeffect bei 3- und 5-schichtigen Scheiben näher untersuchen. Alle FE-Berechnungen finden an dem in Kap. 3.6 dargestellten RVE (bzw. RVSE) jeweils mit ($u = 2 \text{ mm}$) und ohne ($u = 0$) Fugen statt. Die Dokumentation der Ergebnisse erfolgt analog zu Kap. 4.2.1.

4.5.1 Ergebnisse der gedanklich ∞ -dicken (RVSE), fugenlosen BSP-Scheibe

Innere Verzerrungsenergien U^* (RVSE, $u = 0$)

Tab. 4.12 Schubsteifigkeit der FE-Berechnung, bezogen auf die Schubsteifigkeit der homogenen Grundstruktur

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	S_{xy}^* [kN/cm]	S_{xy}^*/S_{xy} [-]
0,010	82,4896	10,311	1,00
0,025	203,5004	25,438	0,98
0,050	396,2040	49,526	0,96
0,10	748,1199	93,515	0,90
0,20	1327,4425	165,930	0,80
0,40	2088,2168	261,027	0,63
0,60	2504,5780	313,072	0,50
1,00	2851,5494	356,444	0,34
2,00	2985,5586	373,195	0,18
4,00	2991,6299	373,954	0,09
10,0	2991,6413	373,955	0,04

Anpassungsfunktion (RVSE, $u = 0$)

Die Anpassung an die FE-Lösung erfolgt mit der bereits bekannten Funktion. Das Verhältnis von D_{xy}^*/D_{xy} wird jetzt durch S_{xy}^*/S_{xy} ersetzt. S_{xy} ist die Schubsteifigkeit der homogenen Grundstruktur. Werden Symmetriebedingungen ausgenutzt, dann sind diese bei der Ermittlung von S_{xy} zu berücksichtigen.

$$\frac{S_{xy}^*}{S_{xy}} = 1 + 6 \cdot \alpha_{FIT} \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^2 = \alpha_{FIT} \cdot p \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^q$$

$$S_{xy} = G_{0, mean} \cdot t$$

$$\begin{aligned} p_{RVSE} &= 0,31 \\ q_{RVSE} &= 0,75 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_{FIT-RVSE} = 0,31 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,75}$$

Im Vergleich dazu die Ergebnisse aus [4]:

$$\begin{aligned} p &= 0,32 \\ q &= 0,77 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_{FIT} = 0,32 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,77}$$

Die Parameter unterscheiden sich zwar geringfügig, dies hat jedoch keinen Einfluss auf die Ergebnisse der Anpassungsfunktion. Die Abweichungen können z. B. auf eine andere Netzteilung zurückgeführt werden.

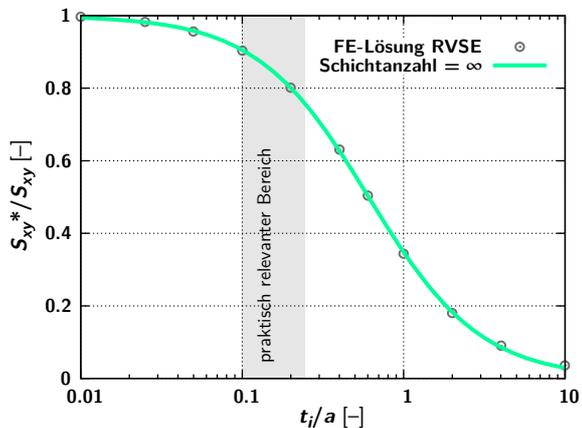


Abb. 4.20 FE-Ergebnisse des RVSE ohne Fugen ($u = 0$) und zugehörige Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

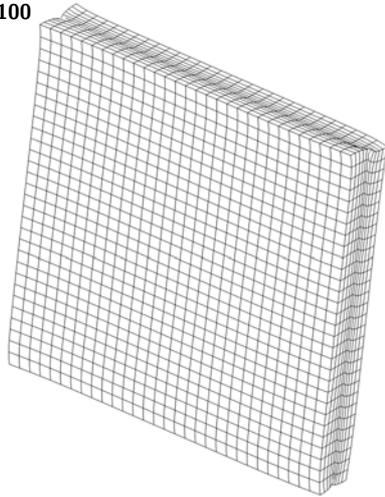
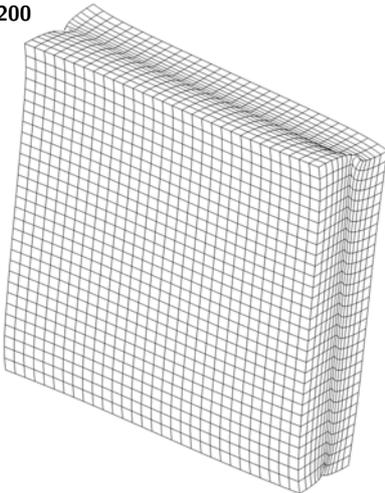
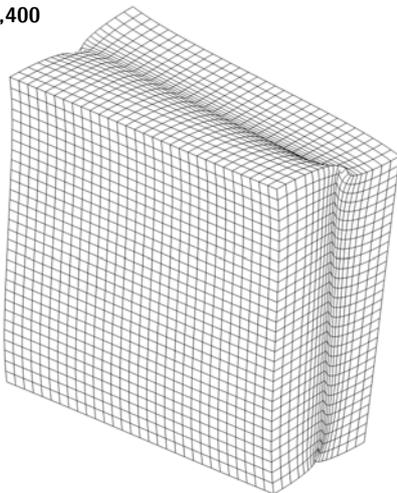
Verformungsfiguren der RVSEs ($u = 0$) $t_i/a = 0,100$  $t_i/a = 0,200$  $t_i/a = 0,400$ 

Abb. 4.21 Verformungsfiguren des RVSE ohne Fugen, $t_i/a = 0,1, 0,2$ und $0,4$

4.5.2 Ergebnisse der 3-schichtigen, fugenlosen BSP-Scheibe

Innere Verzerrungsenergien U^* ($3s, u = 0$)

Tab. 4.13 Schubsteifigkeit der FE-Berechnung, bezogen auf die Schubsteifigkeit der homogenen Grundstruktur

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	S_{xy}^* [kN/cm]	S_{xy}^*/S_{xy} [-]
0,010	123,0171	15,377	0,99
0,025	299,5345	37,442	0,96
0,050	570,9188	71,365	0,92
0,10	1034,9387	129,367	0,83
0,20	1706,2125	213,277	0,69
0,40	2409,1045	301,138	0,48
0,60	2710,6582	338,832	0,36
1,00	2918,5541	364,819	0,23
2,00	2988,5943	373,574	0,12
4,00	2991,6356	373,954	0,06
10,0	2991,6414	373,955	0,02

Anpassungsfunktion ($3s, u = 0$)

$$\frac{S_{xy}^*}{S_{xy}} = \frac{1}{1 + 6 \cdot \alpha_{FIT} \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^2} = \alpha_{FIT} \cdot p \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^q$$

$$\begin{matrix} p_{3s} & 0,53 \\ q_{3s} & 0,79 \end{matrix} \Rightarrow \alpha_{FIT-5s} = 0,53 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,79}$$

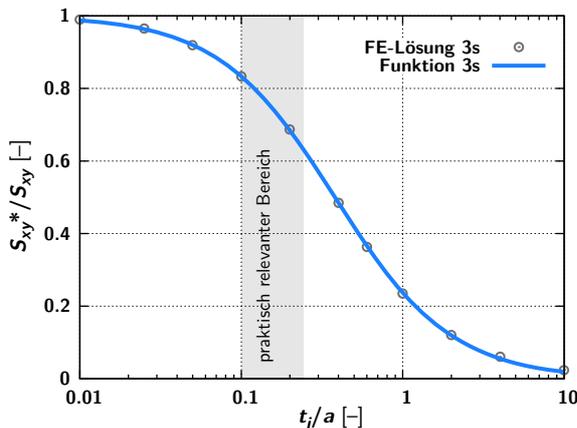


Abb. 4.22 FE-Ergebnisse der 3-schichtigen BSP-Scheibe ohne Fugen ($u = 0$) und zugehörige Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

4.5.3 Ergebnisse der 5-schichtigen, fugenlosen BSP-Scheibe

Innere Verzerrungsenergien U^* ($5s, u = 0$)

Tab. 4.14 Schubsteifigkeit der FE-Berechnung, bezogen auf die Schubsteifigkeit der homogenen Grundstruktur

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	S_{xy}^* [kN/cm]	S_{xy}^*/S_{xy} [-]
0,010	205,5307	25,691	0,99
0,025	503,2636	62,908	0,97
0,050	967,9097	120,989	0,94
0,10	1784,4851	223,061	0,86
0,20	3034,2232	379,278	0,73
0,40	4497,3299	562,166	0,54
0,60	5215,2362	651,905	0,42
1,00	5770,1034	721,263	0,28
2,00	5974,1529	746,769	0,14
4,00	5983,2655	747,908	0,07
10,0	5985,8754	748,234	0,03

Anpassungsfunktion ($5s, u = 0$)

$$\frac{S_{xy}^*}{S_{xy}} = \frac{1}{1 + 6 \cdot \alpha_{FIT} \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^2} = \alpha_{FIT} \cdot p \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^q$$

$$\begin{matrix} p_{5s} & 0,43 \\ q_{5s} & 0,79 \end{matrix} \Rightarrow \alpha_{FIT-5s} = 0,43 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,79}$$

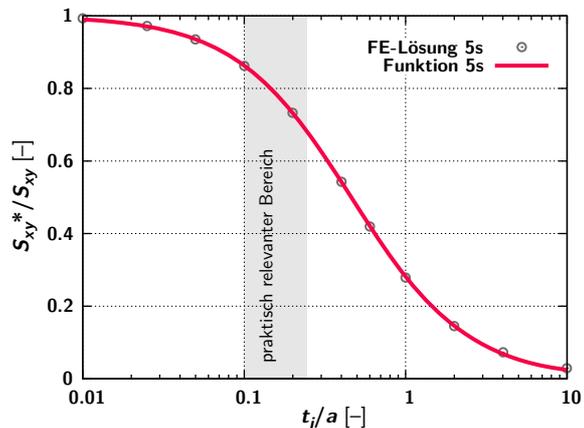


Abb. 4.23 FE-Ergebnisse der 5-schichtigen BSP-Scheibe ohne Fugen ($u = 0$) und zugehörige Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

4.6 Numerische Studien zur Schubsteifigkeit der BSP-Scheibe mit Fugen

4.6.1 Ergebnisse der gedanklich ∞ -dicken (RVSE), fugenlosen BSP-Scheibe

Anmerkung: Die Ergebnisauswertung der BSP-Scheibe mit Fugen kann analog zu Kap. 4.3 erfolgen. Beim RVE mit Fugen ist der Wert a mit 15,2 cm einzusetzen.

Innere Verzerrungsenergien U^* (RVSE, $u = 2$ mm)

Tab. 4.15 Schubsteifigkeit der FE-Berechnung, bezogen auf die Schubsteifigkeit der homogenen Grundstruktur

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	S_{xy}^* [kN/cm]	S_{xy}^*/S_{xy} [-]
0,010	79,3414	9,918	0,96
0,025	192,9450	24,118	0,93
0,050	370,1972	46,275	0,89
0,10	684,9716	85,621	0,83
0,20	1183,5966	147,950	0,71
0,40	1800,8336	225,104	0,54
0,60	2122,0667	265,258	0,43
1,00	2381,5664	297,696	0,29
2,00	2479,8299	309,979	0,15
4,00	2484,2557	310,532	0,08
10,0	2484,2640	310,533	0,03

Anpassungsfunktion (RVSE, $u = 2$ mm)

$$S_{xy}^* = \frac{1}{1 + 3,4 \cdot \alpha_u \cdot \frac{u}{a} + 6 \cdot \alpha_{\text{FIT-RVSE}} \cdot \left(1 + 2 \frac{u}{a}\right) \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$\alpha_{\text{FIT-RVSE}} = 0,31 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,75}$$

$$r_{u\text{-RVSE}} = 9,63 \Rightarrow \alpha_{u\text{-RVSE}} = 9,63 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,60}$$

$$s_{u\text{-RVSE}} = 0,60$$

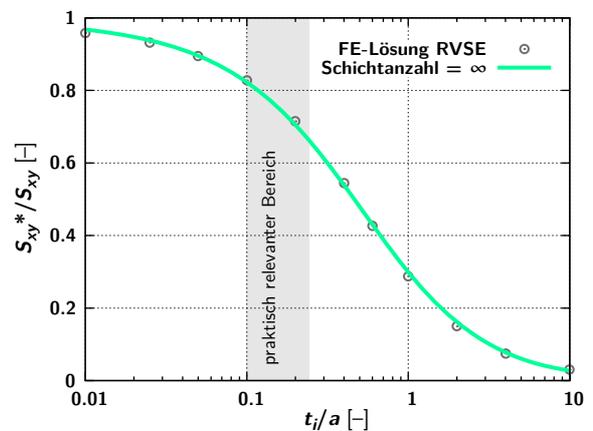


Abb. 4.24 FE-Ergebnisse des RVSE mit Fugen ($u = 2$ mm) und zugehörige Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

4.6.2 Ergebnisse der 3-schichtigen BSP-Scheibe mit Fugen

Anmerkung: Vorgehensweise siehe Kap. 4.3.1.

Innere Verzerrungsenergien U^* (3s, $u = 2$ mm)

Tab. 4.16 Schubsteifigkeit der FE-Berechnung, bezogen auf die Schubsteifigkeit der homogenen Grundstruktur

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	S_{xy}^* [kN/cm]	S_{xy}^*/S_{xy} [-]
0,010	116,8816	14,610	0,94
0,025	279,6728	34,959	0,90
0,050	523,6759	65,459	0,84
0,10	928,1640	116,021	0,75
0,20	1489,7778	186,222	0,60
0,40	2046,1780	255,772	0,41
0,60	2275,8036	284,475	0,31
1,00	2430,7001	303,838	0,20
2,00	2482,0428	310,255	0,10
4,00	2484,2598	310,532	0,05
10,0	2484,2681	310,534	0,02

Anpassungsfunktion (3s, $u = 2$ mm)

$$S_{xy}^* = \frac{1}{1 + 3,4 \cdot \alpha_u \cdot \frac{u}{a} + 6 \cdot \alpha_{FIT-3s} \cdot \left(1 + 2 \frac{u}{a}\right) \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$\alpha_{FIT-3s} = 0,53 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,79}$$

$$r_{u-3s} = 12,97 \Rightarrow \alpha_{u-3s} = 12,97 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,59}$$

$$s_{u-3s} = 0,59$$

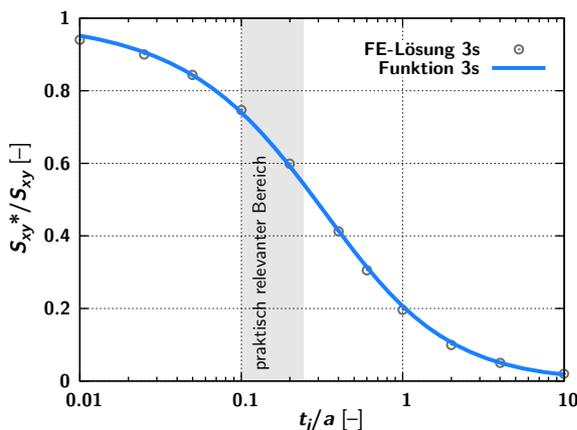


Abb. 4.25 FE-Ergebnisse der 3-schichtigen BSP-Scheibe mit Fugen ($u = 2$ mm) und zugehörige Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

4.6.3 Ergebnisse der 5-schichtigen BSP-Scheibe mit Fugen

Anmerkung: Vorgehensweise siehe Kap. 4.3.2.

Innere Verzerrungsenergien U^* (5s, $u = 2$ mm)

Tab. 4.17 Schubsteifigkeit der FE-Berechnung, bezogen auf die Schubsteifigkeit der homogenen Grundstruktur

t_i/a [-]	U^* [kNcm]	S_{xy}^* [kN/cm]	S_{xy}^*/S_{xy} [-]
0,010	196,5234	24,565	0,95
0,025	473,5096	59,189	0,91
0,050	895,6712	111,959	0,87
0,10	1615,6637	201,958	0,78
0,20	2674,0910	334,261	0,65
0,40	3847,0211	480,878	0,46
0,60	4397,8702	549,734	0,35
1,00	4812,2665	601,533	0,23
2,00	4961,8727	620,234	0,12
4,00	4968,5155	621,064	0,06
10,0	4968,5238	621,065	0,02

Anpassungsfunktion (5s, $u = 2$ mm)

$$S_{xy}^* = \frac{1}{1 + 3,4 \cdot \alpha_u \cdot \frac{u}{a} + 6 \cdot \alpha_{FIT-5s} \cdot \left(1 + 2 \frac{u}{a}\right) \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$\alpha_{FIT-5s} = 0,43 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,79}$$

$$r_{u-5s} = 10,67 \Rightarrow \alpha_{u-5s} = 10,67 \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^{0,57}$$

$$s_{u-5s} = 0,57$$

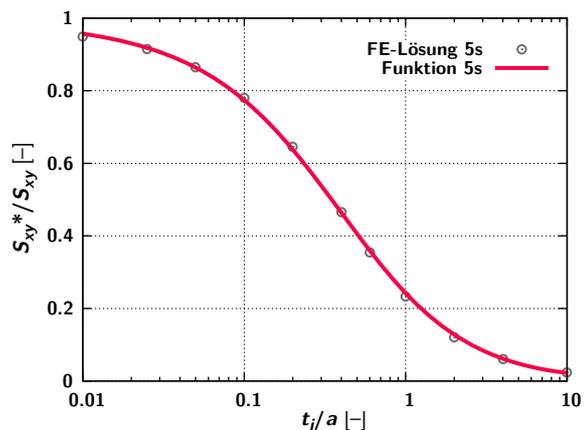


Abb. 4.26 FE-Ergebnisse der 5-schichtigen BSP-Scheibe mit Fugen ($u = 2$ mm) und zugehörige Anpassungsfunktion an die FE-Lösung

4.7 Zusammenfassung der Ergebnisse aus den Schubsteifigkeitsstudien

4.7.1 Vergleich der ∞ -dicken, sowie der 3-, und 5-schichtigen, fugenlosen BSP-Scheibe

Tab. 4.18 Übersicht Schubsteifigkeitsverhältnisse ($u = 0$)

t_i/a [-]	S_{xy}^*/S_{xy} [-]		
	RVSE	5-schichtig	3-schichtig
0,010	1,00	0,99	0,99
0,025	0,98	0,97	0,96
0,050	0,96	0,94	0,92
0,10	0,90	0,86	0,83
0,20	0,80	0,73	0,69
0,40	0,63	0,54	0,48
0,60	0,50	0,42	0,36
1,00	0,34	0,28	0,23
2,00	0,18	0,14	0,12
4,00	0,09	0,07	0,06
10,0	0,04	0,03	0,02

Anpassungsfunktionen (RVSE, 5s und 3s, $u = 0$)

$$\frac{S_{xy}^*}{S_{xy}} = \frac{1}{1 + 6 \cdot \alpha_{\text{FIT}} \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^2} \cdot \alpha_{\text{FIT}} \cdot p \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^q$$

Tab. 4.19 Parameter der ∞ -dicken, sowie der 3- und 5-schichtigen BSP-Scheibe ($u = 0$) zur Anpassung der Funktion an die FE-Lösung

Parameter	[-]		
	RVSE	5-schichtig	3-schichtig
p	0,31	0,43	0,53
q	-0,75	-0,79	-0,79

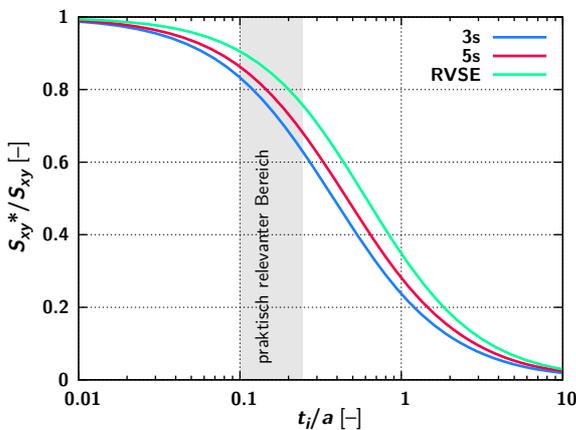


Abb. 4.27 Vergleich der Anpassungsfunktionen ($u = 0$)

Vergleich der ∞ -dicken, sowie der 3-, und 5-schichtigen BSP-Scheibe mit Fugen

Tab. 4.20 Übersicht Schubsteifigkeitsverhältnisse ($u = 2 \text{ mm}$)

t_i/a [-]	S_{xy}^*/S_{xy} [-]		
	RVSE	5-schichtig	3-schichtig
0,010	0,96	0,95	0,94
0,025	0,93	0,91	0,90
0,050	0,89	0,87	0,84
0,10	0,83	0,78	0,75
0,20	0,71	0,65	0,60
0,40	0,54	0,46	0,41
0,60	0,43	0,35	0,31
1,00	0,29	0,23	0,20
2,00	0,15	0,12	0,10
4,00	0,08	0,06	0,05
10,0	0,03	0,02	0,02

Anpassungsfunktionen (RVSE, 5s und 3s, $u = 2 \text{ mm}$)

$$\frac{S_{xy}^*}{S_{xy}} = \frac{1}{1 + 3,4 \cdot \alpha_{(u)} \cdot \left(\frac{u}{a}\right) + 6 \cdot \alpha_{\text{FIT}} \cdot \left(1 + 2 \frac{u}{a}\right) \left(\frac{t_i}{a}\right)^2}$$

$$\text{mit } \alpha_{(u)} = r \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^s \text{ bzw. } \alpha_{\text{FIT}} \cdot p \cdot \left(\frac{t_i}{a}\right)^q$$

Tab. 4.21 Parameter der ∞ -dicken, sowie der 3- und 5-schichtigen BSP-Scheibe ($u = 2 \text{ mm}$) zur Anpassung der Funktion an die FE-Lösung

Parameter	[-]		
	RVSE	5-schichtig	3-schichtig
r	9,63	10,67	12,97
s	0,60	0,57	0,59

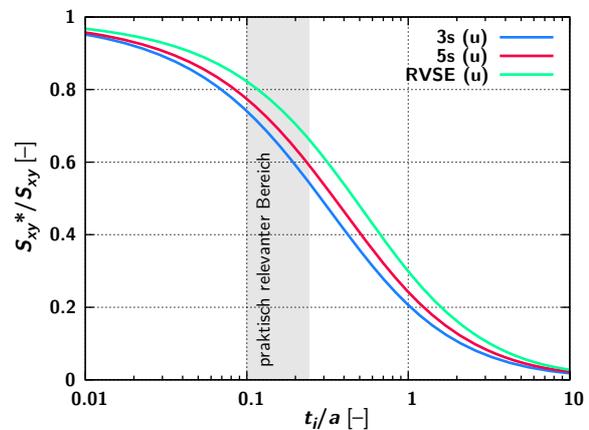


Abb. 4.28 Vergleich der Anpassungsfunktionen ($u = 2 \text{ mm}$)

4.8 Gegenüberstellung der Drill- und Schubsteifigkeitsstudien

4.8.1 Vergleich der 7-schichtigen BSP-Platte mit und ohne Fugen unter Drillbeanspruchung

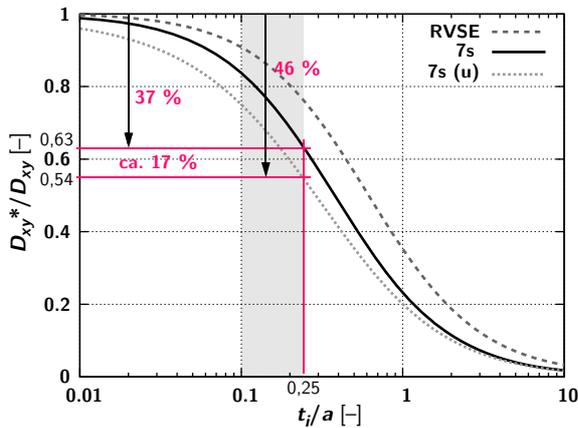


Abb. 4.29 Drillsteifigkeiten der 7-schichtigen BSP-Platte mit ($u = 2 \text{ mm}$) und ohne Fugen

Wie in Abb. 4.29 zu erkennen ist, führen Fugen von 2 mm zu einer Abminderung der Drillsteifigkeit um ca. 17 % im Vergleich zur fugenlosen BSP-Platte.

4.8.2 Vergleich der ∞ -dicken BSP-Scheibe mit und ohne Fugen unter Schubbeanspruchung

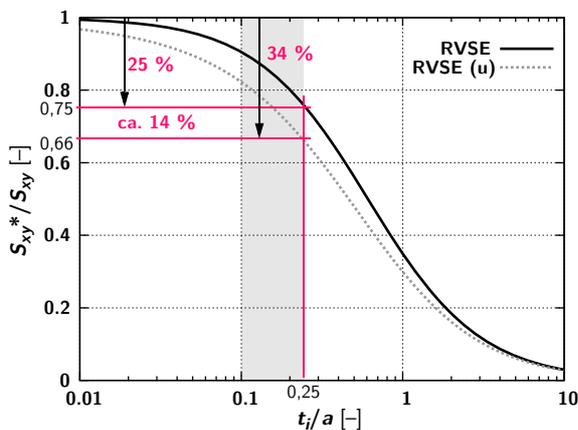


Abb. 4.30 Schubsteifigkeiten der ∞ -dicken BSP-Scheibe mit ($u = 2 \text{ mm}$) und ohne Fugen

Beim gedanklich ∞ -dicken Scheibenelement kommt es durch Fugen von 2 mm zu einer Abnahme der Schubsteifigkeit um ca. 14 %.

4.8.3 Vergleich der Drill- und Schubsteifigkeit des 5-schichtigen BSP-Elements ohne Fugen

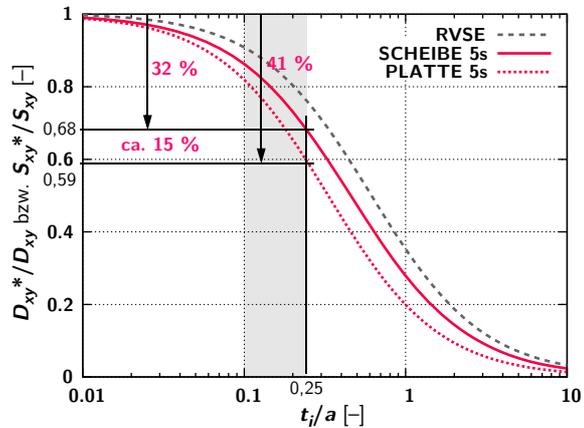


Abb. 4.31 Drill- und Schubsteifigkeit eines 5-schichtigen BSP-Elements ohne Fugen ($u = 0$)

Wie aus Abb. 4.31 hervorgeht, ist die Drillsteifigkeit einer 5-schichtigen BSP-Platte um ca. 15 % geringer als die Schubsteifigkeit.

5 Schubkraftverteilung am RPE

Das eigentliche Ziel dieser Arbeit wurde mit der Ermittlung der Drillsteifigkeit D_{xy}^* von nicht schmalseitenverklebten BSP-Platten bereits in Kapitel 4 erreicht. Im folgenden Abschnitt wird nun der generelle Ablauf einer BSP-Plattenberechnung sowie ein Vorschlag für einen Drillfestigkeitsnachweis von Brettsperrholzplatten gezeigt.

5.1 Ablauf einer BSP-Plattenberechnung

Für die transversal-schubnachgiebige Berechnung einer Platte (siehe Kap. 1.3) müssen die erforderlichen Steifigkeiten bekannt sein. Bei orthotropen Platten – zu denen auch BSP zählt – sind dies im Allgemeinen zwei Biegesteifigkeiten (K_x, K_y) sowie ein Koppelterm (K_{xy} = abhängig von den Querkontraktionen), zwei Schubsteifigkeiten (S_x, S_y) und die Drillsteifigkeit (D_{xy}). Die oben genannte Plattentheorie ist in den gängigen FE-Paketen implementiert.

Aus der Berechnung mit den entsprechenden Einwirkungen und deren Kombinationen resultieren die Bemessungsschnittgrößen, mit denen in weiterer Folge alle erforderlichen Nachweise zu führen sind.

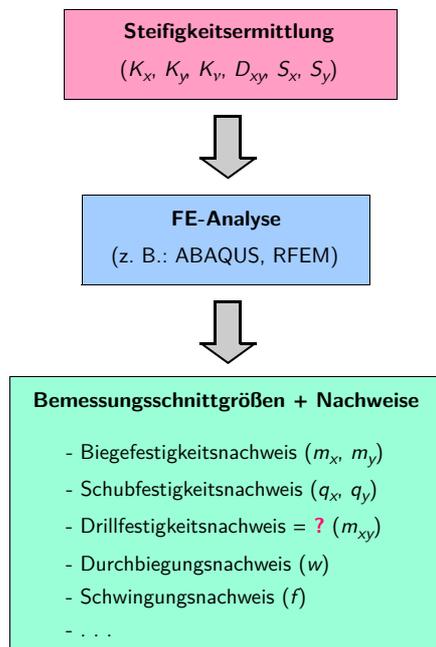


Abb. 5.1 Genereller Ablauf einer Plattenberechnung

Der Drillfestigkeitsnachweis von BSP-Platten ist unbekannt. Als eine mögliche Grundlage kann jedoch der Schubfestigkeitsnachweis der BSP-Scheibe aus [4], Kap. 7.1.8 herangezogen werden. Dazu ist es not-

wendig die an den Stirnholzflächen auftretenden Schubkräfte, aus der in Kap. 4 durchgeführten FE-Analyse, zu ermitteln.

5.2 Schubkraft- und Momentenauswertung

5.2.1 Schubkraftverteilung

Die Abb. 5.2 – Abb. 5.4 zeigen die Schubkräfte und deren Bezeichnungen an einer 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Platte.

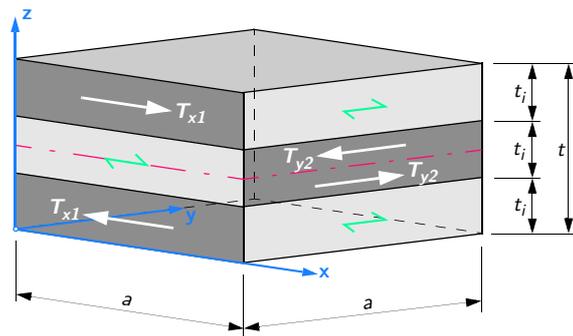


Abb. 5.2 Schubkräfte an den Stirnholzflächen eines 3-schichtigen RPEs

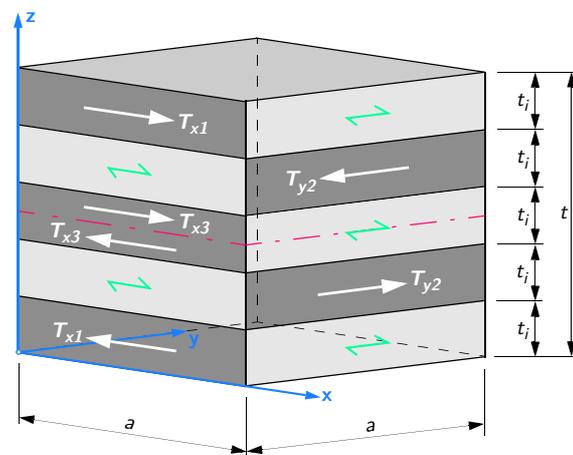


Abb. 5.3 Schubkräfte an den Stirnholzflächen eines 5-schichtigen RPEs

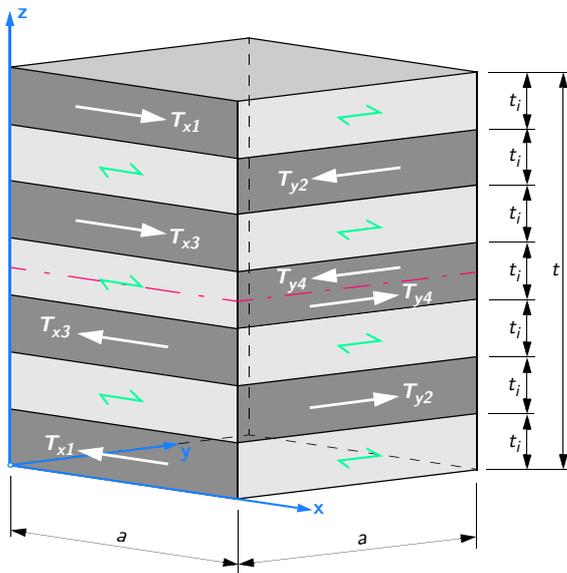


Abb. 5.4 Schubkräfte an den Stirnholzflächen eines 7-schichtigen RPEs

Aufgrund der Antimetrie kommt es, bezogen auf die Plattenmittelfläche zu gleichen Schubkräften, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen.

Weiters ist zu beachten, dass die Kräfte in einer Schicht an den jeweils gegenüberliegenden Brettstirnflächen, entgegengesetzt und in gleicher Größe wirken. T_{x1} ist dabei die Schubkraft T der ersten Schicht in x -Richtung wirkend. Dieses Nummerierungsschema wird sinngemäß auf die anderen Kräfte übertragen.

5.2.2 Schubkräfte aus den Knotenfesthaltekräften

In ABAQUS gibt es zwei Möglichkeiten die Schubkräfte an den Brettstirnflächen zu ermitteln. Dies ist entweder über die Summe der Knotenfesthaltekräfte oder durch Integration der zu den Randflächen extrapolierten Schubspannungen τ_{xy} , möglich. Ein Vergleich dieser Varianten folgt in Kap. 5.3.

Als Knotenfesthaltekräfte werden jene Kräfte bezeichnet, welche in den Knoten des FE-Netzes wirken. Mit ihnen wird bei der numerischen Berechnung das Gleichgewicht zu den äußeren Belastungen nachgewiesen.

Anschließend werden die Festhaltekräfte für 3-, 5- und 7-schichtige BSP-Platten unter konstanter Drillbeanspruchung ($k_{xy,0} = 1/\text{cm}$) und einem Brettparameter von $t_i/a = 0,01 - 4,0$ ausgewertet und bezogen auf das Drillmoment m_{xy}^* (siehe Kap. 5.2.3) dargestellt. Aufgrund der Antimetrie zur Plattenmittelfläche werden nur die Schubkräfte der unteren Hälfte des RPEs ($0 \leq z \leq t/2$, siehe Abb. 5.2 – Abb. 5.4) angegeben.

Tab. 5.1 Schubkräfte aus den Knotenfesthaltekräften der 3-schichtigen RPE unter konstanter Verdrehung ($k_{xy,0} = 1/\text{cm}$)

t_i/a [-]	3-schichtig [kN]	
	$T_{x1,F}/m_{xy}^*$	$T_{y2,F}/m_{xy}^*$
0,010	48,06	42,45
0,025	19,13	15,95
0,050	9,51	8,10
0,10	4,74	4,39
0,20	2,38	2,46
0,40	1,21	1,35
0,60	0,83	0,96
1,00	0,54	0,64
2,00	0,32	0,38
4,00	0,19	0,21

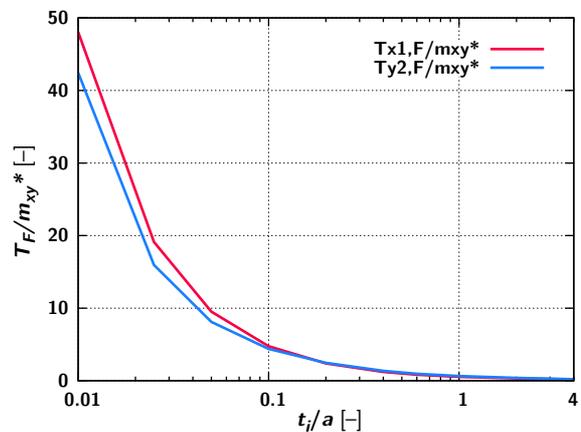


Abb. 5.5 Schubkräfte der 3-schichtigen RPE

Tab. 5.2 Schubkräfte aus den Knotenfesthaltekräften der 5-schichtigen RPE unter konstanter Verdrehung ($k_{xy,0} = 1/\text{cm}$)

t_i/a [-]	5-schichtig [kN]		
	$T_{x1,F}/m_{xy}^*$	$T_{y2,F}/m_{xy}^*$	$T_{x3,F}/m_{xy}^*$
0,010	24,64	27,64	5,00
0,025	9,81	10,92	1,97
0,050	4,90	5,58	1,02
0,10	2,46	2,92	0,56
0,20	1,24	1,53	0,33
0,40	0,63	0,80	0,20
0,60	0,42	0,55	0,15
1,00	0,26	0,34	0,10
2,00	0,14	0,18	0,05
4,00	0,07	0,09	0,03

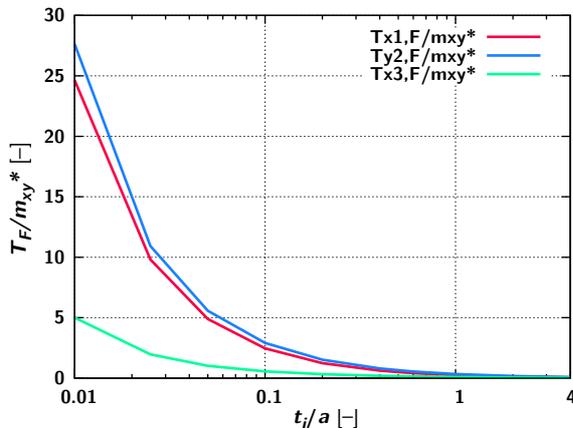


Abb. 5.6 Schubkräfte der 5-schichtigen RPE

Tab. 5.3 Schubkräfte aus den Knotenfesthaltekräften der 7-schichtigen RPE unter konstanter Verdrillung ($\kappa_{xy,0} = 1/cm$)

t_i/a [-]	7-schichtig [kN]			
	$T_{x1,F}/m_{xy}^*$	$T_{y2,F}/m_{xy}^*$	$T_{x3,F}/m_{xy}^*$	$T_{y4,F}/m_{xy}^*$
0,010	14,20	18,70	6,92	1,95
0,025	5,65	7,44	2,78	0,79
0,050	2,82	3,79	1,42	0,41
0,10	1,40	1,95	0,75	0,21
0,20	0,69	1,00	0,41	0,11
0,40	0,34	0,51	0,23	0,07
0,60	0,23	0,35	0,16	0,05
1,00	0,14	0,21	0,11	0,03
2,00	0,07	0,11	0,05	0,02
4,00	0,03	0,06	0,03	0,01

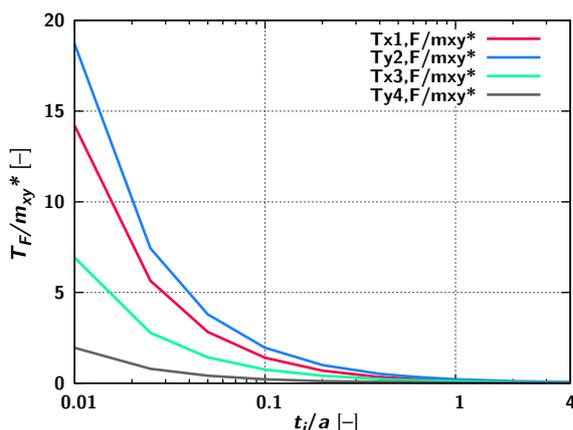


Abb. 5.7 Schubkräfte der 7-schichtigen RPE

Die Lage der ermittelten Schubkräfte variiert über die Schichtdicken. Auf die Angabe der einzelnen Schwerpunktsabstände wird zur besseren Übersicht verzichtet.

5.2.3 Drillmomente aus den Schubkräften

Aus den oben ausgewerteten Schubkräften können mit den zugehörigen Schwerpunktsabständen die Drillmomente m_{xy} bzw. m_{yx} an den Seitenflächen des RPEs wie folgt ermittelt werden:

$$m_{yx} = \sum_i T_{xi,F} \cdot z_{xi}$$

$$m_{xy} = \sum_i T_{yi,F} \cdot z_{yi}$$

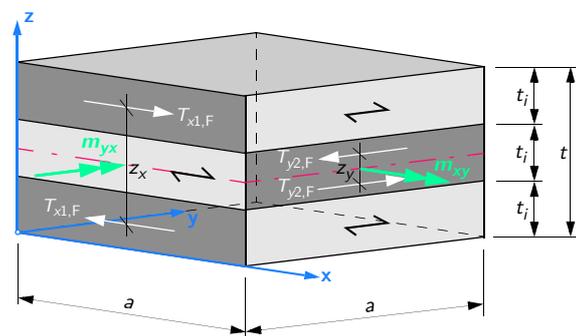


Abb. 5.8 Drillmomente des 3-schichtigen RPEs

Aufgrund des in der numerischen Berechnung aufgebrauchten konstanten Drillzustandes sollte $m_{xy} = m_{yx}$ gelten. Die Drillmomente aus den Schubkräften müssten somit gleich dem Drillmoment m_{xy}^* aus der FE-Analyse sein.

$$m_{xy}^* = m_{yx}^* = D_{xy}^* \cdot \kappa_{xy,0}$$

mit $\kappa_{xy,0} = 1,0 \frac{1}{cm}$

Tab. 5.4 Drillmomente der 3-schichtigen RPE

t_i/a [-]	3-schichtig [kNcm/cm]			
	m_{yx}	m_{xy}	m_{yx}/m_{xy}^*	m_{xy}/m_{xy}^*
0,010	0,5	0,2	1,00	0,39
0,025	7,8	2,8	0,99	0,36
0,050	58,7	21,0	0,99	0,36
0,10	414	159	0,99	0,38
0,20	2557	1100	0,98	0,42
0,40	12900	6198	0,98	0,47
0,60	29665	15301	0,97	0,50
1,00	76343	44110	0,97	0,56
2,00	253991	175944	0,97	0,67
4,00	862160	693650	0,98	0,78

Tab. 5.5 Drillmomente der 5-schichtigen RPE

t_i/a [-]	5-schichtig [kNcm/cm]			
	m_{yx}	m_{xy}	m_{yx}/m_{xy}^*	m_{xy}/m_{xy}^*
0,010	2,4	1,8	0,99	0,77
0,025	36,1	25,6	0,99	0,70
0,050	274	197	0,99	0,71
0,10	1968	1477	0,99	0,74
0,20	12653	9933	0,99	0,78
0,40	68272	56010	0,99	0,81
0,60	166594	140806	0,99	0,84
1,00	473056	417050	0,99	0,87
2,00	1826308	1696878	0,99	0,92
4,00	7043871	6772245	0,99	0,96

Tab. 5.6 Drillmomente der 7-schichtigen RPE

t_i/a [-]	7-schichtig [kNcm/cm]			
	m_{yx}	m_{xy}	m_{yx}/m_{xy}^*	m_{xy}/m_{xy}^*
0,010	6,6	5,5	0,99	0,84
0,025	99,5	83,2	0,99	0,83
0,050	761	645	0,99	0,84
0,10	5530	4807	1,00	0,86
0,20	36406	32424	1,00	0,89
0,40	204595	186774	1,00	0,91
0,60	514740	477527	1,00	0,92
1,00	1518905	1439126	1,00	0,94
2,00	6086993	5906182	1,00	0,97
4,00	23995460	23620718	1,00	0,98

Aus Tab. 5.4 – Tab. 5.6 ist zu erkennen, dass die Drillmomente aus den Schubkräften nicht mit denen der FE-Berechnung übereinstimmen. Bei der 3-schichtigen BSP-Platte ist die relativ große Abweichung von m_{xy} auf die Struktur und den damit verbundenen geringen Hebelsarm der Schubkräfte $T_{y/2}$ zurückzuführen. Die 7-schichtige BSP-Platte weist im praktisch relevanten Bereich ($t_i/a = 0,1 - 0,25$) nur mehr eine Abweichung von ca. 10 % auf. Es ist zu erwarten, dass ab einer Anzahl von neun Schichten keine nennenswerte Differenz zwischen den Drillmomenten der Seitenflächen auftreten wird.

5.3 Vergleich der Schubkräfte

5.3.1 Schubkräfte aus den Schubspannungen

Wie bereits in Kap. 5.2 beschrieben, gibt es auch die Möglichkeit, die Schubkräfte an den Stirnflächen aus den Schubspannungen zu bestimmen. Dazu müssen die aus den Verschiebungsansätzen und Knotenver-

schiebungen berechneten Spannungen extrapoliert und anschließend über die Brettstirnfläche integriert werden. Die Güte dieser Werte ist aufgrund des „postprocessings“ geringer anzusehen, als die aus den Knotenfesthaltekräften ermittelten Schubkräfte.

Nachfolgend werden die in Kap. 5.2.2 angegebenen Werte am Brettparameter $t_i/a = 0,2$ für 3-, 5- und 7-schichtige Elemente überprüft.

Schubspannungsverteilung des 3-schichtigen RPEs ($t_i/a = 0,2$)

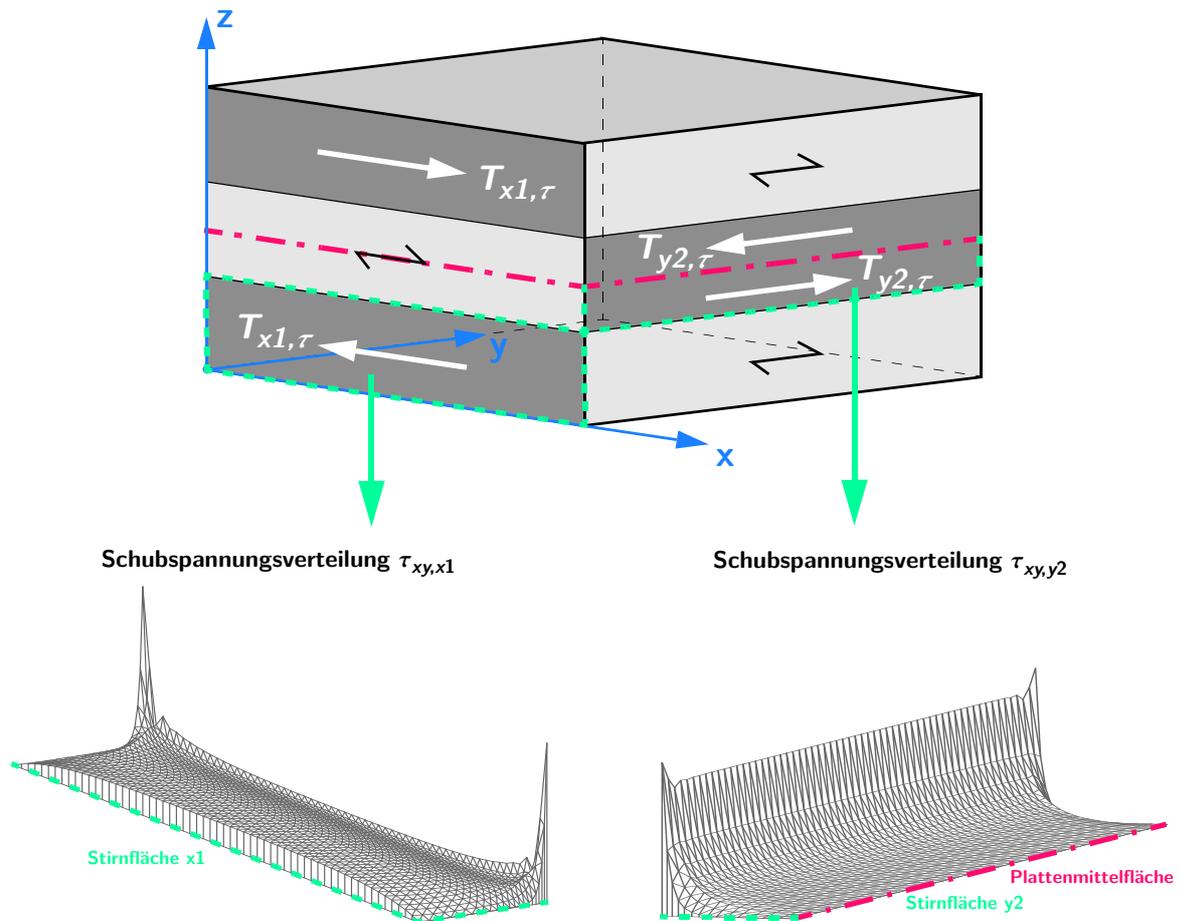


Abb. 5.9 Schubspannungsverteilungen und Schubkräfte des 3-schichtigen RPEs

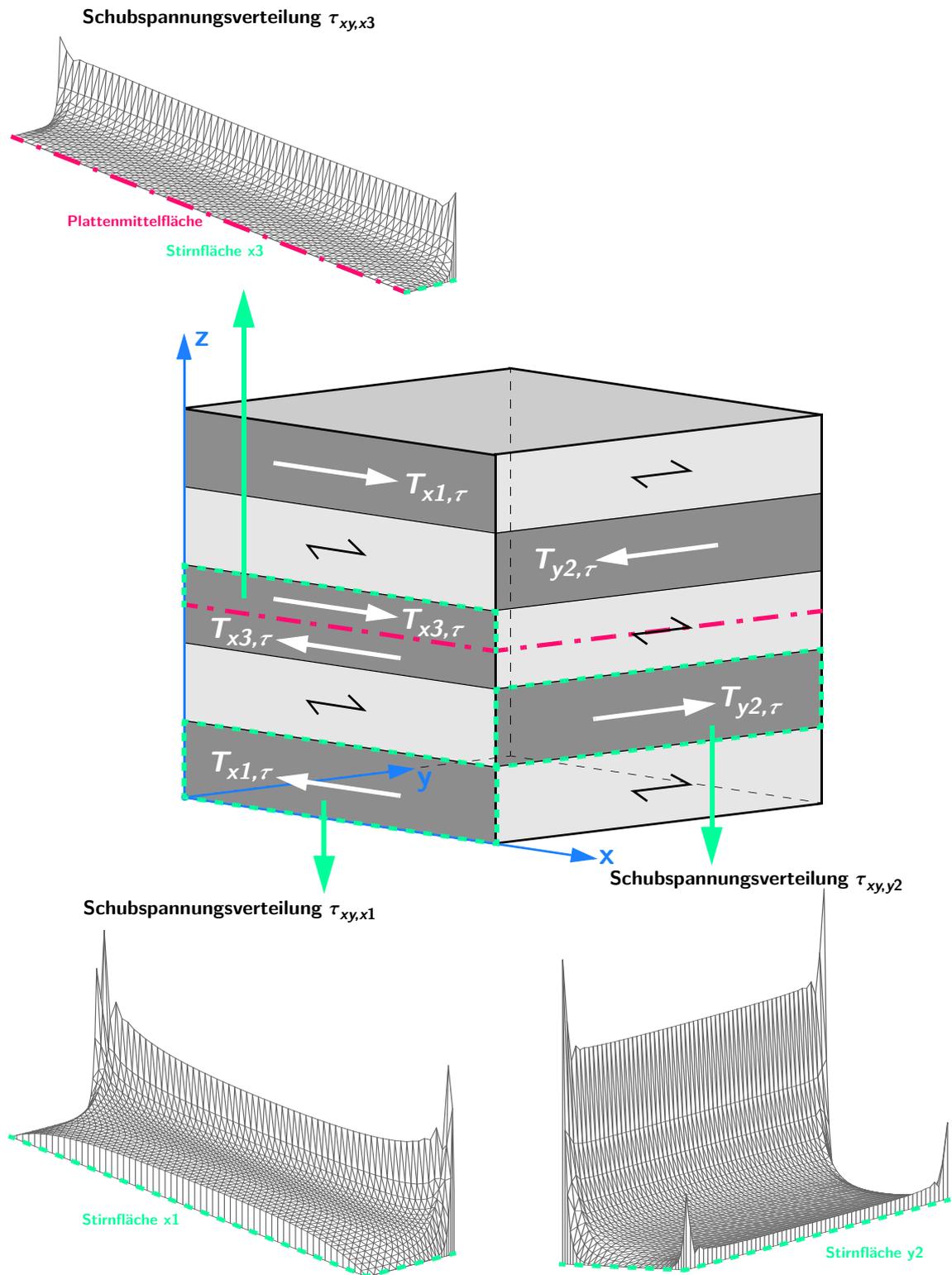
Schubspannungsverteilung des 5-schichtigen RPEs ($t/a = 0,2$)

Abb. 5.10 Schubspannungsverteilungen und Schubkräfte des 5-schichtigen RPEs

Schubspannungsverteilung des 7-schichtigen RPEs ($t_i/a = 0,2$)

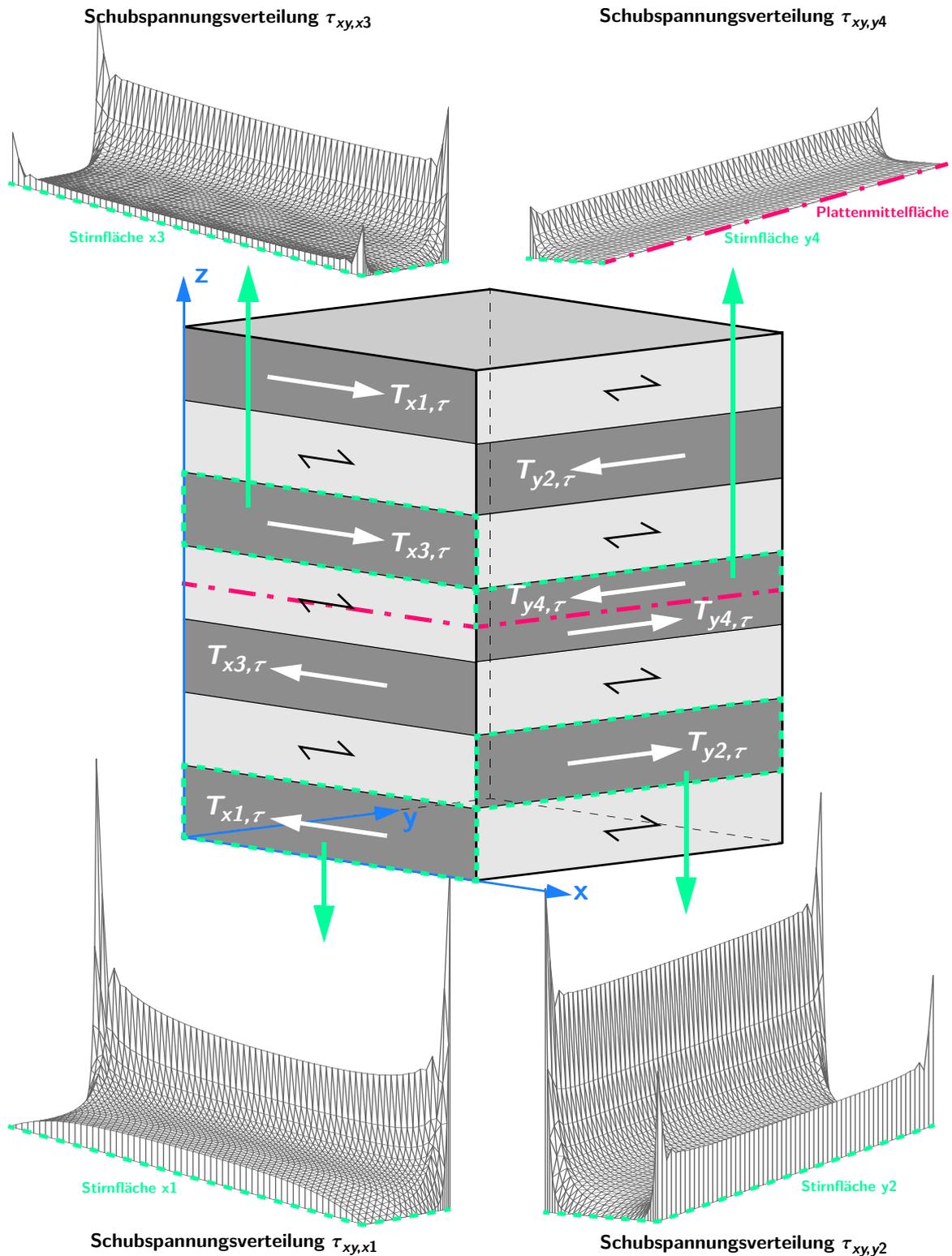


Abb. 5.11 Schubspannungsverteilungen und Schubkräfte des 7-schichtigen RPEs

In Abb. 5.9 bis Abb. 5.11 sind die Schubspannungsläufe τ_{xy} an den jeweiligen Stirnholzflächen dargestellt. Die Schubkräfte können nun durch Integration der Spannungen über die Fläche berechnet werden. Tab. 5.7 zeigt den Vergleich der aus den beiden Varianten ermittelten Schubkräfte für den Brettparameter $t_i/a = 0,2$.

Tab. 5.7 Vergleich der Schubkräfte an 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Elementen

Schubkräfte	3s	5s	7s
	[-]	[-]	[-]
$T_{x1,\tau}/T_{x1,F}$	0,95	0,88	0,86
$T_{y2,\tau}/T_{y2,F}$	0,67	0,76	0,76
$T_{x3,\tau}/T_{x3,F}$	-	0,69	0,78
$T_{y4,\tau}/T_{y4,F}$	-	-	0,69

Bei der 3-schichtigen Platte kommt es durch die Extrapolation und anschließende Integration zu Abweichungen von 33 % in der Mittellage (siehe Tab. 5.7). Der Fehler bei der 5- und 7-schichtigen Platte ist mit 31 % nur unwesentlich geringer. Etwas kleiner ist die Differenz an den äußeren Brettlagen (ca. 20 %).

Wie bereits erläutert, sind die Schubkräfte aus den Knotenfesthaltekräften von höherer Qualität, als die Schubkräfte aus den Spannungen. In weiterer Folge werden deshalb die Werte aus Kap. 5.2.2 zur Ermittlung der mittleren Schubspannungen τ_0 und der Klebeflächentorsionsmomente $M_{T,glue}$ verwendet.

5.4 Vorschlag für einen Drillfestigkeitsnachweis

Aus einer Plattenberechnung (z. B. FE) mit den Überlagerungen und Kombinationen der Einzellastfälle, resultieren die nachweisrelevanten „design“-Werte der Einwirkungen. Für die daraus ermittelten Drillmomente an den Plattenseitenflächen gilt es nun, ein geeignetes Nachweisverfahren zu finden.

Als mögliche Grundlage eines Drillfestigkeitsnachweises der BSP-Platte kann der Schubsteifigkeitsnachweis der BSP-Scheibe (vgl. [4], Kap. 7.1.8) herangezogen werden. Dieser setzt sich aus den beiden Mechanismen „Schub“ und „Torsion“ zusammen.

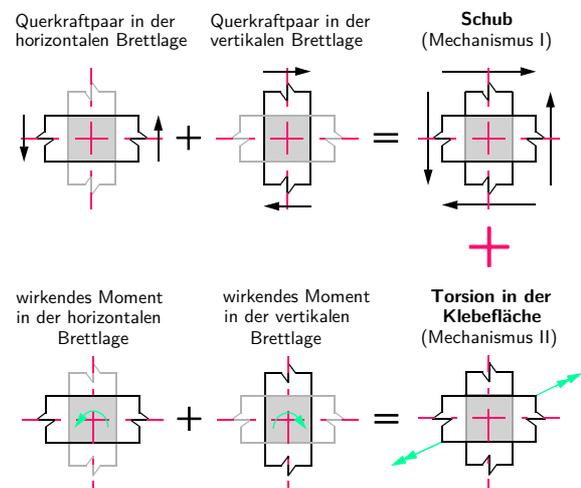


Abb. 5.12 Entstehung des Mechanismus I (Schub) und Mechanismus II (Torsion) (vgl. [4], Abb. 7.10)

Das Nachweisverfahren ist aufgrund der beiden immer gemeinsam auftretenden Mechanismen (Schubabtragung in den Brettern sowie Torsionsmoment in den Klebeflächen) knotenflächenorientiert.

5.4.1 Bemessungsschubspannungen

Um den Nachweis für den Mechanismus I führen zu können, sind die entsprechenden Bemessungsschubspannungen zu ermitteln.

Die resultierenden Schubkräfte T_{x1} , T_{y2} , T_{x3} und T_{y4} liegen im Gegensatz zur Scheibenbeanspruchung, nicht in der Brettmitte. Aus diesem Grund ist die mittlere Schubspannung τ_0 auf der „unsicheren“ Seite.

Die Exzentrizität der Schubkräfte wird im Folgenden durch einen globalen Faktor α_e berücksichtigt, welcher die mittleren Schubspannungen auf die Bemessungsschubspannung τ_v erhöht. Dieser Erhöhungsfaktor wird unter der Annahme hergeleitet, dass die entstehenden Torsionsmomente Torsions-

schubspannungen ergeben.

Die Ermittlung der Bemessungsschubspannung τ_v wird exemplarisch an einer 5-schichtigen BSP-Platte ($t_i/a = 0,2$) gezeigt.

Anmerkung: Bei der nachfolgenden Bestimmung der Bemessungsschubspannung τ_v handelt es sich lediglich um einen Vorschlag.

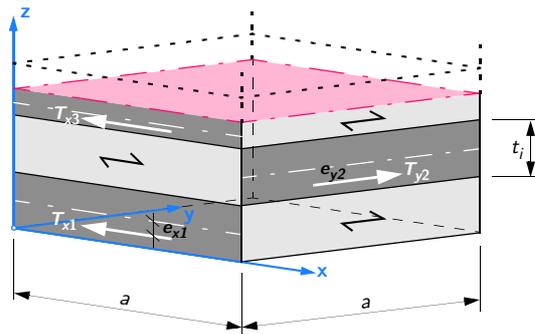


Abb. 5.13 Exzentrizität der Schubkräfte

$$\tau_v = \tau_0 + \tau_e$$

$$\tau_0 = \frac{T}{A} \cdot \frac{T_{y2}}{t_i \cdot a} = \frac{52,86}{3,0 \cdot 15,0} = 1,175 \text{ kN/cm}^2$$

Die Berechnung von τ_e erfolgt (unter der Annahme von Torsionsverhalten) folgendermaßen:

$$\tau_e = G \cdot \frac{M_{T,e} \cdot z}{I_T} = G \cdot \frac{M_{T,e} \cdot t_i}{a \cdot t_i^3 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_{T,e}}{a \cdot t_i^2}$$

$$\tau_e = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_{y2} \cdot e}{a \cdot t_i^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{52,86 \cdot 0,834}{15,0 \cdot 3,0^2} = 0,490 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_v = \tau_0 + \tau_e = 1,175 + 0,490 = 1,665 \text{ kN/cm}^2$$

$$\alpha_e = \frac{\tau_v}{\tau_0} = \frac{1,665}{1,175} = 1,42 \Rightarrow \tau_v = \alpha_e \cdot \tau_0$$

Mit dem Erhöhungsfaktor α_e ist es nun möglich, die mittleren Schubspannungen τ_0 auf Bemessungsschubspannungen τ_v umzurechnen. Für die Ermittlung von α_e wurde der praktisch relevante Bereich ($t_i/a = 0,1 - 0,25$) von 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Platten untersucht. Als einheitlicher Erhöhungsfaktor kann α_e mit 1,5 angegeben werden.

τ_v für 3-, 5- und 7-schichtige BSP-Platten

$$\tau_v = \alpha_e \cdot \tau_0 = 1,5 \cdot \frac{T}{A}$$

Nachweis Mechanismus I (Schub)

Die Schubbeanspruchung $\tau_{v,d}$ ist also durch Umrechnen der Bemessungsdrehmomente in Schubkräfte (siehe Kap. 5.2) sowie anschließendes Erhöhen der mittleren Schubspannungen (siehe Kap. 5.4.1) zu ermitteln. Es muss nachgewiesen werden, dass diese Einwirkungsgröße kleiner oder gleich dem „design“-Wert des Widerstandes bei Schubbeanspruchung ist:

$$|\tau_{v,d}| \leq f_{v,clt,d} = \frac{f_{v,clt,k} \cdot k_{mod}}{\gamma_m}$$

5.4.2 Klebeflächentorsionsmomente

Wie bereits beschrieben sind bei einem Nachweis der Drillfestigkeit auch die in den Klebeflächen wirksamen Torsionsmomente $M_{T,glue}$ von Interesse. Sie können mit den in Kap. 5.2.2 angegebenen Schubkräften für eine 5-schichtige BSP-Platte ($t_i/a = 0,2$) wie folgt ermittelt werden:

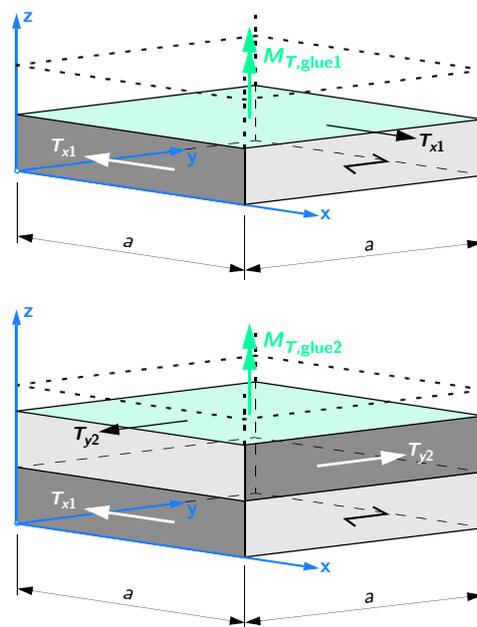


Abb. 5.14 Klebeflächentorsionsmomente zufolge der Schubkräfte an den Brettstirnflächen

$$M_{T, \text{glue1}} = T_{x1} \cdot a = 42,88 \cdot 15,0 = 643,2 \text{ kNcm}$$

$$M_{T, \text{glue2}} = M_{T, \text{glue1}} + T_{y2} \cdot a$$

$$M_{T, \text{glue2}} = 643,2 + 52,86 \cdot 15,0 = 149,7 \text{ kNcm}$$

Der Absolutwert der Torsionsmomente $M_{T, \text{glue}}$ ist im Falle von gleichen Schichtdicken und Materialien immer in der äußersten Klebefläche am größten und somit für den Nachweis maßgebend.

Nachweis Mechanismus II (Torsion)

Aus dem Torsionsmoment in der Klebefläche (siehe Kap. 5.4.2) kann die Schubspannung τ_T wie folgt bestimmt werden:

$$\tau_T = \frac{M_T}{W_P} = \frac{3 \cdot M_T}{a^3}$$

$$\text{mit } W_P = \frac{a^3}{3} \dots \text{ polares Widerstandsmoment}$$

Der Nachweis hat gegen den „design“-Wert des Widerstandes bei Torsionsbeanspruchung zu erfolgen:

$$|\tau_{T, d}| \leq f_{T, \text{clt}, d} = \frac{f_{T, \text{clt}, k} \cdot k_{\text{mod}}}{\gamma_m}$$

Anmerkung: Auf die Größen der Festigkeitswerte $f_{v, \text{clt}, k}$ bzw. $f_{T, \text{clt}, k}$ wird in [4], Kap. 7.1.11 und Kap. 7.1.12 näher eingegangen.

5.4.3 Beispiel

In diesem Abschnitt wird der oben beschriebene Drillfestigkeitsnachweis anhand eines Beispiels erklärt.

Es wurde eine 5-schichtige, nicht schmalseitenverklebte BSP-Platte mit einer Gesamtdicke t von 15 cm untersucht. Der Brettparameter t_i/a kann mit 0,2 angegeben werden.

5-schichtiges BSP



Lamellengüte	C 24
Plattendicke	$t = 15 \text{ cm}$
Dicke der Einzellege	$t_i = 3 \text{ cm}$
Brettbreite	$a = 15 \text{ cm}$
Brettparameter	$t_i/a = 0,2$

Eine FE-Berechnung der Platte lieferte für die zu untersuchende Stelle ein Drillmoment m_{xy}^* von 9,89 kNcm/cm.

Ermittlung der Drillsteifigkeit

Die Drillsteifigkeit D_{xy}^* der oben gezeigten Platte kann laut Kap. 4.2.2 ermittelt werden.

$$D_{xy} = \frac{G_{0, \text{mean}} \cdot t^3}{12} = \frac{69,0 \cdot 15^3}{12} = 19406 \frac{\text{kNcm}^2}{\text{cm}}$$

$$D_{xy}^* = 0,66 \cdot D_{xy} = 0,66 \cdot 19406 = 12808 \frac{\text{kNcm}^2}{\text{cm}}$$

Bestimmung der Schubkräfte

Aus Tab. 5.2 können mit dem gegebenen Drillmoment m_{xy}^* die Schubkräfte in den Brettstirnflächen (siehe Abb. 5.3) berechnet werden.

$$T_{x1} = m_{xy}^* \cdot T_{x1, F} = 9,89 \cdot 1,24 = 12,3 \text{ kN}$$

$$T_{y2} = m_{xy}^* \cdot T_{y2, F} = 9,89 \cdot 1,53 = 15,1 \text{ kN}$$

$$T_{x3} = m_{xy}^* \cdot T_{x3, F} = 9,89 \cdot 0,33 = 3,3 \text{ kN}$$

Bemessungsschubspannungen

Mit der in Kap. 5.4.1 angegebenen Formel können aus den Schubkräften die Bemessungsschubspannungen τ_v ermittelt werden.

$$\tau_v = \alpha_e \cdot \tau_0 = 1,5 \cdot \frac{T}{A} = 1,5 \cdot \frac{T}{a \cdot t_i}$$

$$\tau_{v, x1} = 1,5 \cdot \frac{12,3}{15,0 \cdot 3,0} = 0,41 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{v, y2} = 1,5 \cdot \frac{15,1}{15,0 \cdot 3,0} = 0,50 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{v, x3} = 1,5 \cdot \frac{3,3}{15,0 \cdot 1,5} = 0,22 \text{ kN/cm}^2$$

Klebeflächentorsionsmoment

Die Schubkräfte dienen zur Berechnung des maßgebenden Klebeflächentorsionsmomentes M_T . Daraus ergeben sich die entsprechenden Torsionsspannungen τ_T (siehe Kap. 5.4.2).

$$M_{T,1} = T_{x1} \cdot a = 12,3 \cdot 15,0 = 184,5 \text{ kNcm}$$

$$\tau_{T,1} = \frac{M_{T,1}}{W_P} = \frac{3 \cdot M_{T,1}}{a^3}$$

$$\tau_{T,1} = \frac{3 \cdot 184,5}{15,0^3} = 0,16 \text{ kN/cm}^2$$

Nachweise

Mit den ermittelten Spannungen können die Nachweise für Mechanismus I (Schub) und Mechanismus II (Torsion) geführt werden.

$$|\tau_{v,d}| \leq f_{v,clt,d} = \frac{f_{v,clt,k} \cdot k_{mod}}{\gamma_m}$$

$$f_{v,clt,k} = 0,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$|\tau_{T,d}| \leq f_{T,clt,d} = \frac{f_{T,clt,k} \cdot k_{mod}}{\gamma_m}$$

$$f_{T,clt,k} = 0,25 \text{ kN/cm}^2$$

Anmerkung: Die gezeigte Vorgehensweise muss auf Basis der „design“-Werte der Schnittgrößen angewendet werden.

6 Resümee und Ausblick

6.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Drillsteifigkeit von 3-, 5- und 7-schichtigen BSP-Platten ohne Schmalseitenverklebung, sowie die Schubsteifigkeit von 3- und 5-schichtigen BSP-Scheiben ist nun bekannt und kann bei der Berechnung mit gängigen FE-Programmen berücksichtigt werden.

Aus den Ergebnissen in Kap. 4 ist zu erkennen, dass sich die Abminderungskurven für Drillen und Schub nur geringfügig voneinander unterscheiden. Werden die Drill- und Schubsteifigkeiten des selben BSP-Elementes miteinander verglichen, kann die Drillsteifigkeit mit ca. 85 % der Schubsteifigkeit angegeben werden. Weiters ist zu beobachten, dass bei Elementen mit gleicher Schichtdicke die Schubsteifigkeit der 3-schichtigen BSP-Scheibe ident mit der Drillsteifigkeit der 7-schichtigen BSP-Platte ist.

6.2 Empfehlungen für die Praxis

Die Drillsteifigkeit wird nur in Ausnahmefällen einen maßgebenden Einfluss bei der Bemessung haben. Beispielsweise können dies Platten mit schrägen Bearbeitungen und/oder großen Öffnungen sowie punktgestützte Platten sein. Für die Praxis wäre deshalb eine einheitliche Abminderungskurve für Drillen und Schub anzustreben, wobei die Schubsteifigkeit der gedanklich ∞ -dicken BSP-Scheibe (siehe RVSE in Kap. 4.5.1) als oberste Grenze anzusehen ist. Ausgehend von dieser Standardkurve könnten Abminderungsfaktoren in Abhängigkeit der Schichtanzahl sowohl für Drillen als auch für Schub angegeben werden.

6.3 Zukünftiger Forschungsbedarf

Für die weitere Entwicklung von Brettspertholz gibt es noch genügend offene Fragestellungen, die es in Zukunft zu untersuchen gilt. Nachfolgend wird auf ein paar Punkte, welche in direktem Zusammenhang mit dieser Arbeit stehen, eingegangen.

Drillfestigkeitsnachweis

Der in Kap. 5.4 angeführte Vorschlag für den Drillfestigkeitsnachweis ist durch Versuche und/oder numerische Modelle auf Basis der Schädigungsmechanik weiter zu untersuchen.

Drillmomente

Aufgrund der nicht identen Drillmomente an den Plattenseitenflächen wäre eine „verbesserte“ Kinematik und Kinetik von wissenschaftlichem Interesse.

Kinematik: Der Einheitsdrillzustand liefert mit der z -Koordinate linear zunehmende Schubverzerrungen in Plattenebene. Dieses Verhalten konnte in der FE-Analyse weder in der Mitte noch an den Rändern (bei denen massive Störungen aufgrund der fehlenden Seitenverklebung auftreten) eines RPEs beobachtet werden.

Kinetik: Wie bereits in Kap. 5.2.3 zu sehen ist, sind die Drillmomente an den beiden Seitenflächen, im Gegensatz zur üblich verwendeten Plattentheorie, nicht gleich. Das führt zu modifizierten Gleichgewichtsgleichungen, aber auch zu einer weiteren „Drillgröße“.

Weiters sei noch angemerkt, dass der in dieser Arbeit verwendete Ansatz für die praktische Berechnung als ausreichend anzusehen ist.

Zweiachsige Lastabtragung – Verbindungstechnik

BSP-Platten werden derzeit – nicht zuletzt wegen ihrer Abmessungen – zum größten Teil für die einachsige Lastabtragung (transversale Querkraftbiegung) verwendet.

Um großformatige Deckenkonstruktionen aus Brettspertholz effizienter planen zu können, bedarf es somit weiterer Forschung auf dem Gebiet der zweiachsigen Lastabtragung.

Aufgrund der begrenzten Abmessungen von BSP-Platten (ca. 3 x 16,5 m) ist der Verbindungstechnik große Aufmerksamkeit zu schenken. Zur Realisierung von z. B. punktgestützten Decken müssten die Plattenstöße biegesteif ausgeführt sein. Für die Umsetzung dieser Verbindung auf der Baustelle gibt es verschiedene Varianten, welche genauer hinterfragt werden müssen. Ein möglicher Lösungsansatz wäre auch die Herstellung der benötigten Platten direkt vor Ort in Form einer „Feldfabrik“. So könnten im Vakuumpressverfahren weitaus größere Abmessungen als bisher produziert werden.

Ergebnis

Das Ziel muss die Herstellung eines ästhetisch wertvollen Endproduktes, also großflächige Decken aus Brettspertholz ohne die Verwendung von Unterzügen, sein.

A Anhang

A.1 OCTAVE Programm – Randbedingungen des RPEs

```

function z=sub_einlesen(name)
%%
z=[];
nr=fopen(name,'r');
while (1)
  a=fscanf(nr,"%f");
  dat=size(a)(1);
  if (dat == 0)
    break;
  endif
  z=[z;a];
endwhile
fclose(nr);

more off
nr=fopen("def_displacement.inc","w");
fprintf(nr,"*BOUNDARY,TYPE=DISPLACEMENT\n");
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t=3.00;
nlayer_gesamt=2;
c=15/105^2;
z1=sub_einlesen("z 1.dat");
z2=sub_einlesen("z 2.dat");
%z3=sub_einlesen("z 3.dat");
%z4=sub_einlesen("z 4.dat");
%z5=sub_einlesen("z 5.dat");
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for nlayer=1:2:nlayer_gesamt
  z_coor=eval(sprintf("z%i",nlayer));
  xeck=0.0;
  yeck=0.0;
  %%%%%%%%%
  fprintf(nr,"**");
  for ll=1:80
    fprintf(nr,"*");
  end
  fprintf(nr,"\n");
  fprintf(nr,"** SCHICHT %i\n",nlayer);
  fprintf(nr,"**\n");
  %%%%%%%%%
  for nbrett=1:1
    %%%%%%%%%
    fprintf(nr,"**\n");
    fprintf(nr,"** Brett Vertikal: unten_%i\n",nbrett);
    fprintf(nr,"**\n");
    %%%%%%%%%
    cname=sprintf("BRETT V%i_S%i.",nbrett,nlayer);
    brettv_unten(c,xeck,yeck,z_coor,cname,nr);
    xeck=xeck+15.0;
  end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for nlayer=1:2:nlayer_gesamt
  z_coor=eval(sprintf("z%i",nlayer));
  xeck=0.0;
  yeck=15.0;
  %%%%%%%%%
  fprintf(nr,"**");
  for ll=1:80
    fprintf(nr,"*");
  end
  fprintf(nr,"\n");
  fprintf(nr,"** SCHICHT %i\n",nlayer);
  fprintf(nr,"**\n");

```


A.2 MATHEMATICA File – Anpassungsfunktion

```

y1 = 0.9893
y2 = 0.9619
y3 = 0.9133
y4 = 0.8179
y5 = 0.6564
y6 = 0.4434
y7 = 0.3210
y8 = 0.1971
y9 = 0.0950
y10 = 0.0456
y11 = 0.0180

```

```

x1 = 0.01
x2 = 0.025
x3 = 0.05
x4 = 0.1
x5 = 0.2
x6 = 0.4
x7 = 0.6
x8 = 1
x9 = 2
x10 = 4
x11 = 10

```

```
f[x_] := 1 / (1 + 6 p x^q x^2)
```

```
D[f[x], p]
```

$$-\frac{6 x^{2+q}}{(1 + 6 p x^{2+q})^2}$$

```
D[f[x], q]
```

$$-\frac{6 p x^{2+q} \text{Log}[x]}{(1 + 6 p x^{2+q})^2}$$

```

FindRoot[{(f[x1] - y1) D[f[x1], p] + (f[x2] - y2) D[f[x2], p] +
(f[x3] - y3) D[f[x3], p] + (f[x4] - y4) D[f[x4], p] + (f[x5] - y5) D[f[x5], p] +
(f[x6] - y6) D[f[x6], p] + (f[x7] - y7) D[f[x7], p] + (f[x8] - y8) D[f[x8], p] +
(f[x9] - y9) D[f[x9], p] + (f[x10] - y10) D[f[x10], p] + (f[x11] - y11) D[f[x11], p] == 0,
(f[x1] - y1) D[f[x1], q] + (f[x2] - y2) D[f[x2], q] + (f[x3] - y3) D[f[x3], q] +
(f[x4] - y4) D[f[x4], q] + (f[x5] - y5) D[f[x5], q] + (f[x6] - y6) D[f[x6], q] +
(f[x7] - y7) D[f[x7], q] + (f[x8] - y8) D[f[x8], q] + (f[x9] - y9) D[f[x9], q] +
(f[x10] - y10) D[f[x10], q] + (f[x11] - y11) D[f[x11], q] == 0}, {{p, 0.5}, {q, -0.5}}]

```

```
{p → 0.665158, q → -0.744297}
```

A.3 Python Script – Schubkraftauswertung

```
#!/usr/bin/python
# * coding: utf 8 *
import csv_analyser
import exzentrizitaet
f=open('Python2_Auswertung 3S.dat','w')
f.write("Python_Auswertungen 3 schichtige BSP Platte:\n\n")
#
file1='3S/BSP_Platte_ND#01.csv'
file2='3S/BSP_Platte_RF#01.csv'
erg=csv_analyser.readcsv(file1,file2)
fx1=csv_analyser.force(erg[2])
zfx1=csv_analyser.lage(erg[2],erg[1])
fy1=csv_analyser.force(erg[3])
zfy1=csv_analyser.lage(erg[3],erg[1])
raender=csv_analyser.raender(erg[1]);
f.write((file1+" Schubkraft in X Richtung : " + str(fx1)+"\n"))
f.write((file1+" Schwerepunkt : " + str(zfx1)+"\n"))
f.write((file2+" min : " + str(raender[0])+"\n"))
f.write((file2+" max : " + str(raender[1])+"\n"))
tau_x0=exzentrizitaet.schub(raender[0],raender[1],fx1,zfx1,15.0)
f.write((file2+" Schubspannung X Ri : " + str(tau_x0[0])+"\n"))
f.write((file2+" Delta Schubspannung X Ri : " + str(tau_x0[1])+"\n"))
f.write("\n")
#
file1='3S/BSP_Platte_ND#02.csv'
file2='3S/BSP_Platte_RF#02.csv'
erg=csv_analyser.readcsv(file1,file2)
fx2=csv_analyser.force(erg[2])
zfx2=csv_analyser.lage(erg[2],erg[1])
fy2=csv_analyser.force(erg[3])
zfy2=csv_analyser.lage(erg[3],erg[1])
raender=csv_analyser.raender(erg[1]);
f.write((file1+" Schubkraft in X Richtung : " + str(fx2)+"\n"))
f.write((file1+" Schwerepunkt : " + str(zfx2)+"\n"))
f.write((file2+" min : " + str(raender[0])+"\n"))
f.write((file2+" max : " + str(raender[1])+"\n"))
tau_x0=exzentrizitaet.schub(raender[0],raender[1],fx2,zfx2,15.0)
f.write((file2+" Schubspannung X Ri : " + str(tau_x0[0])+"\n"))
f.write((file2+" Delta Schubspannung X Ri : " + str(tau_x0[1])+"\n"))
f.write("\n")
#
file1='3S/BSP_Platte_ND#03.csv'
file2='3S/BSP_Platte_RF#03.csv'
erg=csv_analyser.readcsv(file1,file2)
fx3=csv_analyser.force(erg[2])
zfx3=csv_analyser.lage(erg[2],erg[1])
fy3=csv_analyser.force(erg[3])
zfy3=csv_analyser.lage(erg[3],erg[1])
raender=csv_analyser.raender(erg[1]);
f.write((file2+" Schubkraft in Y Richtung : " + str(fy3)+"\n"))
f.write((file2+" Schwerepunkt : " + str(zfy3)+"\n"))
f.write((file2+" min : " + str(raender[0])+"\n"))
f.write((file2+" max : " + str(raender[1])+"\n"))
tau_y0=exzentrizitaet.schub(raender[0],raender[1],fy3,zfy3,15.0)
f.write((file2+" Schubspannung Y Ri : " + str(tau_y0[0])+"\n"))
f.write((file2+" Delta Schubspannung Y Ri : " + str(tau_y0[1])+"\n"))
f.write("\n")
```

```
#
file1='3S/BSP_Platte_ND#04.csv'
file2='3S/BSP_Platte_RF#04.csv'
erg=csv_analyser.readcsv(file1,file2)
fx4=csv_analyser.force(erg[2])
zfx4=csv_analyser.lage(erg[2],erg[1])
fy4=csv_analyser.force(erg[3])
zfy4=csv_analyser.lage(erg[3],erg[1])
raender=csv_analyser.raender(erg[1]);
f.write((file2+": Schubkraft in Y Richtung : " + str(fy4)+"\n"))
f.write((file2+": Schwerpunkt : " + str(zfy4)+"\n"))
f.write((file2+": min : " + str(raender[0])+"\n"))
f.write((file2+": max : " + str(raender[1])+"\n"))
tau_y0=exzentrizitaet.schub(raender[0],raender[1],fy4,zfy4,15.0)
f.write((file2+": Schubspannung Y Ri : " + str(tau_y0[0])+"\n"))
f.write((file2+": Delta Schubspannung Y Ri : " + str(tau_y0[1])+"\n"))
f.write("\n")
#
hoehe2=raender[1]
a=15.0
mxy=(2.*fx2*(hoehe2-zfx2))/a
myx=(2.*fy4*(hoehe2-zfy4))/a
#
#
f.write("\n")
f.write(("Momente an X Seite : " + str(mxy)+"\n"))
f.write(("Momente an Y Seite : " + str(myx)+"\n"))
#
f.close()
```


Literaturverzeichnis

- [1] GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke : Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke*. 6. Aufl. Wien : Springer-Verlag Wien New York, 1974. – ISBN 3-211-80639-3
- [2] GUGGENBERGER, W.: *Flächentragwerke*. Graz, TU Graz, Institut für Stahlbau und Flächentragwerke, Skriptum, 2007
- [3] GUGGENBERGER, W. ; MOOSBRUGGER, T. ; BOGENSPERGER, T.: *Ebene Tragstrukturen im konstruktiven Holzbau. Teil: Strukturmechanik. Kapitel 3-1: Wandscheiben – Einzelknoten*. Endevaluierungsbericht für das Projekt P01 schell_structures. Unveröffentlicht, April 2007.
- [4] SCHICKHOFER, G. ; BOGENSPERGER, T. ; MOOSBRUGGER, T. (Hrsg.): *BSPhandbuch : Holz-Massivbauweise in Brettsperrholz*. 2. Aufl. Graz : Verlag der technischen Universität Graz, 2010. – ISBN 978-3-85125-109-8
- [5] MOOSBRUGGER, T. ; GUGGENBERGER, W. ; BOGENSPERGER, T.: *Cross-Laminated Timber Wall Segments under homogeneous Shear - with and without Openings*. In: WCTE 2006, 9th World Conference on Timber Engineering, August 2006
- [6] MOOSBRUGGER, T. ; GUGGENBERGER, W. ; BOGENSPERGER, T.: *Forschung an der TU Graz – Steifigkeitsuntersuchungen an BSP-Scheiben-Elementen (Englisch)*. In: 5. Grazer Holzbau-Fachtagung, September 2006.
- [7] NORM DIN 1052: *Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken*, Dezember 2008
- [8] NORM ÖNORM EN 338: *Bauholz für tragende Zwecke : Festigkeitsklassen*, 1. Juli 2003
- [9] TRAETTA, G. ; BOGENSPERGER, T. ; MOOSBRUGGER, T. ; SCHICKHOFER, G.: *Verformungsverhalten von Brettsperrholzplatten unter Schubbeanspruchung in der Ebene*. In: 5. Grazer Holzbau-Fachtagung, September 2006

Dies ist eine Veröffentlichung des

FACHBEREICHS INGENIEURBAUKUNST (IBK) AN DER TU GRAZ

Der Fachbereich Ingenieurbaukunst umfasst die dem konstruktiven Ingenieurbau nahe stehenden Institute für Baustatik, Betonbau, Stahlbau & Flächentragwerke, Holzbau & Holztechnologie, Materialprüfung & Baustofftechnologie, Baubetrieb & Bauwirtschaft, Hochbau & Industriebau, Bauinformatik und Allgemeine Mechanik der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften an der Technischen Universität Graz.

Dem Fachbereich Ingenieurbaukunst ist das Bautechnikzentrum (BTZ) zugeordnet, welches als gemeinsame hochmoderne Laboreinrichtung zur Durchführung der experimentellen Forschung aller beteiligten Institute dient. Es umfasst die drei Laboreinheiten für konstruktiven Ingenieurbau, für Bauphysik und für Baustofftechnologie.

Der Fachbereich Ingenieurbaukunst kooperiert im gemeinsamen Forschungsschwerpunkt „Advanced Construction Technology“. Dieser Forschungsschwerpunkt umfasst sowohl Grundlagen- als auch praxisorientierte Forschungs- und Entwicklungsprogramme.

Weitere Forschungs- und Entwicklungskooperationen bestehen mit anderen Instituten der Fakultät, insbesondere mit der Gruppe Geotechnik, sowie nationalen und internationalen Partnern aus Wissenschaft und Wirtschaft.

Die Lehrinhalte des Fachbereichs Ingenieurbaukunst sind aufeinander abgestimmt. Aus gemeinsam betreuten Projektarbeiten und gemeinsamen Prüfungen innerhalb der Fachmodule können alle Beteiligten einen optimalen Nutzen ziehen.

Durch den gemeinsamen, einheitlichen Auftritt in der Öffentlichkeit präsentiert sich der Fachbereich Ingenieurbaukunst als moderne Lehr- und Forschungsgemeinschaft, welche die Ziele und Visionen der TU Graz umsetzt.

Nummerierungssystematik der Schriftenreihe

S – Skripten, Vorlesungsunterlagen | F – Forschungsberichte
V – Vorträge, Tagungen | D – Diplomarbeiten

Institutskennzahl:

1 – Allgemeine Mechanik | 2 – Baustatik | 3 – Betonbau
4 – Holzbau & Holztechnologie | 5 – Stahlbau & Flächentragwerke
6 – Materialprüfung & Baustofftechnologie | 7 – Baubetrieb & Bauwirtschaft
8 – Hochbau & Industriebau | 9 – Bauinformatik

Fortlaufende Nummer pro Reihe und Institut / Jahreszahl