

Kathrin Krebs

Aus ebenen Zwangläufen erzeugte polyedrische Mechanismen

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Magister rerum naturalium

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer:

Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Otto Röschel

Institut für Geometrie

Graz, Juni 2014

EIDESTÄTTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Diplomarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present diploma's thesis.

Datum/Date

Unterschrift/Signature

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich von ganzem Herzen bei meinem Betreuer Univ.-Prof. Dr. Otto Röschel bedanken. Ohne ihn und seine Bemühungen hätte diese Arbeit nicht so entstehen können.

Danke für die viele Zeit die Sie sich für meine Arbeit und mich genommen haben. Sie waren mir eine sehr große Hilfe!

Mein tiefster Dank gilt meinem Partner Patrick, der mich immer wieder aufgebaut und mir so viel Zeit, Geduld und Verständnis zukommen hat lassen.

Ich danke speziell meiner kleinen Tochter, die mir durch ihre Energie und Freude am Leben eine ganz besondere Motivation geschenkt hat.

Vor allem möchte ich mich bei meiner ganzen Familie bedanken, die mich in jeglicher Art und Weise immer unterstützt hat.

Ich danke auch herzlichst meiner sehr lieb gewonnen Studienkollegin und Freundin Lisa. Gemeinsam sind wir durch viele Höhen und Tiefen unseres Studiums gegangen. Ohne sie wäre mein Studium wahrscheinlich nicht so verlaufen.

Danke für die schöne gemeinsame Studienzeit!

Abschließend möchte ich mich bei allen Lehrenden, Freunden und Mitstudierenden, die mich im Laufe meines Studiums begleitet, unterstützt und mir mit Rat und Tat zur Seite gestanden haben, bedanken.

Kurzfassung

Aus starren Körpern und geeigneten Gelenksverbindungen bestehende Gelenksketten heißen übergeschlossene Mechanismen, wenn sie bei allgemeinen Abmessungen und allgemeiner Anordnung der Gelenke starr wären, wegen spezieller geometrischer Eigenschaften jedoch trotzdem eine zumindest einparametrische Beweglichkeit zulassen. In letzter Zeit sind interessante Arbeiten zur Erzeugung von übergeschlossenen Mechanismen entstanden, die durch die Koppelung geeigneter ebener zwangläufig beweglicher Bauteile gewonnen werden. Basis ist dabei stets ein Polyeder des dreidimensionalen euklidischen Raumes, in dessen Facetten geeignete ebene Zwangläufe integriert und dann durch Gelenke verknüpft werden.

Es werden neue Ansätze zur Bestimmung geeigneter ebener Zwangläufe entwickelt, die sich analog für die oben beschriebene Vorgangsweise verwenden lassen. Angeregt von Arbeiten von G. Kiper und K. Wohlhart werden dabei vor allem Überlegungen zur Konstruktion übergeschlossener Mechanismen verfolgt, die regelmäßige Tetraeder und Würfel als Basispolyeder verwenden. In der Arbeit werden völlig neue übergeschlossene Mechanismen auf Basis dieser Polyeder erzeugt. Diese Gelenksketten werden mit der aufgrund der Erzeugungsweise sicher existierenden Eigenbewegung exemplarisch beschrieben und auch in geeigneter Form visualisiert.

Abstract

Rigid bodies linked by joints form a *mechanism*. The mechanism is called *overconstrained* if - in terms of general dimensioning - it would not allow any motion whatsoever. Nonetheless it may happen that, owing to special dimensions or geometric properties of the linked bodies, the mechanism allows some self-motion of one parameter or more. This remarkable property makes overconstrained mechanisms appealing subjects of research.

Recently, a number of interesting papers on the construction of overconstrained mechanisms have been published. They are based on the idea of skillfully coupling planar 1-parameter motions. The initial point of that idea is a polyhedron in 3-space whose facets contain appropriate planar 1-parameter motions. Such motions are eventually joined by adequate links.

In this thesis a new approach is described, allowing the construction of further planar 1-parameter motions. They, in turn, can be used as the germ of overconstrained spatial mechanisms in the aforementioned way.

Interesting contributions by G. Kiper and K. Wohlhart gave inspiration to start with regular tetrahedrons and cubes as initial polyhedrons. This way a number of new overconstrained mechanisms is constructed. The approach presented in this thesis guarantees the existence of a 1-parameter self-motion at least. The results are also visualized and examined in this thesis.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	iv
Abstract	v
Einleitung	1
1 Ebener Mechanismus	3
1.1 Definitionen, Erklärungen, Bemerkungen	3
1.2 Ein ebener Mechanismus	4
1.2.1 Anhand von Dreiecken	5
1.2.2 Anhand von Vierecken	7
1.2.3 Anhand von Polygonen	8
2 Räumlicher Mechanismus	9
2.1 Konvexe Polyeder	9
2.1.1 Platonische Polyeder	9
2.2 Ebener Mechanismus in Polyederfacetten	19
2.2.1 Ein ebener Mechanismus in einer Polyederfacette	19
2.2.2 Der ebene Mechanismus in einer Polyederfacette	21
3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels	23
3.1 Koppelung ebener Zwangläufe auf dem regelmäßigen Tetraeder	23
3.1.1 Der ebene Zwanglauf auf Basis der Tetraederfacette	24
3.1.2 Koppelung zweier ebener Zwangläufe, die auf benachbarten Tetraederfacetten basieren	28
3.1.3 Die GRÜBLERSche Formel	30
3.1.4 Eine adaptierte <i>GRÜBLERS</i> che Formel	32
3.2 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis eines Würfels	35
3.2.1 Der ebene Mechanismus auf Basis der Würfelfacette	36
3.2.2 Koppelung zweier ebener Zwangläufe die auf benachbarten Würfelfacetten basieren	45
3.2.3 Der theoretische Freiheitsgrad des in 3.2.2 konstruierten Mechanismus	46
Literaturverzeichnis	49

Einleitung

In der folgenden Diplomarbeit werden in Kapitel 1 einige für das weitere Verständnis notwendige Begriffe erklärt.

Im zweiten Abschnitt wird ein besonderer ebener Mechanismus vorgestellt, der auf einer Arbeit von Otto Röschel basiert. Bei diesen Mechanismen beschreiben gewisse Koppelpunkte Objekte, die bei der Eigenbewegung des Mechanismus ähnlich verändert werden. Wir werden uns hier auf Dreiecke und Vierecke konzentrieren. Anschließend wird gezeigt, dass sich dieser ebene Mechanismus auch aus beliebigen Polygonen erzeugen lässt.

In Kapitel 2 werden anfangs noch einige Definitionen und Eigenschaften spezieller konvexer Polyeder, genauer von Platonischen Körpern, erläutert, da anhand von diesen die Erzeugung räumlicher Mechanismen veranschaulicht wird.

Im zweiten Abschnitt werden die ebenen Mechanismen in Facetten eines Polyeders eingebettet. Daraus resultiert dann ein räumlicher Mechanismus.

Im dritten und letzten Kapitel demonstrieren wir das Vorgehen auf einem Tetraeder und einem Würfel.

Zuerst wird ein, auf einem gleichseitigen Dreieck basierender, ebener Mechanismus, wie in Kapitel 1 beschrieben, erzeugt, materialisiert und mithilfe von Drehgelenken gekoppelt. Anschließend wird dieser in die Facetten eines Tetraeders eingebettet und ebenso mit passenden Verbindungsstücken gekoppelt, um somit den in Kapitel 2 beschriebenen räumlichen Mechanismus zu erhalten.

In diesem Zusammenhang wird die *GRÜBLERsche Formel*, die zu der Berechnung des theoretischen Freiheitsgrades in der Ebene und im Raum verwendet wird, mit einer Adaptierung vorgestellt.

Im zweiten Teil dieses Kapitels wird der ebene Mechanismus aus allgemeinen Vierecken konstruiert und auf die Facetten eines Würfels gelegt. Die weitere Vorgehensweise der Materialisierung und Koppelung wird größtenteils analog zu Abschnitt 2 durchgeführt. Die Besonderheit liegt aber darin, dass durch die Wahl eines sehr allgemeinen Vierecks, das aus dem ebenen Mechanismus entsteht, man, durch die Koppelung an den Würfelkanten, zwei weitere Vierecke erhält. Diese unterscheiden sich natürlich alle untereinander und müssen wiederum mithilfe des ebenen Mechanismus erzeugt werden.

Einleitung

Kurz gesagt werden übergeschlossene Mechanismen auf Basis des Tetraeders und Würfels erzeugt und in geeigneter Form visualisiert. Es entstehen somit im dreidimensionalen euklidischen Raum sehr schöne neue polyedrische Gelenk Ketten, die zumindest eine einparametrische Eigenbewegung gestatten.

1 Ebener Mechanismus

1.1 Definitionen, Erklärungen, Bemerkungen

In diesem Kapitel werden ein paar Begriffe erläutert, die für die nächsten Überlegungen notwendig sind. Sie finden sich z. B. in [3]:

Euklidische Kongruenztransformation: Bei einer *ebenen euklidischen Kongruenztransformation* handelt es sich um eine Punktabbildung κ der euklidischen Ebene, die die Länge jeder Strecke unverändert lässt.

Man unterscheidet zwischen einer *gleichsinnigen* und *gegensinnigen Kongruenztransformation*, dies hängt davon ab, ob die Orientierung erhalten bleibt oder sich ändert.

Bei einer Drehung (definiert durch einen Punkt und Winkel), einer Schiebung (festgelegt durch einen Schiebvektor) und der Identität handelt es sich um eine gleichsinnige, bei einer Spiegelung (festgelegt durch eine Gerade) und Gleitspiegelung (Zusammensetzung einer Spiegelung und einer Schiebung und daher durch eine Gerade und einen Schiebvektor festgelegt) um eine gegensinnige Kongruenztransformation.

Zwanglauf: Unter einem Zwanglauf versteht man eine einparametrische, differenzierbare Menge von gleichsinnigen Kongruenztransformationen der Ebene.

Analytische Beschreibung von gleichsinnigen Kongruenztransformationen: Seien $\{O, x, y\}$ die Koordinaten bzgl. des Koordinatensystems Σ und $\{O^*, x^*, y^*\}$ die Koordinaten bzgl. dem Koordinatensystem Σ^* . Dann ist jede gleichsinnige Kongruenztransformation κ eine Zusammensetzung einer Drehung ρ um den Koordinatenursprung O mit einer Schiebung τ mit dem Schiebvektor t^* (vgl. [3]). Daher lässt sie sich wie folgt schreiben:

$$x^* = t^* + \underbrace{Ax}_{\rho} \quad (1.1)$$

mit $x^* := [x^*, y^*]^T$, $t^* := [a^*, b^*]^T$, $x := [x, y]^T$, und der orthogonalen Drehmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Dabei beschreibt φ den Drehwinkel.

1 Ebener Mechanismus

Komplexe Zahlen: In der euklidischen Ebene können Punkte bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems $\{O, x, y\}$ auch mit Hilfe von komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ beschrieben werden. Eine solche Zahl hat die Darstellung $z = x + i \cdot y$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. x beschreibt den Realteil und y den Imaginärteil von z . Die komplexe Zahl i erfüllt die Gleichung $i^2 + 1 = 0$ und heißt *imaginäre Einheit*. $\bar{z} = x - i \cdot y$ wird als die *konjugiert komplexe Zahl* von z bezeichnet und unter der *Norm* einer komplexen Zahl versteht man $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Beschreibung gleichsinniger Kongruenztransformationen mit Hilfe komplexer Zahlen: Seien nun $z^* := x^* + i \cdot y^*$ und $z := x + i \cdot y$ komplexe Zahlen. Eine Drehung um den Koordinatenursprung O mit dem Winkel φ wird dann durch

$$z^* = e^{i\varphi} z$$

beschrieben. Wird des Weiteren der Schiebvektor t^* als komplexe Zahl

$$t^* = a^* + i \cdot b^*$$

mit $a^*, b^* \in \mathbb{R}$ interpretiert, dann erhält man für die gleichsinnige Kongruenztransformation κ folgende Darstellung:

$$z^* = t^* + e^{i\varphi} z$$

Setzt man für den Rotationsanteil $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = r$, mit $|r| = 1$ (d. h. $r\bar{r} = 1$) kann man die Punktabbildung wie folgt beschreiben:

$$\kappa : z \mapsto \kappa(z) := t^* + rz \tag{1.2}$$

mit einem Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Ist die Norm der komplexen Zahl r ungleich 1, handelt es sich nicht nur um eine Drehung, sondern auch um eine zusätzliche Skalierung. Welche Auswirkungen dies hat, werde ich später noch genauer behandeln.

1.2 Ein ebener Mechanismus

Der ebene Mechanismus wird vorerst anhand von Dreiecken, anschließend von Vierecken und zum Abschluss von Polygonen erklärt und beschrieben. Die Grundlage dafür bietet eine Arbeit von Otto Röschel (siehe [8]).

1.2.1 Anhand von Dreiecken

Gegeben seien nun eine gleichsinnige Kongruenztransformation κ (siehe (1.2)) und drei Punkte eines Dreiecks a, b und $c \in \mathbb{C}$. Wir definieren nun allgemein drei Schiebungen:

$$\begin{aligned} \alpha &: z \longrightarrow z + \kappa(a) \\ \beta &: z \longrightarrow z + \kappa(b) \\ \gamma &: z \longrightarrow z + \kappa(c) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Die Translationen α, β und γ der Eckpunkte des Dreiecks a, b, c ergeben nun neun Punkte mit folgender Darstellung:

$$\begin{array}{lll} p_{11} := a + \kappa(a) & p_{21} := b + \kappa(a) & p_{31} := c + \kappa(a) \\ p_{12} := a + \kappa(b) & p_{22} := b + \kappa(b) & p_{32} := c + \kappa(b) \\ p_{13} := a + \kappa(c) & p_{23} := b + \kappa(c) & p_{33} := c + \kappa(c) \end{array} \tag{1.4}$$

Es entstehen insgesamt sechs kongruente Dreiecke, von denen jeweils drei einander entsprechen, jedoch verschoben sind. (siehe Abb. 1.1)

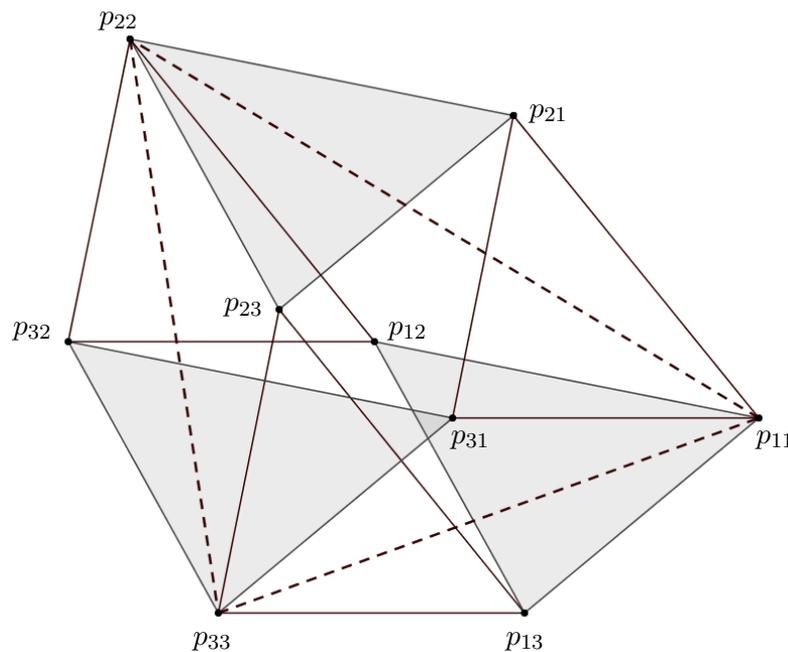


Abbildung 1.1: Die sechs kongruenten Dreiecke mit den von oben erzeugten 9 Eckpunkten

Werden nun die kongruenten Dreiecke als starre Körper, die an den Eckpunkten mit Drehgelenken verbunden sind, aufgefasst, erhält man aufgrund der Konstruktion einen einparametrischen Bewegungsvorgang des Mechanismus, d. h. einen ebenen

1 Ebene Mechanismus

Zwanglauf, der den Rotationswinkel φ der gleichsinnigen Kongruenztransformation κ als Parameter besitzt.

Setzt man in (1.4) für $\kappa(a) = t^* + ra$ (siehe (1.2)) ein und führt dies analog für $\kappa(b)$ und $\kappa(c)$ durch, so erhält man:

$$\begin{aligned} p_{11} &= a + \kappa(a) = a + t^* + ra = t^* + (1+r)a \\ p_{22} &= b + \kappa(b) = b + t^* + rb = t^* + (1+r)b \\ p_{33} &= c + \kappa(c) = c + t^* + rc = t^* + (1+r)c \end{aligned} \tag{1.5}$$

Daher sind die beiden Dreiecke mit Eckpunkten abc und $p_{11}p_{22}p_{33}$ zueinander ähnlich. Dies führt zu dem Resultat:

Lemma 1. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$ und jede gleichsinnige Kongruenztransformation κ sind die Dreiecke abc und $p_{11}p_{22}p_{33}$ zueinander ähnlich.*

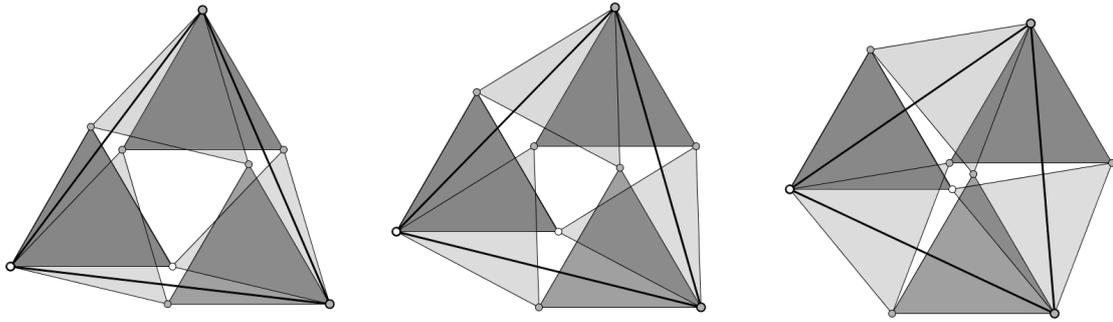


Abbildung 1.2: *Bei jeder Positionsänderung erhält man ein zu dem Ausgangsobjekt ähnliches Dreieck*

Mit $r = \cos \varphi + i \sin \varphi$ erhält man für $1+r = 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi = 1 + \cos^2 \frac{\varphi}{2} - i^2 \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} (\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2})$ und daher $|1+r| = 2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|$. Daraus folgt:

Lemma 2. *Der Ähnlichkeitsfaktor dieser Drehstreckung ist $2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|$. Der Drehwinkel beträgt $\frac{\varphi}{2}$.*

Bemerkung 1. φ kann auch als Parameter der Eigenbewegung des ebenen Mechanismus angesehen werden.

Wie oben schon erwähnt, lässt sich eine gleichsinnige Ähnlichkeit wie in (1.2) mit $|r| \neq 1$ beschreiben. Alle Überlegungen und Berechnungen von vorhin können

1 Ebener Mechanismus

nun analog durchgeführt werden. Wir erhalten als Resultat:

Lemma 1 bleibt auch im Fall $|r| \neq 1$ gültig.

Abbildung 1.3 zeigt ein Beispiel für das vorhergehende Resultat.

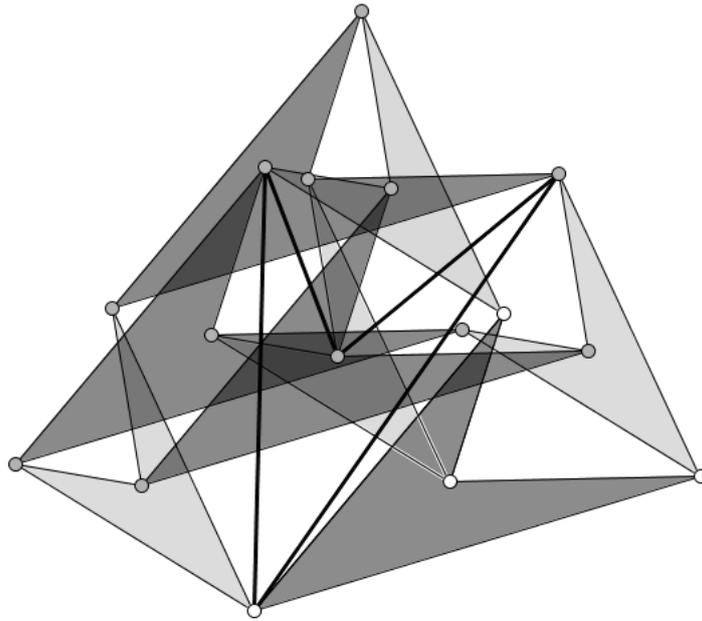


Abbildung 1.3: *Ebener Zwanglauf einer Viereckskette mit einer zusätzlichen Ähnlichkeit*

1.2.2 Anhand von Vierecken

Die obigen Überlegungen können auch auf Vierecke $abcd$ ausgedehnt werden. Gegeben sind nun a, b, c und $d \in \mathbb{C}$, welche die Ecken eines Vierecks bilden, eine Ähnlichkeit $\kappa : z \mapsto \kappa(z) := t^* + rz$ und zusätzlich zu (1.3) eine weitere Schiebung $\delta : z \mapsto z + \kappa(d)$. Dies ergibt dann folgende sechzehn Punkte:

$$\begin{array}{cccc}
 p_{11} := a + \kappa(a) & p_{21} := b + \kappa(a) & p_{31} := c + \kappa(a) & p_{41} := d + \kappa(a) \\
 p_{12} := a + \kappa(b) & p_{22} := b + \kappa(b) & p_{32} := c + \kappa(b) & p_{42} := d + \kappa(b) \\
 p_{13} := a + \kappa(c) & p_{23} := b + \kappa(c) & p_{33} := c + \kappa(c) & p_{43} := d + \kappa(c) \\
 p_{14} := a + \kappa(d) & p_{24} := b + \kappa(d) & p_{34} := c + \kappa(d) & p_{44} := d + \kappa(d)
 \end{array} \tag{1.6}$$

1 Ebener Mechanismus

Wir betrachten die Punkte:

$$\begin{aligned} p_{11} &= t^* + (1+r)a \\ p_{22} &= t^* + (1+r)b \\ p_{33} &= t^* + (1+r)c \\ p_{44} &= t^* + (1+r)d \end{aligned} \tag{1.7}$$

Diese Punkte bilden ein Viereck, das ähnlich zu dem Ausgangsviereck $abcd$ ist. Dies lässt vermuten, dass sich das Ergebnis von Lemma 1 auf beliebig viele Ecken, also auf beliebige n -Ecke (Polygone), erweitern lässt.

1.2.3 Anhand von Polygonen

Verallgemeinert man nun die bisher erlangten Ergebnisse, erhält man für ein Polygon mit den Eckpunkten a_i für $i = 1, \dots, n$ nach Anwendung dieses Mechanismus, mit der Ähnlichkeit $\kappa : z \mapsto \kappa(z) := t^* + rz$, insgesamt n^2 Punkte der Form:

$$p_{ij} = a_i + \kappa(a_j) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

Zwischen dem Polygon p_{ii} ($i = 1, \dots, n$) und dem Ausgangsobjekt entsteht eine Ähnlichkeit, die von κ abhängt.

Lemma 3. *Für alle a_i für $i = 1, \dots, n$ und jede gleichsinnige Kongruenztransformation $\kappa : z \mapsto \kappa(z) := t^* + rz$ sind die Polygone a_i ($i = 1, \dots, n$) und p_{ii} ($i = 1, \dots, n$) zueinander ähnlich. Der Ähnlichkeitsfaktor dieser Drehstreckung ist $2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|$. Der Drehwinkel beträgt $\frac{\varphi}{2}$.*

Beispiel Für ein 8-Eck ergeben sich damit schon insgesamt 64 Punkte, welche die obige Darstellung besitzen.

2 Räumlicher Mechanismus

Das Ziel in diesem Kapitel wird es sein, die bisher behandelten ebenen Mechanismen (siehe Kapitel 1.2) in Facetten eines Polyeders einzubetten und daraus einen räumlichen Mechanismus zu erhalten. Zuvor werden noch einige Definitionen und Eigenschaften von konvexen Polyedern, genauer von Platonischen Körpern, erläutert, da anhand von diesen die Erzeugung räumlicher Mechanismen veranschaulicht wird.

2.1 Konvexe Polyeder

Die Polygone, aus denen ein Polyeder besteht, werden *Facetten* genannt. Wenn sich zwei Facetten an einer Strecke berühren heißt diese *Kante* und wenn mehrere Facetten und Kanten in einem Punkt zusammenstoßen wird dieser als *Ecke* bezeichnet. [2]

Definition 1 (Polyeder, konvexes Polyeder). *Bei einem Polyeder (zu Deutsch Vielflach) handelt es sich um einen geschlossenen räumlichen Festkörper (Volumensmodell) der von endlich vielen ebenen Facetten begrenzt wird. [2]*

Wenn zwei Punkte auf dem Polyeder verbunden werden und deren Verbindungsstrecke ganz im Polyeder enthalten ist, handelt es sich um ein konvexes Polyeder. [12]

2.1.1 Platonische Polyeder

Zur Zeit des altgriechischen Mathematikers und Philosophens Platon, nach dem die Platonischen Polyeder benannt wurden, sahen die Mathematikerinnen und Mathematiker regelmäßige Polyeder als symbolische Repräsentanten der vier Elemente und des Kosmos. Hierbei stand das Feuer für das regelmäßige Tetraeder, Wasser für das regelmäßige Ikosaeder, Erde für den Würfel, Luft für das regelmäßige Oktaeder und der Kosmos für das regelmäßige Pentagondodekaeder. Für Platon waren dies die elementaren Bausteine. (vgl. [13]).

Definition 2 (Platonische (regelmäßige) Polyeder). *Von einem Platonischen bzw. regelmäßigen Polyeder spricht man, wenn bei einem konvexen Polyeder die Facet-*

ten aus lauter kongruenten, regelmäßigen Vielecken bestehen und an jeder Ecke gleich viele von diesen aufeinanderstoßen. (vgl. [12])

Die Realisierung Platonischer Polyeder

Im Folgenden wird die Erzeugung Platonischer Polyeder, also des Würfels, des regelmäßigen Tetraeders, des regelmäßige Oktaeders, des regelmäßigen Ikosaeders und des regelmäßigen Pentagondodekaeders gezeigt (vgl. [2]):

In jeder Ecke treffen k Stück regulärer n -Ecke zusammen. Wir beginnen mit $n = 4$ und $k = 3$. In jeder Ecke stoßen drei Quadrate zusammen. Dies ergibt einen *Würfel*. Werden im Würfel die Facettendiagonalen eingezeichnet, erhält man ein *reguläres Tetraeder*. Verbindet man die Facettenmittelpunkte des Würfels geeignet miteinander, erhält man ein reguläres Oktaeder.

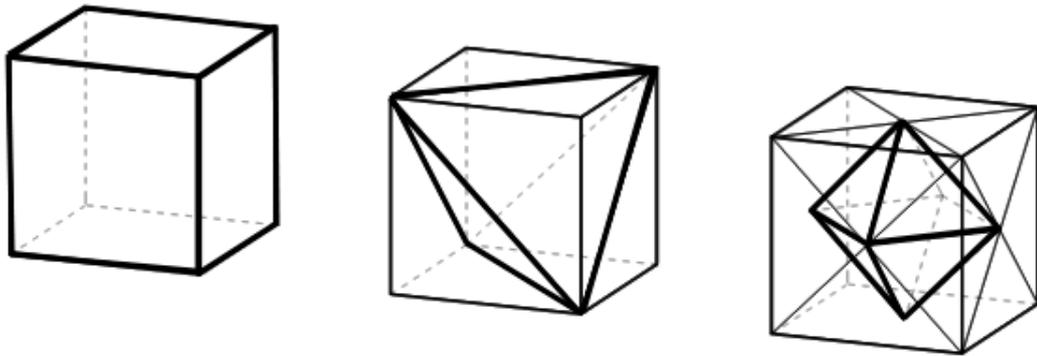


Abbildung 2.1: *Erzeugung des Würfels, des regelmäßigen Tetraeders und des regelmäßigen Oktaeders*

Mithilfe von 3 Goldenen Rechtecken kann man, wie folgt, ein regelmäßiges Ikosaeder erzeugen.

Bei einem Rechteck handelt es sich um ein *Goldenes Rechteck*, wenn die Seiten a und b des Rechtecks im Verhältnis des Goldenen Schnittes stehen. Dies wiederum bedeutet, dass das Streckenverhältnis von der Gesamtstrecke $a + b$ zur längeren Strecke a dem Streckenverhältnis von a zur kürzeren Teilstrecke b gleich ist. Fasst man dies mathematisch zusammen erhält man: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. [11]

Liegen nun 3 kongruente Goldene Rechtecke so wie in Abbildung 2.1 vor, bildet die konvexe Hülle der Ecken dieser 3 Rechtecke ein *regelmäßiges Ikosaeder*.

2 Räumlicher Mechanismus

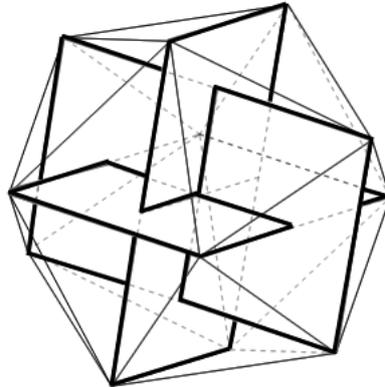


Abbildung 2.2: *Erzeugung des regelmäßigen Ikosaeders mithilfe Goldener Rechtecke*

Verbindet man die Mittelpunkte der gleichseitigen Facettendreiecke eines regelmäßigen Ikosaeders geeignet, erhält man ein *regelmäßiges Pentagondodekaeder*. Einzelne Ecken eines regelmäßigen Pentagondodekaeders bilden die Ecken eines Würfels. Daher kann man ein regelmäßiges Pentagondodekaeder auch erzeugen, indem man einem Würfel auf jede seiner Seitenfacetten ein „Dach“ aufsetzt. In den folgenden Darstellungen sind diese Erzeugungsarten dargestellt:

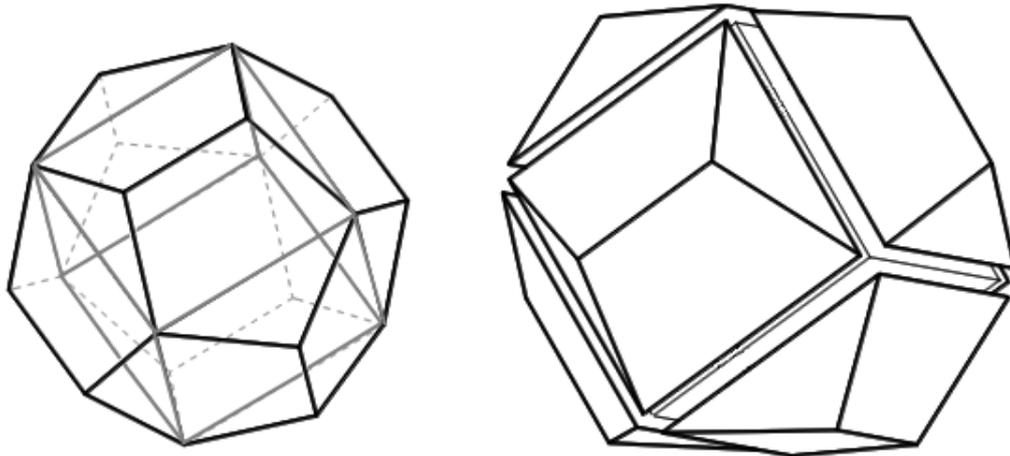


Abbildung 2.3: *Links der in das regelmäßige Pentagondodekaeder eingeschriebene Würfel und rechts die „aufgesetzten“ Dächer*

2 Räumlicher Mechanismus

Satz 1. *Es gibt genau fünf verschiedene Typen von Platonischen Polyedern, und zwar den Würfel, das regelmäßige Tetraeder, das regelmäßige Oktaeder, das regelmäßige Ikosaeder und das regelmäßige Pentagondodekaeder.*

Man kann dies mit dem Eulerschen Polyedersatz beweisen, auf diesen werde ich jedoch erst später eingehen und werde daher einen Beweis anführen, der auf rein geometrischen Überlegungen beruht (vgl. [13]):

Um eine Polyederecke eines Platonsichen Polyeders bilden zu können, benötigt man mindestens drei regelmäßige Polygone, da es sich ansonsten um keine räumliche Ecke handelt. Die Summe der Innenwinkel der Polygone, die in einer Ecke zusammenlaufen, dürfen nicht $\geq 360^\circ$ sein, weil sonst das Polyeder nicht konvex sein könnte. Im Fall, dass die Winkelsumme genau 360° beträgt handelt es sich um keine Ecke, sondern um eine ebene Parkettierung.

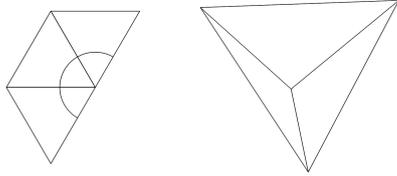
Wählt man nun als regelmäßige Facette das gleichseitige Dreieck aus, ergeben sich 3 Möglichkeiten eine Ecke zu bilden: Verwendet man 3 gleichseitige Dreiecke, erhält man als Summe der Innenwinkel 180° ($3 \cdot 60^\circ$), und es ergibt sich eine Tetraederecke. Fährt man so fort, erhält man für 4 bzw. 5 gleichseitige Dreiecke, einer Winkelsumme von 240° ($4 \cdot 60^\circ$) bzw. 300° ($5 \cdot 60^\circ$), eine Oktaeder- bzw. Ikosaederecke. 6 oder mehrere gleichseitige Dreiecke ergeben schon einen Winkel $\geq 360^\circ$, und man erhält daher keine konvexe Ecke.

Wählt man nun Quadrate für die Facetten, bilden nur 3 von diesen eine Ecke mit einer Winkelsumme $< 360^\circ$. 4 oder mehr Quadrate würden 360° bereits erreichen bzw. wieder überschreiten. In diesem Fall erhält man eine Würfecke. Aus demselben Grund besteht eine Pentagondodekaederecke aus 3 regelmäßigen Fünfecken mit Winkelsumme $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$.

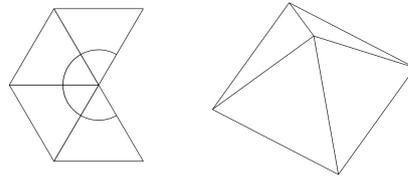
Wählt man als Facette das regelmäßige Sechseck aus, erhält man für 3 von diesen eine Winkelsumme von $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$. Drei regelmäßige Polygone mit $n \geq 6$ Ecken bestimmen in einer gemeinsamen Ecke eine Winkelsumme die $\geq 360^\circ$ beträgt. Daher kann aus regelmäßigen Polygonen mit mindestens 6 Ecken kein regelmäßiges Polyeder erzeugt werden. Die oben genannten sind daher die einzigen 5 möglichen regelmäßigen Polyeder. \square

2 Räumlicher Mechanismus

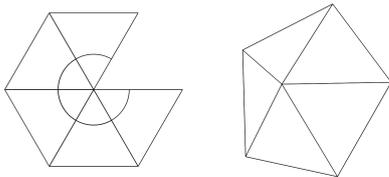
In der folgenden Abbildung kann man sehen, wie man aus den Polyedernetzen die zugehörige Polyederecke erhält.



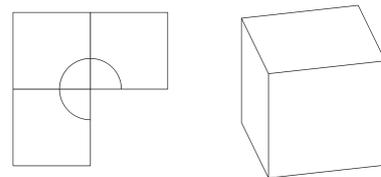
$3 \cdot 60^\circ \rightarrow$ Tetraederecke



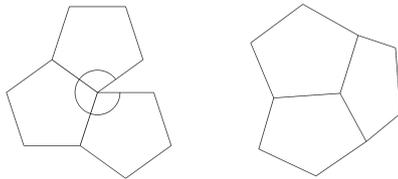
$4 \cdot 60^\circ \rightarrow$ Oktaederecke



$5 \cdot 60^\circ \rightarrow$ Ikosaederecke



$3 \cdot 90^\circ \rightarrow$ Würfecke



$3 \cdot 108^\circ \rightarrow$ Pentagondodekaederecke

Abbildung 2.4: *Räumliche Polyederecken mit zugehöriger Abwicklung*

2 Räumlicher Mechanismus

Im Folgenden werden die fünf Platonischen Körper genauer beschrieben und skizziert (vgl. [4]):

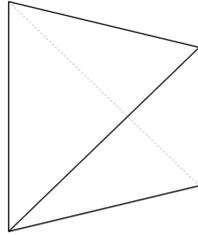


Abbildung 2.5: *Regelmäßiges Tetraeder*

Das *regelmäßige Tetraeder* (Vierflach) wird aus 4 gleichseitigen Dreiecken erzeugt und besitzt daher 4 Ecken und 6 Kanten. Es gibt pro Fläche 3 Kanten und in jeder Ecke stoßen 3 Flächen aufeinander.

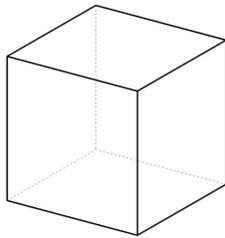


Abbildung 2.6: *Würfel*

Der *Würfel* oder auch *regelmäßiges Hexaeder* (Sechseck) genannt, wird aus 6 Quadraten erzeugt und besitzt daher 8 Ecken und 12 Kanten. Es gibt pro Fläche 4 Kanten und in jeder Ecke stoßen 3 Flächen aufeinander.

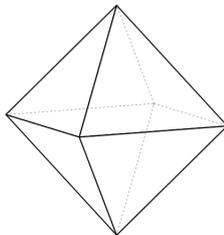


Abbildung 2.7: *Regelmäßiges Oktaeder*

Das *regelmäßige Oktaeder* wird aus 8 gleichseitigen Dreiecken erzeugt und besitzt daher 6 Ecken und 12 Kanten. Es gibt pro Fläche 3 Kanten und in jeder Ecke stoßen 4 Flächen aufeinander.

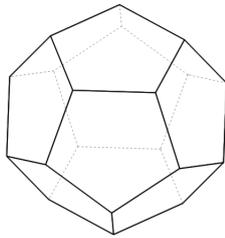


Abbildung 2.8: *Regelmäßiges Pentagondodekaeder*

Das *regelmäßige Pentagondodekaeder* (*pentagon* heißt Fünfeck und *dodeka* bedeutet zwölf) oder auch nur *Dodekaeder* genannt, wird aus 12 regelmäßigen Fünfecken erzeugt und besitzt daher 20 Ecken und 30 Kanten. Es gibt pro Fläche 5 Kanten, und in jeder Ecke stoßen 3 Flächen aufeinander.

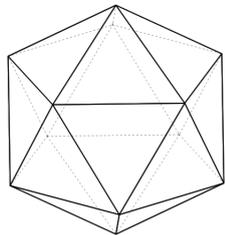


Abbildung 2.9: *Regelmäßiges Ikosaeder*

Das *regelmäßige Ikosaeder* (*iko* bedeutet zwanzig) wird aus 20 gleichseitigen Dreiecken erzeugt und besitzt daher 12 Ecken und 30 Kanten. Es gibt pro Fläche 3 Kanten, und in jeder Ecke stoßen 5 Flächen aufeinander.

Symmetrieeigenschaften

Im Allgemeinen heißt ein Objekt *regelmäßig* oder *symmetrisch*, wenn es eine euklidische Kongruenztransformation gibt, die das Objekt in sich selbst überführt, und diese nicht die identische Abbildung ist. Wenn es sich bei der Transformation um eine Spiegelung handelt, spricht man meist von Symmetrie. Als *regelmäßig* wird, im allgemeinen Sprachgebrauch, ein Objekt bezeichnet, das eine möglichst hohe Symmetrie besitzt. [12]

Man unterscheidet zwischen verschiedenen Symmetriearten, die bei platonischen Körpern auftreten (vgl. [6]):

- **Rotationssymmetrie** bezüglich einer Drehachse: Wenn ein Körper durch eine Drehung um $\frac{360^\circ}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) auf sich selbst abgebildet wird, heißt dieser *rotationssymmetrisch mit n -zähliger Drehachse*.
- **Symmetrie** bezüglich einer Ebene ϵ : Wenn ein Objekt bei Spiegelung an einer Ebene ϵ auf sich selbst abgebildet wird, heißt dieses *symmetrisch bezüglich der Ebene ϵ* . Die Ebene ϵ wird als *Spiegelebene* bezeichnet.

2 Räumlicher Mechanismus

- Eine *Drehspiegelung* besteht aus einer Drehung um $\frac{360^\circ}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) und einer anschließenden Spiegelung an einer Ebene, die senkrecht zur Drehachse steht.

Wie groß die Vielfalt an Symmetrien sein kann, möchte ich am Beispiel des Würfels verdeutlichen (vgl. [7]):

- Rotationssymmetrien:
 - Drehachsen, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Facetten des Würfels gehen ... drei 4-zählige Achsen
 - Raumdiagonalen des Würfels ... vier 3-zählige Achsen
 - Verbindungen der Mittelpunkte von diametral gegenüberliegender Würfelfkanten ... sechs 2-zählige Achsen
- Symmetrien bezüglich einer Ebene:
 - 3 Ebenen die durch die Kantenmittelpunkte von je 4 parallelen Kanten führen und normal auf diese Kanten stehen
 - 6 Ebenen die durch, bzgl. des Mittelpunktes, gegenüberliegender Kanten, also jeweils 4 Eckpunkte, aufgespannt werden
- Drehspiegelungen:
 - Drehspiegelachsen, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Facetten des Würfels gehen ... drei Drehspiegelachsen mit Drehwinkel $90^\circ + k \cdot 90^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) und einer anschließenden Spiegelung
 - Drehspiegelachsen, die durch diametral gegenüberliegende Ecken gehen (Raumdiagonalen) ... vier Drehspiegelachsen mit Drehwinkel $60^\circ + 2k \cdot 60^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) und einer anschließenden Spiegelung
 - Drehspiegelachsen, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten gehen ... sechs Drehspiegelachsen mit Drehwinkel 180° und einer anschließenden Spiegelung

Eulerscher Polyedersatz

Für konvexe Polyeder gilt der Eulersche Polyedersatz:

$$e - k + f = 2,$$

wobei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der (ebenen) Facetten eines konvexen Polyeders beschreibt.

2 Räumlicher Mechanismus

Beweis (vgl. [10]): Man wählt eine Ebenenstellung ϵ und verschiebt diese dann durch jeden Eckpunkt P_i des Polyeders parallel. Die Richtung von ϵ wird so gewählt, dass nur eine Polyederecke in jeder dieser parallelen Ebenen liegt. Für Normalaufstellung bzgl. ϵ (in Abbildung 2.10 in rot dargestellt) ergibt sich somit ein schichtweiser Aufbau des Polyeders. Nun werden weitere Ebenen π_1, \dots, π_{e-1} (in Abbildung 2.10 in blau dargestellt) erzeugt. Diese sollen ebenfalls parallel zu ϵ liegen und zwischen die jeweiligen Schichtebenen, die durch die Polyederecken gehen, gelegt werden.

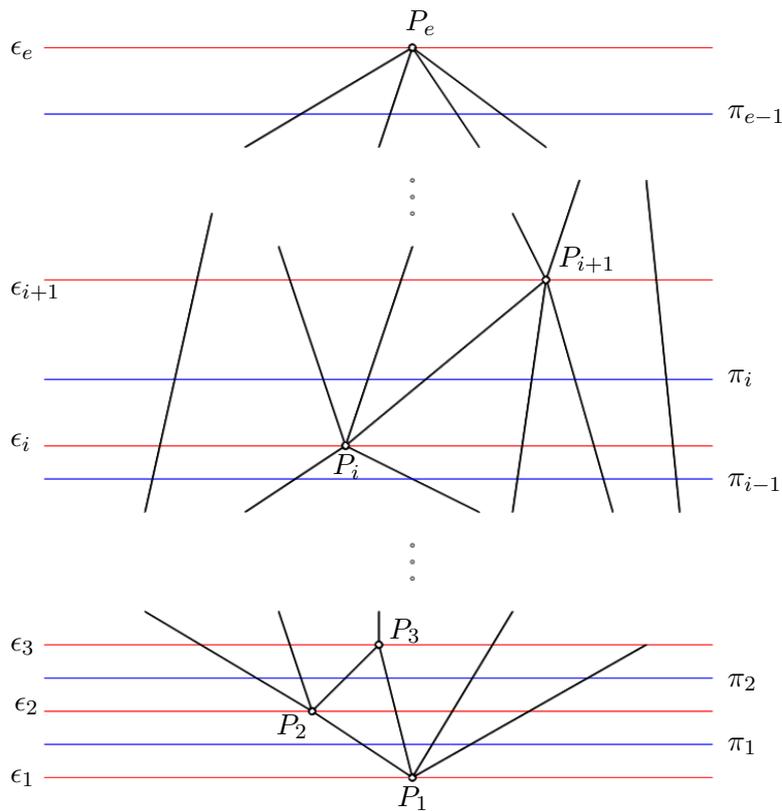


Abbildung 2.10: Eulersche Polyedersatz

Jetzt wird dieses Polyeder mit Farbe, sukzessive bis zu den Ebenen π_1, \dots, π_{e-1} , gefüllt und anschließend werden die Ecken, Kanten und Facetten, die bis dahin bereits teilweise gefärbt sind, abgezählt. Diese Werte werden mit $e(i)$, $k(i)$ und $f(i)$ die jeweils für die Ecken, Kanten und Facetten stehen, bezeichnet. Anschließend wird der Wert $F(i) = e(i) - k(i) + f(i)$ berechnet. Und daher gilt nun:

- $e(1) = 1$. Um die Ecke P_1 bildet das Polyeder eine Pyramide. An diese

2 Räumlicher Mechanismus

Ecke stoßen von der Pyramide gleich viele Kanten und Facetten. Daher gilt $f(1) = k(1)$ und man erhält $F(1) = 1$.

- Für $i = 2, \dots, e-1$ Schritt: $i-1 \rightarrow i$: Sei nun $F(i-1)$ bekannt, dies bedeutet, dass das Polyeder bis zu der Ebene π_{i-1} , die unter dem Eckpunkt P_i liegt, gefüllt ist. Nun werden die Elemente bestimmt, die bis zur Ebene π_i , die über dem Eckpunkt P_i liegt, neu eingefärbt werden. Unter diese Elemente fällt der Eckpunkt P_i und daher $e(i) = e(i-1) + 1$. Es gibt genau um eine neu eingefärbte Kante durch den Punkt P_i mehr als neu eingefärbte Facetten. Daher gilt: $k_{neu}(i) = f_{neu}(i-1) + 1$. Wir erhalten daraus insgesamt: $F(i) = F(i-1) + 1 - k_{neu}(i) + f_{neu}(i) = F(i-1)$.
- Bis zur Ebene π_{e-1} erhalten wir daher sukzessive: $F(e-1) = 1$. Der Punkt P_e ist noch nicht berücksichtigt, und insgesamt gilt daher: $e - k + f = F(e-1) + 1 = 2$ □

	Ecken	Facetten	Kanten	Kanten pro Facette	Kanten pro Ecke
Tetraeder	4	4	6	3	3
Würfel	8	6	12	4	3
Oktaeder	6	8	12	3	4
Pentagon- dodekaeder	20	12	30	5	3
Ikosaeder	12	20	30	3	5

Tabelle 2.1: Tabellarische Übersicht der Eigenschaften von Platonischen Polyedern

Dualität

Betrachtet man einen Platonischen Körper genauer und verbindet die Mittelpunkte benachbarter Facetten mit Hilfe von Strecken, erhält man die Kanten eines weiteren Platonischen Körpers. Beide besitzen denselben Mittelpunkt - man bezeichnet sie als *dual* zum Ausgangspolyeder. Sind zwei Platonische Körper zueinander dual, stimmt die Anzahl der Ecken des einen mit der Anzahl der Facetten des anderen Polyeders überein. Auch aus der Tabelle 2.1 kann man diesen Zusammenhang zwischen Ecken und Facetten der dualen Platonischen Körper sehr schön erkennen. Das bedeutet, dass bei den Platonischen Körpern 5 Dualitäten auftreten. Das Tetraeder ist selbstdual, dies bedeutet, dass wenn man die Mittelpunkte der Seitenflächen miteinander verbindet, wiederum ein Tetraeder erhält. Das Oktaeder ist zum Würfel und der Würfel zum Oktaeder dual, das Pentagondodekaeder ist zum Ikosaeder und wiederum umgekehrt dual. Diese dualen Paare werden in der Abbildung 2.11 veranschaulicht.

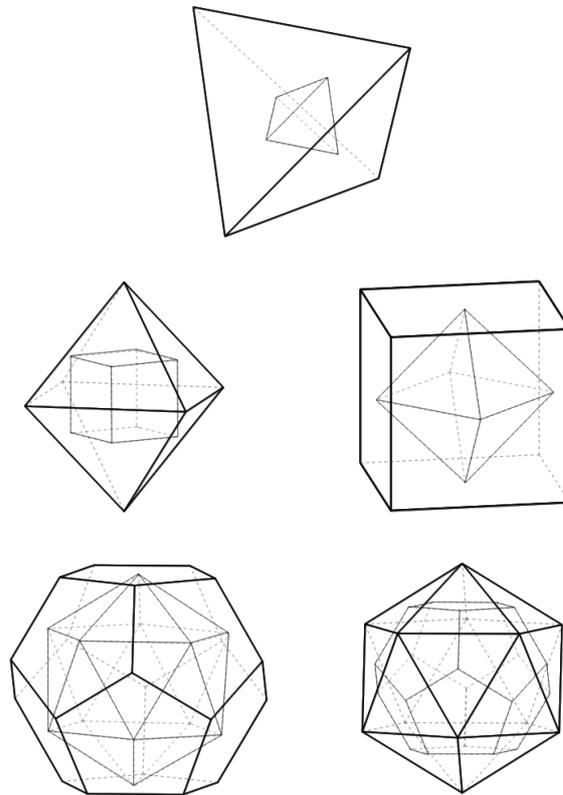


Abbildung 2.11: *Dualitäten*

2.2 Ebener Mechanismus in Polyederfacetten

Ein ebener zwangläufiger Mechanismus von Kapitel 1.2 soll nun in eine Polyederfacette eingebettet werden (siehe [9]).

Anhand eines Tetraeders und Würfels wird dies hier genau erläutert.

2.2.1 Ein ebener Mechanismus in einer Polyederfacette

Wir starten mit einem Polygon, dessen Ecken auf die Kanten eines Polyeders passen. Zu diesem Polygon konstruieren wir wie in Abschnitt 1.2.1 in Lemma 1 erläutert, in Abbildung 1.2 dargestellt und in Abschnitt 1.2.3 verallgemeinert, eine ebene Gelenkkette, die, wenn man den ebenen Mechanismus „laufen“ lässt, zu jedem Zeitpunkt φ ähnliche Polygone erzeugt. Die Punkte $p_{11}(\varphi), p_{22}(\varphi), p_{33}(\varphi)$ bilden Polygone, die für verschiedene Werte von φ alle zueinander ähnlich sind. Diese Polygone besitzen zum Zeitpunkt φ ein Zentrum O , dabei handelt es sich

2 Räumlicher Mechanismus

um das Ähnlichkeitszentrum.

Wenn man nun den ebenen Mechanismus zu einem festen Zeitpunkt φ betrachtet und in einen dreidimensionalen Raum einbettet, kann eine Ähnlichkeit bezüglich eines beliebigen festen Zentrums F^* (= Ähnlichkeitszentrum) des Dreiraumes durchgeführt werden. Zusätzlich können nun alle ähnlichen Polygone, die man durch den ebenen Mechanismus erhält, zu einem beliebigen Zeitpunkt φ betrachtet und in den Raum eingebunden werden. Diese Polygone gehen durch zentrische Streckung auseinander hervor und liegen in parallelen Trägerebenen. Dieses Verfahren wird in Abbildung 2.12 mithilfe eines gleichseitigen Dreiecks veranschaulicht:

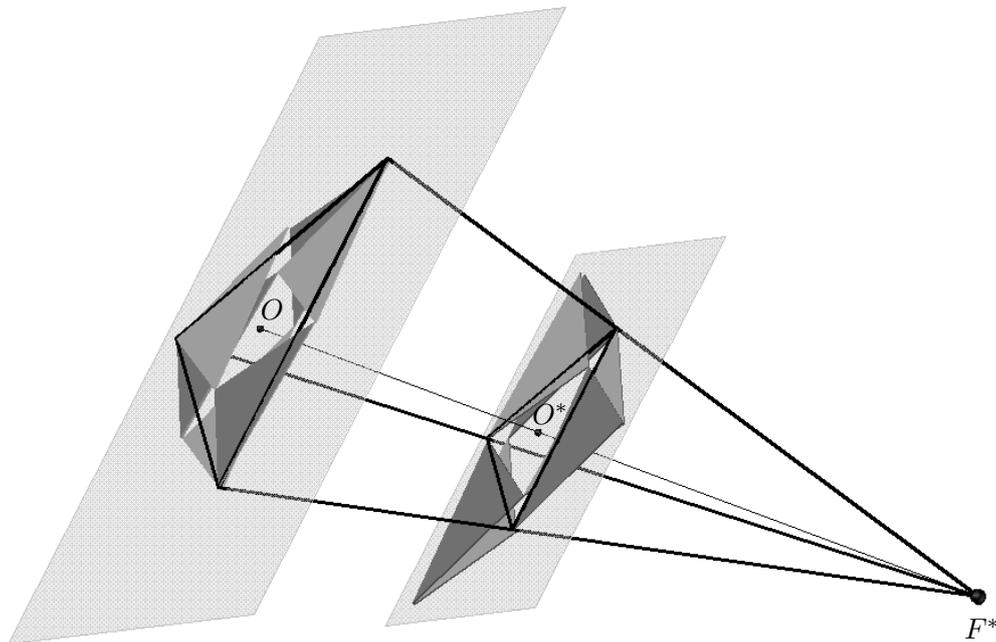


Abbildung 2.12: Der ebene Mechanismus zu unterschiedlichen Zeitpunkten dargestellt

Die „Koppelpunkte“ bilden bei diesem Zwanglauf zu verschiedenen Zeitpunkten gleichseitige Dreiecke, die sodann in eine aus F^* skalierte Polyederfacette eingepasst werden können.

Aufgrund dieser Tatsache wird es uns nun ermöglicht, einen geeigneten ebenen Mechanismus einzubauen, diesen zu koppeln und anschließend laufen zu lassen.

Wie der Einbau in eine Polyederfacette des ebenen Mechanismus von Kapitel 1.2 funktioniert und wie die Facetten miteinander gekoppelt werden müssen, wird im nächsten Abschnitt genauer erklärt.

2.2.2 Der ebene Mechanismus in einer Polyederfacette

Wenn man nun von einem beliebigen Polyeder ausgeht, kann man in jede seiner Facetten so einen ebenen Mechanismus einsetzen. Dies heißt aber nicht, dass sich in jeder Facette derselbe Zwanglauf, der aus gleichen Objekten zusammengesetzt ist, widerspiegelt (siehe Abschnitt 3.2). Je nach Wahl des Objektes aus dem der ebene Zwanglauf bestehen soll, der Symmetrie von diesem und des Polyeders, ergeben sich mehr oder weniger schöne Darstellungen verschiedener Zwangläufe auf den einzelnen Polyederfacetten. D. h. je nachdem wie man einen Zwanglauf in einer Facette des Polyeders wählt, ergeben sich fast automatisch die restlichen Zwangläufe, bzw. muss man diese passend konstruieren.

In der folgenden Abbildung werden drei Beispiele gezeigt, wie in eine Polyederfacette (reguläres Dreieck, Quadrat und reguläres Fünfeck) n -Ecke eingepasst werden. Dieses n -Eck kann, wie in Kapitel 1.2, zu einem ebenen Mechanismus ausgebaut werden.

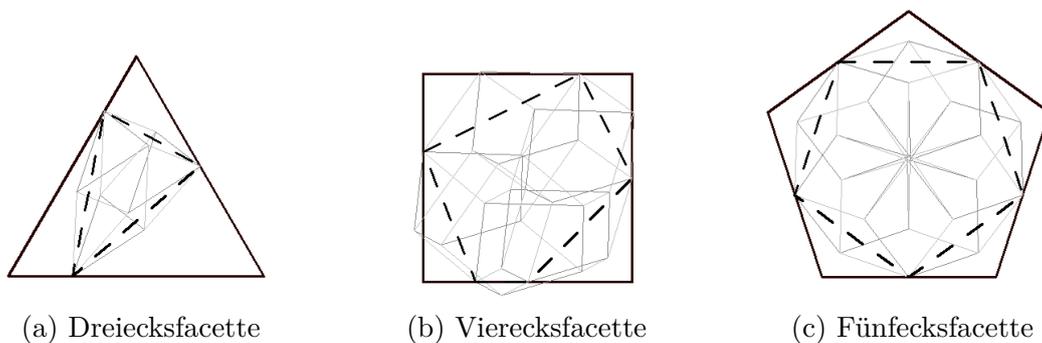


Abbildung 2.13: In eine Polyederfacette kann ein beliebiges n -Eck eingepasst werden

Wenn man nun in die übrigen Facetten des Polyeders Polygone legen will, muss man beachten, dass eine Koppelung in gemeinsamen Punkten auf den Polyederkanten besteht.

Wählt man ein Polygon, dessen Kante auf einer Polyederfacette liegt (siehe 2.13(b)), können bei der Zusammensetzung des Polyeders Probleme entstehen, da dies zu Überlappungen an den Polyederkanten führen kann. Daher werde ich diesen Fall nicht genauer betrachten. Damit tritt der in 2.13(b) gezeigte Fall hier nicht weiter auf.

Wird nun ein Polygon in die Facette eines Polyeders gelegt und der Polyedermitelpunkt als Zentrum F^* der Ähnlichkeit gewählt, existiert ein ebener Zwanglauf, der dieses Polygon erzeugt hat. Werden nun dementsprechend alle ebenen Mecha-

2 Räumlicher Mechanismus

nismen gleichzeitig gestartet und bewegt, ergibt sich durch die Ähnlichkeit mit festem Zentrum F^* ein Polyeder, welches ähnlich zu dem Ausgangspolyeder ist.

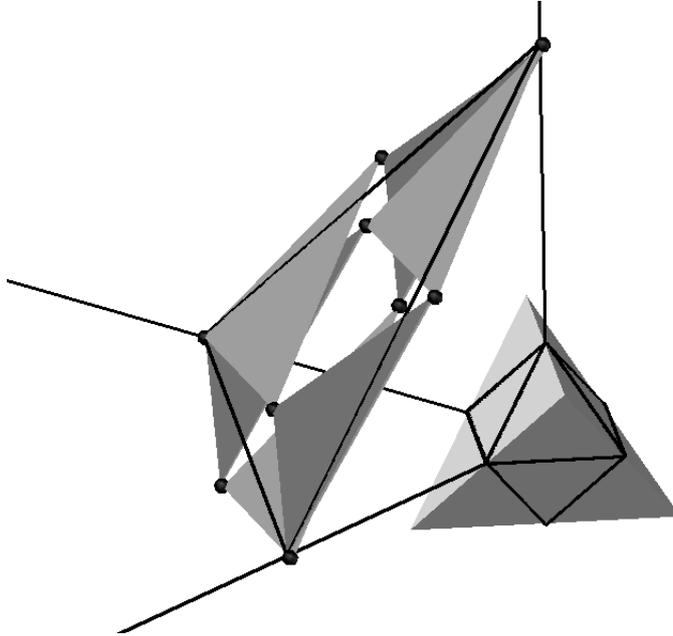


Abbildung 2.14: Ein Tetraeder mit einer Position des Zwanglaufes

Überlegen wir nun, wie die ebenen Mechanismen miteinander gekoppelt werden müssen, damit auch wirklich ein beweglicher Körper entsteht.

Vorerst muss der ebene Zwanglauf noch „materialisiert“ werden, d. h. die Objekte des Mechanismus können orthogonal zur Trägerebene in die Höhe extrudiert werden, dies ergibt nun im Mechanismus selbst 1R-Gelenke.

Zwei Nachbarfacetten des Polyeders schließen, auch wenn der Parameter φ variiert wird, immer den gleichen Winkel ein, da eine Ähnlichkeit den Winkel zwischen den Trägerebenen nicht ändert. Daher können die ebenen Zwangläufe, die an den Facettenkanten aneinander stoßen, mit Hilfe von sphärischen 2R-Gelenken gekoppelt werden. Diese Gelenke besitzen Drehachsen, die jeweils normal auf die entsprechenden Trägerebenen der ebenen Zwangläufe stehen und einen festen Winkel einschließen. Dieser entspricht dem Winkel, der von je zwei Facetten eingeschlossen wird. Dieser Winkel wird auch *Flächenwinkel* genannt.

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

3.1 Koppelung ebener Zwangläufe auf dem regelmäßigen Tetraeder

Nun wird versucht, ein durch den ebenen Mechanismus erzeugtes, gleichseitiges Dreieck in die Facetten eines regelmäßigen Tetraeders einzubetten, mithilfe von Verbindungsstücken zu koppeln und somit den oben beschriebenen räumlichen Mechanismus zu erhalten.

Wenn man ein regelmäßiges Tetraeder betrachtet und die Kantenmittelpunkte einer Facette des Polyeders verbindet, erhält man ein gleichseitiges Dreieck. Dieses gleichseitige Dreieck soll nun mithilfe des ebenen Mechanismus aus Kapitel 1.2 erzeugt werden. Um die schöne Symmetrie des Tetraeders auszunützen und ein sehr symmetrisches Modell zu erhalten, soll auch in jede weitere Facette des Tetraeders ein gleichseitiges Dreieck gelegt werden. Daraus folgt wiederum, dass auf Basis jeder Tetraederfacette derselbe ebene Zwanglauf stattfinden kann.

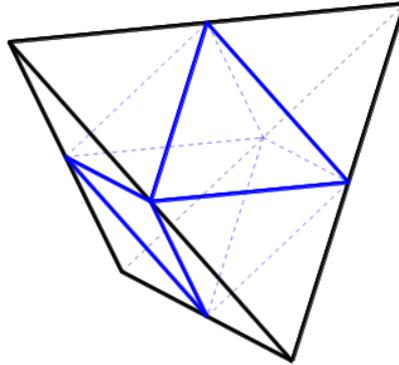


Abbildung 3.1: *Regelmäßiges Tetraeder mit gleichseitigen Dreiecken in blau, aus denen die ebenen Zwangläufe entstehen*

3.1.1 Der ebene Zwanglauf auf Basis der Tetraederfacette

Nun überlegen wir uns, wie der ebene Zwanglauf in der Tetraederfacette erzeugt werden muss.

Wie oben schon erwähnt handelt es sich in diesem Fall bei dem Polygon, das aus dem ebenen Mechanismus entstehen soll, um ein gleichseitiges Dreieck. Nun muss der entsprechende ebene Mechanismus dazu konstruiert werden. In diesem Beispiel soll der Mechanismus nur aus gleich großen, also kongruenten Systemen bestehen, das heißt der ebene Mechanismus von Kapitel 1.2 wird nur durch Rotationen und Translationen erzeugt, es wird keine zusätzliche Skalierung benötigt.

Sei nun das gleichseitige Dreieck $p_{11}p_{22}p_{33}$ aus Kapitel 1.2.1 gegeben. Die den Mechanismus definierenden sechs kongruenten ähnlichen Dreiecke müssen nun passend konstruiert werden.

Vorerst wird das gleichseitige Dreieck $p_{11}p_{22}p_{33}$ kopiert und um den Eckpunkt p_{22} um einen beliebigen Winkel gedreht. Anschließend muss dieses neu erzeugte gleichseitige Dreieck so skaliert werden, dass der Eckpunkt auf der Streckensymmetrale der Strecke $p_{22}p_{33}$ liegt. Das zweite System wird durch eine Spiegelung an der Streckensymmetrale oder durch eine Translation und Rotation erzeugt. Durch die weiteren vier fehlenden Systeme, die durch geeignete Translationen erzeugt werden, wird nun der ebene Mechanismus unter Hinzufügen geeigneter Drehgelenke vervollständigt. In der folgenden Abbildung wird dieses Verfahren noch einmal graphisch dargestellt.

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

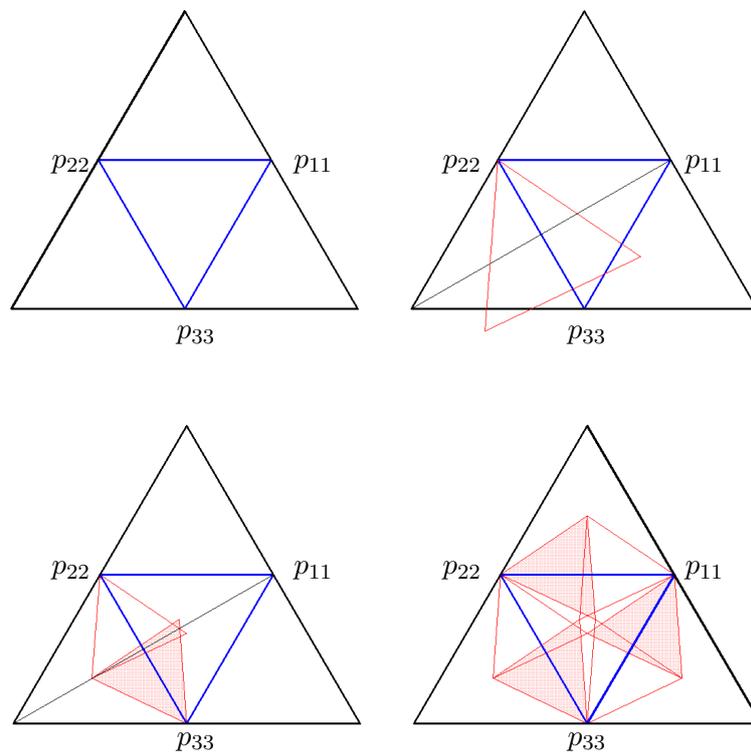


Abbildung 3.2: Erzeugung des ebenen Mechanismus wenn das Dreieck $p_{11}p_{22}p_{33}$ gegeben ist

Abbildung 3.3 zeigt noch einmal den aus $p_{11}p_{22}p_{33}$ erzeugten Mechanismus. (Vgl. mit Abbildung 1.1 aus Kapitel 1.2.1).

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

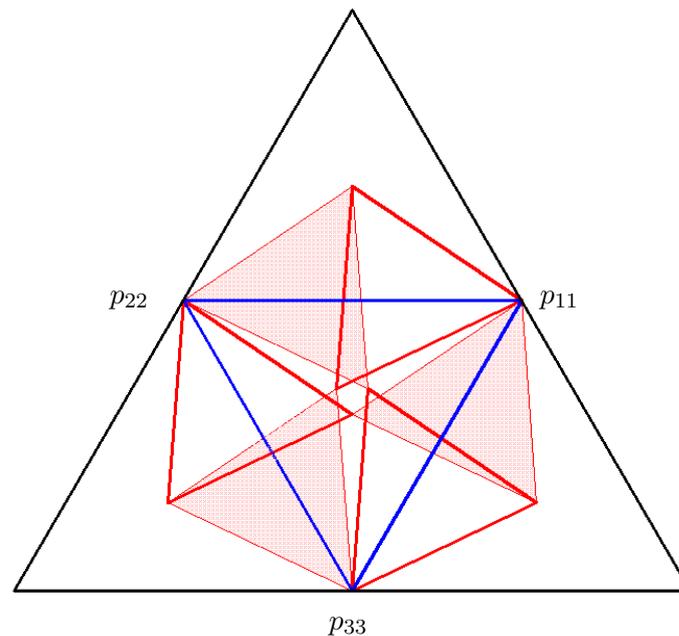


Abbildung 3.3: Der aus $p_{11}p_{22}p_{33}$ erzeugte Mechanismus.

Um nun den ebenen Mechanismus im Raum darstellen zu können, wird normal auf die Trägerebene eines „Systemdreiecks“ abc eine Höhe abgetragen, dieses erhält somit eine Materialisierung, welche folgendermaßen aussehen kann:

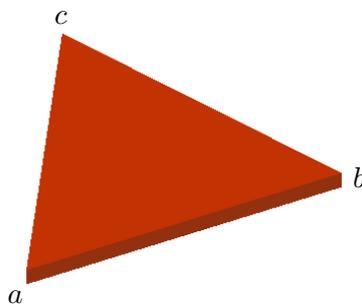


Abbildung 3.4: Dreieck abc , aus dem der ebene Mechanismus erzeugt wird

Um die Bewegungen der einzelnen miteinander gekoppelten Objekte zu ermöglichen, müssen die materialisierten gleichseitigen Dreiecke auf insgesamt 3 Schichten aufgeteilt werden.

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

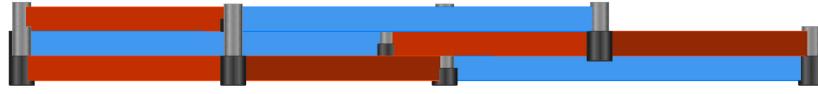


Abbildung 3.5: *Jeweils zwei Objekte werden auf insgesamt 3 Schichten aufgeteilt*

Um eine Koppelung zwischen den einzelnen Prismen zu erhalten und eine Beweglichkeit zu ermöglichen, müssen noch Drehgelenke eingebaut werden. Dabei handelt es sich um 1R-Gelenke, die aus Drehzylindern bestehen. Diese müssen je nachdem, ob es sich um eine Koppelung auf einer Schicht oder zwischen Schichten auf unterschiedlicher Höhe handelt, richtig eingepasst werden. Dies führt dazu, dass 3 verschiedene Gelenktypen Verwendung finden.



Abbildung 3.6: *Drehgelenke des ebenen Zwanglaufs auf dem Tetraeder*

In Abbildung 3.7 wird nun das Dreieck $p_{11}p_{22}p_{33}$ von vorn in der Farbe schwarz angedeutet und entspricht dem blauen Dreieck in Abbildung 3.1, 3.2 und 3.3 zu einem gewissen Zeitpunkt φ des Zwanglaufs. Zusätzlich wurden die nötigen Drehgelenke eingebaut. An den Stellen, an denen das Dreieck $p_{11}p_{22}p_{33}$ seine Eckpunkte besitzt, werden noch andere Gelenke, die eine feste Verbindung zu den Nachbarfacetten herstellen, benötigt. Dies wird im nächsten Kapitel genauer beschrieben.

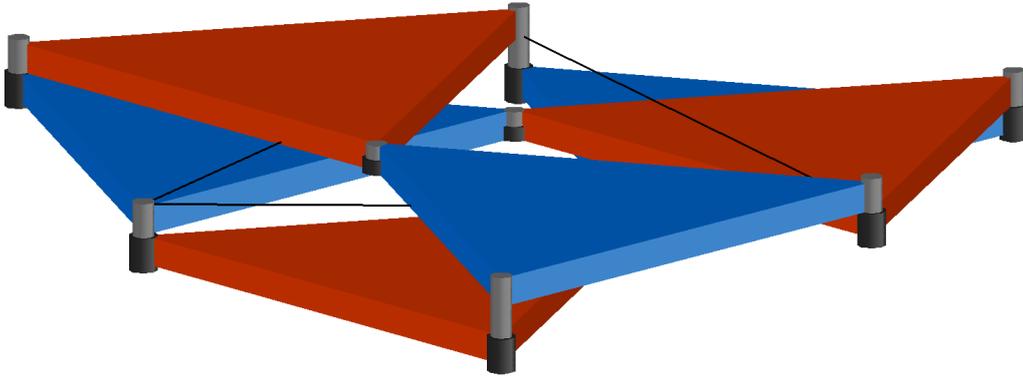


Abbildung 3.7: *Ebener Mechanismus mit eingebauten Gelenken*

3.1.2 Koppelung zweier ebener Zwangläufe, die auf benachbarten Tetraederfacetten basieren

Nun wird ein Gelenk, das zwei Nachbarfacetten miteinander verbindet, konstruiert.

Wie oben schon erwähnt, bleibt bei einer Ähnlichkeit der Winkel, welcher von zwei Nachbarfacetten des regelmäßigen Tetraeders eingeschlossen wird, gleich. In diesem Fall beträgt der Flächenwinkel rund $\alpha = 70.5^\circ$ ($\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$) und daher der Winkel, der von den Drehachsen eingeschlossen wird, rund 109.5° . Die sphärischen 2R-Gelenke bestehen aus Drehzylinderstäben, an denen Drehgelenke befestigt wurden, damit sich die einzelnen materialisierten Systeme auf den unterschiedlich hohen Ebenen bewegen lassen. Die genaue Ausführung des Verbindungsgelenks kann aus den folgenden Abbildungen 3.8 und 3.9 entnommen werden.



Abbildung 3.8: *Verbindungsstücke zweier Nachbarfacetten ohne Drehgelenke für die drei Trägerschichten*

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels



Abbildung 3.9: *Beispiel für Verbindungsstücke zweier Nachbarfacetten mit Drehgelenken für die drei Trägerschichten*

In Abbildung 3.10 kann man noch einmal sehr schön erkennen, dass die Drehachsen der Gelenke jeweils normal auf die entsprechenden Trägerebenen des ebenen Zwanglaufes stehen, und ein fester Winkel eingeschlossen wird. Um die Funktion des gesamten Mechanismus gewährleisten zu können, benötigt man insgesamt 6 solcher Verbindungsstücke, die entsprechend der unterschiedlichen Schichten, aus denen der ebene Zwanglauf besteht, geringfügig verändert werden müssen.

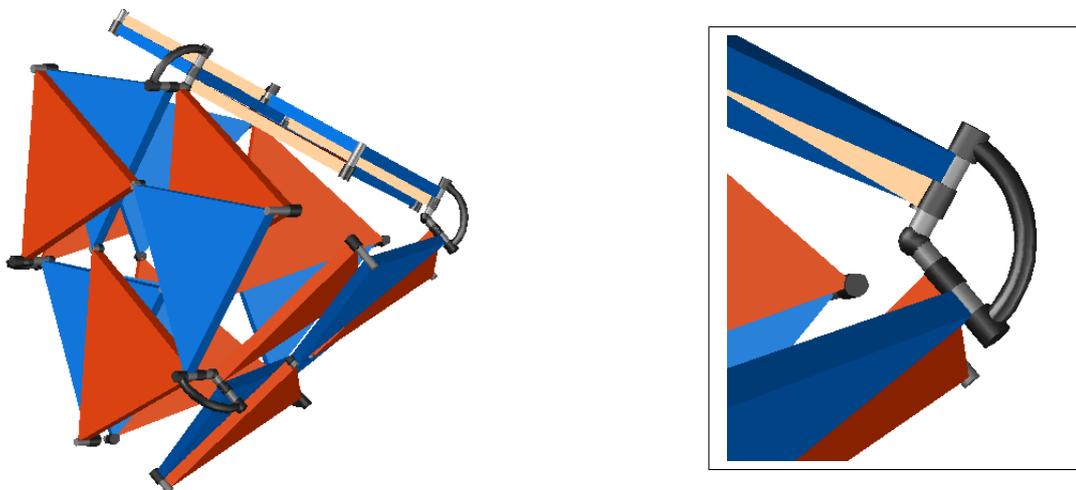


Abbildung 3.10: *Verbindungsstück zweier Facetten eingebaut*

Wird der in einer Tetraederfacette vorliegende ebene Mechanismus bewegt, so wird das aus den Lagen der Punkte $p_{11}p_{22}p_{33}$ gebildete Dreieck vergrößert oder verkleinert. Wird diese Vergrößerung oder Verkleinerung mit demselben Faktor auf die anderen Tetraederfacetten übertragen, so kann (innerhalb gewisser Beweglichkeitsgrenzen) zu den auf den anderen Tetraederfacetten vorliegenden Dreiecken (analog zu $p_{11}p_{22}p_{33}$) ebenfalls eine Bewegung des zugehörigen ebenen Mechanismus

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

gefunden werden, die nach wie vor die Koppelung, über die an der Tetraederkante zusammentreffenden Teildreiecksecken erlaubt. Die zwangläufige Beweglichkeit des gesamten Mechanismus folgt daher aus der Konstruktion und liefert den folgenden

Satz 2. *Der in diesem Abschnitt auf Basis des regelmäßigen Tetraeders erzeugte Mechanismus besitzt zumindest eine einparametrische Eigenbewegung.*

3.1.3 Die GRÜBLERsche Formel

Freiheitsgrad: Betrachtet man die Bewegung eines Körpers A gegenüber eines anderen Körpers B , dann versteht man unter dem *Freiheitsgrad*, die Anzahl der unabhängigen reellen Parameter, die Körper A gegenüber Körper B positionieren. Für die Ebene ergibt sich ein Freiheitsgrad von $F = 3$ (2 reelle unabhängige Parameter können der Translation und ein reeller unabhängiger Parameter kann der Drehung bzgl. des starr gedachten Körpers B zugeschrieben werden).

Für den Raum ergibt sich ein Freiheitsgrad von $F = 6$ (3 reelle unabhängige Parameter können der Translation und drei reelle unabhängige Parameter können der Drehung bzgl. des starr gedachten Körpers B zugeschrieben werden).

Unter dem *Freiheitsgrad eines Gelenks* zwischen zwei Körpern A und B versteht man die Anzahl der unabhängigen reellen Parameter, die von dem Gelenk bei der Positionierung von Körper B gegenüber Körper A noch frei einstellbar sind (z. B.: die Schiebstrecke bei einem Schubgelenk oder der Drehwinkel bei einem Schanier).

Mechanismus: Ein ebener Mechanismus besteht aus einer Anzahl von starren Körpern (Systemen) $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{n-1}$, deren freie Beweglichkeit durch gewisse Verbindungen (Gelenke) eingeschränkt wird. Besitzt ein ebener Mechanismus n Systeme, so spricht man von einer n -gliedrigen kinematischen Kette (siehe [3]).

Ein räumlicher Mechanismus wird analog wie der ebene Mechanismus definiert.

Zwanglaufkette Von einer *Zwanglaufkette* spricht man, wenn jedes Glied eines Mechanismus gegenüber jedem anderen nur eine einparametrische Bewegung durchführen kann. [3]

Auch diese Definition ist analog für den Raum formulierbar.

Theoretischer Freiheitsgrad: Für die Berechnung des theoretischen Freiheitsgrades eines Mechanismus verwendet man die *GRÜBLERsche Formel* (siehe [3] und [5]):

Gegeben sei ein Mechanismus aus n festen Körpern $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{n-1}$, die durch g Gelenke mit Freiheitsgrad f_i ($i = 1, \dots, g$) gekoppelt sind. Stellt man sich vor,

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

dass einer von n Körpern „fest“ ist und nicht durch Gelenke mit den anderen verbunden ist, dann sind die restlichen $(n-1)$ Systeme in der Ebene frei beweglich. Das heißt, es existieren $(n-1)$ Systeme, die Einzelbewegungen durchführen können. Wie oben beschrieben besitzt ein Körper in der Ebene einen Freiheitsgrad von 3, daher kann die Gesamtheit dieser Körper durch $3(n-1)$ unabhängige Parameter gegenüber dem „festen“ System beschrieben werden. Baut man nun ein Gelenk mit Freiheitsgrad f_i ($i = 1, \dots, g$) ein, wird die Beweglichkeit wiederum eingeschränkt und führt dazu, dass die Beweglichkeit eines Körpers pro Gelenk um $3 - f_i$ vermindert wird. Das bedeutet, dass wenn alle Körper mit Gelenken verbunden werden, dies zu einer Einschränkung der Parameter um $\sum_{i=1}^g (3 - f_i)$ führt:

$$F = 3(n - 1) - \sum_{i=1}^g (3 - f_i) = 3(n - 1) - 3g + \sum_{i=1}^g f_i$$

Diese Formel heißt *GRÜBLERsche Formel*. Es gilt

Satz 3. Gegeben sei ein Mechanismus aus n Körpern (Systemen) $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{n-1}$ und g Gelenken mit Freiheitsgrad f_i ($i = 1, \dots, g$). Dann gilt [3]:

$$F = 3(n - 1) - 3g + \sum_{i=1}^g f_i \quad (3.1)$$

F wird als theoretischer Freiheitsgrad des Mechanismus bezeichnet.

Für den Raum kann die Herleitung der GRÜBLERschen Formel adaptiert werden, und man erhält als Resultat die GRÜBLERsche Formel zur Berechnung des theoretischen Freiheitsgrades im Raum:

Satz 4. Gegeben sei ein räumlicher Mechanismus aus n Körpern (Systemen) $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{n-1}$ und g Gelenken mit Freiheitsgraden f_i ($i = 1, \dots, g$). Dann gilt für den theoretischen Freiheitsgrad dieses Mechanismus [3]:

$$F = 6(n - 1) - 6g + \sum_{i=1}^g f_i \quad (3.2)$$

Der tatsächliche Freiheitsgrad eines Mechanismus kann aufgrund von verschiedenen geometrischen Besonderheiten von diesem theoretischen Freiheitsgrad F abweichen (siehe [3]):

- Da die GRÜBLERsche Formel nur auf dem einfachen Abzählen der freien Parameter und von Bedingungen beruht, wird nicht berücksichtigt, dass manche Bedingung von einer anderen abhängig sein kann. Dies führt dazu, dass der Freiheitsgrad der relevanten Bedingungen kleiner als $\sum_{i=1}^g (f_i) - 6g$ sein kann und dann der theoretische Freiheitsgrad F kleiner als der tatsächliche ist.

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

- Wenn die $\sum_{i=1}^g (f_i) - 6g$ Gleichungen in den $6(n - 1)$ Parametern teilweise komplexe Lösungsvarietäten besitzen, kann der theoretische Freiheitsgrad F auch größer als der tatsächliche sein.

Übergeschlossener Mechanismus: Ein Mechanismus heißt *übergeschlossen*, wenn der theoretische Freiheitsgrad F nach der GRÜBLERschen Formel kleiner als 1 ist, und er wegen geometrischen Besonderheiten zumindest eine einparametrische Eigenbewegung besitzt.

3.1.4 Eine adaptierte GRÜBLERsche Formel

Nun hat man in diesem Beispiel zwangläufig bewegliche Teilmechanismen (auf Basis der Tetraederfacette) miteinander über sphärische 2R-Gelenke gekoppelt. Die GRÜBLERsche Formel nimmt darauf keine Rücksicht. Daher wird im Folgenden eine für diese speziellen Fälle *adaptierte GRÜBLERsche Formel* vorgestellt (siehe [1]).

Dabei sind nun, statt der n starren Körper von vorhin, n zwangläufig bewegliche Teilmechanismen Z_0, \dots, Z_{n-1} gegeben, die über g Gelenke mit Freiheitsgrad $f_i (i = 1, \dots, g)$ gekoppelt werden.

Daher lässt sich die Anzahl der freien reellen Bewegungsparameter des so zusammengesetzten Mechanismus durch folgenden Freiheitsgrad F^* abschätzen, und wir erhalten:

Satz 5. *Gegeben sei ein Mechanismus aus n einparametrischen beweglichen ebenen Zwangläufen Z_0, \dots, Z_{n-1} und g Gelenken mit Freiheitsgrad $f_i (i = 1, \dots, g)$. Dann gilt für den theoretischen Freiheitsgrad folgende Formel*

$$F^* = 7n - 6 - 6g + \sum_{i=1}^g f_i, \quad (3.3)$$

die als adaptierte GRÜBLERsche Formel bezeichnet werden soll.

Beweis: Wie bei den Überlegungen der *GRÜBLERschen Formel* stellen wir uns nun die n einparametrischen beweglichen ebenen Zwangläufe ohne Gelenkverbindungen frei im Raum positioniert vor. Dies ergibt sodann einen Bewegungsparameter für den 1-parametrischen Zwanglauf und zusätzlich wie oben 6 Parameter für die Positionierung im Raum. Man erhält für alle Zwangläufe Z_0, \dots, Z_{n-1} $7n$ freie Parameter, von denen wie vorhin 6 für ein Bezugssystem abzuziehen sind. Die restlichen Überlegungen werden analog zu der GRÜBLERschen Formelherleitung durchgeführt und ergeben (3.3). \square

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

Bemerkung 2. Im Allgemeinen gilt $F \leq F^*$. In besonderen Ausnahmefällen gilt auch $F = F^*$.

Diese adaptierte GRÜBLERsche Formel berücksichtigt die in diesem Beispiel von der Konstruktion herrührenden Redundanzen besser. Ein bzgl. F^* übergeschlossener Mechanismus ist auf jeden Fall auch bzgl. F übergeschlossen. Im Folgenden wird der Freiheitsgrad F^* und F des von uns auf Basis des regelmäßigen Tetraeders konstruierten Mechanismus berechnet:

Gegeben seien: In jeder der 4 Facetten: 6 Systeme $\Sigma_0, \dots, \Sigma_5$ und 9 Gelenke mit Freiheitsgrad $f_i = 1$ für $(i = 1, \dots, g)$.
6 Gelenke mit Freiheitsgrad $f_i = 2$ ($i = 1, \dots, g$) (Koppelung der Facetten).

$$\begin{aligned} F &= 6(n - 1) - 6g + \sum_{i=1}^g f_i \\ &= 6 \cdot (24 - 1) - 6 \cdot 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 + 4 \cdot 9 + 6 \cdot 2 \\ &= 6 \cdot (23 - 36 - 6 + 6 + 2) \\ &= -66 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Gegeben seien: 4 einparametrig bewegliche ebene Zwangläufe Z_0, \dots, Z_3 in den Facetten und 6 Gelenke mit Freiheitsgrad $f_i = 2$ ($i = 1, \dots, g$) (Koppelung der Facetten).

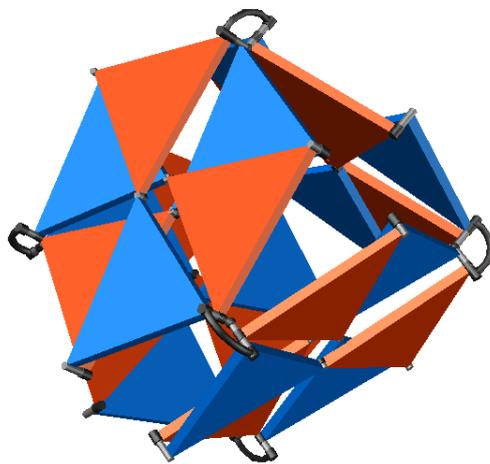
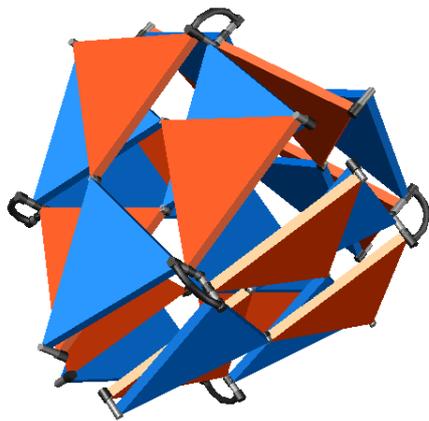
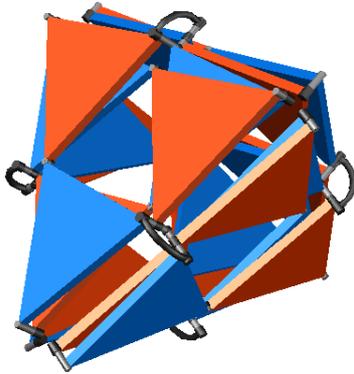
$$\begin{aligned} F^* &= 7n - 6 - 6g + \sum_{i=1}^g f_i \\ &= 7 \cdot 4 - 6 - 6 \cdot 6 + 6 \cdot 2 \\ &= 22 - 24 \\ &= -2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wie in (3.5) genau berechnet, ergibt sich für das Tetraeder, mithilfe der adaptierten GRÜBLERschen Formel, ein Freiheitsgrad von $F^* = -2$. Da nach Konstruktion (siehe Satz 2) mindestens eine zwangläufige Eigenbewegung des Mechanismus möglich ist, handelt es sich um einen übergeschlossenen Mechanismus.

Bei diesem Zwanglauf bilden die verwendeten Koppelpunkte gleichseitige Dreiecke auf den Kanten des regelmäßigen Tetraeders, die je nach Zeitpunkt größer oder kleiner sind.

Die folgende Abbildung zeigt einige Positionen dieses Zwanglaufs:

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels



3.2 Koppelung ebener Zwangsläufe auf Basis eines Würfels

Im folgenden Kapitel wird ein durch den ebenen Mechanismus erzeugtes, beliebiges Viereck in eine Würfel­facette gelegt, um anschließend wieder einen räumlichen Mechanismus und bewegliche polyedrische Modelle zu erhalten.

Im Unterschied zum vorhergehenden Kapitel ist das Ausgangspolygon, das in die Würfel­facette gelegt wird, in diesem Beispiel nicht mehr regelmäßig sondern beliebig gewählt (mit der Einschränkung, dass keine Kante des Polygons auf der Polyederkante liegen soll) und anschließend in eine Seiten­facette des Würfels gelegt. Dabei sollen in diesem Beispiel zu den vier lotrechten Würfel­facetten kongruente Vierecke gehören, deren Ecken auf den Würfel­kanten liegen. Damit auf den Kanten des Würfels jeweils zwei Eckpunkte des Vierecks zusammenstoßen, kann dieses einfach gespiegelt werden. Es ergeben sich für die Seiten­facetten jeweils zwei Paar gleiche Vierecke die sich nur durch eine Spiegelung unterscheiden. Durch die Wahl dieser Vierecke auf den Seiten­facetten ergeben sich durch die auf den Kanten des Würfels gelegenen Eckpunkte der Deck- und Boden­facette zwei weitere Vierecke. Bei diesen handelt es sich im Allgemeinen um Rechtecke. In Abbildung 3.11 kann man diese Entstehung betrachten:

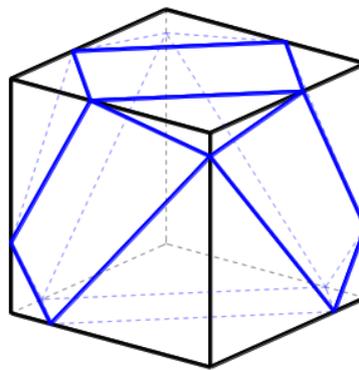


Abbildung 3.11: *Würfel mit einem beliebigen Viereck und die dazugehörigen Polygone, die sich wie oben auf den übrigen Facetten ergeben*

3.2.1 Der ebene Mechanismus auf Basis der Würfelfacette

Seitenfacetten Im Folgenden werden die ebenen Mechanismen für die Seitenfacetten erzeugt. Wie vorhin schon erwähnt, gibt es zwei Paare von kongruenten ebenen Zwangsläufen die in diesen Facetten benötigt werden sowie zwei zu Rechtecken gehörende. Erstere unterscheiden sich durch eine Spiegelung.

Es werden daher auch gespiegelte Zwangsläufe verwendet, obwohl dies nicht nötig wäre. Die Ecken des allgemein gewählten Vierecks werden mit $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ bezeichnet und die 8 Systeme, die ähnlich zu $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ sind und aus denen der ebene Zwangslauf entsteht, werden analog zu der Erzeugung des gleichseitigen Dreiecks auf der Tetraederfacette in Kapitel 3.1.1, konstruiert. In der folgenden Darstellung kann der Entstehungsprozess, der in der Würfelfacette stattfindet, nachvollzogen werden.

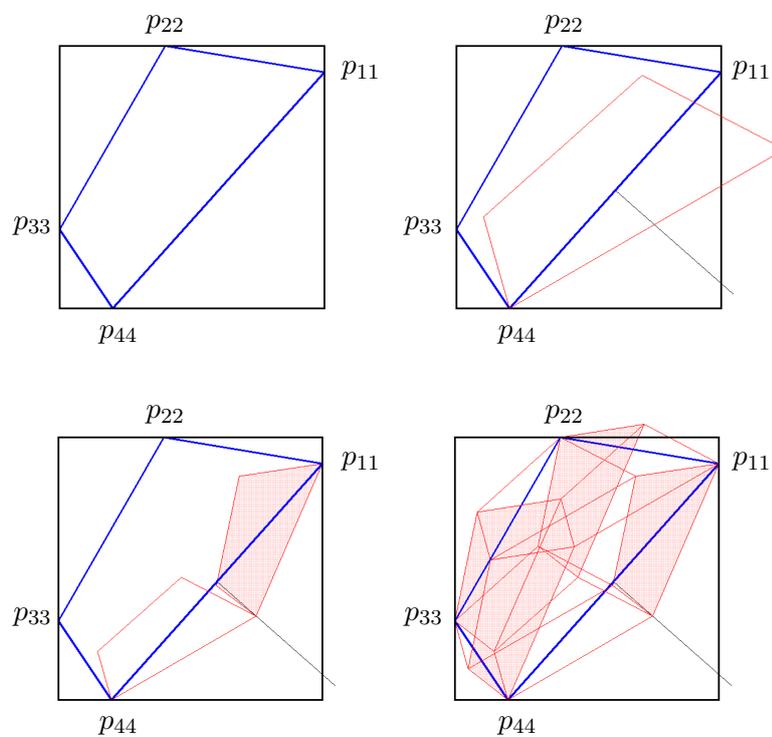


Abbildung 3.12: Erzeugung des ebenen Mechanismus in der Seitenfacette, wenn das Viereck $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ gegeben ist

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

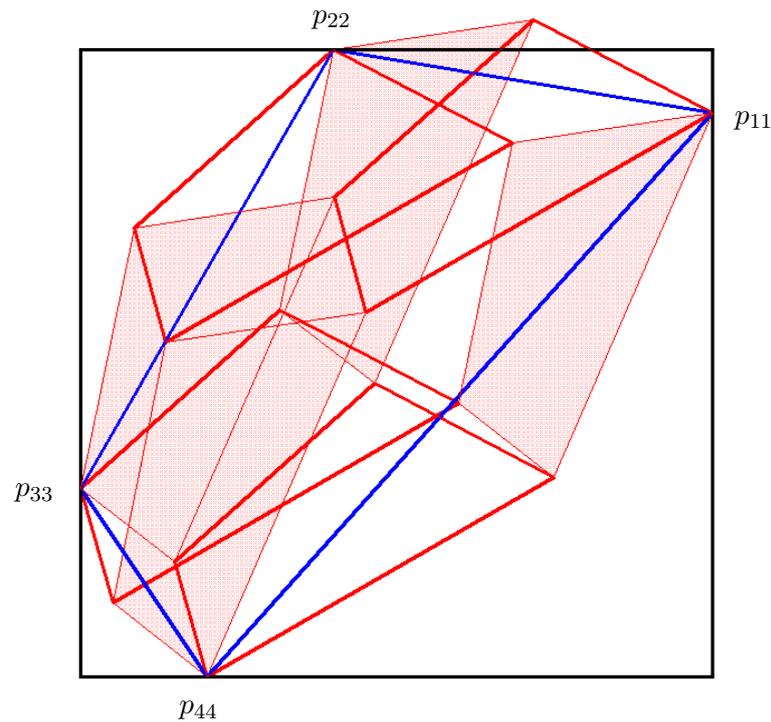


Abbildung 3.13: *Der aus $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ erzeugte Mechanismus*

Um den ebenen Zwanglauf räumlich darstellen zu können, benötigen wir wiederum eine Materialisierung der Systeme. Dies geschieht, analog wie im vorhergehenden Kapitel, indem eine Höhe normal auf die Trägerebene des jeweiligen Vierecks aufgetragen wird. Um die benötigte Bewegung zu erreichen, müssen die 8 Systeme auf 4 Schichten unterschiedlicher Höhe aufgeteilt werden. Dies gelingt unter anderem, wenn in die höchste Ebene drei, in die darunterliegende ein und in die zwei restlichen Ebenen jeweils zwei Systeme gelegt werden.

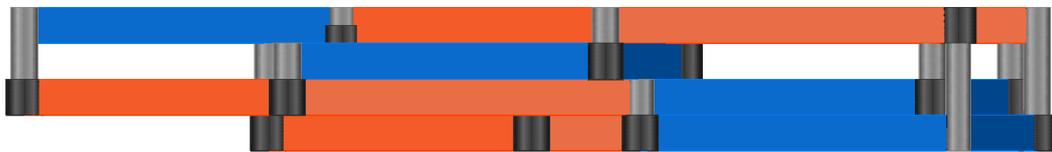


Abbildung 3.14: *Jeweils zwei Objekte liegen in einer von vier Schichten*

In Abbildung 3.15 sieht man den ebenen Zwanglauf zu einem festen Zeitpunkt und das zu diesem zugehörige Viereck mit Eckpunkten $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$.

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

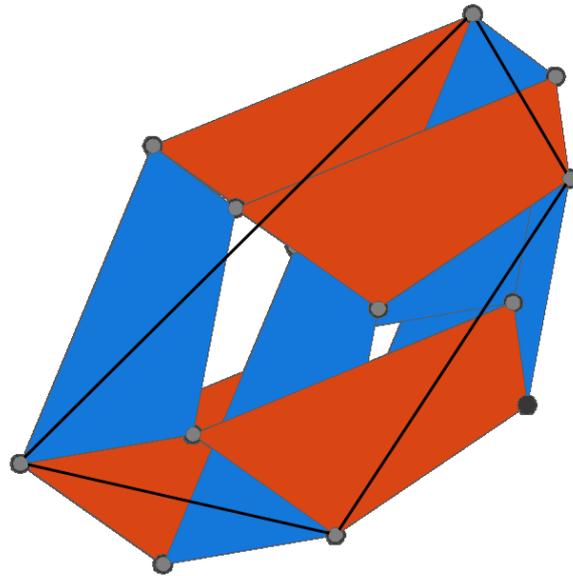


Abbildung 3.15: Grundrissansicht mit Viereck, das $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ als Eckpunkte besitzt

Die Koppelung der einzelnen Systeme, die auf gleichen oder unterschiedlichen Schichten liegen, erfolgt wiederum mithilfe von Drehgelenken. Diese sind von derselben Bauart wie im Falle des regelmäßigen Tetraeders, bis auf ein weiteres Gelenk, das man durch die Erweiterung auf vier Schichten benötigt.

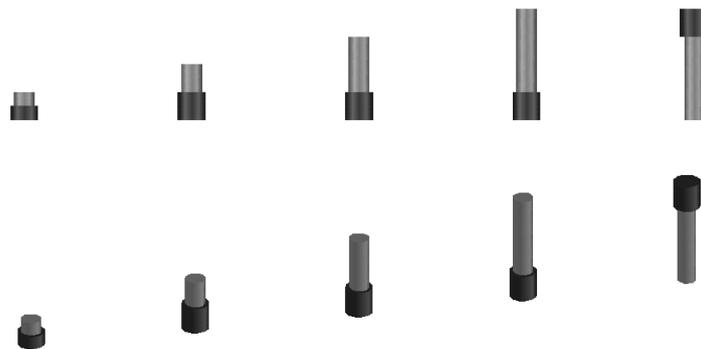


Abbildung 3.16: Drehgelenke des ebenen Mechanismus auf dem Würfel

Um den ebenen Zwanglauf in der Seitenfacette zu vollenden, werden die Drehgelenke passend eingebaut. Die entsprechende Koppelung, zwischen den einzelnen

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

Würfelfacetten, die mithilfe geeigneter Verbindungsstücke durchgeführt wird, wird in Kapitel 3.2.2 beschrieben.

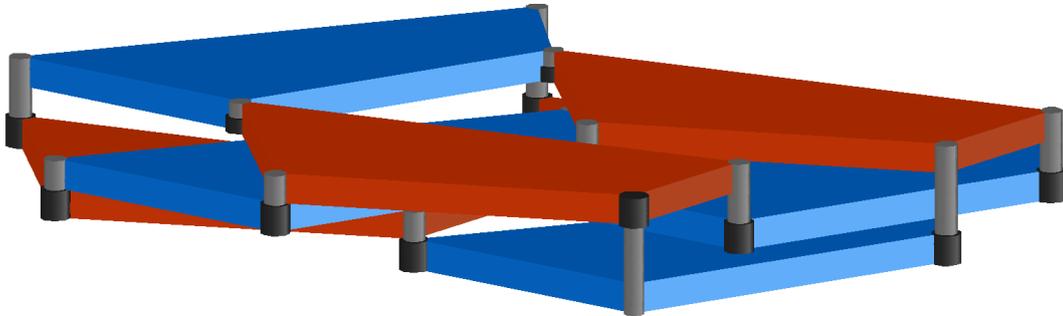


Abbildung 3.17: *Ebener Mechanismus mit eingebauten Gelenken*

Deckfacette Nun wird der ebene Zwanglauf für die Deckfacette erzeugt. Wie am Anfang des Kapitels erwähnt, ergibt sich durch die Wahl des allgemeinen Vierecks auf den Seitenfacetten ein eindeutiges Viereck auf der Deckfacette. Hierbei handelt es sich um ein Rechteck.

Dieses Rechteck soll wiederum mithilfe eines ebenen Mechanismus erzeugt werden. Nun soll dieser, im Unterschied zu vorhin, nicht nur aus einer Rotation und Translation entstehen, sondern es soll auch eine zusätzliche Skalierung durchgeführt werden.

Um nun ein System des Zwanglaufs zu erhalten wird das Rechteck $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ mit dem Faktor 0.5 skaliert, das heißt um die Hälfte verkleinert, und um einen beliebigen Winkel gedreht. Jetzt muss ein weiteres Rechteck erzeugt werden, dieses muss zwischen das skalierte System und den Punkt p_{11} eingepasst werden. Hierzu wird vorerst das skalierte System kopiert, verschoben und in Richtung des Punktes p_{11} gedreht. Anschließend wird dieses wiederum um einen Faktor vergrößert, damit der Eckpunkt genau mit p_{11} zusammenfällt. Daraufhin wird der Mechanismus analog wie vorhin vervollständigt. Diese Vorgehensweise wird wiederum in der folgenden Darstellung verdeutlicht:

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

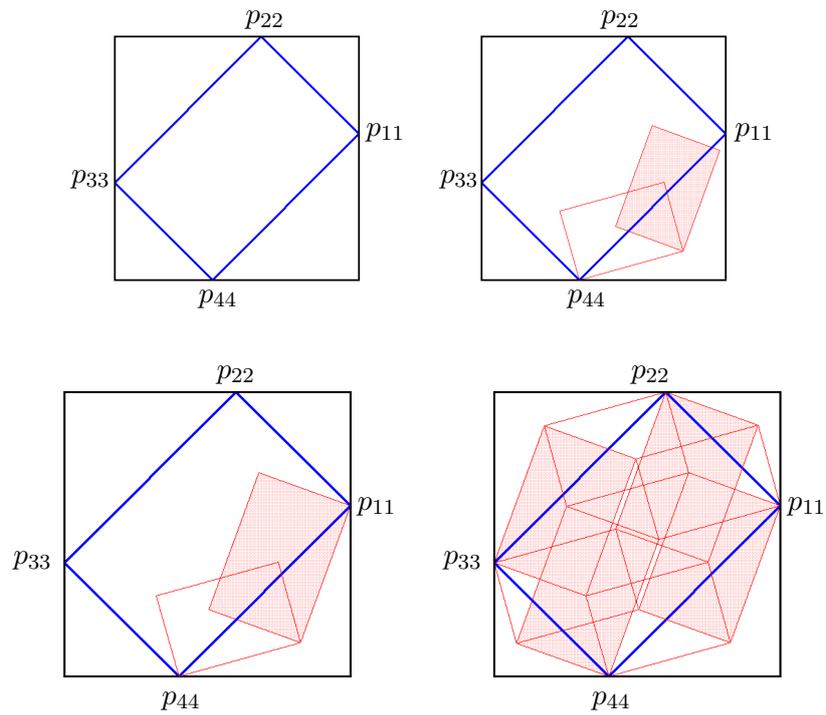


Abbildung 3.18: Erzeugung des ebenen Mechanismus in der Deckfacette des Würfels, wenn das Rechteck $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ gegeben ist

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

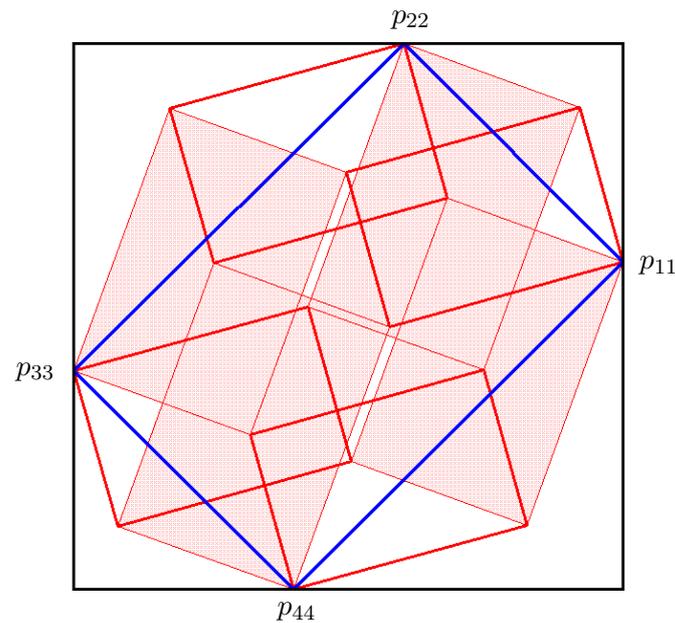


Abbildung 3.19: *Der aus $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ erzeugte Mechanismus*

Die Systeme dieses ebenen Mechanismus werden, um eine räumliche Darstellung zu erhalten, nun wieder materialisiert. Um in diesem Fall die nötige Bewegung unter den Systemen zu erreichen, reicht es, wie im Fall des Tetraeders, die Systeme auf drei unterschiedliche Ebenen aufzuteilen. In jeder Ebene liegen wieder zwei materialisierte Rechtecke. In der folgenden Abbildung wird der Mechanismus der Deckfacette wiederum in einer Grundrissansicht und einer Axonometrie dargestellt. In diesen Ansichten ist auch noch einmal sehr gut zu erkennen, dass der Mechanismus diesmal nicht aus lauter kongruenten Systemen besteht, sondern diese ähnlich zueinander sind.

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

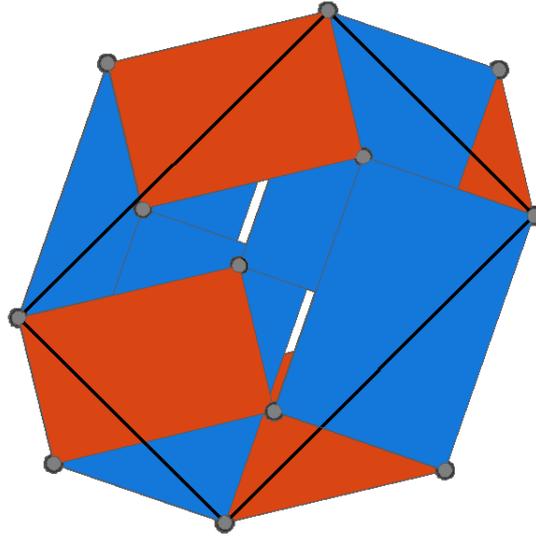


Abbildung 3.20: Grundrissansicht mit Viereck, das $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ als Eckpunkte besitzt

Die Drehgelenke, mit der die Koppelung unter den einzelnen Systemen gewährleistet wird, können analog zu den vorhergehenden Fällen konstruiert werden. Bei den benötigten Drehgelenken handelt es sich um die gleichen, wie beim Mechanismus in der Tetraederfacette - vergleiche mit Abbildung 3.16. Somit können auch die Drehgelenke dementsprechend eingepasst werden, und der Mechanismus für die Deckfacette des Würfels ist somit fertiggestellt.

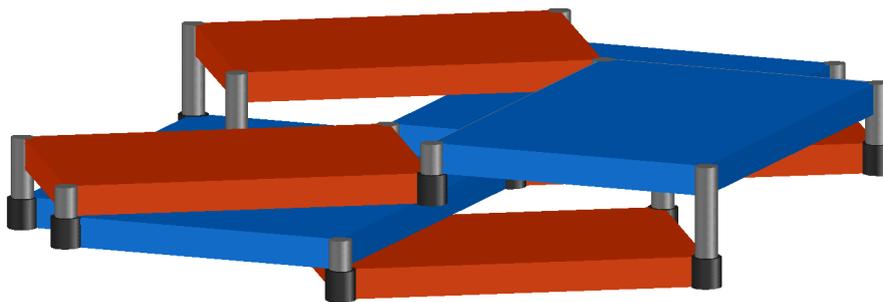


Abbildung 3.21: Ebener Mechanismus mit eingebauten Gelenken

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

Bodenfacette Nun muss noch der ebene Zwanglauf für die Bodenfacette konstruiert werden. Auch in diesem Fall ergibt sich durch die Wahl des allgemeinen Vierecks in der Seitenfacette ein Rechteck $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$, das mithilfe von Rechtecken, die ähnlich zu $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ sind, konstruiert wird und dessen Eckpunkte auf den Kanten der Bodenfacette liegt.

Wie im Fall des Mechanismus in der Deckfacette wird bei der Erzeugung des ebenen Zwanglaufs eine zusätzliche Skalierung durchgeführt. Auch hier ist der Skalierungsfaktor mit 0.5 gewählt, und die Konstruktion kann analog durchgeführt werden. Zur Vollständigkeit ist die Erzeugung in der folgenden Abbildung dargestellt.

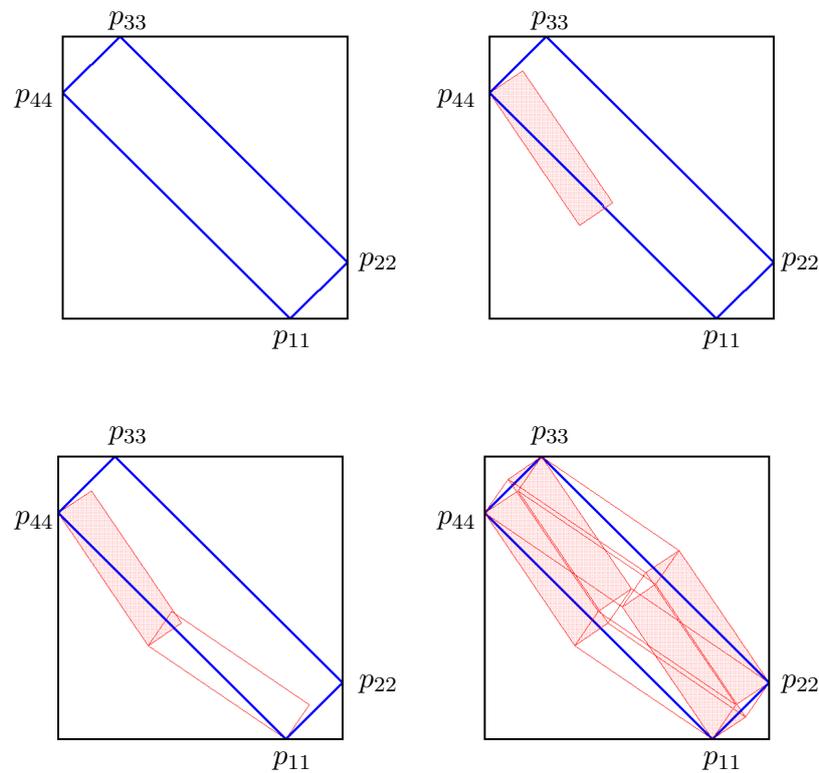


Abbildung 3.22: Erzeugung des ebenen Mechanismus in der Bodenfacette des Würfels, wenn das Rechteck $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ gegeben ist

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

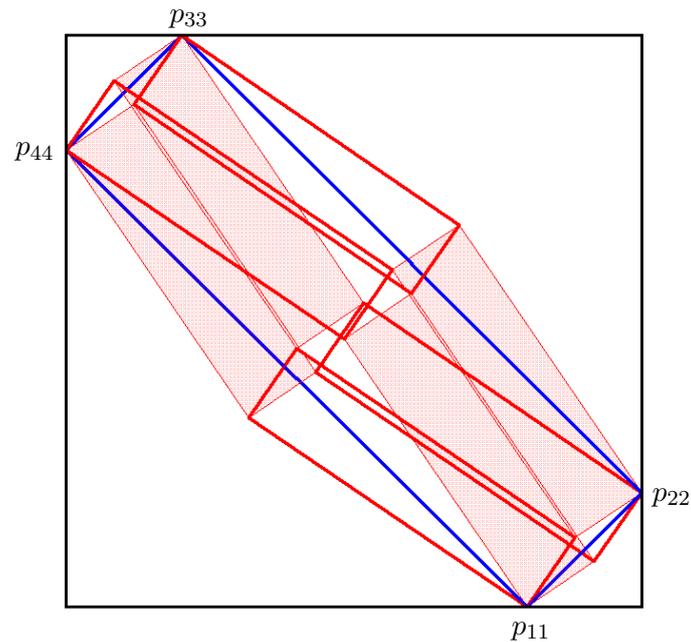


Abbildung 3.23: Der aus $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ erzeugte Mechanismus

Die Materialisierung des Mechanismus und die Aufteilung der einzelnen Systeme auf unterschiedliche Schichten wird, wie im Fall der Deckfacette, durchgeführt.

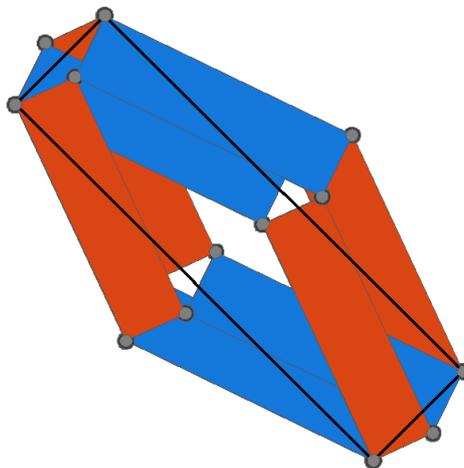


Abbildung 3.24: Grundrissansicht mit Viereck, das $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ als Eckpunkte besitzt

Zur Deckfacette und der Bodenfacette werden Mechanismen erzeugt, die zu den

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

Rechtecken passen müssen. Dies ergibt in Analogie zum obigen Vorgehen den in Abbildung 3.25 vorgestellten Teilmechanismus.

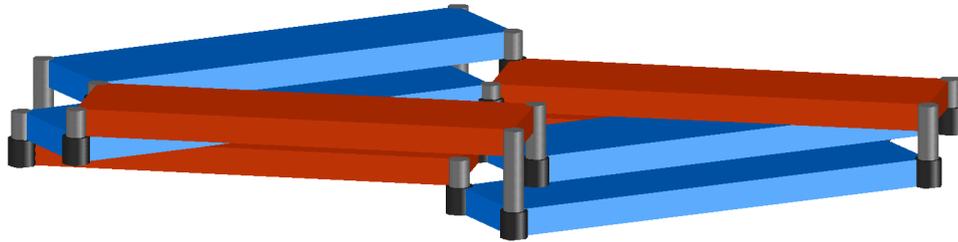


Abbildung 3.25: *Ebener Zwanglauf mit eingebauten Gelenken*

3.2.2 Koppelung zweier ebener Zwangläufe die auf benachbarten Würfelfacetten basieren

Die Erzeugung der Mechanismen, die in den einzelnen Würfelfacetten liegen, wurde in den vorhergehenden Abschnitten ausführlich erklärt.

Nun geht es wieder darum, diese miteinander zu koppeln. Die Verbindungsstücke haben eine sehr ähnliche Bauart wie im Fall des Mechanismus auf dem Tetraeder in Kapitel 3.1.2. Da in den Seitenfacetten der Mechanismus auf vier Ebenen aufgeteilt werden musste, muss auch das Verbindungsgelenk dementsprechend angepasst werden. Daher sind die Drehzylinder, die auf den Drehachsen, die jeweils normal auf die entsprechenden Trägerebenen der Zwangläufe liegen, genau um diesen einen Ebenenabstand höher bzw. länger. Bei dem Winkel, der von je zwei Facetten eingeschlossen wird und bei einer Ähnlichkeit unverändert und daraus folgend fest bleibt, handelt es sich um einen 90° Winkel.



Abbildung 3.26: *Verbindungsstücke zweier Nachbarfacetten mit Drehgelenken für die drei Trägerebenen*

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

Das in Abbildung 3.26 dargestellte Verbindungsstück beinhaltet schon Drehgelenke die eine Bewegung mit den Systemen, auf unterschiedlicher Höhe, gewährleisten. Diese Drehgelenke müssen natürlich immer entsprechend ihrer benötigten Lage oder besser gesagt ihrer Höhe im Zwanglauf eingepasst werden. Insgesamt benötigt man für den räumlichen Mechanismus 8 solcher Verbindungsstücke.

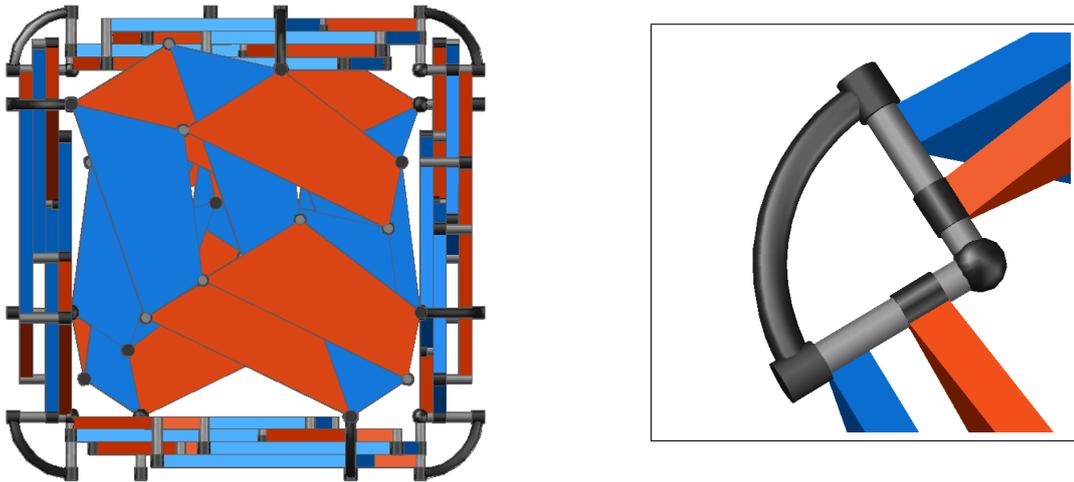


Abbildung 3.27: Verbindungsstück zweier Facetten eingebaut

Wird der in einer Würfelfacette vorliegende ebene Mechanismus bewegt, so wird das aus den Lagen der Punkte $p_{11}p_{22}p_{33}p_{44}$ gebildete Viereck vergrößert oder verkleinert. Argumentiert man nun analog wie in Abschnitt 3.1.2 erhält man folgenden

Satz 6. *Der in diesem Abschnitt auf Basis des Würfels erzeugte Mechanismus besitzt zumindest eine einparametrische Eigenbewegung.*

3.2.3 Der theoretische Freiheitsgrad des in 3.2.2 konstruierten Mechanismus

Der Freiheitsgrad des räumlichen Mechanismus auf dem Würfel wird wiederum mit der adaptierten GRÜBLERschen Formel berechnet:

Gegeben: 6 einparametrisch bewegliche ebene Zwangläufe Z_0, \dots, Z_5 in den Facetten

3 Koppelung ebener Zwangläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels

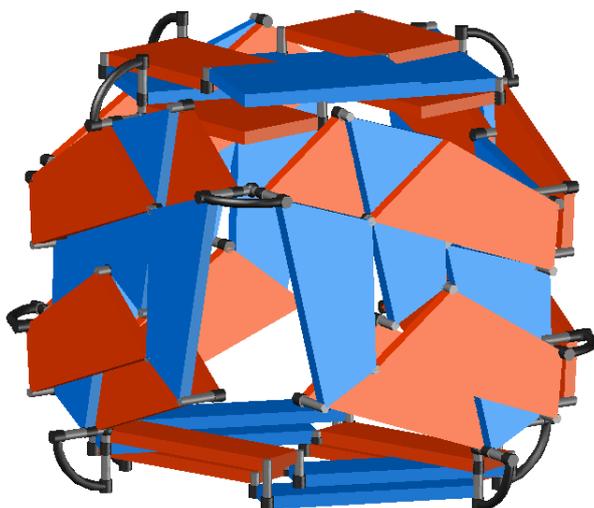
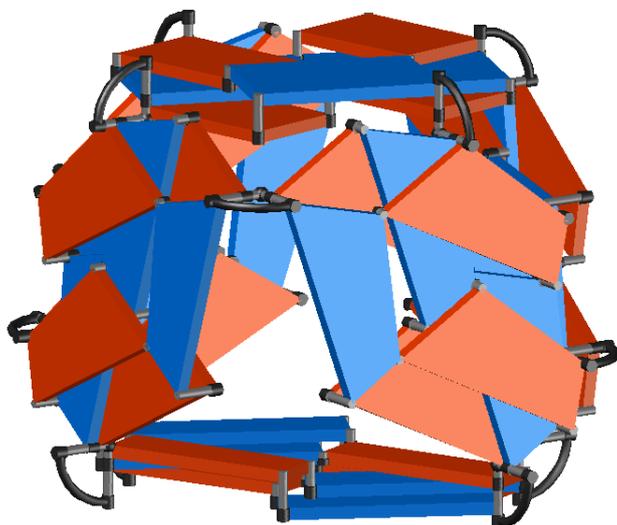
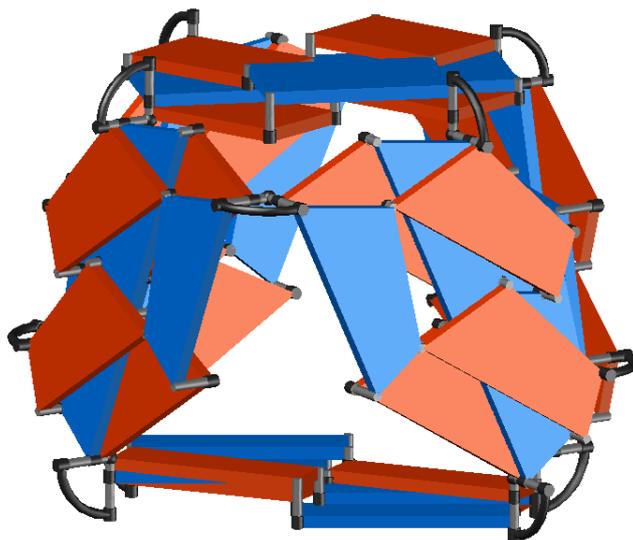
und 12 Gelenke mit Freiheitsgrad $f_i = 2$ ($i = 1, \dots, g$) (Koppelung der Facetten).

$$\begin{aligned} F^* &= 7n - 6 - 6g + \sum_{i=1}^g f_i \\ &= 7 \cdot 6 - 6 - 6 \cdot 12 + 12 \cdot 2 \\ &= 6 \cdot (7 - 1 - 12 + 4) \\ &= -12 \end{aligned}$$

Es handelt sich wegen der nach Satz 6 sicher vorhandenen einparametrischen Eigenbewegung um einen übergeschlossenen Mechanismus.

In der folgenden Darstellung kann man das polyedrische Modell zu drei unterschiedlichen Positionen beim Zwanglauf betrachten. Hierzu ist noch zu sagen, dass schon der ebene Zwanglauf, dem alles zugrunde liegt, eine sehr geringe Beweglichkeit besitzt, daher erhält man auch im Raum eine bescheidene Beweglichkeit und man kann daher auch nur dementsprechend geringe Veränderungen erkennen.

3 Koppelung ebener Zwangsläufe auf Basis des regelmäßigen Tetraeders und Würfels



Literaturverzeichnis

- [1] Amon, H.: *Aus ebenen Gelenksketten hergestellte übergeschlossene Mechanismen*. Diplomarbeit TU Graz, 2013.
- [2] Cromwell, P.: *Polyhedra*. Cambridge University Press, 1997.
- [3] Gferrer, A.: *Kinematik und Robotik*. Skriptum zur gleichnamigen Vorlesung, 2. Fassung, 2008.
- [4] Glaeser, G.: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. Elsevier GmbH, München, 2. Auflage, 2007.
- [5] Husty, M., Karger, A., Sachs, H., Steinhilper, W.: *Kinematik und Robotik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997.
- [6] Holzapfel, M.: *Eigenschaften platonischer Körper*. http://www.michael-holzapfel.de/themen/geom_koerper/platon_koerper/platon_koerper.htm, 25.03.2014.
- [7] Jahn, A.: *Platonische Körper*. <http://www.math.kit.edu/iag2/lehre/pro-lehr2006w/media/platon-praesentation.pdf>, 02.04.2014.
- [8] Röschel, O.: *Perspectivities Established by Six Congruent Triangles*. Forum Geom. (Preprint, eingereicht), 2013.
- [9] Röschel, O.: *Overconstrained mechanisms based on trapezohedra*. Proc. of the 15th International Conference on Geometry and Graphics, Montreal, 2012.
- [10] Röschel, O.: *Polyeder und der EULERSche Polyedersatz*. Skriptum zum Proseminar Geometrie, WS 2008/09.
- [11] Thaller, B.: *Leonardo und der Goldene Schnitt*. Skriptum zur Vorlesung „Schulmathematik“, 13.11.2011.
- [12] Wallner, J.: *Darstellende Geometrie*. Vorlesungsskriptum zur gleichnamigen Vorlesung für die Studienrichtungen Bauingenieurwesen und Wirtschaftsingenieurwesen-Bauwesen, WS 2008/09.

Literaturverzeichnis

- [13] Zobl, M.: *Mechanismen im Zusammenhang mit regelmäßigen Polyedern*. Diplomarbeit TU Wien, 2011.