

# Elastomechanik von Stäben mit komplexem Querschnittsaufbau und verallgemeinerter Querschnittskinematik

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der technischen Wissenschaften  
verfasste Dissertation.

Eingereicht an der  
Fakultät für Bauingenieurwesen  
der Technischen Universität Graz  
von

DDI Thomas F.X. Moosbrugger

Erstbegutachter: Ao.Prof. Dr.techn. Werner Guggenberger  
Technische Universität Graz  
Institut für Stahlbau  
A-8010 Graz, Lessingstraße 25

Zweitbegutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Holm Altenbach  
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg  
Fakultät für Maschinenbau  
Institut für Mechanik (IFME)  
39106, Magdeburg, G10-038, Gebäude 10, Universitätsplatz 2

Graz, im Dezember 2012



meinen Eltern



# Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Werner Guggenberger für die großartige und unermüdliche Betreuung dieser Arbeit während der gesamten Dauer der Bearbeitung sowie für die Begutachtung meiner Dissertation. Seinem Engagement ist es zu verdanken, dass ich viele wertvolle Erfahrungen sammeln konnte, die weit über das Themengebiet dieser Arbeit hinausreichen.

Bester Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Holm Altenbach für die kritische Begutachtung und Beurteilung meiner Dissertation.

Für das entgegengebrachte Vertrauen darf ich Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Gerhard Schickhofer danken. Er hat es mir während meiner Assistentenzeit an der TU Graz ermöglicht, die wesentlichen Lehrveranstaltungen des Instituts für Holzbau und Holztechnologie aktiv mit zu gestalten. Zudem ermöglichte er mir eine interessante Zusammenarbeit im Rahmen meiner Anstellung bei der holz.bau forschungs gmbh.

Die Technische Universität Graz hat durch die Gewährung eines Forschungsstipendiums einen wesentlichen finanziellen Beitrag zur Ermöglichung dieser Dissertation geleistet, dafür vielen Dank.

Für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die Unterstützung gilt mein aufrichtiger Dank meinen Kollegen der Rubner Gruppe, allen voran den Herren Dipl.-BW Stefan Rubner, Dr. Thomas Burger und Paul Leiter.

Ohne die Unterstützung meiner geschätzten Freunde und Kollegen Thomas Bogensperger, Burkhard Krenn, Harald Krenn, Helene Unterwieser und Hildegard Weißnar, in Form von zahlreichen fachlichen und persönlichen Diskussionen, wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Ihnen ein herzliches Dankeschön.

Ein ganz besonderes Dankeschön für die liebevolle Unterstützung und die vielen aufbauenden Worte auf meinem gesamten bisherigen Lebensweg gilt meine Eltern Inge und Franz Xaver.

Für ihre Unterstützung danke ich auch Margit und Peter, Peter durfte diesen Moment leider nicht mehr miterleben.

Für die unendliche Geduld, für die Wertschätzung meiner Arbeit und für die ständige Unterstützung und Aufmunterung in den letzten Jahren danke ich meiner Freundin Iris.

Thomas Moosbrugger  
Dornbirn, im Dezember 2012

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, im Dezember 2012

# Kurzfassung

Im Rahmen der Dissertation wird die konsequente Darstellung und durchgängige Herleitung der 3D-Stab-Gleichgewichts-Differentialgleichungen auf Basis von strukturierten, hierarchisch geordneten, produktartigen Verschiebungsansätzen für den prismatischen Stab gezeigt.

Bezüglich der Querschnittsgeometrie werden dabei keinerlei Einschränkungen gefordert. Dies betrifft sowohl die geometrischen Eigenschaften (Form der Querschnittsberandung und des Querschnittsaufbaus) als auch die mechanische Modelldarstellung in Form von dünnwandigen bzw. dickwandigen Querschnittsbeschreibungen. Es lassen sich allgemeine Verbundquerschnitte mit und ohne nachgiebigen Verbundfugeneigenschaften zwischen den einzelnen Querschnittsteilen unterschiedlichen Materialverhaltens beschreiben. Ein wesentlicher Punkt der Arbeit ist die einheitliche theoretische Beschreibung des Einzelquerschnittsteilverhaltens sowie des Verbundfugenverhaltens, obwohl die Auswirkungen auf das Gesamtstabverhalten von wesentlichen Unterschieden geprägt sind. Das Materialverhalten beschränkt sich innerhalb dieser Arbeit auf „lineare Elastizität“ und hat ausschließlich den Anforderungen der geraden Prismaticität zu genügen.

Die Gleichungen werden dabei für den homogenen Stab-Belastungsfall gelöst, d. h. Belastungszustände in Form von Kräften bzw. Verschiebungen/Verdrehungen werden ausschließlich über die Stabend-Querschnitte in den Stab eingeleitet. Partikuläre Stabbelastungen in Form von im Stabinneren liegenden Belastungszuständen werden nicht behandelt. Als wesentlich bei der Herleitung des beschreibenden Differentialgleichungssystems erscheint dabei, dass das Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem für das Gesamtproblem und nicht nur für ausgewählte Einzelverformungszustände gezeigt wird. Durch die Einarbeitung des exakten kinematischen 3D-Verformungsverhaltens lässt sich die Gültigkeit der etablierten erweiterten Biegetheorie für die exakte Stablösung auf den gesamten  $L/H$ -Bereich (Stablänge zu Querschnitt) ausdehnen.

## Abstract

This thesis gives a consistent description and derivation of the 3D-beam equilibrium differential equation on the basis of structured, hierarchically ordered, product-like displacement approaches for the prismatic beam without limitations regarding the geometry of the cross-section. This regards both, the geometric properties (shape of cross-section boundary and layout) and the representation of the mechanical model describing thin- or thick-walled cross-sections. The model is able to describe composite sections in general with or without flexible joints between the single parts of the cross-section.

A substantial item of this work is the standardised theoretical description of the behaviour of the single parts of the cross-section as well as the behaviour of the joints between these parts despite of the fundamentally different effect on the behaviour of the beam itself. In the scope of this work, the material-behaviour is restricted to "linear elasticity" and has only to fulfil the requirement for the beam to be of linear prismatic nature.

The equations are solved for homogeneous beam loading conditions, i. e. loading conditions like forces or translations/rotations are applied to the beam at its end cross-sections. Particularly beam loading, in terms of loading situations acting within the beam, is not covered. Substantial for the derivation of the described system of differential equations is the fact that the system of equilibrium differential equations is completely solved and not only for selected deformation conditions. It is shown that the validity of the modified beam-theory can be extended to the complete  $L/H$ -range (beam-length over cross-sectional dimension) by implementation of exact 3D-kinematic deformation behaviour.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Stand der Technik</b>	<b>1</b>
1.1	Einleitung .....	2
1.2	Motivation .....	5
1.3	Stand der Technik und des Wissens .....	7
1.3.1	Grundlagen und Historie zu den klassischen technischen Biegetheorien .....	7
1.3.2	Orthogonalisierung der einzelnen Stabverformungszustände .....	9
1.3.3	Weiterentwicklung der klassischen Stabtheorie .....	9
1.3.4	Wichtige Veröffentlichungen in Zusammenhang mit dieser Arbeit .....	9
1.3.5	Grundlagen der verallgemeinerten Biegetheorie .....	12
1.3.6	Historische Entwicklung der verallgemeinerten Biegetheorie (VBT, GBT) .....	12
<b>2</b>	<b>Problemstellung, Ziel und Aufbau der Arbeit</b>	<b>23</b>
2.1	Problemstellung .....	24
2.1.1	Grundlagen des prismatischen Stabes .....	24
2.1.2	Herleitung der Grundgleichungen für den prismatischen Stab .....	24
2.1.3	Lösung der Grundgleichungen für den prismatischen Stab .....	25
2.1.4	Aufbereitung von ausgewählten Beispielen für den 2D- & 3D-Fall .....	26
2.2	Ziel der Arbeit .....	27
2.3	Aufbau der Arbeit .....	28
2.3.1	Einleitung und Stand der Technik .....	28
2.3.2	Problemstellung, Ziel und Aufbau der Arbeit .....	28
2.3.3	Grundlagen für den prismatischen Stab .....	28
2.3.4	3D-Mechanik .....	28
2.3.5	Grundlagen für das etablierte Stabmodell .....	28
2.3.6	Herleitung der Grundgleichungen für den 3D-Stab .....	29
2.3.7	Strukturierte Lösung der Grundgleichungen für lineare Isotropie .....	29
2.3.8	Beispiele für den 2D- & 3D-Fall .....	30
2.3.9	Zusammenfassung und Ausblick .....	30
2.3.10	Anhang .....	30
<b>3</b>	<b>Grundlagen für den prismatischen Stab</b>	<b>31</b>
3.1	Einleitung .....	32
3.2	Die perfekte gerade Prismatizität des Stabes .....	32
3.2.1	Anfangsgeometrien des prismatischen Stabes .....	32

3.2.2	Die gerade perfekte Prismatizität.....	32
3.3	Der beliebig komplexe geometrische Stabquerschnitt.....	39
3.3.1	Die Querschnittsberandung.....	39
3.3.2	Bausteine des Stabquerschnitts.....	39
3.3.3	Klassifizierung des Querschnitts nach seiner Form und seinem inneren Aufbau.....	40
3.3.4	Dickwandige kompakte Querschnitte .....	42
3.3.5	Dünnwandige Querschnitte.....	43
3.3.6	Kombinierte dickwandige und dünnwandige Querschnitte.....	43
3.4	Der materielle Aufbau des Stabes .....	45
<b>4</b>	<b>3D-Mechanik</b>	<b>53</b>
4.1	Einleitung .....	54
4.2	Kinematik .....	56
4.2.1	Das 3D-Verschiebungsfeld des anonymen 3D-Kontinuums.....	56
4.2.2	Unstrukturiertes 3D-Gesamtverzerrungsfeld für den Querschnitt .....	60
4.2.3	Strukturiertes 3D-Gesamtverzerrungsfeld für den Querschnitt.....	60
4.3	Konstitution.....	65
4.3.1	Grundlagen und Definition der Spannungen .....	65
4.3.2	Darstellung des 3D-Spannungsvektors auf der Staboberfläche .....	70
4.3.3	Definition der Materialhauptachsen für das betrachtete Materialverhalten .....	78
4.3.4	Isotropes und Orthotropes Materialverhalten – Materialhauptachsenlage .....	80
4.4	Kinetik.....	83
4.4.1	Kräfte- bzw. Translationsgleichgewicht am Volumenelement .....	83
4.5	3D-Gleichgewichtsgleichungen in originaler Differentialform .....	85
4.5.1	3D-Feldgleichungen des Gleichgewichts.....	85
4.5.2	Randbedingungen an den Staboberflächen des Stabkörpers .....	85
4.5.3	Vollständige Form des 3D-Gleichgewichts in Differentialformulierung .....	86
4.6	3D-Gleichgewichtsgleichungen in Integralformulierung.....	87
4.6.1	3D-Gleichgewichtsgleichungen in Integralform in originaler Darstellung .....	87
4.6.2	3D-Gleichgewichtsgleichungen in Integralform nach partieller Integration.....	91
<b>5</b>	<b>Grundlagen für das etablierte Stabmodell</b>	<b>93</b>
5.1	Einleitung .....	94
5.2	Die verallgemeinerte Kinematik des Querschnitts .....	95
5.2.1	2D-Querschnittskinematik .....	95
5.2.2	1D-Querschnittskinematik .....	95
5.2.3	1D <sup>+</sup> -Querschnittskinematik.....	96
5.2.4	1D- & 2D-Kinematik.....	96
5.3	Der verallgemeinerte Verschiebungsansatz des 3D-Kontinuums.....	98
5.3.1	Grundlagen für das 3D-Verschiebungsfeld .....	98
5.3.2	Hierarchisch strukturiertes Verschiebungsfeld in Produktdarstellung .....	98
5.4	Orthogonalitätsprinzip für die 3D-Einzelverschiebungsfelder.....	103

5.5	Linear elastisches Materialverhalten in strukturierter Darstellung.....	104
5.5.1	Materialverhalten der linear elastischen Orthotropie .....	104
5.5.2	Materialsteifigkeitsmatrizen in strukturierter neu geordneter Darstellung.....	104
5.6	Belastungssituation für den prismatischen Stab.....	107
5.6.1	Der homogene Belastungsfall.....	107
5.6.2	Der partikuläre Belastungsfall (Nicht Teil der Arbeit).....	107
5.7	Strukturierter Produktansatz für Belastungen des prismatischen Stabes .....	115
5.7.1	Belastungsansatz im 3D-Kontext .....	115
5.7.2	Hierarchisch geordneter Produktansatz für die Belastungen im Stabkontext.....	116
5.8	Der prismatische Stabzug.....	118
5.8.1	Gerade Stabsysteme aus geraden gekoppelten prismatischen Einzelstäben.....	118
5.9	Randbedingungen und Koppelungsbedingungen .....	123
5.9.1	Randbedingungen an der Staboberfläche .....	123
5.9.2	Koppelung und Übergangsbedingungen an den Stabendquerschnitten .....	123
5.10	Festlegungen und Zusammenfassung für das etablierte Stabmodell.....	128
<b>6</b>	<b>Herleitung der Grundgleichungen für den 3D-Stab</b>	<b>129</b>
6.1	Einleitung und Vorgangsweise für die Herleitung der Grundgleichungen.....	130
6.2	Kinematik.....	131
6.2.1	Verschiebungsansatz.....	131
6.2.2	Strukturiertes 3D-Gesamtverzerrungsfeld für den Stabquerschnitt.....	137
6.3	Konstitution .....	150
6.3.1	Strukturierte Darstellung des Materialverhaltens in Materialhauptachsenlage .....	150
6.3.2	Drehung der Materialhauptachsen um die $X_1$ -Achse .....	151
6.3.3	Global gedrehte orthotrope Materialsteifigkeitsmatrix.....	160
6.3.4	Global gedrehte isotrope Materialsteifigkeitsmatrix.....	161
6.3.5	Unstrukturierte ungeordnete Darstellung: Drehung um die $X_1$ -Achse.....	162
6.3.6	Erweitertes/adaptiertes Materialgesetz in strukturierter Darstellung.....	163
6.3.7	Darstellung der 3D-Spannungen.....	165
6.4	Kinetik – Statisches 3D-Translationsgleichgewicht.....	168
6.4.1	3D-Gleichgewichtsgleichungen in Differentialformulierung.....	168
6.5	Äquivalente Integraldarstellung der Gleichgewichtsgleichungen .....	173
6.5.1	Übergang von der Differentialform auf die Integralform des Gleichgewichts.....	173
6.5.2	Überblick über die Stab- und Querschnittsgleichgewichtsgleichungen .....	178
6.5.3	Gleichgewicht in originaler Integraldarstellung .....	180
6.5.4	Aufbereitung der Querschnitt-Gleichgewichtsgleichung ( $\Omega$ -Problem).....	183
6.5.5	Aufbereitung der Stab-Gleichgewichtsgleichungen (0-Problem) .....	192
6.5.6	Aufbereitung der Stabgleichgewichtsgleichungen ( $\Psi$ -Problem).....	197
6.6	Struktur des Differentialgleichungssystems.....	202
6.6.1	Allgemeiner Aufbau des Gleichungssystems .....	202
6.6.2	Darstellungsformen der Gleichungen in Abhängigkeit der Lösungsmethodik.....	205
6.7	Aufbereitung der Gleichungen für die analytische Lösung .....	206

6.7.1	GLG-DGL-System für orthotropes Material: Umgewandelte Integralform .....	206
6.7.2	Querschnitt-GLG-DGL für den Stab mit Randbedingungen: Originale Integralform.....	214
6.7.3	Zusammengefasstes Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem .....	219
6.8	Aufbereitung der Gleichungen für die numerische Lösung .....	220
6.8.1	Gleichgewichts-DGL-System für den Stab, orthotropes Material .....	220
6.8.2	Querschnitt-GLG-DGL mit RB in umgewandelter diskretisierter Integralform .....	223
6.8.3	Zusammengefasstes Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem (diskretisiert).....	225
<b>7</b>	<b>Strukturierte Lösung der Grundgleichungen für lineare Isotropie</b>	<b>227</b>
7.1	Einleitung .....	228
7.1.1	Grundlagen zur Lösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems.....	228
7.1.2	Gedanken zur Querschnittsdiskretisierung .....	230
7.1.3	Ansatzfunktionen versus Gesamtquerschnittsverschiebungsfelder.....	237
7.1.4	Eigenschaften der 3D-Einzelverschiebungsfelder .....	239
7.1.5	Zuordnung der globalen Schnittgrößen zu den Lösungsanteilen I und II .....	239
7.1.6	Lösungsstrategien für das 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem.....	240
7.1.7	Matrixorientierte Lösungsmethodik zur Ermittlung der Stabsteifigkeitsmatrix.....	244
7.2	Freifeldlösung ausgedrückt in den relativen Einzelverschiebungsfeldern.....	246
7.3	Orthogonalisierung der relativen 3D-Verschiebungsfelder .....	250
7.4	Lösungsanteil 1: Bestimmung der Freifeldlösung .....	252
7.4.1	Grundlagen der Freifeldlösung .....	252
7.4.2	Lösung der Gleichgewichtsdifferentialgleichungen .....	255
7.4.3	Reduktionen für die Gleichgewichtsgleichungen 1-7 .....	257
7.4.4	Darstellung der Wölbsteifigkeitsterme in Abhängigkeit der Stabverzerrungen .....	265
7.4.5	Separiert dargestellte Wölbsteifigkeitsterme – dimensionsreine Darstellung .....	265
7.4.6	Schubkorrekturfaktoren .....	269
7.4.7	Diskretisierte Darstellung der Freifeldlösung (Zeile 7).....	271
7.4.8	Lösung des DGL-Systems in $X_1$ -Richtung für die Freifeldlösung.....	272
7.5	Lösungsanteil 2: Bestimmung der Abklinglösungen.....	284
7.5.1	Lösungsstrategie für die Bestimmung der Abklinglösungen .....	284
7.5.2	Formulierung des Eigenwertproblems zur Gleichungslösung .....	285
7.5.3	Lösung des Eigenwertproblems für isotropes Materialverhalten $\nu=0$ .....	287
7.5.4	Überführung auf ein erweitertes Eigenwertproblem erster Ordnung.....	290
7.5.5	Lösung des erweiterten Eigenwertproblems .....	292
7.5.6	Bestimmung der Abklingzahlen für beliebige 3D-Verschiebungsfelder.....	293
7.5.7	Darstellung des Abklingverlaufes in Stablängsrichtungen .....	295
7.6	Bestimmung der Lösungsanteile mit kommerziellen FE-Programmen .....	302
7.6.1	Einzellastfälle – Bestimmung der Freifeldlösung .....	302
7.6.2	Natural Frequency Extraction – Lösung des Eigenwertproblems.....	302
7.6.3	Massenkorrektur für die transversale Schwingung.....	303
7.7	Stabsteifigkeitsmatrix für das Stabelement.....	304
7.7.1	Zusammenfassung für Lösungsanteil I: 0-Problem .....	304
7.7.2	Zusammenfassung für Lösungsanteil II: $\Omega$ -Problem.....	304
7.7.3	Finale Formulierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix.....	305

7.8	Stabsteifigkeitsmatrix mit partieller Integration in $X_1$ -Richtung .....	308
7.8.1	FE-Formulierung in Stablängsrichtung .....	308
7.8.2	Partielle Integration der inneren virtuellen Arbeit.....	308
<b>8</b>	<b>Beispiele für den 2D- &amp; 3D-Fall</b>	<b>311</b>
8.1	Einleitung .....	312
8.1.1	Stabquerschnitte mit ebener 2D-Stabkinematik .....	312
8.1.2	Stabquerschnitte mit räumlicher 3D-Stabkinematik .....	312
8.1.3	Grundlagen zum statischen System für die Beispiele mit 2D- & 3D-QS-Kinematik .....	312
8.1.4	Belastungssituation für den Kragarm in axialer Richtung.....	313
8.1.5	Bezugsspannungen für die Normalspannung die Schubspannungsdarstellung .....	313
8.2	Erläuterungen zu den Beispielen und zu den Ergebnissen .....	316
8.3	Homogener Querschnitt mit ebener Stab-Kinematik (2D-Kinematik).....	319
8.3.1	Rechteck-Querschnitt mit ebener Stab-Kinematik: Exakte Lösung .....	319
8.3.2	Rechteck-Querschnitt mit ebener Stab-Kinematik: FF-Lösung als Abklinglösung .....	343
8.4	Inhomogene Querschnitte mit ebener Kinematik (2D-Kinematik) .....	355
8.4.1	Rechteckquerschnitt mit einer nachgiebigen Verbundfuge .....	355
8.4.2	Dreiteiliger rechteckiger Verbund-QS mit zwei starren Fugen: Typ 1 .....	373
8.5	Massive Querschnitte mit räumlicher Kinematik (3D-Kinematik).....	391
8.5.1	Einteiliger Rechteck-Querschnitt (1S) .....	391
8.5.2	Dreiteiliger Rechteck-Querschnitt (3S): .....	405
8.5.3	Zweiteiliger Rechteckquerschnitt mit nachgiebiger Verbundfuge.....	419
8.5.4	Allgemeine Querschnittsberandung: Zwei QS-Teile.....	433
8.5.5	Monosymmetrischer I-Querschnitt mit starren Verbundfugen .....	441
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>449</b>
9.1	Zusammenfassung.....	450
9.1.1	Herleitung, Lösung und Anwendung des etablierten Stabmodells .....	450
9.1.2	Diskussion klassischer Stabphänomene .....	453
9.2	Ausblick.....	455
9.3	Literaturverzeichnis .....	457
9.3.1	Bücher .....	457
9.3.2	Artikel.....	460
9.3.3	Programmdokumentationen .....	462
<b>A</b>	<b>Integralidentitäten</b>	<b>463</b>
<b>B</b>	<b>Detaillierte Herleitungen für die GLG-Gleichungen</b>	<b>469</b>
<b>C</b>	<b>Schnittgrößen in Abhängigkeit der Stab-Verzerrungs-Parameter</b>	<b>495</b>
<b>D</b>	<b>Vorfaktormatrizen des originalen DGL-Systems</b>	<b>537</b>

---

<b>E</b>	<b>Vorfaktormatrizen des umgewandelten diskretisierten DGL-Systems</b>	<b>557</b>
<b>F</b>	<b>Darstellung der Gleichgewichts- Differential-Gleichungen</b>	<b>575</b>
<b>G</b>	<b>Programm-Dokumentation für die FE- Querschnittsanalyse</b>	<b>603</b>

---

# Notation

Im Sinne einer klaren, eindeutigen und durchgängigen Lesbarkeit dieser Arbeit werden alle verwendeten Formelzeichen definiert. Das Bezeichnungsschema wird strikt durch die gesamte Arbeit durchgezogen.

Für die verwendeten Formelzeichen gelten die folgenden grundlegenden Definitionen:

- *Skalare Größen werden mit nicht fett gedruckten kleinen und großen Buchstaben bezeichnet.*
- *Vektorielle Größen und Matrizen werden mit fett gedruckten Formelzeichen bezeichnet.*
- *Vektoren werden durch fett gedruckte Kleinbuchstaben bezeichnet.*
- *Matrizen werden durch fett gedruckte Großbuchstaben bezeichnet.*

Die angeführten Formelzeichen werden sowohl für homogene als auch für heterogene Querschnitte verwendet. Im Falle der heterogenen, gegliederten Querschnitte werden die Querschnittsteile durch den Index  $i$  gekennzeichnet.

Im Folgenden werden essentielle Indexbezeichnungen wegen ihrer Wichtigkeit hervorgehoben.

- „ $\mathbf{0}$ “ bezeichnet alle mit den Starrkörperbewegungsfreiheitsgraden der Querschnittskinematik des Querschnitts zusammenhängenden Größen.
- „ $\mathbf{\Omega}$ “ bezeichnet alle den Relativverschiebungsfreiheitsgraden der Querschnittskinematik des Querschnitts zugeordneten Größen.
- „ $\psi$ “ bezeichnet den Bezug zum Amplitudenvektor der 3D-Relativverschiebungsfelder.
- „ $\perp$ “ beschreibt den reinen Balkenverformungszustand ohne jegliche Querschnittsverformung des Stabquerschnitts.
- „ $\parallel$ “ beschreibt den echten Querschnittsverformungszustand, das heißt den reinen ebenen Verzerrungszustand des Stabquerschnitts.
- Alle Bezeichnungen, die sich auf einen 3D-Raumpunkt beziehen (Verschiebungen, Spannungen, usw.), werden direkt mit dem Index „3D“ gekennzeichnet.
- „1, 2 und 3“ bezeichnen die Koordinatenrichtungen des kartesischen Koordinatensystemes.
- „ $\mathcal{V}$ “ bezeichnet das Volumen des Stabkörpers.
- „ $\Gamma$ “ bezeichnet die Staboberfläche.
- „ $\mathbf{A}$ “ und „ $\mathbf{E}$ “ bezeichnen den Anfangsquerschnitt bzw. den Endquerschnitt.
- „ $\mathbf{M}$ “ bezeichnet die Stabmantelfläche.
- „ $\mathbf{MHA}$ “ bezeichnet die Materialhauptachsen.
- „ $\mathbf{U}$ “ bezeichnet den Bezug zum Stabverformungsparameter.
- „ $\mathbf{c}$ “ bezeichnet die Koppelterme (Nebendiagonalglieder) in Matrizen.
- „ $\mathbf{US}$ “ bezeichnet die unstrukturierte Darstellung.

## Große lateinische Buchstaben

<b>A</b>	Fläche des Gesamtquerschnitts des Stabes
$A_i$	Fläche des i-ten Querschnittsteils
<b>N, M, V</b>	Normalkraft, Biegemoment bzw. Torsionsmoment, Querkraft
<b>A</b>	Querschnittsverzerrungsinterpolationsmatrix für den stabachsenbezogenen Stabverformungsparameter des Stabquerschnitts.
$A_0$	Verschiebungs(Vorzerrungs)interpolationsmatrix für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik des Stabquerschnitts
$A_{\perp}$	Verzerrungsinterpolationsmatrix für den „ $\perp$ “-Anteil der Gesamt-Stabverzerrungsparameter
$A_{\parallel}$	Verzerrungsinterpolationsmatrix für den „ $\parallel$ “-Anteil der Gesamt-Stabverzerrungsparameter
$A_{0,\perp}$	Verschiebungsinterpolationsmatrix für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik des Stabquerschnitts für den „ $\perp$ “-Anteil
$A_{0,\parallel}$	Verschiebungsinterpolationsmatrix für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik des Stabquerschnitts für den „ $\parallel$ “-Anteil
$A_{\Omega}$	Verzerrungsinterpolationsmatrix für die Relativverschiebungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik
$A_{\Omega,\perp}$	Verzerrungsinterpolationsmatrix für den „ $\perp$ “-Anteil der Stabverzerrungsparameter der relativen Verschiebungsbewegungsfreiheitsgrade
$A_{\Omega,\parallel}$	Verzerrungsinterpolationsmatrix für den „ $\parallel$ “-Anteil der Stabverzerrungsparameter der relativen Verschiebungsbewegungsfreiheitsgrade
$A_U$	Querschnittsverzerrungsinterpolationsmatrix für die Stabverformungsparameter des Stabquerschnitts.
<b>B</b>	Differentialoperatormatrix für die Stabverformungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik
$B_0$	Differentialoperatormatrix für die Stab-Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik
$B_{3D}$	Differentialoperatormatrix für das gesamte 3D-Verschiebungsfeld des Stabkörpers
$B_{3D,US}$	Differentialoperatormatrix für das gesamte 3D-Verschiebungsfeld des Stabkörpers
$\tilde{B}_{3D}$	Differentialoperatormatrix für das Gleichgewicht in der Differentialform
$B_{3D,X}^T$	Matrix der Ableitungsvorschriften für das Gesamtproblem
$B_{3D,X,2+3}^T$	Matrix der Ableitungsvorschriften mit den Ableitungen nach den Querschnittskoordina- ten 2 und 3
$B_{3D,v}^T$	Matrix der Normalenvektorkomponenten für das Gesamtproblem
$B_{3D,v,2+3}^T$	Matrix der Normalenvektorkomponenten für das Querschnittproblem
$B_{3D,i,0}^T$	Selektionsmatrizen für einzelne Spannungskomponenten
$B_{3D,0}^T$	Zusammengefasste Selektionsmatrizen für einzelne Spannungskomponenten
$B_{3D,\perp,1}$	Differentialoperatormatrix mit Ableitungen nach der Stablängsrichtungsordinate $X_1$ für das 3D-Gesamt-Verschiebungsfeld für den „ $\perp$ “-Anteil
$B_{3D,\perp,2+3}$	Differentialoperatormatrix mit Ableitungen nach den Querschnittskoordina- te $X_2$ und $X_3$ für das 3D-Gesamt-Verschiebungsfeld für den „ $\perp$ “-Anteil
$B_{3D,\parallel}$	Differentialoperatormatrix mit Ableitungen nach den Querschnittskoordina- te $X_2$ und $X_3$ für das 3D-Gesamt-Verschiebungsfeld für den „ $\parallel$ “-Anteil
$C_{3D}$	3D-Materialnachgiebigkeitsmatrix bezüglich des globalen Bezugssystems
$D_{3D}$	3D-Materialsteifigkeitsmatrix bezüglich des globalen Bezugssystems

---

$\mathbf{D}_{3D,\perp}$	3D-Materialsteifigkeitsmatrix bezüglich des globalen Bezugssystems für den „ $\perp$ “-Anteil
$\mathbf{D}_{3D,\parallel}$	3D-Materialsteifigkeitsmatrix bezüglich des globalen Bezugssystems für den „ $\parallel$ “-Anteil
$\mathbf{D}_{3D,c}$	3D-Materialsteifigkeitsmatrix bezüglich des globalen Bezugssystems für die Koppelung des „ $\perp$ “-Anteils und des „ $\parallel$ “-Anteils
$\mathbf{D}_{3D,MHA}$	3D-Materialsteifigkeitsmatrix bezüglich der Material-Hauptachsenlage
$\mathbf{D}_{3D}'$	3D-Materialsteifigkeitsmatrix bezüglich der Material-Hauptachsenlage
$\mathbf{D}_{N,MHA}$	3D-Materialsteifigkeitsmatrix, für Materialhauptachsenlage, für die Normalspannungsanteile
$\mathbf{D}_{S,MHA}$	3D-Materialsteifigkeitsmatrix bezüglich der Materialhauptachsenlage für die Schubspannungsanteile
$\mathbf{E}_{3D,\parallel}$	3D-Verzerrungsmatrix des „ $\parallel$ “-Anteils
$\mathbf{V}$	Normalenvektormatrix zur Berechnung von $\mathbf{s}_V$
$\mathbf{V}_{i,0}^T$	Selektionsmatrizen für einzelne Spannungskomponenten (Vektor der Oberflächenspannungen)
$\mathbf{V}_0^T$	zusammengefasste Selektionsmatrizen für einzelne Spannungskomponenten (Vektor der Oberflächenspannungen)
$\mathbf{V}_{2+3}^T$	Normalenvektormatrix mit den Vektoreinträgen für die Koordinatenrichtungen 2 und 3
$\mathbf{S}$	Spannungskomponente des 3D-Spannungsvektors
$\mathbf{S}_{3D}$	3x3 3D-Spannungsmatrix in ihrer Urform
$\mathbf{T}$	Drehmatrix für kartesische Koordinaten
$\mathbf{T}_\perp$	Drehmatrix zur Transformation des „ $\perp$ “-Anteils eines in seiner Materialhauptachsenlage definierten Materials in das globale Bezugssystem
$\mathbf{T}_\parallel$	Drehmatrix zur Transformation des „ $\parallel$ “-Anteils eines in seiner Materialhauptachsenlage definierten Materials in das globale Bezugssystem
$\mathbf{T}$	Drehmatrix zur Transformation eines in Materialhauptachsenlage definierten Materials in das globale Bezugssystem
$\mathbf{X}$	Koordinaten

---

## Kleine lateinische Buchstaben

$\mathbf{b}_\Omega$	Differentialoperatorvektor für die Stab-Relativverschiebungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik
$\mathbf{e}$	stabachsenbezogener Gesamt-Stabverzerrungsparameter
$\mathbf{e}_0$	stabachsenbezogener Stabverzerrungsparameter für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik
$\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$	Einheitsvektoren des gedrehten kartesischen Koordinatensystems
$\mathbf{e}_\Omega$	stabachsenbezogener Stabverzerrungsparameter für die Relativverschiebungsfreiheitsgrade
$\mathbf{e}_{3D, US}$	strukturiertes 3D-Verzerrungsfeld des Gesamtquerschnitts
$\mathbf{e}_{3D}$	strukturiertes 3D-Verzerrungsfeld des Gesamtquerschnitts
$\mathbf{e}_{3D, \perp}$	strukturiertes 3D-Verzerrungsfeld des Gesamtquerschnitts für den „ $\perp$ “-Anteil
$\mathbf{e}_{3D, \perp, 0}$	strukturiertes 3D-Verzerrungsfeld des Gesamtquerschnitts für den „ $\perp$ “-Anteil des stabachsenbezogenen Stabverzerrungsparameters der Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik
$\mathbf{e}_{3D, \perp, \Omega}$	strukturiertes 3D-Verzerrungsfeld des Gesamtquerschnitts für den „ $\perp$ “-Anteil des stabachsenbezogenen Stabverzerrungsparameters für die Relativverschiebungsfreiheitsgrade
$\mathbf{e}_{3D, \parallel}$	strukturiertes 3D-Verzerrungsfeld des Gesamtquerschnitts für den „ $\parallel$ “-Anteil des stabachsenbezogenen Stabverzerrungsparameters (Relativverschiebungsfreiheitsgrade)
$\mathbf{e}_{3D, \parallel, 0}$	strukturiertes 3D-Verzerrungsfeld des Gesamtquerschnitts für den „ $\parallel$ “-Anteil des stabachsenbezogenen Stabverzerrungsparameters der Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik
$\mathbf{e}_{3D, \parallel, \Omega}$	strukturiertes 3D-Verzerrungsfeld des Gesamtquerschnitts für den „ $\parallel$ “-Anteil des stabachsenbezogenen Stabverzerrungsparameters für die Relativverschiebungsfreiheitsgrade
$\mathbf{g}_{3D}$	3D-Gleichgewichtsgleichungen in Differentialform
$\mathbf{g}_{3D, \Gamma}$	3D-Randbedingungen für das Gleichgewicht in Differentialform
$\mathbf{g}$	Gleichgewichtsgleichungen mit Abhängigkeit von $\mathbf{X}_1$ mit Zuordnung zu den $\mathbf{u}$ -Verformungen
$\mathbf{g}_0$	Gleichgewichtsgleichungen mit Abhängigkeit von $\mathbf{X}_1$ mit Zuordnung zu den $\mathbf{u}_0$ -Verformungen
$\mathbf{g}_\psi$	Gleichgewichtsgleichungen (Anzahl der Gleichungen entsprechend der Anzahl der Relativverformungsfelder) mit Abhängigkeit von $\mathbf{X}_1$ mit Zuordnung zu den $\psi$ -Verformungsparametern
$\mathbf{g}_\Omega$	Gleichgewichtsgleichungen (Anzahl der Gleichungen entsprechend der Anzahl der Relativverformungsfelder) mit Abhängigkeit von $\mathbf{X}_2$ und $\mathbf{X}_3$ , mit Zuordnung zu den $\psi$ -Verformungsparametern
$\mathbf{q}_{3D}$	3D-Volumenlast im Inneren des Stabkörpers
$\mathbf{q}_{3D, v}$	Volumenbelastungen im Stabinneren
$\tilde{\mathbf{q}}_{3D, v}$	Belastungsverteilung über den Stabquerschnitt einer Volumenbelastung im Stabinneren
$\mathbf{q}_{3D, \Gamma}$	Flächenbelastungen auf der Staboberfläche
$\tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma}$	Belastungsverteilung einer Flächenbelastungen auf der Oberfläche des differentiellen Stabquerschnittselements
$\mathbf{r}$	Festhaltekräfte aus Verschiebungsrandbedingungen
$\mathbf{s}_{3D}$	ungeordneter Pseudovektor der 3D-Spannungen

---

$\mathbf{s}_{3D,\perp}$	ungeordneter 3D-Pseudospannungsvektor für den „ $\perp$ “-Anteil
$\mathbf{s}_{3D,\parallel}$	ungeordneter 3D-Pseudospannungsvektor für den „ $\parallel$ “-Anteil
$\mathbf{s}_{3D,\perp,0}$	ungeordneter 3D-Pseudospannungsvektor für den „ $\perp$ “-Anteil aus den Starrkörperbewegungsfreiheitsgraden der Querschnittskinematik
$\mathbf{s}_{3D,\parallel,0}$	ungeordneter 3D-Pseudospannungsvektor für den „ $\parallel$ “-Anteil aus den Starrkörperbewegungsfreiheitsgraden der Querschnittskinematik
$\mathbf{s}_{3D,\perp,\Omega}$	ungeordneter 3D-Pseudospannungsvektor für den für den „ $\perp$ “-Anteil aus den Relativverschiebungsfreiheitsgraden
$\mathbf{s}_{3D,\parallel,\Omega}$	ungeordneter 3D-Pseudospannungsvektor für den „ $\parallel$ “-Anteil aus den Relativverschiebungsfreiheitsgraden
$\mathbf{s}_R$	3D-Spannungen aus Verschiebungsrandbedingungen
$\mathbf{s}_V$	3D-Spannungsvektor in einer schrägen Schnittfläche mit dem Normalenvektor $\mathbf{v}$
$\mathbf{s}_{V,QS}$	3D-Spannungsvektor senkrecht auf den Stabquerschnitt
$\mathbf{u}$	Stabverformungsparameter bzw. Stabbewegungsfreiheitsgrade des Stabquerschnitts
$\mathbf{u}_{3D}$	unstrukturiertes 3D-Verschiebungsfeld des Stabkörpers
$\mathbf{u}_{3D,0}$	3D-Verschiebungsfeld für den Stabkörper zufolge der Starrkörperverschiebungsfelder über den Querschnitt und den zugehörigen Amplituden der Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Stabquerschnittskinematik
$\mathbf{u}_0$	Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik des Stabquerschnitts
$\mathbf{u}_{0,\perp}$	Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik des Stabquerschnitts für den „ $\perp$ “-Anteil
$\mathbf{u}_{0,\parallel}$	Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik des Stabquerschnitts für den „ $\parallel$ “-Anteil
$\mathbf{u}_1$	3D-Verschiebungskomponente eines beliebigen Punkts des Stabkörpers in $X_1$ -Richtung (Stablängsrichtung)
$\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$	3D- Verschiebungskomponenten eines beliebigen Punkts in $X_2$ - $X_3$ -Richtung (Stabquerschnittsebene)
$\mathbf{u}_{3D,\Omega}$	3D-Verformungsvektorfeld für den Stabkörper zufolge der Relativverschiebungen der Querschnittspunkte, bezogen auf das Starrkörperverschiebungsfeld
$\mathbf{v}$	Normalenvektor einer Schnittfläche, definiert in globalen Koordinaten

---

## Griechische Buchstaben

$\beta$	Verdrehungsfreiheitsgrad
$\gamma$	Schubgleitwinkel
$\mathcal{E}(\mathbf{X})$	Fehlerfunktion innerhalb eines Subgebiets
„ $\eta$ “	beliebige zu „ $\mathbf{g}$ “ passende Gewichtsfunktionen für die Formulierung des Gleichgewichts
$\Omega$	Vektor der Wölbverformungsmuster der lokalen relativen Verschiebungsfelder
$\Omega_1$	Wölbverformungsfelder für die Querschnittsverwölbung (axial) des Stabquerschnitts, diese entsprechen einer Verschiebungskomponente senkrecht zur Stabquerschnittsebene
$\Omega_2, \Omega_3$	Wölbverformungsfelder für die echte Querschnittsverformung des Stabquerschnitts, diese entsprechen Verschiebungskomponenten parallel zur Querschnittsebene
$\psi$	Amplitudenverlauf in Stablängsrichtung für das Wölbverformungsmuster $\mathbf{W}$
$\psi_q$	Amplitudenverlauf in Stablängsrichtung für die Belastung
$\Gamma_M$	gesamte Staboberfläche
$\Gamma_M$	Stab-Mantelfläche
$\Gamma_s$	Integrationsgebiete mit Spannungsrandbedingungen
$\Gamma_u$	Integrationsgebiete mit Verschiebungsrandbedingungen
$\Gamma_A$	Stab-Anfangsquerschnitt
$\Gamma_E$	Stab-Endquerschnitt
$\mathcal{V}$	Volumen (Raumgebiet) des Stabkörper

---

# Begriffsdefinitionen für das etablierte Stabmodell

Für eine präzise Definition des geraden prismatischen Stabes mit komplexem Querschnittsaufbau und für den einheitlichen Sprachgebrauch werden die charakterisierenden Grundbegriffe definiert.

Diese Grundbegriffe sind der weiteren Abhandlung zugrunde gelegt und werden konsequent verwendet.

## **Abklinglösungen der relativen Gesamtquerschnittsverformung**

Die Abklinglösungen der relativen Gesamtquerschnittsverformung sind durch eine beliebige Anzahl von sich in Stablängsrichtung exponentiell veränderlichen 3D-Verformungsfeldern des Querschnitts definiert. Diese Veränderlichkeit in Stablängsrichtung ruft zusätzliche 3D-Spannungen hervor. Im Sinne der Lösung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems entsprechen diese Lösungen den von Null paarweise verschiedenen Eigenwerten. Basierend auf den abklingenden 3D-Einzelverschiebungsfeldern tritt das exponentielle Abklingen des resultierenden 3D-Gesamtverformungsfeldes auf.

## **Abklingverhalten**

Die von Null verschiedenen Eigenwerte aus der Lösung des 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems führen zu exponentiellen Verringerungen der Amplituden der 3D-Einzelverschiebungsfelder.

## **Abklingzahlen**

Die Abklingzahlen entsprechen den Eigenwerten des Eigenwertproblems, das im Rahmen der Lösung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems zu lösen ist. Je größer der Absolutwert einer Abklingzahl ist, desto ausgeprägter ist das Abklingverhalten in Stablängsrichtung. Sie treten auf Grund der physikalischen Problemstellung immer paarweise mit positivem und negativem Vorzeichen auf.

## **3D-Einzelverschiebungsfeld**

Ein 3D-Einzelverschiebungsfeld stellt ein einem Stab-Verformungsfreiheitsgrad eindeutig zugeordnetes globales oder lokales 3D-Verschiebungsfeld dar.

## **Freifeldlösungen der 3D-Gesamtquerschnittsverformung**

Freifeldlösungen sind sich ohne jegliche Normalspannungsumlagerung der primären Normalspannungen einstellende relative Querschnittsverformungsfelder (QS-Verwölbungen) unter konstanter Schub- bzw. konstanter Torsionsbeanspruchung des Stabes. Bei der Lösung des 3D-

---

Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystemen ergeben sich die relativen Querschnittsverformungsfelder aus den Null-Eigenwerten des Eigenwertproblems. Dadurch liegt kein Abklingverhalten in Stablängsrichtung vor.

### **3D-Gesamtverschiebungsfeld**

Als 3D-Gesamtverschiebungsfeld wird die Summe der 3D-Teilverschiebungsfelder in Form des globalen und des lokalen 3D-Teilverschiebungsfeldes verstanden.

### **Globales 3D-Teilverschiebungsfeld**

Das globale 3D-Teilverschiebungsfeld beschreibt jenen Anteil des 3D-Gesamtverschiebungsfeldes, der den Starrkörperbewegungen des Querschnitts eindeutig zuzuordnen ist.

### **Hierarchische Darstellung des 3D-Verschiebungsansatzes**

Die hierarchische Darstellung des 3D-Verschiebungsansatzes beschreibt die Darstellung des relativen 3D-Verschiebungsfeldes in Form von Stapeln an orthogonalen 3D-Einzelverschiebungsfeldern. Durch die Linearkombination der orthogonalen 3D-Einzelverschiebungsfelder lässt sich das relative 3D-Teilverschiebungsfeld eindeutig darstellen.

### **Lokales(relatives) 3D-Teilverschiebungsfeld**

Das lokale 3D-Verschiebungsfeld, oft auch als relatives 3D-Teilverschiebungsfeld bezeichnet, ist als Differenz zwischen dem gesamten 3D-Gesamtverschiebungsfeld und dem globalen 3D-Teilverschiebungsfeld definiert. Das 3D-Teilverschiebungsfeld beschreibt die Querschnittsverwölbungen und die echten Querschnittsverformungen.

### **Orthogonalität**

Die Orthogonalität im mechanischen Sinn bedeutet, dass Spannungen, die aus einem 3D-Einzelverschiebungsfeld resultieren, mit den Verzerrungen eines beliebigen anderen 3D-Einzelverschiebungsfeldes keine Arbeit verrichten.

### **Produktansatz**

Der Produktansatz bzw. die Produktdarstellung der Ansatzfunktionen für die Verformungen und die Belastungen beschreibt die strikte produktartige Trennung des Verschiebungsfeldes bzw. des Belastungsfeldes in die beiden Anteile der Querschnitts- und der Stabachsenkoordinaten.

### **Querschnitt**

Der Querschnitt (QS) oder Stabquerschnitt wird durch die allgemeine Kontur der Querschnittsberandung in der Querschnittsebene begrenzt und steht im Anfangszustand stets orthogonal auf der geraden Stabachse des prismatischen Stabes.

### **Querschnittsberandung**

Die Querschnittsberandung ist durch ein beliebiges Polygon bzw. Polynom n-ten Grades oder durch eine Aneinanderreihung von Polygonen bzw. Polynomen n-ten Grades in der Querschnittsebene definiert.

### **Querschnittsteil**

Der Querschnittsteil (QST) oder der Einzel-Querschnittsteil (Einzel-QST) stellt ein zusammenhängendes Subgebiet des Querschnitts dar und ist als größter in sich geschlossener Bereich des Querschnitts mit konstanten geometrischen und materiellen Eigenschaften definiert.

### **Echte Querschnittsverformung $U_2$ , $U_3$**

Die echten Querschnittsverformungen  $U_2$  und  $U_3$  stellen zum Starrkörperanteil additive Verformungen im Querschnitt zur Beschreibung des 3D-Gesamtverformungsfeldes dar. Im Rahmen der Herleitung wird dieser Verformungsanteil mit „parallel“ bzw. „||“ bezeichnet.

---

### **Querschnittsverwölbung $U_1$**

Die Querschnittsverwölbung  $U_1$  stellt einen zum Starrkörperanteil additiven Verformungsanteil in axialer Richtung zur Beschreibung 3D-Gesamtverformungszustand dar. Im Rahmen der Herleitung wird dieser Verformungsanteil mit „senkrecht“ bzw. „ $\perp$ “ bezeichnet.

### **Stabachse**

Die Stabachse (in  $\xi$ ,  $X_1$  oder **1**-Richtung) ist durch die gerade Verbindung der Querschnittsbezugspunkte  $O$  des Stab-Anfangs-Querschnitts und des Stab-End-Querschnitts definiert.

### **Stabenden**

Die Stabenden **A** (Anfang) bei  $X = 0$  und **E** (Ende)  $X = L$  sind durch die Anfangs- und Endpunkte der Stabachse definiert.

### **Stablänge**

Die Stablänge  $L$  oder Stabachsenlänge  $L$  ist als geometrische Verbindung der geraden Stabachse zwischen den Stabenden **A** und **E** des Stabes definiert.

### **Stabkörper**

Der Stabkörper mit dem Stabvolumen  $\mathcal{V}$  ist durch den Rauminhalt des prismatischen Stabes definiert. Der Rauminhalt ist durch das Volumen definiert, welches beim Verschieben des Stabquerschnitts entlang der geraden Stabachse überstrichen wird.

### **Stabmantelfläche**

Die Stabmantelfläche  $\Gamma_M: 0 < X < L$  oder Staboberfläche ist durch den Oberflächenanteil zwischen den Stabendquerschnitten definiert, d. h. die Stabmantelfläche  $\Gamma_M$  ergibt sich aus der Differenz der Staboberfläche  $\Gamma$  und der beiden Stab-Endquerschnittsflächen  $\Gamma_{A,E}$ . Geometrisch entsteht die Stabmantelfläche durch das Verschieben der allgemeinen Querschnittsberandung entlang der Stabachse.

### **Staboberfläche**

Die Staboberfläche  $\Gamma$  ergibt sich aus der Summe der Stabmantelfläche  $\Gamma_M$ , des Stab-Anfangs-Querschnitts  $\Gamma_A$  und des Stab-End-Querschnitts  $\Gamma_E$ . Sie entspricht dem Oberflächenintegral des gesamten Stabkörpers.

### **Strukturierte geordnete Darstellung des 3D-Verschiebungsansatzes**

Die strukturierte geordnete Darstellung des Verschiebungsansatzes bezeichnet die konsequente Separation des klassischen Balkenverformungszustands und des Querschnittsverformungszustands (ebener Spannungszustand). Der Balkenverformungszustand wird auf Grund der auftretenden Verformungen senkrecht zur Querschnittsebene mit „ $\perp$ “, der Querschnittsverformungszustand auf Grund der Verformungen in der Querschnittsebene mit „ $\parallel$ “ bezeichnet.

Zusätzlich bezeichnet die strukturierte geordnete Darstellung des 3D-Verschiebungsansatzes die Aufspaltung des 3D-Gesamtverschiebungsfeldes in die Anteile der globalen und lokalen 3D-Teilverschiebungsfelder.

### **3D-Teilverschiebungsfeld**

Sowohl das globale als auch das lokale 3D-Teilverschiebungsfeld stellt einen Teil des 3D-Gesamtverschiebungsfeldes dar. Ein 3D-Teilverschiebungsfeld besteht aus einem oder mehreren 3D-Einzelverschiebungsfeldern. Dies gilt sowohl für das lokale als auch für das globale 3D-Teilverschiebungsfeld.

---

### **Verbundfuge**

Die Verbundfuge ist ein auf linear elastischem Materialverhalten beruhender dünner Querschnittsteil, der zwei benachbarte Querschnittsteile mechanisch (starr oder nachgiebig) koppelt. Im Sinne der kinematischen Beschreibung ergeben sich im Vergleich zum echten Querschnittsteil keinerlei Unterschiede.

### **3D-Verschiebungsansatz oder 3D-Verschiebungsfeld**

Das 3D-Verschiebungsfeld beschreibt den eindeutigen umkehrbaren Zusammenhang zwischen der Anfangsgeometrie und der verformten Momentangeometrie. Es wird im Allgemeinen als gesamtes 3D-Verschiebungsfeld bezeichnet.

# 1

## **Einleitung und Stand der Technik**

## 1.1 Einleitung

Stabartige eindimensional ausgeprägte Bauteile stellen bei der Modellierung von realen Bauwerken die Konstruktionselemente zur Abtragung von Lasten im konstruktiven Ingenieurbau dar (vgl. Salzgeber, 2000, S. 1). Im Sinne der klassischen Stabtheorie haben diese in Bauteillängsrichtung konstante geometrische Eigenschaften, d. h. es liegt die gerade Prismatizität vor. Auf Grund dieser ausgezeichneten geometrischen Verhältnisse bietet sich die Reduktion des 3D-Bauteils auf eine ideale beliebig wählbare Stabachse und einen darauf senkrecht stehenden beliebig geformten Querschnitt an.

Der Stab ist durch folgende ausgeprägte geometrische Eigenschaften gekennzeichnet: Die Abmessungen des Stabquerschnitts sind im Vergleich zur Stablänge grundsätzlich klein. Die Abmessungen im Querschnitt sind in ihrer Größenordnung um eine Zehnerpotenz kleiner als die Ausdehnung in Richtung der Stabachse. Eine detaillierte Definition des Stabes ist für die Bearbeitung des Themas zwingend erforderlich, dies erfolgt unter Punkt 3. Die Stäbe im klassischen Sinn unterliegen keiner Einschränkung in den verwendbaren Baustoffen.

Stabartigen Bauteile werden im Weiteren mit „Stab“ bezeichnet. In der Literatur wird der Begriff „Stabtheorie“ für auf Normalkraft und auf Torsion beanspruchte 1D ausgeprägte Bauteile verwendet, der Begriff „Balkentheorie“ findet in der Regel für vorwiegend biegebeanspruchte Elemente Anwendung (vgl. Schardt, 1989). In dieser Arbeit wird grundsätzlich vom „Stab“ gesprochen, nur in Ausnahmefällen wird der Terminus „Balken“ auf Grund der historischen Bezeichnung und Konsistenz verwendet. In diesem Kontext werden die Begriffe „Stab“ und „Balken“ gleichbedeutend verwendet und es ist keine Unterscheidung in Abhängigkeit der Stab-Beanspruchungen erforderlich.

Der klassische 3D-Stab (siehe Punkt 1.2) ist durch die sechs Starrkörperfreiheitsgrade im Raum kinematisch eindeutig bestimmt. Diese sind durch die drei globalen Verschiebungen  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  sowie die drei Verdrehungen  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  definiert. Die damit in Zusammenhang stehenden Stabbelastungen sind durch eine Normalkraft ( $\mathbf{N}$ ), zwei transversale Querkräfte ( $\mathbf{V}_1$  und  $\mathbf{V}_2$ ), zwei Biegemomente ( $\mathbf{M}_2$  und  $\mathbf{M}_3$ ) sowie ein Torsionsmoment ( $\mathbf{M}_1$ ) gegeben. Die Belastungen sind den oben erwähnten Starrkörperfreiheitsgraden in eindeutiger Weise zugeordnet. Mit diesen sechs Verformungsfreiheitsgraden lässt sich keine über den ebenen Querschnitt hinausgehende Verformungssituation realisieren.

Auf Grund der geometrischen Querschnittsabmessungen stellen sich trotz der geometrischen 1D-Ausprägung des Stabes Verzerrungszustände mit den zugehörigen Spannungsverläufen über den Stabquerschnitt in Abhängigkeit der Querschnittskordinaten  $\mathbf{X}_2$  und  $\mathbf{X}_3$  ein.

Die bis heute verwendeten „klassischen“ Stabtheorien (Euler-Bernoulli-Balken, Timoshenko-Stab) weisen auf Grund zahlreicher kinematischer Restriktionen eine starke Abhängigkeit von der Stablänge auf. Auf Grund von diesen, oft historisch bedingt, kinematischen Einschränkungen (siehe Punkt 1.3) treten damit zusammenhängende Verletzungen der 3D-Gleichgewichtsgleichungen auf. Die wesentliche Einschränkung bei den klassischen Stabtheorien betrifft nach Salzgeber (2000, S.1) die Unverformbarkeit und die Ebenheit des Stabquerschnitts im verformten Zustand.

Auf Grund der starken Vereinfachungen, dies betrifft die Unterbindung einer sich frei einstellenden 3D-Gesamtquerschnittsverformung unter Beanspruchung, lassen sich die 3D-Gleichgewichtsgleichungen im Sinne des 3D-Festkörperkontinuums nicht exakt erfüllen. Dies resultiert aus der Unterbindung von real möglichen Querschnittsverformungszuständen, die beispielsweise über die Bernoulli-Hypothese impliziert werden. Wird der klassische Euler-Bernoulli-Stab betrachtet, ist klar, dass auf Grund der fehlenden Verformungsfreiheitsgrade die Querschnittsschubverzerrungen nicht direkt bestimmt werden können. Die über den Querschnitt aus Gründen des statischen Gleichgewichts auftretenden Schubspannungen lassen sich erst indirekt aus dem axialen Kräfte-Gleichgewicht rückrechnen. Eine simultane Problemlösung zur Berücksichtigung aller 3D-Spannungskomponenten im Stab lässt sich nicht

realisieren. Dies gilt auch für das bereits verbesserte Stabmodell des schubnachgiebigen Stabes nach Timoshenko.

Diese Einschränkungen führen besonders bei den folgenden Stabsituationen bei Berechnung nach der klassischen Stabtheorie zu bemessungsrelevanten Abweichungen der Ergebnisse von den exakten 3D-Lösungen:

- **Gedrungene Stäbe mit ausgeprägt geringem Verhältnis zwischen der Stablänge und der kleineren Querschnittsabmessung**

Gedrungene Bauteile lassen sich nicht zufriedenstellend berechnen, da gerade für solche Geometriebedingungen maßgebliche Abweichungen vom realen 3D-Spannungszustand des 3D-Kontinuums auftreten. Die klassische Stabtheorie mit ihren Annahmen in der kinematischen Beschreibung sieht keine Möglichkeit vor, etwaige auftretende Einflüsse von lokalen Randstörungen, z. B. in Form von Einspanneffekten an den Stabenden, zu berücksichtigen. Die sogenannten „Abklingeffekte“ dieser lokalen Randstörungen hinein in das Stabinnere lassen sich unter keinen Umständen abbilden, was gerade bei sehr gedrungenen Stäben zu großen Abweichungen im Vergleich zur 3D-Lösung im Sinne der 3D-Festkörpermechanik führt.

- **Mehrteilige Querschnitte aus schubweichen Einzelquerschnittsteilen**

Im konstruktiven Ingenieurwesen kommen vermehrt Stäbe mit monosymmetrisch geschichtetem Querschnittsaufbau und einer 2D-Kinematik zum Einsatz. In der Vergangenheit wurden zur Berechnung dieser schubweichen Querschnitte zahlreiche approximative Berechnungsverfahren entwickelt, z. B.:

- Schubanalogie von Kreuzinger (1999)
- Modifizierte elastische Verbundtheorie von Blass & Görlacher (2002)
- Mehrschichtenmodell basierend auf gekoppelten schubnachgiebigen Einzelschichten nach Reddy (2004) beziehungsweise Guggenberger & Moosbrugger (2006)

Diese Verfahren wurden in der Vergangenheit in verschiedenen Arbeiten untereinander verglichen. Eine Gegenüberstellung mit einer exakten Stablösung im Sinne der 3D-Festkörper-Mechanik ist bis dato nicht bekannt.

- **Mehrteilige Querschnitte mit elastisch nachgiebig verbundenen Querschnittsteilen**

Schubnachgiebige Verbundfugen beeinflussen das Abklingverhalten von Randstörungen in das Stabinnere. Mit zunehmender Nachgiebigkeit der Verbundfugen klingen Randstörungen in deutlich geringerem Maß ab und pflanzen sich dadurch weiter in das Stabinnere fort. Der Einfluss von nachgiebigen Verbundfugen wurde von Pischl (1966) bearbeitet.

- **Lokale diskrete Änderungen des Stabquerschnitts in Stablängsrichtung**

Neben dem „Stab“ als „Einzelbauteil“ kommen zur Modellierung von 3D-Tragstrukturen (Raumfachwerke, Trägerroste, etc.) auch die sogenannten „Stabsysteme“ zum Einsatz, wobei die einzelnen Stäbe untereinander in sogenannten Knotenpunkten kinematisch gekoppelt sind (vgl. Salzgeber, 2000, S. 2). Auf die Beschreibung der kinematischen Koppelung wird an dieser Stelle trotz ihrer Wichtigkeit nicht im Detail eingegangen.

Zu den Inkontinuitäten in Form von lokalen diskreten Querschnittsänderungen zählen beispielsweise Durchbrüche und Ausklinkungen in hohen wandartigen Trägern sowie Dickensprünge bei Gurtlamellen in Stahlprofilen.

Alle diese lokalen Störungen führen zu einer in das Stabinnere hinein abklingenden Beeinflussung des globalen Spannungszustands, die mit klassischen Stabtheorien nicht beschrieben werden können.

Um in Zukunft exakte 3D-Lösungen für 3D-Stäbe mit komplexem Stabquerschnitt und verallgemeinerter 2D-Querschnittskinematik berechnen zu können, ist die Herleitung der exakten 3D-Grundgleichungen für den 3D-Stab erforderlich.

Um die Abhängigkeit des Stabverhaltens von der Stablänge zu eliminieren, ist die Erfüllung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen an jeder Stelle des Stabquerschnitts entlang der gesamten Stablänge zwingend erforderlich, d. h. der Stab hat dem exakten 3D-Kontinuumsverhalten ohne jegliche Abstriche zu entsprechen.

Um diese Ungereimtheiten auszuschließen, sind in der Vergangenheit erweiterte, über die klassischen Stabtheorien hinausgehende, Berechnungsmodelle entwickelt worden. Alle erweiterten Stabtheorien beruhen auf der erweiterten und der verbesserten Darstellung der Querschnittskinematik, die sogenannten Querschnittsverwölbungen/Querschnittsverformungen sind als zusätzliche Freiheitsgrade (DOF) etabliert worden (vgl. Salzgeber, 2000, S. 2). Diese Vorgehensweise hat sich in den Anfängen prioritär auf die Verbesserung von ausgewählten Verformungszuständen, wie z. B. die Wölbkrafttorsion, beschränkt.

Um diese Ungereimtheiten im 3D-Spannungszustand korrigieren zu können, wurden auf den Wölbfunktionen aufbauende Korrekturfunktionen für die Schub- und Torsionsbeanspruchung verwendet, diese sind auch als Schubkorrekturfaktoren bekannt (vgl. Cowper, 1966).

Einen Sprung in der Verbesserung der zugrunde gelegten Querschnittskinematik vollzieht Schardt (1966) mit der Veröffentlichung seiner erweiterten Stabtheorie. Dabei wird die Starrkörperkinematik um weitere Querschnittsverwölbungen und davon abhängige Querschnittsverformungen erweitert, mit deren Hilfe die 3D-Gleichgewichtsgleichungen mit einer bedeutenden Qualitätsverbesserung erfüllt werden können.

Im Weiteren wird der Stand der Technik und des Wissens zum Thema des klassischen und des kinematisch erweiterten Stabes angeführt. Ausgewählte Literaturstellen werden in diesem Zusammenhang erwähnt.

## 1.2 Motivation

In der Vergangenheit sind zahlreiche Berechnungstheorien für die Berechnung von prismatischen 1D ausgeprägten Stäben mit beliebigen, geometrisch kompakten sowie dünnwandigen Querschnittsformen mit allgemeiner Querschnittsberandung entwickelt worden, wobei der Fokus auf die kinematische und materielle Beschreibung gerichtet war. Die historisch entwickelten Stabtheorien weisen bedingt durch restriktive kinematische und materielle Einschränkungen grobe Verletzungen der 3D-Gleichgewichtsgleichungen auf. Stellvertretend können in diesem Zusammenhang die folgenden Stabtheorien festgehalten werden, wobei die erwähnten Einschränkungen großteils die kinematischen Annahmen betreffen:

- Die klassische technische Stabtheorien für den prismatischen Stab:
  - Euler-Bernoulli-Balken: Der Querschnitt steht stets senkrecht auf die Stabachse, dies gilt auch im Falle der Verformung der Stabachse. Im verformten Zustand bleibt der Querschnitt stets eben. Etwaige auftretende Querschnittsdeformationen sind per Definition ausdrücklich unterbunden.
  - Timoshenko-Balken: Der Querschnitt bleibt eben, steht im Falle einer allgemeinen Stabachsenverformung aber nicht mehr zwingend senkrecht auf diese.
  - Torsionstheorien für die St. Venant'sche Torsion und Wölbkrafttorsion von prismatischen Stäben.
- Die verallgemeinerte Biegetheorie für dünnwandige Querschnitte mit erweiterter Querschnittskinematik in Form von Querschnittsverwölbungen und davon abhängigen Querschnittsverformungen nach Schardt (1966).
- Die allgemeine technische Faltwerkstheorie mit unabhängigen Verwölbungen und unabhängigen Querschnittsverformungen nach Wlassow (1964) und Sedlacek (1971).

Die Namen in der Entwicklungsgeschichte der über die klassischen Stabtheorien hinaus gehenden oben genannten Berechnungstheorien sind: Wlassow, Flügge, Bornscheuer, Schardt, Sedlacek, Roik, Davies und andere. Die grundlegenden Arbeiten sind Mitte des 20. Jhdts. entstanden. Alle diese Arbeiten befassen sich mit der Erweiterung der klassischen Stabtheorie zur Berechnung von Stäben unter Vermeidung der oben genannten Verletzung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen.

Neben den historischen Arbeiten befassen sich auch jüngere Arbeiten mit dem Thema der restriktionslosen Formulierung der 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen für den prismatischen Stab. Ein Großteil der Arbeiten zeigt leider nicht die erforderliche fundamentale, strukturierte, konsequente, simultane und einheitliche Herleitung und Darstellung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen für alle interagierenden Verformungszustände.

Die Tatsache, dass in beinahe allen Veröffentlichungen zu diesem Thema keine durchgehende kompakte Gesamtdarstellung der Stabformulierung mit der gemeinsamen Betrachtung aller sechs Verformungszuständen vorzufinden ist, soll Anlass sein, eine einheitlich und durchgängig formulierte Darstellung der erweiterten Stabtheorie ohne Restriktionen zu erarbeiten.

Die einheitliche Darstellung aller sechs Stabverformungszustände in systematischer übereinstimmender Vorgangsweise sowie die gemeinsame analytisch geschlossene simultane Lösung des resultierenden 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems  $n$ -ter Ordnung ist Inhalt dieser Arbeit.

Im Vergleich zur klassischen FE-Berechnung von kompakten und dünnwandigen Querschnitten soll die dargestellte Berechnungsmethode durch die analytische Lösung der 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen in Stablängsrichtung eine Reduktion des Rechenaufwandes bei gleichzeitiger deutlicher Verbesserung der Qualität der Ergebnisse mit sich bringen.

Auf Grund der Erfüllung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen, basierend auf einer vollständig formulierten 3D-Kinematik ohne kinematische Einschränkungen, ist die Erfüllung aller Querschnittsrandbedingungen ohne Einführung der bekannten Korrekturfaktoren für die Schub- und Torsionsbeanspruchung möglich.

Es erscheint wichtig, festzuhalten, dass es sich trotz der beschriebenen Allgemeinheit der 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen um ein Stabmodell, unter Ausnutzung aller in diesem Kontext vorhandenen Vorteile, handelt.

Mit dem neu etablierten Stabmodell auf Basis der exakten 2D-Querschnittskinematik können die oben erwähnten Schwachstellen der klassischen Stabtheorien ausgemerzt werden. Dadurch lassen sich die oben erwähnten Effekte exakt beschreiben, diese sind:

- gedrungene Stäbe mit ausgeprägt geringem Verhältnis zwischen der Stablänge und der kleineren Querschnittsabmessung,
- mehrteilige Querschnitte aus schubweichen Einzelquerschnittsteilen,
- mehrteilige Querschnitte mit elastisch nachgiebig verbundenen Querschnittsteilen und
- lokale diskrete Änderungen des Stabquerschnitts in Stablängsrichtung.

## 1.3 Stand der Technik und des Wissens

### 1.3.1 Grundlagen und Historie zu den klassischen technischen Biegetheorien

Die kinematische Beschreibung der klassischen technischen Biegetheorie (KBT) für den Stab mit 3D-Kinematik wird durch drei Querschnittsverdrehungen (Querschnittsrotationen um die drei Koordinatenachsen) und durch drei Querschnittsverschiebungen in Richtung der drei Koordinatenrichtungen beschrieben, wie Pilkey & Wunderlich (1994) und Guggenberger (2008) detailliert erläutert haben. Basierend auf diesen sechs Bewegungsfreiheitsgraden des Stabquerschnitts sind die Anteile der Stablängung, der Stabtorsion nach St. Venant sowie die zwei Querkraftbiegungen (zwei Querkraften und zwei Biegemomente) bestimmt (siehe Bogensperger, 2000, S. 5). Diese Art der Darstellung der Querschnittskinematik zieht in bekannter Weise Einschränkungen in der Allgemeinheit der Darstellung der Querschnittsverformung nach sich. Unter Einschränkung werden dabei das Ebenbleiben des Stabquerschnitts – es sind keine Querschnittsverwölbungen in Stablängsrichtung möglich – sowie die Unverformbarkeit des Stabquerschnitts in seiner Querschnittsebene – keine echten Querschnittsverformungen – an jeder Stelle des Stabes in Stablängsrichtung verstanden. Diese Einschränkungen der Querschnittskinematik werden durch die Euler-Bernoulli-Hypothesen, siehe Szabo (1987, S. 363 ff), direkt impliziert. Auf Grund der im Vergleich zur echten allgemeinen 3D-Kinematik – im Sinne der 3D-Festkörpermechanik – eingeschränkten 3D-Stab-Kinematik des klassischen Biegestabes ergeben sich Unzulänglichkeiten bei der Erfüllung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen an jeder Stelle innerhalb des Stabquerschnitts. Zudem ergeben sich in Stablängsrichtung auf Grund der zugrunde liegenden Stabkinematik Einschränkungen des Gültigkeitsbereiches für die Anwendung der klassischen Stabtheorie in der praktischen Umsetzung im Rahmen von Bauteilbemessungen. Die Einschränkungen der klassischen Stabtheorie durch die direkte Stablängenabhängigkeit sind vor allem für kurze gedrungene Stäbe von Bedeutung.

Weitere Einschränkungen sind in Form der definierten Prismaticität des Stabes und durch das Erhaltenbleiben des Querschnitts bei einer globalen Stabverformung unter allgemeiner Belastung gegeben.

In der Vergangenheit wurden die auftretenden Spannungs- und Verformungsinkompatibilitäten in unabhängiger Weise für die einzelnen Einheitsverformungszustände (Schub, Torsion) durch verschiedene Korrekturmaßnahmen behoben. Beispiele für diese Korrekturmaßnahmen an der klassischen Biegetheorie sind

- durch den „Schubkorrekturfaktor“ oder „shear coefficient“ zur Korrektur des aus der eingeschränkten Stabkinematik resultierenden verletzten Schubspannungsgleichgewichts an den freien Staboberflächen für Schubspannungen zufolge der zwei Querkraftbiegungen und
- durch die Korrektur des Torsionsverhaltens infolge der auftretenden Normalspannungseffekte bei Torsionsbeanspruchung mit axialer Verformungsbehinderung gedrungener Stäbe in Form der Wölbkrafttorsion gegeben.

Die grundlegenden Arbeiten zur Korrektur der Spannungs-Gleichgewichtsinkompatibilitäten an den freien Staboberflächen in Form des sogenannten „Schubkorrekturfaktors“ wurden in allgemeiner Form von Timoshenko & Goodier (1970), Cowper (1966) und anderen im 20. Jhdt. veröffentlicht.

Die grundlegenden Arbeiten im Bereich der Wölbkrafttorsion wurden unter anderem von Wagner (1929) bedeutend geprägt. Ein weitere Name ist dabei Wlassow (1958, 1964 und 1965), der sich wie Bornscheuer (1952) eingehend mit der Aufbereitung der Wölbkrafttorsion für prismatische Stäbe beschäftigte. Die Erweiterung der Wölbkrafttorsion um die Einflüsse aus den Schubverzerrungen, in Anlehnung an die Vorgehensweise beim Querschubproblem, wurde von Heilig (1961b) vollzogen (vgl. Bogensperger, 2000 S. 5).

Eine umfassende Arbeit zur geschichtlichen Entwicklung der klassischen Biege- bzw. Balkentheorie wurde von Szabo (1987) verfasst. Eine Wiederholung erscheint nicht sinnvoll, da Szabo in einer Arbeit von bedeutender Qualität alle Eckpunkte der klassischen Biegetheorie dargelegt hat. Die Namen der Historie der klassischen Biegetheorie werden der Vollständigkeit halber angeführt und um die Namen für die allgemeine Behandlung des Torsionsproblems ergänzt. Die folgende Zusammenstellung basiert auf Szabo (1987) und Koschade & Hupe (2000-2006):

- G. Galilei (1564 - 1642) beschäftigte sich eingehend mit dem Reißen und Brechen von Tragwerken. Er legt fälschlicherweise die neutrale Faser des Querschnitts an der Stabunterkante fest und geht von der konstanten Spannungsverteilung über den QS aus. Er erkennt bereits den nicht proportionalen Zusammenhang des Widerstandes mit der QS-Höhe.
- R. Hook (1635 - 1703) prägt den Begriff des elastischen Körpers und erkennt die Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung und spricht indirekt bereits von einer neutralen Faser.
- E. Mariotte (1620 - 1684) prägt den Begriff der neutralen Faser und berücksichtigt die Elastizität der Fasern in Form eines linearen Gesetzes über den gesamten Querschnitt.
- J. Bernoulli (1654 - 1705) beschäftigt sich mit der Konstruktion der elastischen Biegelinie und spricht indirekt von der ihm heute zugesprochenen Hypothese des „eben bleibenden Querschnitts“ und der Proportionalität zwischen Stabkrümmung und Biegemoment.
- A. Parent (1666 - 1716) erkennt als Erster die Gleichgewichtsgleichungen für die Normal- und Schubspannungen.
- L. Euler (1707 - 1783) beschäftigt sich mit der elastischen Biegelinie von Stäben mit mathematischem Zugang.
- C. A. Coulomb (1736 - 1806) formuliert die drei Gleichgewichtsgleichungen in Form von Spannungsintegralen.
- C. L. M. H. Navier (1785 - 1836) trennt die Querschnittskennwerte von den Materialkennwerten und formuliert die bis heute in Verwendung befindliche Differentialgleichung des Balkens.
- S. P. Timoshenko (1878 - 1972) erweitert die Balkentheorie um die Querschnittsverdrehung, d. h. der Querschnitt steht per Definition nicht mehr senkrecht auf die Stabachse.
- J. C. St. Venant (1797 - 1886) ergänzt die Balkentheorie um die freie unbehinderte Torsion.
- R. Bredt (1842 - 1900) beschäftigt sich mit der Torsion von dünnwandigen geschlossenen Profile.
- H. Wagner beschäftigt sich mit der Einbettung der Wölbkrafttorsion für nicht wölbfreie Querschnittstypen, siehe Wagner (1929).
- F.W. Bornscheuer beschreibt den Biege- und Verdrehvorgang und verwendet dabei eine systematische Bezeichnung für alle Querschnittsintegrale, siehe Bornscheuer (1952). Diese Art der Schreibweise und Darstellung liegt auch dieser Arbeit zugrunde.
- G.R. Cowper befasst sich eingehend mit der Bestimmung der Schubkorrekturfaktoren für rechteckige Querschnitte, siehe Cowper (1966).
- R. Heilig beschäftigt sich mit dem Schubmittelpunkt sowie dem Abklingverhalten von Randstörungen hinein in das Stabinnere, siehe Heilig (1961b).
- C. Weber, A. Eggenschwyler und R. Maillart beschreiben erstmals vollständig den Zusammenhang vom Drillruhepunkt im Falle der Torsionsbeanspruchung und dem Schubmittelpunkt bei der Schubbeanspruchung (Schardt, 1989, S. 2).

### 1.3.2 Orthogonalisierung der einzelnen Stabverformungszustände

In der Vergangenheit wurden die einzelnen Verformungszustände der Stabbeanspruchungen unter der Voraussetzung der orthogonalen Eigenschaften großteils getrennt voneinander untersucht, wodurch eine einheitlich geschlossene Darstellung des Verhaltens des Biegestabes in zufriedenstellender Weise fehlt. Auf die Eigenschaft der Orthogonalität wird an späterer Stelle noch detailliert eingegangen, hier sei angemerkt, dass bei einer Stabbelastung in ausgewählten Punkten des Stabquerschnitts (Normalkraft im Schwerpunkt, Biegemomente bezüglich der zwei Biegehauptachsen, Querkräfte im Schubmittelpunkt und das Torsionsmoment im Drillruhepunkt) ausschließlich die zugehörigen Stab-Verformungsgrößen auftreten. Um Einzelverformungszustände des Stabes getrennt betrachten zu können, ist die völlige entkoppelte Darstellung durch die Orthogonalisierung erforderlich.

### 1.3.3 Weiterentwicklung der klassischen Stabtheorie

Neben der klassischen Stabtheorie sind im letzten Jahrhundert zahlreiche Berechnungstheorien für prismatische Strukturen entstanden, Schardt (1989) gibt dazu den folgenden Überblick:

Tragwerk	Vorgang	Beschreibung	Verfahren
Stäbe Balken	Längung Biegung Drillung	gew. DGL 2.Ord. gew. DGL 4.Ord.	alle Verfahren der Stabstatik
Scheiben Platten	— Biegung	Airy Kirchhoff part. DGL 4.Ord.	z.B. Energie-, Differenzen- verfahren, FEM
prismatische Schalen	Membran- Biegetheorie	Systeme part. DGLn	z.B. Energie- Differenzen- verfahren, FEM
prismatische Faltwerke		Wlassow Grundverwölbungen Kantenschübe	lineare Gleichungssysteme

Abb.1.1: Einteilung prismatischer Tragwerke nach Schardt (1989, S. 4)

Im Folgenden werden die Grundlagenarbeiten für diese Arbeit im Überblick dargelegt.

### 1.3.4 Wichtige Veröffentlichungen in Zusammenhang mit dieser Arbeit

#### 1.3.4.1 Arbeit von Bornscheuer (1952)

Bornscheuer (1952) beschreibt in „Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges“ eine umfassende und einheitliche Darstellung des Biegestabverhaltens. Er verweist auf die Wichtigkeit der einheitlichen Darstellung der Starrkörperanteile der Querschnittskinematik sowie der zusätzlichen Relativverformungsfelder. Die einheitliche Darstellung zeigt er mit Fokus auf offene dünnwandige Querschnittsgeometrien. Geschlossene dünnwandige Querschnitte lassen sich in einfacher Form nur näherungsweise abbilden, was wegen der untergeordneten Wichtigkeit der Wölbkrafttorsion bei geschlossenen Querschnitten grundsätzlich vertretbar ist.

Die Herleitung der Grundgleichungen für die reine Biegebeanspruchung unterliegt der Bernoulli Hypothese. Das Ebenbleiben des Querschnitts gilt für die reine Torsionsverdrehung nicht. Hier tritt der

Querschnitt für nicht wölbfreie Querschnitte in axialer Richtung aus seiner Ebene heraus und bildet dadurch die sogenannte „Wölbfunktion“ aus. Für den Verdrehvorgang wurden ausschließlich primäre Schubspannungen berücksichtigt. Die Membranschubverzerrungen des dünnwandigen offenen Querschnitts sind identisch Null gesetzt.

Bornscheuer betrachtet ausschließlich Verwölbungen zufolge der reinen Querschnittsverdrehung, seiner Meinung nach seien die Verwölbungen zufolge Querkraften vernachlässigbar klein (vgl. Bornscheuer, 1952, S. 2).

Bornscheuer verwendet im Hinblick auf die Lösung des Gleichungssystems in seinen Herleitungen bereits den auch dieser Arbeit zugrunde liegenden Produktansatz des Verschiebungsansatzes (vgl. Bornscheuer, 1952, S. 4).

Die systematische Bezeichnung der Querschnittskenngrößen – Flächenintegrale nullter bis zweiter Ordnung – ist besonders hervorzuheben. Diese systematische Bezeichnung dient vielen nachfolgenden Arbeiten als Grundlage und wird auch in dieser Arbeit verwendet.

Bornscheuer definiert den Vorgang des Orthogonalisierens wie folgt: „Unter Normieren der Grundkoordinaten verstehen wir geeignetes Verschieben und Verdrehen der Horizonte des beliebig angenommenen Grundkoordinatensystems zur Erlangung ausgezeichneter Koordinaten“ (Bornscheuer, 1952, S. 4).

Die Normierung erfolgt dabei in zwei Schritten:

- Verwendung des Schwerpunkts und des Drillruhepunkts als Querschnitt-Bezugspunkte
- Verwendung der Biegehauptachsen als Bezugskordinatensystem

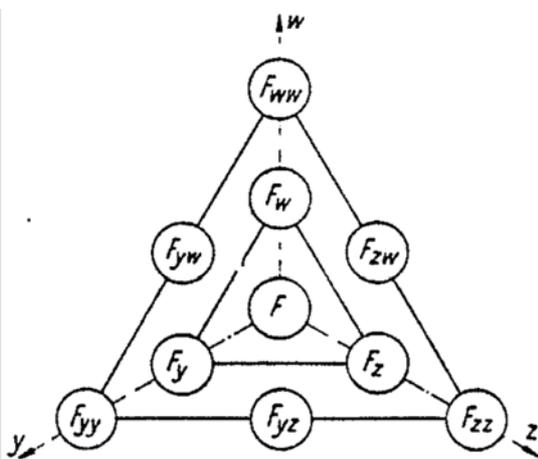


Bild 5. Darstellung der Flächenintegrale im Grund-Koordinatensystem.

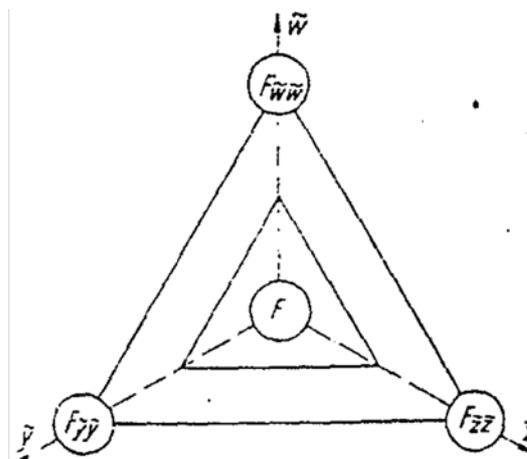


Bild 10. Darstellung der Flächenintegrale im Haupt-Koordinatensystem.

Abb.1.2: Grafische Darstellung der Querschnittskennwerte im Koordinatensystem: (li) Darstellung mit Bezug auf ein wahllos definiertes Grundsystem, (re) Darstellung mit Bezug auf das Biegehauptachsensystem, siehe Bornscheuer (1952).

Diese Art der schematischen Darstellung der Querschnittskennwerte wurde auch von Pilkey & Wunderlich (1994) verwendet.

In Salzgeber (2000, S. 47) ist diese Art der systematischen Darstellung der Querschnittskennwerte um die Querschnittsverwölbungen erweitert worden.

#### **1.3.4.2 Arbeiten von Gruttmann & Wagner (2001)**

Gruttmann beschäftigt sich mit der Darstellung der St. Venant'schen Torsion für prismatische Stäbe mit beliebigem Querschnitt ohne äußere Wölbbehinderung. Dies gilt für kompakte wie auch für dünnwandige offene und geschlossene Profile. Die Betrachtung eines elasto-plastischen Materials führt zur Bestimmung des vollplastischen Torsionsmoments.

In Gruttmann & Wagner (2001) beschäftigt sich Gruttmann detailliert mit der Bestimmung der Querkraftschubspannungen für dünnwandige offene und geschlossene Querschnitte mit konstanten Querkraften in Stablängsrichtung. Er erweitert dabei die klassische Stabkinematik (Bernoulli-Hypothese und Formtreue der Querschnittsgeometrie) um die axialen Querschnittsverwölbungsanteile und löst das Querschnittproblem mit Hilfe einer Querschnittsdiskretisierung mit linearen Elementen. Diese Vorgangsweise führt zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für das Querschnittproblem.

Im Zusammenhang mit dieser Arbeit stehen die elastischen Berechnungen der Verwölbungsfunktionen und die Bestimmung der Schubspannungszustände für die konstante Verdrillung.

Die von Gruttmann erwähnten Einheitszustände für die konstanten Querkraften und für das konstante Torsionsmoment werden im Rahmen dieser Arbeit in Form der Freifeldlösungen in Erscheinung treten.

#### **1.3.4.3 Arbeit von Weber (1926)**

Weber (1926) beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Querkraftmittelpunkt und dem Drehpunkt. Er erkennt, dass der Drehpunkt – in anderer Literatur auch als die natürliche Drehachse bezeichnet – und der Querkraftmittelpunkt bzw. der Schubmittelpunkt in ihrer Lage identisch sind. Er zeigt argumentativ diesen Zusammenhang und verweist auf die Möglichkeit zur Herleitung dieses Zusammenhangs aus den beschreibenden Gleichungen beider Probleme, der Querkraftschub- und der Torsionsbeanspruchung.

### 1.3.5 Grundlagen der verallgemeinerten Biegetheorie

Um die Unzulänglichkeiten in der Erfüllung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen zu beheben, wurden in der Vergangenheit Berechnungstheorien entwickelt, die nicht mehr den oben genannten restriktiven Einschränkungen (z. B. Ebenbleiben des Querschnitts, Unverformbarkeit des Stabquerschnitts) unterliegen. Für den prismatischen Stab lassen sich sämtliche bei der klassischen Biegetheorie getroffenen Annahmen eliminieren und somit Balkengleichungen ohne Einschränkungen in der Kinematik und der Kinetik herleiten (vgl. Schardt, 1989).

Dabei wurden Lösungsmethoden für Stäbe mit dünnwandigen Querschnitten mit entkoppelten Einheitsverformungszuständen beschrieben. Bei der verallgemeinerten Stabtheorie werden bezüglich der oben erwähnten sechs Starrkörper-Verformungsfreiheitsgrade zusätzliche „Relativverschiebungsmuster“ zur Beschreibung der exakten 3D-Kinematik des Stabquerschnitts definiert. Durch die Einführung dieser relativen Verformungsfelder lassen sich die 3D-Gleichgewichtsgleichungen an jeder Stelle des Querschnitts exakt erfüllen. Diese Relativverformungsfelder beschreiben sowohl die

- echten Querschnittsverformungen (Querkontraktionseffekte bei Normalspannungsbeanspruchung), sowie
- die axialen Querschnittsverwölbungen des Stabquerschnitts (diese führen unter Beanspruchung des Stabes zu einem nicht mehr ebenen Stabquerschnitt).

Die Verformungsfelder treten in Abhängigkeit des zugrunde gelegten Materialverhaltens (linear elastische Isotropie bzw. Orthotropie des 3D-Materials) in gekoppelter bzw. entkoppelter Form auf.

Altenbach hat für die verallgemeinerte Balkentheorie eine detaillierte Abhandlung über die verschiedenen Berechnungstheorien verfasst. Altenbach (1986) gibt die verschiedenen Berechnungstheorien ausgehend von der allgemeinen Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen wieder. Den Herleitungen der verschiedenen Stabmodelle liegt dabei die lineare Elastizitätstheorie mit isotropem Materialverhalten zugrunde. Die Grundgleichungen werden dabei für den beliebigen dünnwandigen Querschnitt mit prismatischer Stabachse hergeleitet, wobei die Schubverzerrungen in den jeweiligen Einzelementen berücksichtigt werden.

### 1.3.6 Historische Entwicklung der verallgemeinerten Biegetheorie (VBT, GBT)

Es folgt ein Überblick über die im letzten halben Jahrhundert entstandenen Arbeiten zum Thema der verallgemeinerten Biegetheorie (VBT). Gleichbedeutend ist der englische Ausdruck „Generalised Beam Theory (GBT)“ verwendbar. Als Begründer dieser verallgemeinerten Biegetheorie ist Richard Schardt zu nennen, er nennt diese jedoch „Balkentheorie“. Die Grundlagenarbeit für die verallgemeinerte Biegetheorie sowie die darauf aufbauenden und weiterführenden Arbeiten mit deren Annahmen und Grundsätzen werden im Weiteren dargelegt.

#### 1.3.6.1 Arbeiten von Schardt (1966, 1989)

Schardt zeigt durch die einheitliche Darstellung eine weitgehende Affinität in der Darstellung aller Verformungszustände für den 3D-Balken mit dünnwandigem offenen Querschnitt und sieht somit von einer getrennten entkoppelten Behandlung der Einzelverformungszustände konsequent ab. Dies betrifft die Querkraftbiegung und die Torsionsbeanspruchung.

## Grundlagen für die verallgemeinerte Biegetheorie

Schardt (1989, S. 50 ff) verwendet folgende Grundlagen für seine verallgemeinerte Biegetheorie:

- Die dünnwandigen Querschnitte sind von einfacher zusammenhängender offener Form. Geschlossene und verzweigte Querschnittsformen waren in den historischen Anfängen der VBT nicht Teil der Betrachtungen.
- Der Querschnitt besteht aus  $N$  Querschnittsteilen, die ihrerseits eine konstante Elementdicke  $t$  aufweisen. Für die  $N$  Querschnittsteile ergeben sich  $N+1$  Querschnittsknoten.
- Angrenzende Querschnittsteile sind in den Querschnittsknoten biegesteif gekoppelt.
- Die Herleitung beschränkt sich auf lineare Elastizität, es gilt das erweiterte Hook'sche Gesetz.
- Den Einzelsegmenten des dünnwandigen Querschnitts liegt die Kinematik der Kirchhoff'schen Platte zugrunde, d. h. es sind keine Schubverzerrungen in Segmentdickenrichtung möglich.
- Die Querschnittsverformungen (Querschnittskontur bleibt bei Beanspruchung nicht erhalten) hängen direkt mit der axialen Querschnittsverwölbung zusammen (vgl. Bogensperger, 2000, S. 119).
- Die Umfangsdehnungen sind zugelassen, werden aber in der Verformungsberechnung nicht berücksichtigt. Sie definieren sich ausschließlich über den Querkontraktionseffekt aus den axialen Normalspannungen.
- Es liegt ein einachsiger Spannungszustand für die Längsnormalspannungen vor.
- Die Membranschubverzerrungen sind identisch Null, die Querschnittsschubspannungen lassen sich auf Grund der unterdrückten Membranschubverzerrungen somit nur aus dem lokalen axialen Stablängsgleichgewicht rückrechnen.
- Lasten werden über Querschnittsknoten im Querschnittsinneren in den Querschnitt eingeleitet.

### Definition des Begriffes der „Wölbfunktion“

Der Begriff Wölbfunktion kann universell für alle Verformungsvorgänge verwendet werden, dies gilt für die Starrkörperanteile der Querschnittskinematik wie auch für die Relativverschiebungsanteile der Querschnittskinematik (vgl. Schardt, 1989, S. 11).

Schardt bezeichnet die axialen Querschnittsverchiebungen als Verwölbungen bzw. als Einheitsverwölbung, dies betrifft nicht nur die Starrkörperanteile der QS-Kinematik sondern auch die Relativverformungsfelder. Diese ergeben sich eindeutig in Abhängigkeit der Querschnittsgeometrie unter Berücksichtigung des materiellen Querschnittsaufbaus.

Die Wölbfunktion hat als axiales Querschnittsverformungsfeld stets die Dimension der Länge.

Die Anzahl der Wölbfunktionen hängt von der Anzahl der Stützstellen der Querschnittsdiskretisierung und der Anzahl der Orthogonalisierungsbedingungen ab.

Schardt verwendet in seinen Abhandlungen bereits die für die anschauliche analytische Lösung des Differentialgleichungssystems erforderliche Produktdarstellung des Verschiebungsansatzes in Form von  $f(X_2, X_3) \cdot f(X_1)$  (vgl. Schardt, 1989, S. 8). Auf Grund der Produktdarstellung und der Tatsache, dass sich die Längsspannungen aus der Ableitung nach der Stablängskoordinate ergeben, liegt eine Affinität zwischen der Verwölbung und der Wölbnormalspannung vor.

In Schardt (1989) ist ein Rezept für die Bestimmung der Wölbfunktionen und der zugehörigen Querschnittsverformungsfelder angegeben. Auf Grund der Orthogonalität der Einzelzustände lassen sich die zusätzlichen Wölbfunktionen direkt aus den entkoppelten Differentialgleichungen bestimmen.

### Wölbschnittgrößen

Für die zusätzlich eingeführten Einheitsverschiebungszustände ergeben sich aus den Gleichgewichtsgleichungen die zugehörigen Wölbschnittgrößen. Diese Wölbschnittgrößen stellen nach Schardt die Arbeit der Längsnormalspannungen an den Einheitsverwölbungen dar (vgl. Schardt, 1989, S. 18).

### Orthogonalisierung bzw. Normierung der Einheitsverschiebungszustände

Als Orthogonalisierung wird die vollständige Entkoppelung der Einheitszustände verstanden. Die orthogonalisierte Darstellung ermöglicht die getrennte Behandlung der Differentialgleichung für die einzelnen Verformungszustände (vgl. Schardt, 1989, S. 22).

Schardt beschreibt die Vorgangsweise der Orthogonalisierung wie folgt (vgl. Schardt, 1989, S. 22):

- Die erste Orthogonalisierung behandelt die Entkoppelung der Normalkraft von den zwei Biegemomenten und führt zum Querschnitts-Schwerpunkt (Coulomb).
- Die zweite Orthogonalisierung behandelt die Entkoppelung der beiden Biegemomente und ist somit mit dem Begriff der Biegehauptachsen verbunden, stellvertretend für v. a. sei Mohr erwähnt.
- Die dritte Orthogonalisierung betrifft den Schubmittelpunkt, dieser gilt als Querkraftmittelpunkt für die reine Biegebeanspruchung sowie als Drillruhepunkt für die reine Torsion. Diese Vorgehensweise ist auch in Bornscheuer (1952, S. 3) dargestellt.

**Tabelle 1.2** Die vier Vorgänge der Technischen Biegetheorie und ihre historische Entwicklung.

Vorgang	Orthogonalisierung	Steifigkeit	Schnittgrösse	Verschiebung	Zeit
Längung	Schwerpunkt	$EA$	$N$	$u$	Ende 18.Jhd.
Biegung 1	Hauptachsen	$EI_1$	$M_1$	$v$	Mitte 19.Jhd.
Biegung 2		$EI_2$	$M_2$	$w$	
Torsion	Schubmittelpunkt	$EC_M$	$W$	$\vartheta$	Anfang 20.Jhd.
?	?	?	?	?	

Abb.1.3: Darstellung der Orthogonalisierung der Einheitszustände mit den zugehörigen Steifigkeitskennwerten und den Schnittgrößen, Auszug aus Schardt (1989, S. 4).

Die Orthogonalisierung lässt sich in allgemeiner Darstellung in Anlehnung an Schardt (1989, S. 22) wie folgt darstellen.

$$\int_A \mathbf{E} \cdot \Omega_i \cdot \Omega_k \cdot dA \quad \text{mit } i \neq k \quad [1-1]$$

Es ist erkennbar, dass es sich um keine reine geometrische Vorgangsweise, sondern um eine mechanische Orthogonalität im Sinne eines Arbeitsausdruckes handelt. Dies betrifft insbesondere Querschnitte mit allgemeinem materiellem Querschnittsaufbau.

Die Orthogonalität der Einheitszustände führt zu einer vollständigen Entkopplung der einzelnen Verformungszustände ( $N$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  und  $M_1$ ). Eine treffendere mechanische Deutung der Orthogonalisierung lässt sich wie folgt formulieren: Das Querschnittsintegral der Längsspannungen einer Wölbfunktion multipliziert mit den Verschiebungen einer anderen Wölbfunktion liefert keine mechanische Arbeit. Für Verbundquerschnitte ist eine Berücksichtigung der materiellen Verhältnisse der einzelnen Querschnittsteile zwingend erforderlich.

Die Orthogonalisierung des Gleichungssystems führt dazu, dass die Anteile des klassischen Biegebalkens vom Gesamtverformungszustand abgespalten und so in klassischer bekannter Form dargestellt werden können (vgl. Bogensperger, 2000, S. 122).

### 1.3.6.2 Arbeit von Strehl (2010)

Strehl gibt einen detaillierten Überblick über die Entwicklungsgeschichte der verallgemeinerten Biegetheorie. Die für diese Arbeit relevanten Eckdaten werden der Vollständigkeit halber angeführt (vgl. Strehl, 2010, S.107 ff).

- 1966: Erste Veröffentlichung der VBT durch Schardt (1966). Diese behandelt prismatische Tragwerke mit offenen „dünnwandigen“ Querschnitten im Sinne der geometrischen Abmessungen mit konstanter Dicke der Einzelsegmente. Die benachbarten Einzelsegmente weisen in der Profillinie stets einen Knick auf, es treten keine Membranschubverzerrungen der Mittelebene auf.
- 1972: Die berechenbaren Querschnittsformen und Stabformen werden auf gerade und gekrümmte Rohre erweitert.
- 1974: Die berechenbaren Querschnittsformen werden um die geschlossenen dünnwandigen Faltwerke erweitert.
- 1976: Die berechenbaren Querschnittsformen werden um die einzelligen geschlossenen verzweigten Profile erweitert.

Allein die Tatsache, dass sich im Rahmen der Weiterentwicklung der VBT ein Großteil der Arbeiten mit der Erweiterung um allgemeine Querschnittsformen beschäftigt, zeigt, dass eine allgemeine Darstellung der Herleitung der Querschnittsberechnung mit einer einheitlichen Formulierung für alle Einheitsverformungszustände auf Basis von Querschnittsverwölbungen unumgänglich ist.

### 1.3.6.3 Arbeit von Hofmann (1992)

Hofmann gibt zur Erläuterung mit dem mittig belasteten symmetrischen Einfeldträger ein anschauliches Beispiel zur Problematik der Querschnittsverwölbungen an (vgl. Hofmann, 1992, S. 12-15). Er stellt fest, dass aus Gründen der Symmetrie im Bereich der Lasteinleitung in Stabmitte Verformungsinkompatibilitäten auftreten. Die auf Grund der konstanten Querkraftverläufe beidseitig der Lasteinleitung konstant angenommenen Querschnittsverwölbungen widersprechen den Ergebnissen der 3D-Festkörpermechanik, da ein Aufklaffen und Durchdringen benachbarter Stabquerschnitte den Annahmen dieser widersprechen.

Hofmann leitet in seiner Arbeit eine verfeinerte Balkentheorie für die Berechnung des schubnachgiebigen Torsionsstabes mit allgemeinem Querschnitt her, wobei die Querschnittsform erhalten bleibt. Für den ebenen Stab wird die Bestimmung der kubischen Wölbfunktion durch Integration der quadratischen Schubverzerrungen über den Querschnitt gezeigt.

#### 1.3.6.4 Arbeit von Flügge & Marquerre (1950)

Flügge und Marquerre befassen sich mit den Wölbkräften in dünnwandigen Querschnitten, wobei ein undeformierbarer Stabquerschnitt zugrunde liegt. Die Querschnittsform ist nicht nur auf offene Querschnitte beschränkt, sondern kann auch von zellenartiger und verzweigter Profilform sein.

Flügge & Marquerre (1950) befassen sich mit Querschnittsverwölbungen an den Stabenden, die bei Behinderung zu Störungen im Stabinneren führen. Flügge & Marquerre formulieren:

„Wenn sich in einem zylindrischen Stab die zu den St. Venant'schen Torsionsspannungen gehörige Verwölbung der Querschnitte infolge einer Endeinspannung oder einer Veränderlichkeit des Torsionsmoments  $M_T$  längs der Stabachse  $x$  nicht frei ausbilden kann, so entsteht eine Störung des Torsionsspannungszustands. Sie ist gekennzeichnet durch das Auftreten einer Wölbkraftgruppe, d. h. eines Systems von Längsspannungen ohne Resultierende und ohne resultierendes Moment, die, im Stabquerschnitt angreifend, Verwölbungen hervorrufen oder schon vorhandene Verwölbungen verändern (z. B.: an einer Einspannstelle zu Null machen).“ (Flügge & Marquerre, 1950, S. 23).

Sie schreiben von Wölbfunktionen konstanter Form mit abklingendem Verhalten in Stablängsrichtung. Sie verfolgen bereits die Lösung der Differentialgleichungen basierend auf einem Produktansatz und dem daraus resultierenden Eigenwertproblem (vgl. Flügge & Marquerre, 1950, S. 23).

Eine analytische Lösung des EW-Problems ist nur für dünnwandige Querschnitte möglich und wird im Detail gezeigt (vgl. Flügge & Marquerre, 1950, S. 24).

- Für offene Querschnitte ist eine Lösung in geschlossener analytischer Form möglich,
- Für geschlossene Querschnitte sind bereits umfangreiche „mühsame“ Berechnungen erforderlich.

Durch die analytische Lösung des Differentialgleichungssystems haben Flügge & Marquerre das typische Verhalten der Verwölbungen erkannt: Es gelten unendliche viele Wölbfunktionen mit periodischem Verhalten, die mit steigender Abklingzahl rascher abklingen.

Sie zeigen die repräsentativen Eigenverwölbungen eines Rechteckquerschnitts und zusätzlich das Abklingverhalten dieser in perspektivischer Darstellung entlang der Stablängsrichtung (vgl. Flügge & Marquerre, 1950, S. 34).

#### 1.3.6.5 Arbeiten von Wlassow (1964, 1965)

Wlassow spricht im Rahmen der modernen Baumechanik von vier verschiedenen Klassen von Querschnittstypen (vgl. Wlassow, 1964, S. 15 ff):

- Klasse 1: Kontinuierliche Körper
- Klasse 2: Platten und Schalen
- Klasse 3: Stäbe mit Vollquerschnitt
- Klasse 4: dünnwandige Stäbe

Elemente der Klasse 1 unterliegen im Rahmen der Berechnung von Spannungen und Verformungen in der Regel der mathematischen mechanischen Elastizitätstheorie.

Elemente der Klasse 3 stellen die in der klassischen technischen Stabstatik verwendeten Strukturelemente dar. Sie sind bis dato geprägt von einer Reihe an geometrischen und mechanischen Hypothesen.

- Bernoulli-Hypothese: Ebenbleiben der Querschnitte bei reiner Biegebeanspruchung
- Es treten ausschließlich Normalspannungen in Richtung der Stabachse auf.
- Der Verdrehvorgang unterliegt der reinen Torsion, d. h. Dehnungen und Schubverzerrungen in der Querschnittsebene sind per Definition unterdrückt. Diese entspricht der St. Venant'schen Torsionstheorie.

Elemente der Klasse 4 entziehen sich der Hypothese des ebenen Querschnitts. Wlassow spricht in diesem Zusammenhang von relativen Querschnittsverwölbungen, die im Zusammenhang mit axialen Dehnungen und axialen Normalspannungen stehen. Diese können bei dünnwandigen offenen und geschlossenen Querschnitten beträchtliche Werte annehmen.

Die Bezeichnung „relative Querschnittsverwölbung“ wird in dieser Arbeit in ähnlicher Weise verwendet.

Wlassow beschreibt das axiale Verhalten der zusätzlich auftretenden axialen Querschnittsverwölbungen mit den zugehörigen Wölbnormalspannungen wie folgt (vgl. Wlassow, 1964, S. 17):

- Für dünnwandige geschlossene Querschnitte klingen die Wölbnormalspannungen rasch ab.
- Für dünnwandige offene Querschnitte sind die auftretenden Wölbnormalspannungen von vorrangiger Bedeutung.

Wlassows Theorie der dünnwandigen Stäbe liegen folgenden Hypothesen zugrunde (vgl. Wlassow, 1964, S. 19 ff):

- Der dünnwandige offene Querschnitt wird als Schale mit starrer (undeformierbarer) Querschnittskontur betrachtet.
- Die Schubverzerrungen in der Mittelfläche (Membranschubverzerrungen) sind identisch Null.

Wlassow (1964, S. 22) definiert den Begriff der Verwölbung wie folgt: „Die Verformung eines ebenen Querschnitts, die in Längsverschiebungen der Querschnittspunkte aus der Querschnittsebene heraus (in Richtung der Stabachse) besteht, bezeichnen wir als Verwölbung des Querschnitts.“

Auch Wlassow berücksichtigt nur die Verwölbungen zufolge der Verdrehung des Querschnitts.

### 1.3.6.6 Arbeit von Altenbach (1986)

In Altenbach (1986, S. 54) wird für die Herleitungen der Grundgleichungen der Produktansatz mit der Aufspaltung des gesamten Verschiebungsfeldes in die „verallgemeinerten Koordinaten (3D-Einzelverschiebungsfelder)“ und in den Längsverlauf verwendet, um das Gesamtproblem auf ein eindimensionales Modell zu reduzieren.

Die „verallgemeinerten Koordinaten“ – in dieser Arbeit als „3D-Einzelverschiebungsfelder“ bezeichnet – stellen dabei einzelne Verformungsfelder des Querschnitts dar. Diese lassen sich in endlicher Anzahl linear unabhängig zum 3D-Gesamtverschiebungszustand kombinieren.

In Altenbach (1986, S. 56 ff) ist eine detaillierte Darstellung verschiedener vereinfachter Berechnungsmodelle für dünnwandige Querschnitte angeführt, wobei diese ausgehend von der vollständigen Formulierung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen durch sukzessive Einführung von Verformungsrestriktionen dargestellt werden. Diese einzelnen Berechnungstheorien mit deren Eigenschaften und Einschränkungen wurden von Altenbach (1986, S. 56) unter dem Titel „Vom Schalen- zum Stabmodell“ dargestellt. Die folgende Aufzählung ist kumulierend zu deuten, bereits angeführte Restriktionen gelten auch für die Nachfolgenden:

- Querdehnungen der Schalenmittelfläche: Diese zeigen einen geringen Einfluss auf die Ergebnisse und treten vor allem bei geschlossenen Querschnitten mit konstruktiven Behinderungen auf. Diese Einschränkungen werden auch von Möller (1982) verwendet. (vgl. Altenbach, 1986, S. 56)
- Schubverzerrungen der Schalenmittelfläche: Die Vernachlässigung der Schubverzerrungen in der Elementebene führt für viele Profile, vor allem geschlossene torsionsbeanspruchte Profile, zu abweichenden Ergebnissen. Gerade für kurze Schalen(Stab)elemente sollten diese Schubverzerrungen nicht vernachlässigt werden. (vgl. Altenbach, 1986, S. 57)
- Längskrümmung der Scheibenmittelfläche: Diese Modellstufe liegt den Arbeiten von Schardt (1989) und Sedlacek (1971) zugrunde. (vgl. Altenbach, 1986, S. 58)
- Verdrillung der Schalenstreifen
- Gelenkfaltwerk
- Starre Querschnittskontur: Die Querschnittsgeometrie wird vollständig unterbunden, dies führt zum sogenannten unverformbaren Stabquerschnitt. Diese Modellstufe liegt der Arbeit von Heilig (1961a, b) zugrunde. (vgl. Altenbach, 1986, S. 60)
- Starrer Querschnitt: Wenn alle relativen 3D-Verschiebungsfelder ausgeschlossen sind, dann resultiert daraus der schubnachgiebige Stab in Form des Timoshenko-Stabes. (vgl. Altenbach, 1986, S. 61)

#### **1.3.6.7 Arbeiten von Silvestre & Camotim (2002a bis 2005) und Dinis et al. (2005)**

Camotim, Silvestre und Dinis beschäftigen sich bis dato in ihren Arbeiten unter anderem hauptsächlich mit der Erweiterung der VBT um die Theorie 2-ter Ordnung zur Beschreibung der folgenden Effekte:

- Elastisches Knickverhalten von Stäben mit orthotropem Materialverhalten
- Einfluss der Schubverformungen auf das Gesamtverhalten der Stabelemente
- Schwingungsverhalten von elastischen orthotropen Elementen
- Überkritisches Tragverhalten im Stabilitätsfall
- Analytische Betrachtungen des Beulverhaltens für verschiedenen Querschnittstypen

Sie verfassten Arbeiten zum Thema von dünnwandigen Querschnitten mit Einzelquerschnittsteilen in Form von geschichteten laminatartigen orthotropen Strukturen. Neben den Untersuchungen im linearen Fall beschreiben sie eine Biegetheorie 2. Ordnung für orthotropes Materialverhalten.

#### **1.3.6.8 Arbeiten von Davies & Leach (1994)**

Davies & Leach (1994) ist es zu verdanken, dass die Theorie der verallgemeinerten Biegetheorie nach Schardt den englischsprachigen Wissenschaftlern zugänglich gemacht wurde. Neben der Aufbereitung der Arbeit von Schardt (1989) wird für die Lösung des Differentialgleichungssystems erstmals die Finite-Elemente-Methode (FEM) genannt. Diese wird im Rahmen dieser Arbeit zur Lösung des Querschnittproblems verwendet. In Davies et al. (1994) zeigen sie die Erweiterung der VBT erster Ordnung um die Effekte zweiter Ordnung zur Beschreibung geometrischer Nichtlinearität. Sie zeigen für verschiedene Profilformen die Überlagerungen von lokalem und globalem Stabilitätsversagen und befassen sich mit dem Verzweigungsproblem.

### 1.3.6.9 Arbeit von Hanf (2010)

Hanf (2010) erweitert die verallgemeinerte Biegetheorie um die Erfassung der Membranschubverzerrungen der einzelnen Querschnittselemente von dünnwandigen offenen, geschlossenen sowie verzweigten Querschnittsprofilen.

### 1.3.6.10 Arbeiten von Roik & Sedlacek (1966 bis 1971)

In Roik & Sedlacek (1966) ist die Analogie des verdrehbeanspruchten Stabes und dem quer belasteten Zugstab im Detail gezeigt. Dabei entspricht die über die Stablänge konstante Zugkraft dem Anteil aus der St. Venant'schen Torsion und die Biegesteifigkeit entspricht der Wölbsteifigkeit. Roik und Sedlacek arbeiten im Detail den Einfluss der Schubverformungen zufolge der Querkraftbiegung sowie den Einfluss der sekundären Wölb-Schubspannungen in die beschreibenden Differentialgleichungen ein und zeigen die Gültigkeit der oben genannten Analogie. Sie zeigen die Abhängigkeit der Schubverformungseinflüsse von der Stablänge sowohl für die Querkraftbiegung als auch für die Verdrehung.

Sedlacek präsentiert in zahlreichen Publikationen eine Stabtheorie mit zusätzlichen Verwölbungen und Querschnittsdeformationen. Es treten große Gemeinsamkeiten mit der klassischen Stabtheorie mit axialen Zusatzverwölbungen und mit der klassischen Faltwerkstheorie von Wlassow auf. Die Schubverformungen zufolge der sekundären Schubspannungen werden dabei näherungsweise berücksichtigt.

In Sedlacek (1966) erfolgt die Erweiterung der Darstellung des Torsionsstabes von Bornscheuer für dünnwandige Querschnitte um die Profilverformungen.

Sedlacek beschäftigt sich mit der Berechnung von prismatischen dünnwandigen Faltwerken basierend auf der verallgemeinerten Biegetheorie. Die Berechnung von prismatischen Faltwerken in Anlehnung an die technische Biegetheorie ist seiner Ansicht nach durch die Vertrautheit der Ingenieure mit der Stabstatik zu begründen. Dafür ist allerdings eine Erweiterung der verallgemeinerten Balkentheorie um die Querschnittsdeformationen notwendig. Er zerlegt dafür den Gesamtverformungszustand in die Anteile der auf die Hauptachsen des Querschnitts bezogenen Balkenverschiebungen und Verdrehungen sowie in die zusätzlich auftretenden Konturverformungen (vgl. Sedlacek, 1971, S. 405).

Folgenden Grundlagen werden dafür definiert (vgl. Sedlacek, 1971, S. 405 ff):

- Es liegt ein ebener Spannungsverlauf über eine Einzelscheibe vor (Wagner'sche Hypothese für das Erhaltenbleiben des Querschnitts), die Schubverformungen werden vernachlässigt.
- Plattenbiegemomente in den Einzelscheiben werden in Stablängsrichtung vernachlässigt, in Querrichtung treten innerhalb der Einzelscheiben konstante Querbiegemomente auf.
- Die Drillmomente finden nur näherungsweise im energetischen Mittel Berücksichtigung.
- Es gilt das Hook'sche Gesetz in Zusammenhang mit kleinen Verformungen.

Er hält fest, dass die Konturverformungen bei der Berechnung schlanker Stäbe als lokale Störungen bei Lasteinleitungen oder Verformungsbehinderungen in Erscheinung treten (vgl. Sedlacek, 1971, S. 408).

Die vollständige Diagonalisierung der Steifigkeitsmatrizen kann durch die Lösung des entstehenden Eigenwertproblems vollzogen werden (vgl. Sedlacek, 1971, S. 407). Durch diese Orthogonalisierung lassen sich die Differentialgleichungen für die Schnittgrößen entkoppeln.

Roik & Sedlacek geben Hinweise zur Implementierung der St. Venant'schen Torsion in die klassische Berechnung von dünnwandigen Querschnitten. Der Steifigkeitsanteil der St. Venant'schen Torsion wird nachträglich an den entsprechenden Hauptdiagonalstellen der Steifigkeitsmatrix eingefügt (vgl. Roik & Sedlacek, 1970, S. 23). Diese Vorgehensweise entspricht der unter Punkt 5.2.3 erwähnten erweiterten  $1D^+$ -Kinematik.

### 1.3.6.11 Arbeit von Möller (1982)

Basierend auf der Faltwerkstheorie von Wlassow (1964) entwickelt Möller eine um die Plattenlängsbiege- und Plattendrillmomente erweiterte Faltwerkstheorie. Diese Erweiterung ermöglicht die Berechnung von prismatischen Stäben mit beliebigen, nicht formtreuen offenen und geschlossenen sowie verzweigten dünnwandigen Stabquerschnitten. Neben der Theorie 1. Ordnung befasst sich Möller in seiner Arbeit auch mit der Berechnung von dünnwandigen Querschnitten nach der Theorie 2. Ordnung sowie mit der Untersuchung des Schwingungsproblem.

Möller geht im Detail auf die Orthogonalisierung des Differentialgleichungssystems ein (vgl. Möller, 1982, S. 27 ff) und spaltet dabei von den untereinander orthogonalen Einheitsverformungszuständen die sogenannten „[...] Einheitsverschiebungszustände mit dem Charakter von Starrkörperverschiebungen [...]“ (Möller, 1982, S. 29) ab.

Auf eine genauere Definition und eine mechanische Erklärung der Notwendigkeit der Orthogonalisierungsprozedur geht Möller nicht im Detail ein, sondern erläutert in diesem Zusammenhang bekannte Definitionen der klassischen technischen Biegelehre wie Schwerpunkt, Drehachse, Schubmittelpunkt, Biegehauptachsen sowie Schubhauptachsen.

### 1.3.6.12 Arbeit von Bogensperger (2000)

Bogensperger befasst sich unter anderem mit der konsistenten Herleitung der Grundgleichungen für den prismatischen Stab unter Berücksichtigung zusätzlicher Querschnittsverwölbungen. Die Matrix der Schubkorrekturfaktoren wird für die zwei Einheitszustände der Querkraft sowie für den Torsionszustand beschrieben (vgl. Bogensperger, 2000).

Bogensperger bietet einen detaillierten Vergleich der erweiterten Stabtheorie nach Schardt und der Stabtheorie mit Zusatzverwölbungen nach Roik & Sedlacek (vgl. Bogensperger, 2000, S. 123 ff).

Bogensperger definiert die Schubkorrekturfaktoren entgegen der historischen Schreibweise auf Grund der klareren Schreibweise durch deren Kehrwert.

### 1.3.6.13 Arbeit von Heilig (1961)

Heilig beschäftigt sich mit der Bestimmung der Schubkorrekturfaktoren für die Wölbkrafttorsion und für die Querschubbeanspruchung in den beiden Querschnittskoordinatenrichtungen. In Heilig (1961a) ist der Einfluss der Wölbrandbehinderungen bei offenen und geschlossenen dünnwandigen Querschnittsprofilen im Detail beschrieben.

„In Stäben mit offenem, dünnwandigem Profil sind die Schubspannungen bei Torsion linear über die Profildicke verteilt und ihre Hebelarme sind von der Größenordnung der Wanddicke. Aus diesem Grund ist der Torsionswiderstand offener Profile klein und die Querschnittsverwölbungen sind groß. Das hat zur Folge, dass die Wölbeinflüsse, die aus einer Behinderung der natürlichen Verwölbung resultieren, bei offenen Profilen besonders spürbar sind. Verglichen mit der primären Schubspannung (St. Venant'schen Schubspannung  $\tau_1$ ) sind die durch die Wölbbehinderung entstehenden sekundären Schubspannungen (Wölbschubspannungen  $\tau_2$ ) klein, so daß ihr Verformungseinfluss vernachlässigt werden kann; nicht vernachlässigbar ist hingegen ihr Einfluss auf das Drehgleichgewicht wegen der großen Hebelarme an denen sie wirken (von der Größenordnung der Querschnittsabmessungen).“ Heilig (1961a, S. 333).

„Ganz andersgeartet ist das Torsionsverhalten von Stäben mit geschlossenem Profil (Kasten). Bei geschlossenen, dünnwandigen Querschnitten ist der Beitrag der linear über die Wanddicke verteilten Schubspannungen zum inneren Torsionsmoment vernachlässigbar klein. Der zur konstanten Verteilung gehörige Torsionswiderstand (beim einzelligen Kasten heißt er der

Bredt'sche Torsionswiderstand) ist ungleich größer als der St. Venant'sche der offenen Profile, zugleich sind die natürlichen Verwölbungen und die primären Torsionsschubspannungen viel kleiner.“ Heilig (1961a, S. 333).

„Daraus erklärt sich, dass die Wölbeinflüsse in Kastenprofilen viel geringer sind als in offenen Profilen und dass trotzdem die sekundären Schubspannungen (wie die primären nur konstant über die Dicke verteilt) durchaus die Größenordnung der primären Torsionsspannungen haben können.“ Heilig (1961a, S. 333).

„Der klassischen Theorie der Wölbkrafttorsion offener Profile, so wie sie von H. Wagner und R. Kappus begründet wurde, liegen zwei wesentliche Voraussetzungen zugrunde: a) Die Wöblängsspannungen sind proportional den Querschnittsverwölbungen bei reiner Torsion; b) Der Verformungseinfluss der Wölbschubspannungen kann vernachlässigt werden.“, Heilig (1961b, S. 97).

Die erste der beiden Bedingungen ist auch als Wagner-Hypothese bekannt. Heilig erkennt, dass gerade für kurze Stäbe oder für Stäbe mit Randbedingungen an den Stabendquerschnitten in Form von unterdrückten axialen Verschiebungen Unstimmigkeiten auftreten. Anders formuliert, die Verformungseffekte aus den primären und den sekundären Schubspannungen nehmen die gleiche Größenordnung an.

Heilig beschreibt das Abklingverhalten solcher Randeffekte „als relativ rasch“ abklingend, wobei diese Unstimmigkeiten nur für wenige geringe Stabbereiche von Relevanz sind (vgl. Heilig, 1961b, S. 97).

Heilig gibt den formalen Zusammenhang der Anteile der Schubverformung sowohl für Querkraftbiegung als auch für die Wölbkrafttorsion an. Gerade für geschlossene Profile stellen die Anteile aus den Schubverformungen einen nicht zu vernachlässigenden Anteil dar. Für offene Profile gibt Heilig (1961b) den Schubverformungsanteil mit kaum mehr als 10 % an (vgl. Heilig, 1961b, S. 103).

Neben den Schubkorrekturfaktoren beschäftigt sich Heilig auch mit der Bestimmung des Schubmittelpunkts von Stäben mit offenen Querschnittsprofilen.

#### **1.3.6.14 Arbeit von Cowper (1966)**

Cowper beschäftigt sich mit der Bestimmung der Schubkorrekturfaktoren für die Querschubbeanspruchungen (vgl. Cowper, 1966, S. 339).

Der Schubkorrekturfaktor ist eine dimensionslose Größe, die von der Querschnittsform abhängt. Diese Größe korrigiert die modellbedingten Annahmen der konstanten Schubspannungsverteilung über den Querschnitt (vgl. Cowper, 1966, S. 335).

Der Schubkorrekturfaktor spiegelt das Verhältnis der mittleren Schubverzerrungen in einem Querschnitt zur Schubverzerrung im Schwerpunkt wider (vgl. Cowper, 1966, S. 335).

Cowper gibt für eine Vielzahl von Querschnitten Schubkorrekturfaktoren in Abhängigkeit der Querkontraktion an. Für den Rechteckquerschnitt gibt er Werte zwischen 0,83 und 0,85 in Abhängigkeit der Querkontraktionsziffer an. Dem entgegen gibt Timoshenko einen Wert von 0,63 an (vgl. Cowper, 1966, S. 338).

#### **1.3.6.15 Arbeit von Kraus (2005)**

In Kraus (2005) sind die Vorgänge der Normierung bzw. der Orthogonalisierung der einzelnen Einheitsverformungszustände im Detail definiert. Dabei wird ein zweistufiges Normierungsverfahren verwendet, wobei in einem ersten Schritt die bekannte orthogonalisierte Darstellung der Starrkörperverformungszustände ermittelt wird. Diese wird durch die Ermittlung des elastischen Kräftemittelpunkts sowie mit der Bestimmung der Biegehauptachsenrichtungen bestimmt. In einem

zweiten Schritt wird dann die „normierte Wölbordinate“ bestimmt. Ein durchgängiges Verfahren zur Durchführung der Normierung wird in Kraus (2005, S. 1) angegeben.

Grundsätzlich ist die Orthogonalisierung bzw. die Normierung kein rein geometrisches Problem wie in Kraus (2005, S. 38) beschrieben. Für inhomogene Querschnitte reicht eine rein geometrische Orthogonalisierung der einzelnen Einheitsverformungszustände nicht aus. Eine auf mechanischen Grundlagen basierende Orthogonalisierung ist für inhomogene Querschnittsaufbauten unumgänglich.

Grundsätzlich kann eine verschiedenartig durchzuführende Orthogonalisierung in Abhängigkeit der Querschnittsgeometrie, wie in Kraus (2005, S. 2) angeführt, nicht nachvollzogen werden.

#### **1.3.6.16 Arbeiten von Guggenberger & Moosbrugger (2006)**

In Guggenberger & Moosbrugger (2006) wird für beliebig geschichtete monosymmetrische Rechteckquerschnitte die Herleitung der Steifigkeitsmatrix gezeigt. Grundlage für die Herleitung stellt dabei die transversal schubnachgiebige Einzellage dar. Für den dreischichten Stab wird die Herleitung der Grundgleichungen sowie die analytische Lösung des DGL-Systems gezeigt. Für die Querschnittsdiskretisierung werden verschiedene Varianten von Diskretisierungsmethoden, basierend auf unterschiedlichen globalen und relativen Systemfreiheitsgraden, gezeigt.

In Moosbrugger & Guggenberger (2008) wird das Konzept zur Bestimmung der Ganzhöhenquerschnittsverwölbungen aus den lokal definierten Ansatzfunktionen gezeigt.

# 2

**Problemstellung,  
Ziel und Aufbau der  
Arbeit**

## 2.1 Problemstellung

### 2.1.1 Grundlagen des prismatischen Stabes

Der prismatische Stab stellt ein im konstruktiven Ingenieurbau wesentliches Element in der Modellbildung für stabartige Tragwerke dar, um 1D-ausgeprägte reale Bauteile in Rechenmodellen abbilden zu können. Neben Stäben mit geraden Stabachsen und konstanten Querschnitten treten vermehrt Stäbe mit gekrümmten Stabachsen bzw. mit veränderlichen Querschnittsformen in Stablängsrichtungen auf. Diese geometrischen Stabformen sind nicht Teil dieser Arbeit. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Stäbe mit den folgenden Eigenschaften behandelt:

- Der Stab weist in seiner Längsrichtung absolute gerade Prismaticität auf, detaillierte Angaben dazu sind unter Punkt 3.2 definiert.
- Es liegt die völlige Variabilität des Querschnittsaufbaus in seiner Querschnittsebene vor, d. h. es werden neben homogenen Querschnitten auch inhomogene, stückweise stetige Querschnittsaufbauten mit Verbundfugen untersucht. Die Querschnittsform ist durch eine allgemeine Querschnittsberandung definiert.

Die geometrischen Einschränkungen beziehen sich nur auf die geometrische Stabform und stellen die einzigen Restriktionen dar. Bei der kinematischen Beschreibung treten keine Einschränkungen auf.

### 2.1.2 Herleitung der Grundgleichungen für den prismatischen Stab

Basierend auf den oben genannten Tatsachen wird im Rahmen dieser Arbeit die vollständige Beschreibung und durchgängige Herleitung der 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen für den prismatischen 3D-Stab mit 3D-Kinematik – ohne Beschränkung in seiner Allgemeinheit – gezeigt. Die bis dato den meisten Arbeiten auf diesem Gebiet zugrunde liegenden kinematischen und materiellen Randbedingungen und Restriktionen werden ausdrücklich nicht getroffen. Zahlreiche historische und auch jüngere Arbeiten zum Thema des prismatischen Stabes (Schardt (1989), Wlassow (1964), Camotim et al. (2004), Dinis et al. (2005), Haakh (2004), Hanf (1989), Roik & Sedlacek (1970) u. a.) legen den Herleitungen zum Teil gravierende kinematische und kinetische Restriktionen zugrunde. Diese den Problemlösungen zugrunde gelegten Einschränkungen entsprechen in den meist Fällen den folgenden Annahmen:

- Bernoulli-Hypothese, d. h. der Stabquerschnitt bleibt auch bei einer Verformung der Stabachse stets eben und steht immer senkrecht auf die Stabachse.
- Der Stabquerschnitt gilt als nicht deformierbar und bleibt somit auch bei Beanspruchung in seiner geometrischen Form erhalten.
- Den Problemlösungen liegen oft gravierende Einschränkungen in den abbildbaren Stabquerschnittsgeometrien zugrunde.

Die Problemlösungen der Vergangenheit sind großteils auf einzelne entkoppelt betrachtete Einzelstabphänomene beschränkt, d. h. einzelne Einheitszustände, wie beispielsweise die Wölbkrafttorsion, werden unabhängig von anderen für sich alleinstehend gelöst. Dadurch lassen sich Interaktionen zwischen den Einheitszuständen nicht in geschlossener Form darstellen.

Im Gegensatz dazu zeigt diese Arbeit die vollständige Einbettung des 3D-Stabes in ein 3D-mechanisches Kontinuummodell und verzichtet somit auf stark einschränkende Modellrestriktionen. Dem etablierten Stabmodell liegen die folgenden fundamentalen Annahmen zugrunde:

- Die zugrunde gelegten 3D-Verschiebungsansätze der Querschnittskinematik unterliegen keinerlei Restriktionen.

- Sämtliche 3D-Verschiebungsfelder basieren auf dem strukturierten Produktansatz, d. h. das Querschnittproblem und das Stablängsrichtungsproblem werden durch die folgende separierte Darstellung beschrieben:  $f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = f(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) \cdot f(\mathbf{X}_1)$ .
- Das 3D-Verschiebungsfeld ist aus einem globalen und einem lokalen 3D-Teilverschiebungsfeld aufgebaut. Das lokale 3D-Teilverschiebungsfeld besteht dabei aus einer beliebigen Anzahl an hierarchisch geordneten 3D-Einzelverschiebungsfeldern, die untereinander allesamt die Anforderungen der mechanischen Orthogonalität erfüllen, siehe Punkt 5.4.
- Die beschreibenden 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen werden mit Beschränkungen auf lineare orthotrope Materialeigenschaften hergeleitet.
- Die Herleitung der Gleichungen erfolgt in allgemeiner Darstellung – es gilt die Matrix-Differential-Operatorschreibweise – gemeinsam für alle sechs globalen Verformungszustände.
- Die 3D-Gleichgewichtsgleichungen werden an jeder Stelle innerhalb des Stabkörpers ohne Ausnahme exakt erfüllt.
- Die Lösung der 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen wird für den Sonderfall der Isotropie unter Vernachlässigung der Querkontraktionseffekte im Detail gezeigt.

Die 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen werden der Notwendigkeit halber sowohl in Differential- als auch in Integralform in der sogenannten „starken“ und „schwachen“ Formulierung aufbereitet. Im Rahmen der systematischen Lösung des 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems sind beide Darstellungen des 3D-Gleichgewichts erforderlich. Aus den hergeleiteten 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen lassen sich durch einfache Elimination niederrangigere kinematische Beschreibungen, wie beispielsweise der Stab mit 1D(ebener)-Kinematik, durch Eliminationen der entsprechenden globalen Systemfreiheitsgrade extrahieren. Als Sonderfall sei an dieser Stelle der dünnwandige Querschnitt erwähnt, dessen 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen durch die Elimination der Effekte der Querschnittsdickenrichtung aus dem Gesamtproblem hervorgehen. Dies wird im Rahmen dieser Arbeit nicht gezeigt.

### 2.1.3 Lösung der Grundgleichungen für den prismatischen Stab

Für das hergeleitete 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem des prismatischen 3D-Stabes wird für den Sonderfall der materiellen Isotropie unter Vernachlässigung der Querkontraktionen die systematische analytische exakte simultane Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystems für den homogen belasteten Stab – d. h. es liegen keine Lastangriffe im Stabinneren vor – gezeigt. Dafür wird ein zweistufiges Lösungsverfahren verwendet:

- Lösungsanteil I: Lösung des inhomogenen Querschnittproblems für konstante Querschub- und Torsionsbeanspruchung entlang der Stabachse zur Ermittlung der sogenannten ungestörten 3D-Einzelverschiebungsfelder der Freifeldlösungen (FF) für alle Einheitszustände. Diese Lösungen entsprechen den in vielen Arbeiten für sich eigenständig gelösten und eingeführten Verwölbungen zur Korrektur der Randbedingungsinkompatibilitäten. Diese Zustände werden mit den sogenannten Schubkorrekturfaktoren in Verbindung gebracht.
- Lösungsanteil II: Lösung des homogenen Querschnittproblems zur Beschreibung des abklingenden Randstörproblems entlang der Stabachse in das Stabinnere, auch bezeichnet als „Abklingproblem in Stablängsrichtung“. Das Abklingverhalten folgt dabei einem exponentiellen Verlauf in Stablängsrichtung.

Die Lösung des Querschnittproblems erfolgt für die dickwandigen Querschnitte mit Hilfe der FE-Methoden. Der Lösung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen in Stablängsrichtung liegt eine mathematisch analytische Lösungsstrategie zugrunde. Für die Lösung des Abklingproblems wird die Äquivalenz zur „Eigenschwingung der schubnachgiebigen Platte“ gezeigt. Darauf basierend lassen sich für die Ermittlung

der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder vorhandene, in kommerziellen FE-Programmen implementierte Eigenfrequenz-Prozeduren verwenden. Die Eigenformen stellen dabei die relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder dar, die Eigenwerte entsprechen den Abklingzahlen. Die Lösung des Querschnittproblems für dünnwandige Querschnitte ist in analytisch exakter Weise möglich, dies wird in dieser Arbeit nicht gezeigt. Das DGL-System, aus dem die Koppelung der Stab-Längsrichtung mit dem Querschnittproblem hervorgeht, führt im Falle der dünnwandigen Querschnittskinematik zu komplexen Lösungsfunktionen. Aus diesen Lösungsfunktionen resultieren die sinus- und cosinusförmigen 3D-Einzelverschiebungsfelder und die exponentiellen Abklinglösungen in Stablängsrichtung.

Die beiden Lösungsanteile I & II sind im Sinne der allgemeinen Deformationsmethode zur Stabsteifigkeitsmatrix zusammenzuführen, wobei dafür zwei verschiedene Varianten gezeigt werden.

- Ermittlung der exakten Stabsteifigkeitsmatrix unter Verwendung der ermittelten Einzelverschiebungsfelder der Querschnittsverwölbungen aus Lösungsanteil 2.
- Ermittlung einer approximierten Stabsteifigkeitsmatrix unter Verwendung der Freifeldlösung der Querschnittsverwölbung als Abklinglösung zur Reduktion des Rechenaufwands. Die Abklingzahlen für die 3D-Einzelverschiebungsfelder aller Einheitszustände (Querkraft und Torsion) ergeben sich durch Rückrechnung aus dem DGL-System. Für eine Vielzahl an Stabkonfigurationen kann damit eine ausreichend genaue Ergebnisdarstellung erreicht werden.

#### 2.1.4 Aufbereitung von ausgewählten Beispielen für den 2D- & 3D-Fall

Basierend auf der ermittelten Stabsteifigkeitsmatrix für den allgemeinen mehrteiligen 3D-Stub werden die folgenden ausgewählten Beispiele im Detail diskutiert und aufbereitet.

- Ermittlung und Darstellung der sogenannten Freifeldlösung (Lösungsanteil 1) für konstante Querkraftbeanspruchungen  $V_2$  und  $V_3$  sowie für eine konstante Torsionsbeanspruchung  $M_1$ .
- Ermittlung der lokalen 3D-Einzelverschiebungsfelder (Lösungsanteil 2) mit dem zugehörigen Abklingverhalten in Stablängsrichtung und Bestimmung der effektiven Abklinglängen.
- Berechnung der Schubkorrekturfaktoren für die Querkraft- und die Torsionsbeanspruchung. Diese Korrekturziffern für die einzelnen Zustände treten im Rahmen dieser Arbeit nicht explizit in Erscheinung, werden allerdings der Vollständigkeit und der Vergleichbarkeit halber durch Definition einer allgemein gültigen mechanischen formalen Beziehung angeführt.
- Darstellung der Ergebnisse für einen einseitig eingespannten Kragarm mit 2D- und 3D-Kinematik und ausgewählten 2D- und 3D-Querschnittsaufbauten. Dargestellt werden die 3D-Gesamtquerschnittsverformungen, die 3D-Einzelverschiebungsfelder und die 3D-Spannungen über den Querschnitt. Zudem wird das Verhalten all dieser Größen in Stablängsrichtung gezeigt.
- Vergleich des Randstörabklingverhaltens für den einseitig eingespannten Kragarm mit homogenem einteiligem Querschnittsaufbau, beruhend auf der exakten und der approximierten Lösung der Stabsteifigkeitsmatrix.
- Darstellung des Verhaltens von sehr dünnen schubnachgiebigen Einzelschichten (Verbundfugen) bei 2D-geschichteten monosymmetrischen Querschnitten.

## 2.2 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, die konsequente und durchgängige Herleitung der Grundgleichungen des geraden prismatischen 3D-Stabes mit verallgemeinerter 3D-Querschnittskinetik zu zeigen.

Dazu erfolgt die nahtlose Einbettung des Stabes in ein theoretisches 3D-Kontinuums-Festkörper-Mechanik-Modell.

Die 3D-Gleichgewichtsgleichungen werden dabei ohne jegliche Vereinfachung und Einschränkung der Allgemeinheit erfüllt. Als Grundlage für die Herleitung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen gilt dabei die lineare Elastizität des orthotropen Materialverhaltens.

Die klassische technische Biegetheorie wird für die restriktionslose Darstellung der Querschnittskinetik um die echte Querschnittsverwölbung – Querschnittsverformungen in Stablängsrichtung  $X_1$  – und um die echte Querschnittsverformung – Querschnittsverformungen in der Querschnittsebene  $X_2$ - $X_3$  – erweitert.

Sämtliche 3D-Grundgleichungen werden auch in reduzierter Darstellung für den Sonderfall der linear elastischen Isotropie unter Vernachlässigung der Querkontraktionseffekte angeführt.

Der Herleitung liegt ein beliebiger allgemeiner Querschnittsaufbau ohne jegliche Restriktionen in seiner Geometrie mit stückweise materiell stetigen Verhältnissen zugrunde. Dies gilt sowohl für dünn- als auch für sogenannte dickwandige kompakte Querschnittsgeometrien. Die Allgemeinheit in der Querschnittsbeschreibung ermöglicht somit auch die Berechnung von elastisch nachgiebig gekoppelten Verbundquerschnitten aus zwei oder mehreren Einzelquerschnittsteilen, verbunden durch Verbundfugen, ihrerseits basierend auf linear elastischer Orthotropie des Materialgesetzes. Für die Beschreibung der Einzelquerschnittsteile und der Verbundfugen wird keine systematische Unterscheidung verwendet; wodurch ausschließlich ein mechanisch zu beschreibendes Querschnittselement erforderlich ist. Die Schichtdicke und das Materialverhalten alleine charakterisieren eine Verbundfuge, die zwei benachbarte Einzelquerschnittsteile koppelt.

Für den Fall der linear elastischen Isotropie ohne echte Querschnittsverformungen wird die mathematisch exakt analytische Lösung des 3D-Gleichgewichts-Differentialgleichungssystems des 3D-Stabes gezeigt und darauf aufbauend das Stab-Steifigkeitselement für den 3D-Stab ohne Beschränkung der Allgemeinheit hergeleitet.

Mit der durchgängigen Herleitung der Grundgleichung soll ein Instrument geschaffen werden, das die Möglichkeit bietet, die oben erwähnten Problembereiche der klassischen Stabtheorie auszuschalten.

Die klassischen Stabeffekte, wie beispielsweise der Schubkorrekturfaktor, der geschichtete Querschnittsaufbau, lokale Lasteinleitungen und Randstörungen sollen basierend auf dem allgemeinen Stab-Steifigkeitselement diskutiert werden.

## **2.3 Aufbau der Arbeit**

### **2.3.1 Einleitung und Stand der Technik**

Im Kapitel „Einleitung und Stand der Technik“ wird ein Überblick über die historische Entwicklung der Biegetheorie sowie über den Stand der Technik und des Wissens der erweiterten Stabtheorie gegeben. Es werden die Grundlagen der verschiedenen Entwicklungsstufen der Stabtheorien angeführt. Neben den grundlegenden Annahmen der verschiedenen Theorien werden auch die Grundlagen der Normierung bzw. der Orthogonalisierung der Einheitsverformungszustände im Grundsatz beschrieben. Zudem wird auf die Begriffe der „Gesamtquerschnittsverformung“ und des „Schubkorrekturfaktors“ eingegangen.

### **2.3.2 Problemstellung, Ziel und Aufbau der Arbeit**

Im Kapitel „Problemstellung, Ziel und Aufbau der Arbeit“ wird im Detail auf die Problemstellung, auf das Ziel und den Aufbau der Arbeit eingegangen. Zudem wird im Rahmen der Problemstellung die Methodik zur Lösung des formulierten Stabproblems detailliert behandelt. Die Möglichkeiten des neu etablierten Stabmodells werden dargestellt.

### **2.3.3 Grundlagen für den prismatischen Stab**

Im Kapitel „Grundlagen für den prismatischen Stab“ werden alle Grundlagen, Annahmen und Voraussetzungen für die im Kapitel „Herleitung der Grundgleichungen für allgemeine linear elastische Orthotropie“ gezeigte Herleitung der Grundgleichungen für den prismatischen Stab aufgezeigt. Dies betrifft neben den geometrischen Voraussetzungen die linear elastischen materiellen Eigenschaften des Querschnittsaufbaus, die 3D-Kinematik des Stabquerschnitts, die Lagerungsbedingungen sowie die Belastungssituationen im Stabinneren und an den Stabenden.

### **2.3.4 3D-Mechanik**

Im Kapitel „3D-Mechanik“ werden die grundlegenden Gleichungen der „Kinematik“, der „Konstitution“ und der „Kinetik“ dargelegt. Der für die Herleitung der Gleichungen wesentliche Übergang von der unstrukturierten auf die strukturierte Darstellung, d. h. Trennung des Balkenverformungszustands und des Querschnittsverformungszustands, wird etabliert. Darauf aufbauend werden die 3D-Gleichgewichtsgleichungen in originaler Differentialdarstellung für des 3D-Kontinuum hergeleitet. Die Grundlagen für den Übergang auf die Integraldarstellung des Gleichgewichts werden im Detail erläutert. Die für die Darstellung der Randbedingungen erforderliche Matrix des Normalvektors der Staboberfläche wird definiert sowie deren Äquivalenz zur Differentialoperatormatrix gezeigt.

### **2.3.5 Grundlagen für das etablierte Stabmodell**

Im Kapitel „Grundlagen für das etablierte Stabmodell“ werden die Grundlagen für das neu etablierte Stabmodell definiert. Dies betrifft insbesondere die Beschreibung der verallgemeinerten strukturierten Querschnittskinetik mit ihrem verallgemeinerten strukturierten hierarchischen 3D-Verschiebungsansatz. Im Detail wird auf den Produktansatz für die Darstellung der 3D-Verschiebungen und der 3D-Belastungen sowie auf die Orthogonalität der globalen und lokalen 3D-Einzelverschiebungsfelder eingegangen. Zudem werden die erforderlichen Stabrandbedingungen sowie die Stab-Querschnittskoppelung in Stablängsrichtung bei Mehrstabsystemen (Stabzügen) definiert. Die festgelegten Grundlagen gehen teilweise über die Möglichkeiten des etablierten Stabmodells hinaus und dienen der allgemeinen Definition der theoretischen Grundlagen für weiterführende Arbeiten.

### 2.3.6 Herleitung der Grundgleichungen für den 3D-Stab

Im Kapitel „Herleitung der Grundgleichungen für den 3D-Stab“ wird die durchgängige konsistente Herleitung des beschreibenden 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems für den prismatischen 3D-Stab mit komplexem dünnwandigem/dickwandigem Querschnittsaufbau gezeigt. Die 3D-Gleichgewichtsgleichungen werden dabei in differentieller Darstellung und in der bekannten Integraldarstellung gezeigt.

Das 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem wird sowohl für orthotropes als auch für isotropes Material unter Vernachlässigung der Querkontraktionseffekte im Detail erarbeitet.

Einen wesentlichen Punkt bei der Herleitung der Grundgleichungen stellt dabei der hierarchische strukturierte Produktansatz dar. Dieser ist durch die strikte Trennung des Querschnittsverhaltens vom Stablängsrichtungsverhalten definiert.

Die Darstellung der 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen erfolgt problembedingt in Differential- und Integralform, wobei die Integraldarstellung in der sogenannten „starken“ und „schwachen“ Form gezeigt wird. Zudem werden, soweit erforderlich, die partiellen Ableitungen nach einzelnen Querschnitts- und Stablängsrichtungskoordinaten durchgeführt.

### 2.3.7 Strukturierte Lösung der Grundgleichungen für lineare Isotropie

Im Kapitel „Strukturierte Lösung der Grundgleichungen für lineare Isotropie“ wird die strukturierte Lösung des 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems für den Fall der linearen elastischen Isotropie gezeigt. Dabei wird die Lösung basierend auf der folgenden Lösungsstrategie gezeigt:

- Lösungsanteil I: Lösung des inhomogenen Stabproblems für konstante Querschub- und Torsionsbeanspruchung entlang der Stabachse zur Ermittlung der sogenannten ungestörten 3D-Einzelverschiebungsfelder der „Freifeldlösungen (FF)“.
- Lösungsanteil II: Lösung des homogenen Stabproblems zur Beschreibung des abklingenden Randstörproblems entlang der Stabachse hinein in das Stabinnere, auch bezeichnet als „Abklingproblem“ in Stablängsrichtung. Die Einzelverschiebungsfelder sowie die zugehörigen Abklingzahlen folgen aus dem zu lösenden Eigenwertproblem.

Die Lösung des Querschnittproblems erfolgt für 2D-Querschnittsformen basierend auf der FE-Methode. Die Lösung des beschreibenden linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten für die Stablängsrichtung erfolgt in analytisch exakter Form basierend auf einem Exponentialansatz.

Einen wesentlichen Punkt bei der Lösung des Gleichungssystems stellt die Orthogonalisierung der Einheitsverformungszustände dar, diese wird im Detail erläutert.

Für die Berechnung der Beispiele wird die 3D-Stabsteifigkeitsmatrix des 3D-Stabes aufbauend auf den beiden Lösungsanteilen in exakter und approximierter Form aufgestellt. Der exakten Darstellung liegen dabei sämtliche relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder aus dem Eigenwertproblem (Lösungsanteil 2), der approximierten Darstellung ausschließlich die Freifeldlösungen (Lösungsanteil 1) zugrunde.

Für die Rückrechnung der globalen und lokalen Spannungsverläufe, der globalen Stabschnittgrößen sowie der Verformungsverläufe werden die formalen Grundgleichungen in Abhängigkeit der Stabachsenkoordinate  $X_1$  angeführt.

Es wird ausschließlich der homogene Stabbelastungszustand behandelt, partikuläre Belastungszustände sind nicht Teil der vorliegenden Arbeit.

### 2.3.8 Beispiele für den 2D- & 3D-Fall

Im Kapitel „Beispiele für den 2D- & 3D-Fall“ werden anhand verschiedener Querschnittskonfigurationen die wesentlichen Unterschiede des Querschnittsverhaltens gezeigt. Dies betrifft im Wesentlichen die Gegenüberstellung der Schubverformungseinflüsse, die von den Querschnittsteilen und von den nachgiebigen Verbundfugen stammen.

Die Beispiele beschreiben einfach symmetrische sowie unsymmetrische Querschnittsaufbauten mit kompakten und dünnwandigen Querschnittsgeometrien. Alle Beispiele basieren dabei auf einer 2D-Querschnittskinematik, wobei für die monosymmetrischen Querschnitte die Belastungen stets in dieser Symmetrieebene angreifen.

Für die verschiedenen Querschnitte wird neben den 3D-Spannungen und den 3D-Verschiebungsfeldern auch das Verhalten dieser Größen in Stablängsrichtung gezeigt.

In Anlehnung an die Literatur werden die üblicherweise für die Querschnittsberechnungen verwendeten Schubkorrekturfaktoren als Steifigkeitsverhältnisse zwischen dem wölbnachgiebigen und dem wölbstarren (polaren) Querschnittsverformungsverhalten angeführt.

Zudem werden die Einflüsse der Randstörungen aus den Einspannbedingungen des Kragarms auf das Globalverhalten des Stabes gezeigt.

### 2.3.9 Zusammenfassung und Ausblick

Im Kapitel „Zusammenfassung und Ausblick“ wird neben der Zusammenfassung der Arbeit ein Ausblick für die Weiterentwicklung der gezeigten Stabtheorie gegeben.

### 2.3.10 Anhang

Im Anhang werden die detaillierten Zwischenschritte und Gleichungsumformungen, die für die Herleitungen erforderlich sind, dargestellt. Zudem werden verschiedene Zusatzfragestellungen zum Thema 3D-Stab diskutiert.

- Darstellung der erforderlichen Integralidentitäten, die im Rahmen der Herleitungen Verwendung in anderen Kapiteln finden.
- Detaillierte Herleitungsschritte für die GLG-Gleichungen
- Darstellung der Schnittgrößen in Abhängigkeit der Stab-Verzerrungs-Parameters
- Herleitung der Vorfaktormatrizen des originalen DGL-Systems
- Herleitung der Vorfaktormatrizen des umgewandelten diskretisierten DGL-Systems
- Darstellung der Gleichgewichts Differential-Gleichungen
- Berechnung der 3D-Einzelverschiebungsfelder der Freifeldlösung sowie der 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösung mit kommerziellen Finite-Elemente-Programmen auf Basis der Eigenfrequenzanalyse der dünnen transversal schubnachgiebigen Platte.

# 3

## **Grundlagen für den prismatischen Stab**

## 3.1 Einleitung

Für die Definition des in dieser Arbeit neu etablierten Stabmodells sowie für die Herleitung der Grundgleichungen für den geraden prismatischen Stab sind folgende Definitionen und Grundlagen erforderlich.

Im Wesentlichen sind dabei die nachstehenden Punkte im Detail zu erläutern:

- Die perfekte gerade Prismatizität des Stabes
- Der beliebig komplexe geometrische Stabquerschnitt
- Der materielle Aufbau des Stabes

Diese Definitionen stellen keine grundlegenden Neuerungen dar, vielmehr stellen sie eine Wiederholung der wesentlichen geometrischen und materiellen Grundlagen des klassischen 3D-Stabes dar.

Alle bis dato bekannten Stabmodelle sind in der Lage, die in diesem Kapitel erläuterten Grundlagen zu erfüllen. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass sich sämtliche Definitionen auf den 3D-Stab beziehen.

## 3.2 Die perfekte gerade Prismatizität des Stabes

### 3.2.1 Anfangsgeometrien des prismatischen Stabes

Sämtliche weiterführenden Herleitungen und Definitionen basieren auf der folgenden Anfangsgeometrie des Stabes, die sich wie folgt festhalten lässt:

- Der Stab ist in einem kartesischen Koordinatensystem  $(X_1, X_2, X_3)$  definiert.
- Die Stabachse verläuft durch einen frei wählbaren Bezugspunkt 0.
- Die Stabachse verläuft stets in Richtung der Koordinatenachse  $X_1$ .
- Die Ebene des Stabquerschnitts ist durch die beiden Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  der beiden Koordinatenrichtungen  $X_2$  und  $X_3$  definiert.
- Die anfängliche Globalgeometrie weist stets eine ideal gerade Stabachse auf.
- Der Stab weist in Längsrichtung eine Bauteilgeometrie in Form eines perfekten prismatischen geometrischen Körpers auf.

Das Volumen des Stabkörpers entsteht durch konstantes Verschieben des Querschnitts (Querschnittsberandung) entlang der geraden Stabachse. Eine gleichzeitige Rotation des Querschnitts um die Stabachse ist kategorisch ausgeschlossen.

Der Stabquerschnitt und die gerade Stabachse stehen im Falle der perfekten geraden Prismatizität an jeder Stelle entlang der Stabachse stets orthogonal zueinander.

Die grundlegenden Annahmen dieser Arbeit fordern für die Geometrie des Stabkörpers keinerlei einschränkende Klassifizierungen in die bekannten Stabklassen nach Wlassow (1964), d. h. in die Klassen der dickwandigen und dünnwandigen Querschnitte.

### 3.2.2 Die gerade perfekte Prismatizität

Die perfekte gerade Prismatizität des Stabes ist durch konstante Verhältnisse aller beschreibenden Stabeigenschaften entlang der gesamten geraden Stabachse definiert:

- Der Stabquerschnitt besteht für den allgemeinen Fall des beliebigen Verbundquerschnitts aus

---

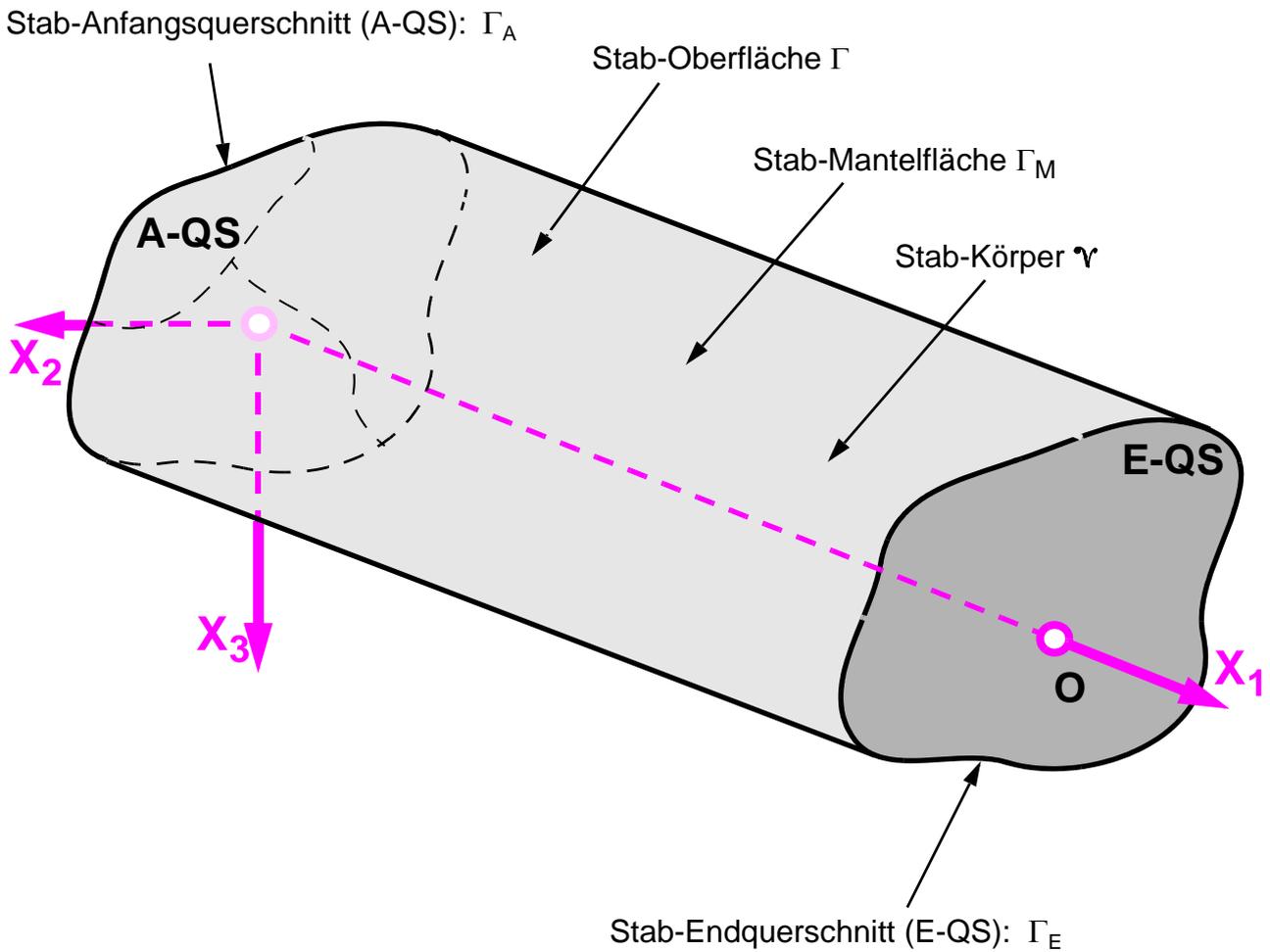
einer beliebigen Anzahl an Querschnittsteilen, die untereinander mit starren und/oder nachgiebigen Verbundfugen gekoppelt sind. Als Sonderfall tritt der Stabquerschnitt mit nur einem Querschnittsteil auf. Der definierte Querschnitt tritt entlang der gesamten Stabachse als konstante Geometrie auf, siehe Punkt 3.3.

- Es liegen konstante, linear elastische orthotrope Materialeigenschaften für den Querschnitt beziehungsweise für die einzelnen Querschnittsteile des Querschnitts und für die Verbundfugen vor, siehe Punkt 3.4.
- Die Lagerungsbedingungen liegen in Form von konstanten linear elastischen Bettungen auf der Stabmantelfläche sowie punktuellen oder flächigen Bedingungen an den beiden Stabendquerschnitten vor, siehe Punkt 5.9.
- Es gelten konstante Belastungsverhältnisse zwischen den Stab-End-Querschnitten. Diese treten in Form von Flächenbelastungen auf der Stabmantelfläche beziehungsweise in Form von Volumenlasten innerhalb des Stabkörpers auf, siehe Punkt 5.6. Die angeführten Lasten im Stabinneren stellen partikuläre Belastungszustände dar. Diese sind im Rahmen der Gleichungslösung nicht Teil dieser Arbeit.

Innerhalb der Querschnittsebene ( $X_2$  und  $X_3$  Koordinatenebene) sowie entlang der Querschnittsberandung gilt die völlige Beliebigkeit der erwähnten charakteristischen Stabeigenschaften. Die einzige Einschränkung ist durch die Konstanz in Stablängsrichtung gegeben.

Schardt definiert die gerade Prismaticität als „Formeigenschaft einer Struktur, die durch Verschieben einer ebenen Kontur rechtwinklig zu ihrer Ebene erzeugt wird“ (Schardt, 1989, S. 343). Wie oben definiert, müssen neben den Formeigenschaften des Stabes auch die Materialeigenschaften, die Belastungssituation sowie die Lagerungsbedingungen in die Definition der Prismaticität mit einbezogen werden. Für die analytische Lösbarkeit des Gleichungssystems müssen alle diese genannten charakterisierenden Stabeigenschaften der geraden Prismaticität ausnahmslos genügen.

Abb. 3.1 bis Abb. 3.5 stellen rein schematische Darstellungen eines geraden prismatischen Stabes für eine beliebige Querschnittsgeometrie dar.



$$\Gamma = \Gamma_M \cup \Gamma_{A,E}$$

$$\Gamma_{A,E} = \Gamma_A \cup \Gamma_E$$

**Abb. 3.1:** Geometrische Definitionen für den geraden prismatischen homogenen Stab

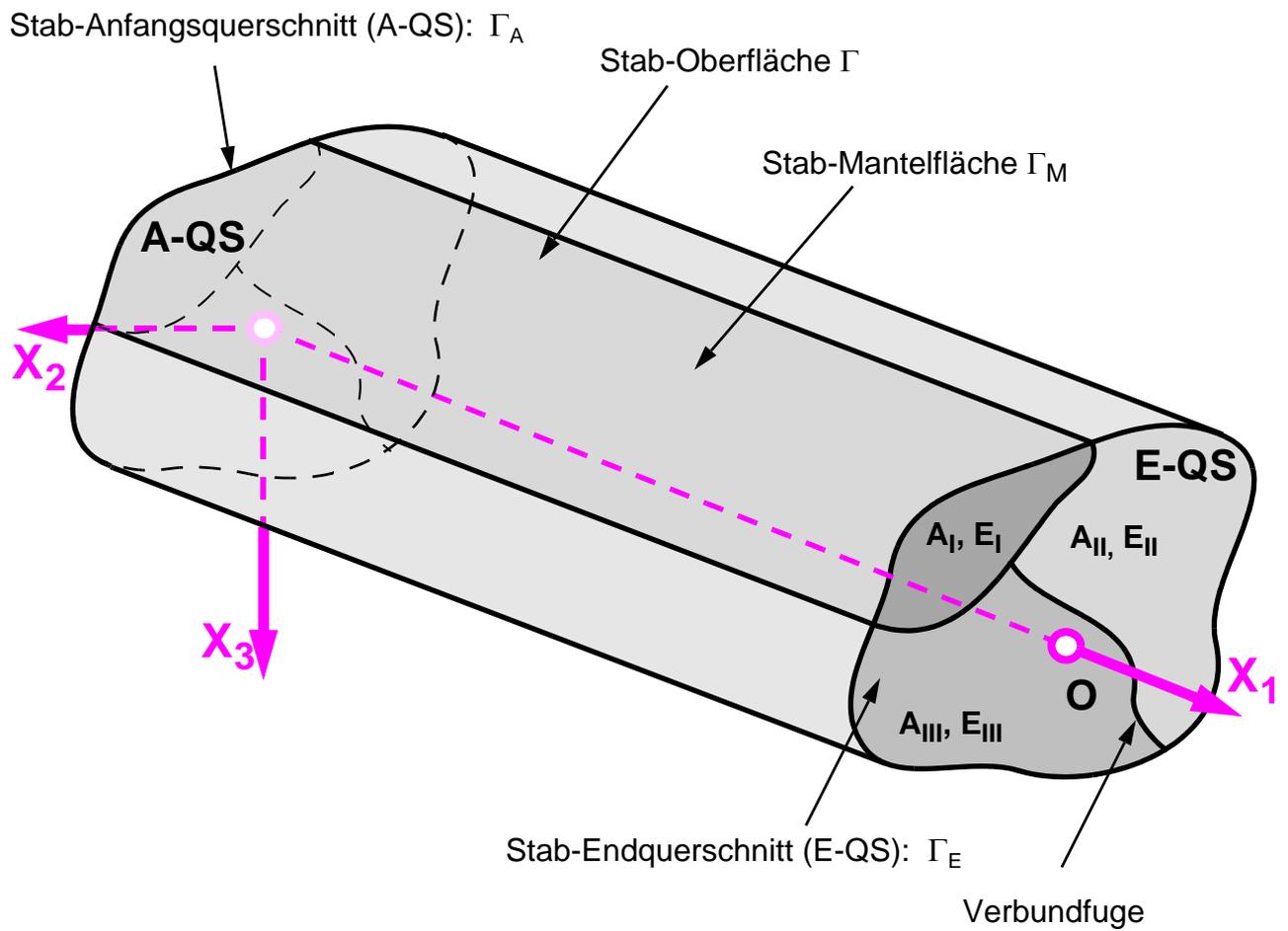


Abb. 3.2: *Beliebig komplexer Querschnittsaufbau (Verbundquerschnitt mit starren bzw. nachgiebigen Verbundfugen)*

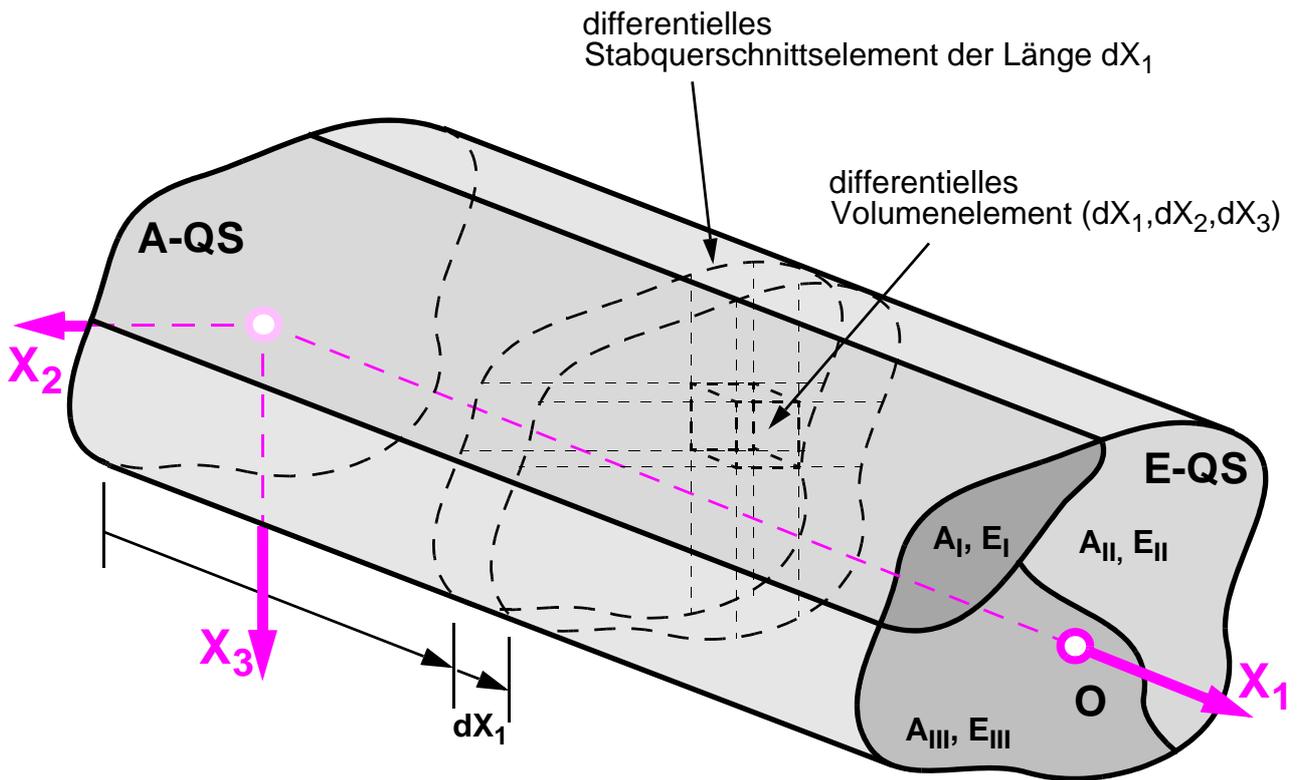


Abb. 3.3: Differentieller Stab-Ausschnitt des prismatischen Stabes

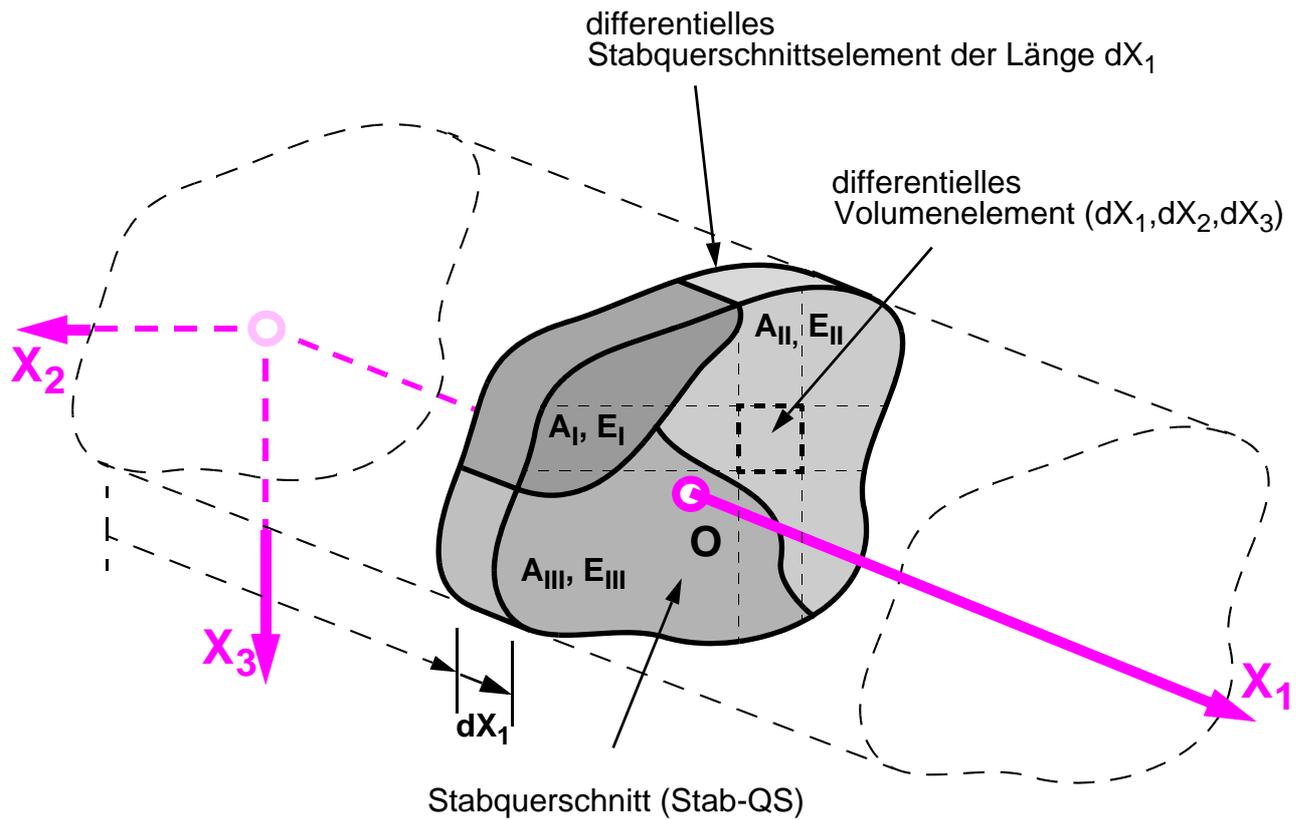
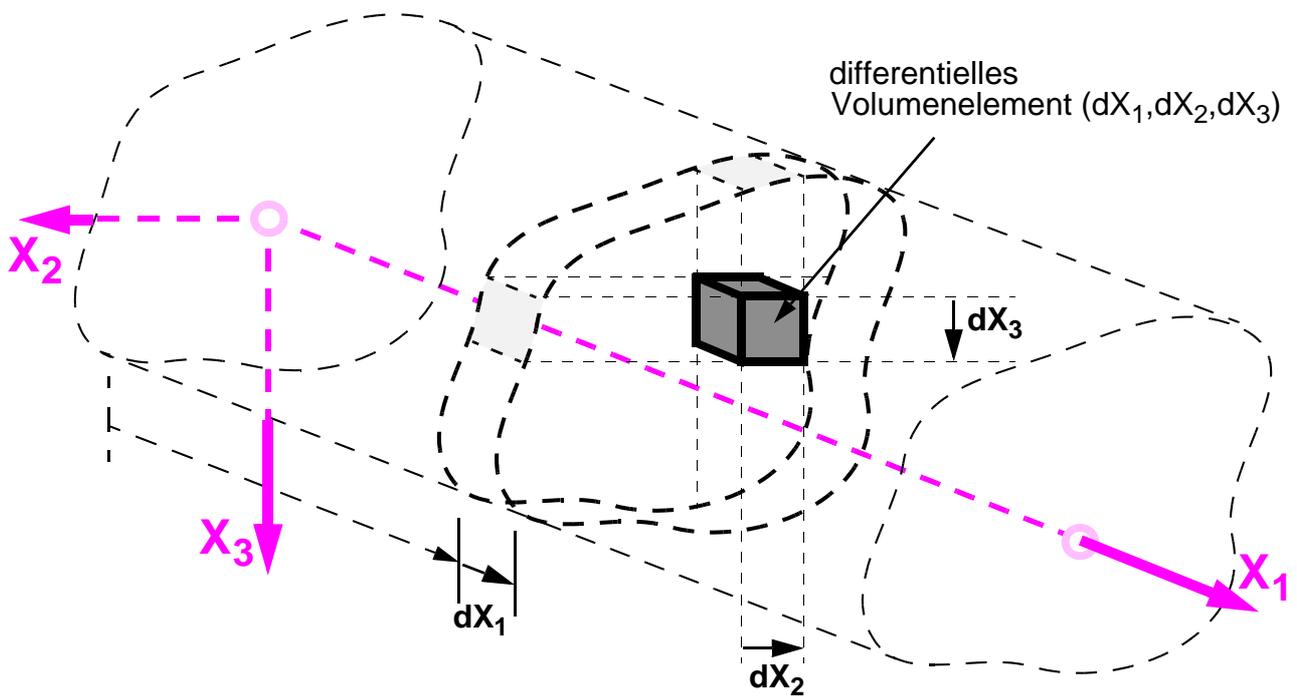


Abb. 3.4: *Differentielles Stabquerschnittselement des prismatischen Stabes*



**Abb. 3.5:** *Differentielles 3D-Volumenelement des prismatischen Stabes*

### 3.3 Der beliebig komplexe geometrische Stabquerschnitt

Neben der Stabachse mit ihrer Stablänge ( $L$ ) ist der Stabquerschnitt (QS) das wesentliche beschreibende Element des prismatischen Stabes. Wie in Kapitel 1 detailliert beschrieben, wurden im Rahmen der Entwicklung der Stabtheorie verschiedene Querschnittstypen etabliert, in Abhängigkeit derer auch die baustatischen Berechnungstheorien entwickelt wurden. Die Abmessung der Querschnittsgeometrie wird dabei als das Klassifikationskriterium verwendet. Die verwendeten Begriffe der Dünnwandigkeit und der Dickwandigkeit beschreiben im Rahmen der Definition des Stabquerschnitts ausschließlich Formeigenschaften und geben keinerlei Informationen über die zugrunde gelegte Querschnittskinematik, die zur mechanischen Beschreibung verwendet wird.

Der Querschnitt des prismatischen Stabes ist durch die folgenden geometrischen Eigenschaften definiert:

- Das Gebiet des Querschnitts ist in der Querschnittsebene durch die allgemeine Kontur der Querschnittsberandung definiert, siehe 3.3.1.
- Das Gebiet des Querschnitts wird durch einen inneren strukturellen homogenen oder heterogenen Aufbau definiert, siehe 3.3.3.

#### 3.3.1 Die Querschnittsberandung

Die Querschnittsberandung ist durch ein beliebiges geschlossenes Polygon bzw. Polynom  $n$ -ten Grades oder durch eine Aneinanderreihung von Polygonen bzw. Polynomen  $n$ -ten Grades in der Querschnittsebene definiert. Die Querschnittsberandung stellt stets eine geschlossene ebene Kurve in der Querschnittsebene dar.

Unter der komplexen Querschnittsgeometrie wird in erster Linie der beliebige innere Aufbau des Stabquerschnitts verstanden. Sie soll weniger auf eine komplizierte Querschnittsberandung des Querschnitts hinweisen. Wird die Querschnittsberandung als Klassifizierungskriterium für die Querschnittsform verwendet, können die folgenden Querschnittsberandungstypen unterschieden werden:

- Geometrisch einfache Querschnittsberandungen: Diese beschreiben zum Beispiel offene und geschlossene dünnwandige und dickwandige Querschnitte.
- Geometrisch komplizierte Querschnittsberandungen: Diese beschreiben zum Beispiel verzweigte dünnwandige Querschnitte.

Als Beispiel für einen Querschnitt mit einer geometrisch einfachen Querschnittsberandung kann der klassische Rechteckquerschnitt, mit und ohne Verbundfugen, erwähnt werden.

Für diese Arbeit werden für die Herleitung und die Lösung der beschreibenden Gleichungen keine Unterscheidungen nach der Art der Querschnittsberandung getroffen. Die Unterscheidung wird ausschließlich für die Problemstrukturierung verwendet.

#### 3.3.2 Bausteine des Stabquerschnitts

##### 3.3.2.1 Der Querschnittsteil

Ein allgemeiner komplexer Querschnitt besteht im Rahmen dieser Arbeit aus einer beliebigen Anzahl an einzelnen Querschnittsteilen, die durch sogenannte elastische Verbundfugen untereinander in Interaktion treten. Der Querschnittsteil stellt dabei ein Subgebiet des gesamten Querschnitts dar und ist als größter in sich geschlossener Bereich des Querschnitts mit konstanten geometrischen, strukturellen und materiellen Eigenschaften definiert. Wie der Querschnitt ist auch der Einzelquerschnitt durch eine allgemeine Einzelquerschnittsteilberandung begrenzt.

Besteht ein Querschnitt aus mindestens zwei Einzelquerschnittsteilen, so wird dieser als heterogener oder gegliederter Querschnitt bezeichnet. Im üblichen Sprachgebrauch wird grundsätzlich von sogenannten „Verbundquerschnitten“ oder von „mehrteiligen Querschnitten“, siehe Pischl (1966), gesprochen.

Im Sonderfall eines Querschnitts mit nur einem Querschnittsteil wird von einem homogenen beziehungsweise von einem einteiligen Querschnitt gesprochen.

### **3.3.2.2 Die elastische Verbundfuge**

Die Verbundfuge ist im Zusammenhang mit dieser Arbeit ein auf linear elastischem Materialverhalten beruhender dünner Querschnittsteil, der zwei benachbarte Querschnittsteile in Interaktion bringt. Im Sinne der kinematischen Beschreibung ergeben sich im Vergleich zum echten Querschnittsteil keinerlei Unterscheidungen. Das einzige Unterscheidungsmerkmal einer Verbundfuge gegenüber einem klassischen Querschnittsteil ist die Dicke, auch Verbundfugendicke genannt. Diese ist im Gegensatz zur Dicke des echten Querschnittsteils sehr klein.

Theoretisch liegt für die Verbundfuge eine „Null“-Dicke vor. Aus rechentechnischen Gründen kann dies für das Konzept der Modellierung der Verbundfuge als Querschnittsteil praktisch nicht durchgezogen werden. Dies führt zu einer endlich dicken Verbundfuge.

Die Verbundfugen können sowohl als starre als auch als nachgiebige Koppelungselemente in den drei lokalen Koordinatenrichtungen definiert sein.

### **3.3.3 Klassifizierung des Querschnitts nach seiner Form und seinem inneren Aufbau**

Die Klassifizierung von Querschnitten im Sinne der baustatischen Modellbildung wurde bereits in zahlreichen anerkannten Arbeiten vorgenommen. Stellvertretend sei an dieser Stelle auf Pilkey & Wunderlich (1994), Mang & Hofstetter (2004), Schardt (1989) und Wlassow (1964) verwiesen.

In Abhängigkeit der oben erwähnten Bausteine und deren geometrischen Eigenschaften lassen sich folgende Querschnittsklassen definieren: Das Klassifizierungsschema ist in Abb. 3.6 dargestellt.

#### **Geometrisch dickwandige kompakte (massive) Stabquerschnitte (2D-repräsentativ)**

In diesem Zusammenhang werden unter dickwandigen Querschnitten dezidiert 2D-FE repräsentative Querschnittsformen verstanden. Es handelt sich um Querschnitte mit in etwa gleichen Abmessungen in den Querschnittskordinatenrichtungen:

- Dickwandige homogene bzw. ungegliederte oder uni-segmentale Querschnittsform
- Dickwandige heterogene bzw. gegliederte oder multi-segmentale Querschnittsform

#### **Geometrisch dünnwandige Stabquerschnitte (1D-repräsentativ)**

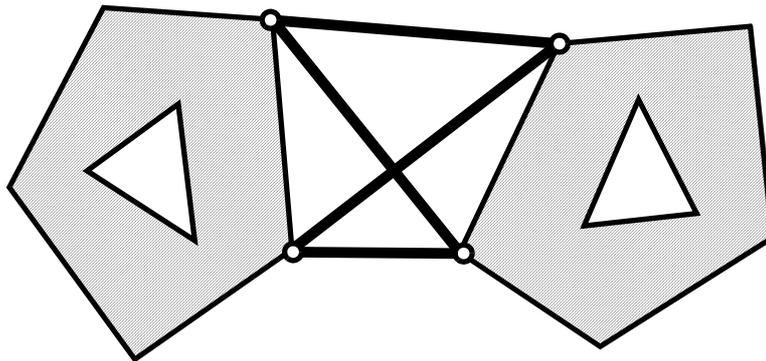
In diesem Zusammenhang werden geometrisch dünnwandige Querschnitte als Querschnitte definiert, bei denen die Querschnittsdicke im Vergleich zur Querschnittsbreite klein ist:

- Dünnwandige homogene bzw. ungegliederte oder uni-segmentale Querschnittsform
- Dünnwandige heterogene bzw. gegliederte oder multi-segmentale Querschnittsform

Unter Punkt 3.3.4 und 3.3.6 folgt eine detaillierte Beschreibung der erwähnten Querschnittsklassen.

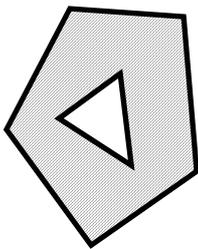
# 3D-Stab

## Kombinierter 1D- & 2D-Querschnitt

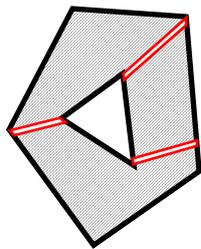


### 2D-Querschnitt

homogen



heterogen

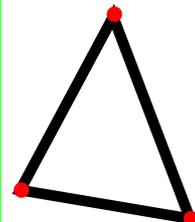


### 1D-Querschnitt

homogen



heterogen



**1D:  $t \ll B$**

**2D: mittels 2D-FE**

Abb. 3.6: Klassifizierung verschiedener möglicher geometrischer Stabquerschnittstypen

### 3.3.4 Dickwandige kompakte Querschnitte

#### 3.3.4.1 Homogene Stabquerschnitte mit allgemeiner Querschnittsberandung

Der homogene Stabquerschnitt ist durch konstante elastische orthotrope bzw. isotrope Materialeigenschaften und durch konstante, strukturelle Eigenschaften definiert. Seine Berandung ist durch ein beliebiges geschlossenes Polynom  $n$ -ten Grades oder durch eine Aneinanderreihung solcher Polynome  $n$ -ten Grades in der Querschnittsebene  $X_2$ - $X_3$  definiert. Kompakte Querschnitte in Form von rohrartigen Gebilden (Hohlquerschnitte) genügen ebenfalls den Anforderungen.

Wlassow (1964, S. 3) definiert zwei unterschiedliche kompakte Querschnittsformen:

- Querschnitte der Klasse 1, definiert durch Körper, deren geometrische Abmessungen in allen drei Raumrichtungen in etwa von gleicher Größe sind.
- Querschnitte der Klasse 3, definiert durch stabartige Körper, d. h. Körper mit zwei in der Querschnittsebene in etwa gleichen Abmessungen, die gegenüber der dritten Raumrichtung aber klein sind.

Für diese Arbeit ist eine solche Unterscheidung nicht notwendig. Die vorgestellte Berechnungstheorie gilt unabhängig von den Abmessungen des zu berechnenden „prismatischen“ Stabkörpers, da, wie eingangs erwähnt, dem Stabmodell keinerlei Einschränkungen und Hypothesen aufgezwungen werden. Die in Wlassow (1964) und Schardt (1989) erwähnten Hypothesen finden keine Anwendung bei der Definition der Querschnittskinematik, siehe Abschnitt 5.2.

#### 3.3.4.2 Heterogene Stabquerschnitte mit allgemeiner Querschnittsberandung

Dickwandige heterogene Querschnitte, in weiterer Folge auch Verbundquerschnitte genannt, sind kompakte Querschnitte, wobei die oben erwähnten konstanten Material- und Struktureigenschaften über den gesamten Stabquerschnitt nicht eingehalten sind. Vielmehr bestehen Verbundquerschnitte aus beliebig vielen gekoppelten Einzelquerschnittsteilen. Jeder dieser Einzelquerschnittsteile weist wiederum konstante elastische orthotrope bzw. isotrope Materialeigenschaften sowie konstante strukturelle Eigenschaften auf. Die einzelnen Querschnittsteile können sowohl starr als auch nachgiebig miteinander gekoppelt sein. Eine schematische Darstellung eines Verbundquerschnitts mit beliebiger Querschnittsberandung, bestehend aus beliebigen Einzelquerschnittsteilen, ist in Abb. 3.9 (b) dargestellt.

**Anmerkung:** Der Sonderfall des Rechteckquerschnitts ist unter Punkt 3.3.4.3 im Detail dargestellt.

#### 3.3.4.3 Sonderfall des monosymmetrischen heterogenen 2D-Rechteckquerschnitts

Die im Folgenden betrachteten Querschnitte mit rechteckiger Querschnittsberandung weisen im allgemeinen Fall keinen geometrisch und materiell homogenen Aufbau in Dickenrichtung des Querschnitts auf.

Die Querschnittsinhomogenitäten beschränken sich in dieser Betrachtung auf eine Abfolge von rechteckigen Einzelschichten in Dickenrichtung, wobei benachbarte Einzelschichten starr bzw. nachgiebig miteinander gekoppelt sind.

Für eine mechanische Beschreibung lässt sich ein geschichteter Querschnitt in Dickenrichtung in eine definierte Anzahl homogener Bereiche zerlegen. Diese weisen ihrerseits geometrische (konstante Breite  $b$  und konstante Einzelschichtdicke  $t_j$ ) und materielle homogene Eigenschaften auf. Die einzelnen Bereiche werden in weiterer Folge als physikalische (technologische) Einzelschichten des Querschnitts bezeichnet. Die Gesamthöhe des Querschnitts wird in weiterer Folge mit  $h$  bezeichnet. Die Gesamtanzahl der physikalischen Einzelschichten eines Querschnitts wird im Folgenden mit  $N$  bezeichnet.

Die physikalischen Einzelschichten weisen eine eindeutig physikalisch messbare konstante Schichtstärke  $t_i$  auf und definieren ein eindeutig zusammenhängendes rechteckiges Gebiet mit konstanten materiellen Eigenschaften. Eine physikalische Einzelschicht ist immer durch zwei herstellungsbedingt notwendige Verbundfugen, d. h. Schichtübergänge bzw. Einzelschichtgrenzen begrenzt, wobei, wie oben erwähnt, eine starre bzw. nachgiebige Verbundfugenausbildung zwischen benachbarten Schichten möglich ist. Die Verbundfuge wird stets mit einer theoretischen Verbundfugendicke von  $t_{VF} = 0$  definiert. Für die praktische Berechnung wird diese mit einer endlicher Dicke angesetzt.

Eine schematische Darstellung eines monosymmetrischen geschichteten Stabquerschnitts mit einer beliebigen Anzahl an gekoppelten Einzelquerschnittsteilen zeigen Abb. 3.11 und Abb. 3.12.

### 3.3.5 Dünnwandige Querschnitte

Eine Klassifizierung der dünnwandigen Querschnitte ist in Abb. 3.7 dargestellt.

#### 3.3.5.1 Homogene dünnwandige Stabquerschnitte

Wlassow (1964) definiert dünnwandige Querschnitte als Klasse 4 Querschnitte. Nach Wlassow (1964, S. 16) weisen dünnwandige Querschnittsteile drei unterschiedliche Ausdehnungen in den Raumrichtungen auf, wobei Folgendes gilt: Die Querschnittsdicke ist im Vergleich zur Querschnittsbreite klein, diese ist ihrerseits wiederum klein im Verhältnis zur Stablänge. Der homogene dünnwandige Querschnitt besteht aus einem einzigen Querschnittsteil.

#### 3.3.5.2 Heterogene geschlossene und offene dünnwandige Stabquerschnitte

Bei systematischer Anordnung von einzelnen, unter Punkt 3.3.5.1 beschriebenen, homogenen dünnwandigen Querschnittsteilen entstehen gegliederte, dünnwandige Stabquerschnitte. Diese lassen sich in die folgenden Kategorien nach Strehl (2010, vgl. S. 107 ff) einteilen:

- Offene dünnwandige Querschnitte
- Geschlossene zellenartige unverzweigte und verzweigte dünnwandige Querschnitte
- Verzweigte dünnwandige Querschnitte

In den ideellen Kontaktbereichen/Verbundfugen benachbarter dünnwandiger Einzelquerschnittsteile/Segmente ist ausschließlich eine Übertragung von Schubkräften entlang der Berührungskante – in Stabrichtung und transversal dazu – möglich (elementares Faltwerk). Eine Übertragung von Biegemomenten ist dabei möglich. Im Falle einer gelenkigen Kantenausbildung ist die Berechnung offener Querschnitte ausschließlich unter Annahme des undeformierbaren dünnwandigen Querschnitts in seiner Querschnittsebene möglich. Für die halbmomentenfrei Schalentheorie lassen sich offene dünnwandige Querschnitte unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung berechnen.

Die Berührungslinie von zwei benachbarten Scheibenlängskanten ist durch die Schnittgerade der beiden Scheibenmittelflächen definiert.

### 3.3.6 Kombinierte dickwandige und dünnwandige Querschnitte

Kombinierte Querschnitte, siehe Abb. 3.6, bestehen aus mindestens zwei Querschnittsteilen, wobei jeweils mindestens ein dickwandiges und ein dünnwandiges Querschnittsteil vorhanden sein muss. Die Koppelung von benachbarten dünnwandigen und dickwandigen Querschnittsteilen erfolgt als linienförmige Koppelung in Richtung der Stabachse unter Beachtung der Anforderungen an die Prismaticität. Dabei sind starre und nachgiebige Koppelungen möglich.

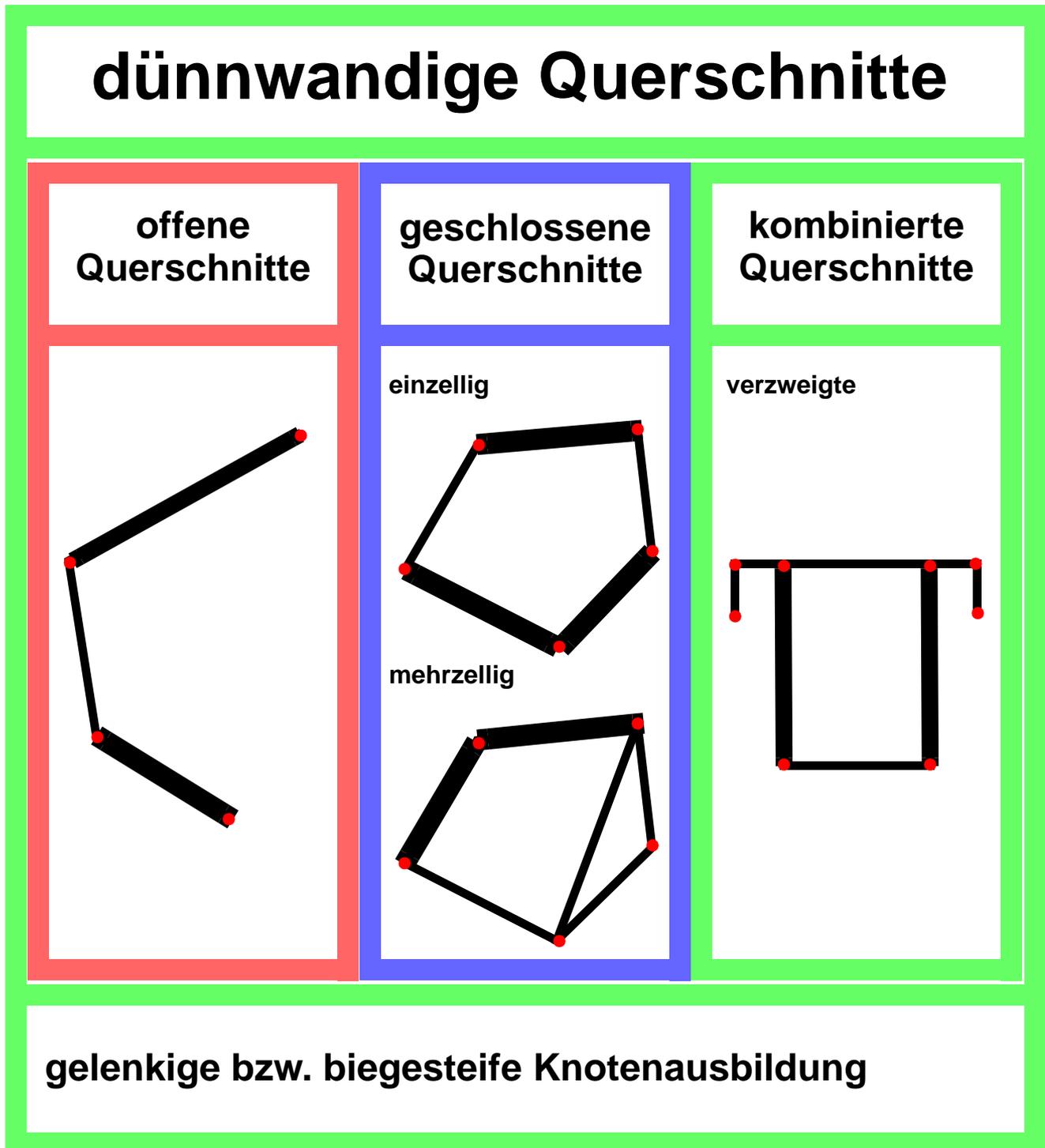


Abb. 3.7: Gliederung von dünnwandigen heterogenen Querschnitten

### 3.4 Der materielle Aufbau des Stabes

Dieser Arbeit liegt ausnahmslos linear elastisches 3D-Materialverhalten zugrunde. Durch die durchgezogene strukturierte Darstellung werden die Grundsteine zur Einarbeitung von plastischem Materialverhalten gelegt. Im Rahmen der konstitutiven Beziehungen stellt das 3D-Materialverhalten den eindeutigen Zusammenhang zwischen den 3D-Verzerrungen und den 3D-Spannungen dar. Ausgehend von den bekannten Darstellungen des Materialverhaltens in Matrixschreibweise wird die problemadaptierte Darstellung für den strukturierten 3D-Verformungsansatz separiert für den Balkenverformungszustand und das Querschnittsverformungsproblem gezeigt.

#### Materieller Aufbau eines Einzelquerschnittsteils

Für die Herleitungen des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems sind die materiellen Eigenschaften des Einzelquerschnittsteils zu definieren. Diese haben den Bedingungen der geraden Prismaticität in vollem Umfang zu genügen, d. h. es müssen die folgenden Bedingungen ausnahmslos erfüllt sein:

#### Konstante homogene Materialeigenschaften in Stablängsrichtung ( $X_1$ )

In Stablängsrichtung müssen konstante Materialeigenschaften vorliegen. Liegen in  $X_1$ -Richtung veränderliche Materialverhältnisse vor, dann lässt sich der Stab durch stückweise Unterteilung des Gesamtstabes in Teilsegmente in  $X_1$ -Richtung in einen Stabzug mit stückweise konstanten Materialeigenschaften überführen.

#### Variable inhomogene Materialeigenschaften im Stabquerschnitt ( $X_2$ und $X_3$ )

Bei Querschnitten mit inhomogenen materiellen Eigenschaften über den Querschnitt sind beliebige variable, von den Querschnittskordinaten  $X_2$  und  $X_3$  abhängige, Materialeigenschaften zugelassen. Dies gilt für homogene und heterogene Querschnitte in gleicher Weise. Die Beliebigkeit der Materialeigenschaften innerhalb des Querschnitts gilt demnach auch für die Verbundfugen, in nachgiebiger (allgemeine Flexibilität) oder starrer Ausbildung, zwischen den einzelnen Querschnittsteilen. Variable Materialeigenschaften des Querschnitts werden durch stückweise konstante Materialeigenschaften der Querschnittsteile oder durch variable Materialeigenschaften innerhalb eines Querschnittsteils definiert.

Für den Querschnitt und den Querschnittsteil lassen sich demnach die folgenden materiellen Aufbauten definieren. In Abb. 3.8 sind die möglichen materiellen Verhältnisse des Querschnitts dargestellt.

- **Materiell homogener Aufbau des Querschnitts:  $E = \text{konst.}$**

Im Falle materiell homogener Eigenschaften gilt für den gesamten Querschnitt des Stabes die Unabhängigkeit von den zwei Querschnittskordinaten  $X_2$  und  $X_3$ , es gilt:  $E = E(\text{konst.})$ .

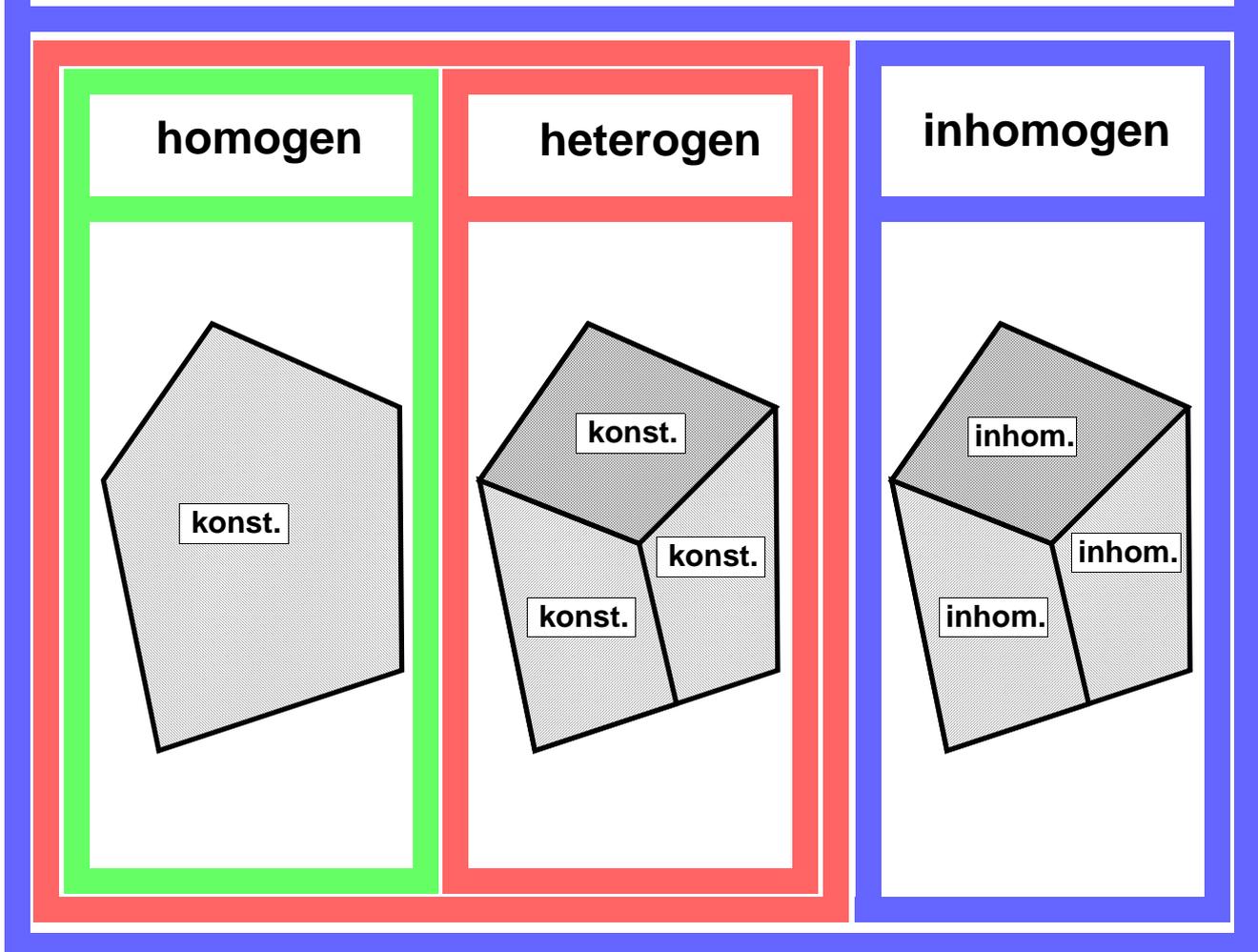
- **Materiell heterogener Aufbau:  $E_j = E_j(\text{konst.})$ .**

Im Falle heterogener Eigenschaften der Querschnittsteile gilt für den gesamten Querschnitt des Stabes eine stückweise konstante Abhängigkeit von den zwei Querschnittskordinaten  $X_2$  und  $X_3$ , es gilt:  $E_j = E_j(\text{konst.})$ . Materiell heterogene Aufbauten können auch als diskret inhomogene Querschnitte, d. h. stückweise homogene Eigenschaften, bezeichnet werden.

- **Materiell inhomogener Aufbau:  $E = E(X_2, X_3)$**

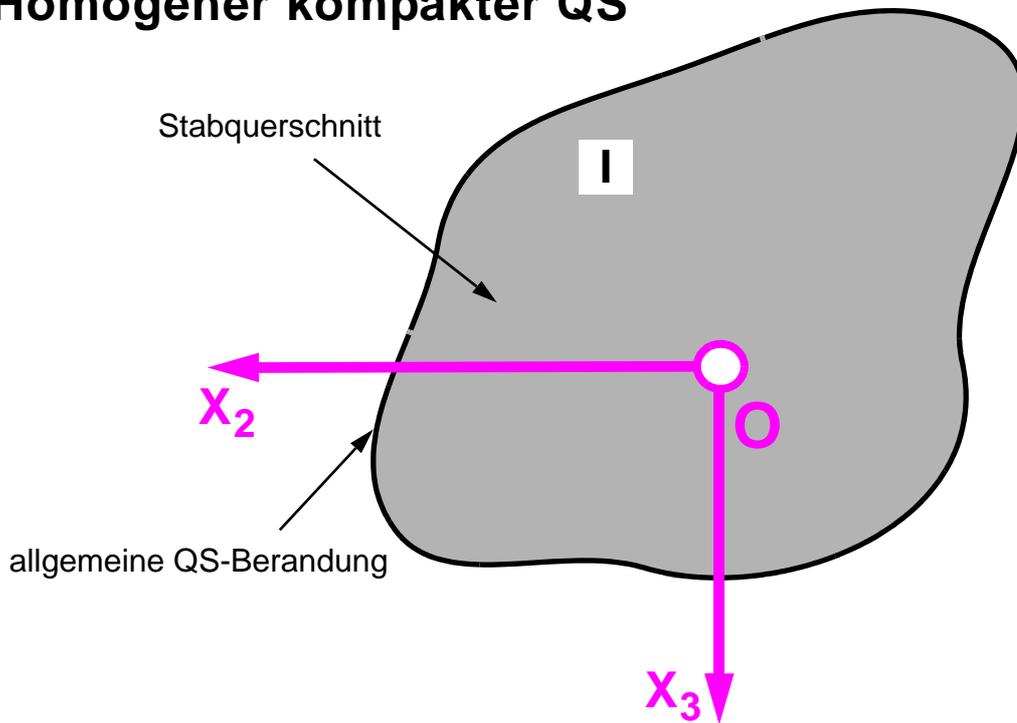
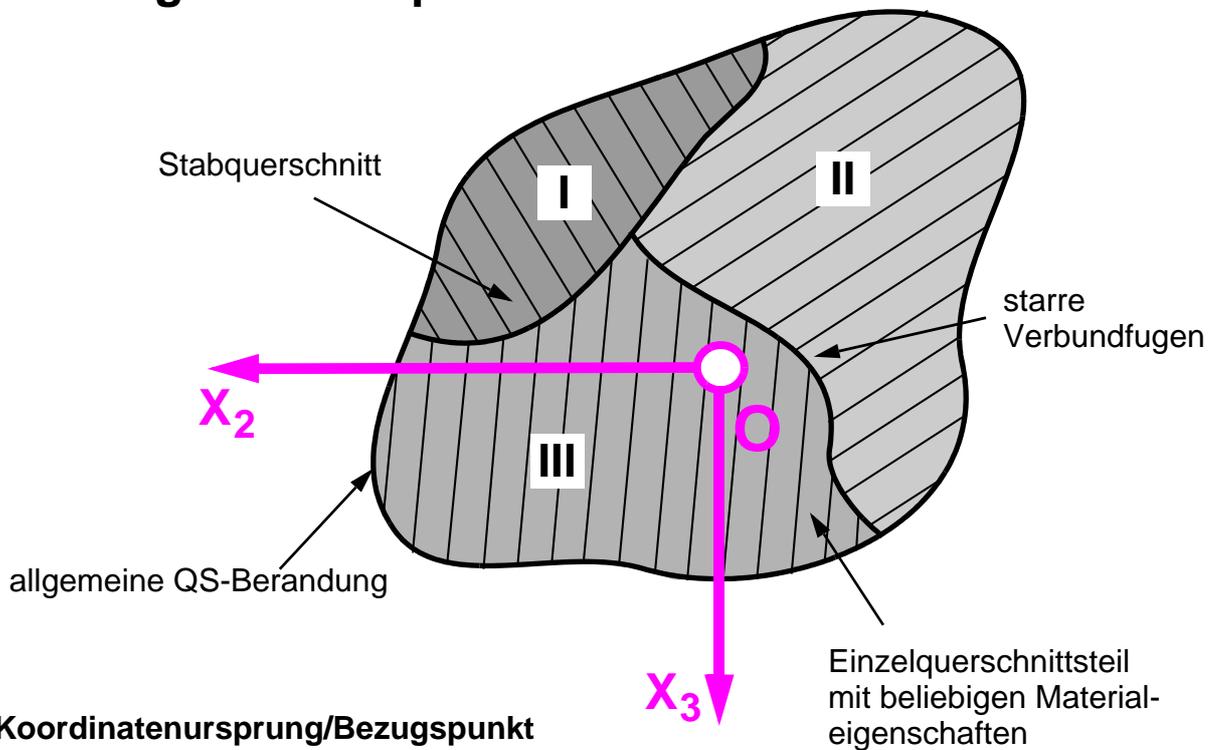
Im Falle inhomogener Eigenschaften der Querschnittsteile weisen diese über den gesamten Querschnitt eine Abhängigkeit von den Querschnittskordinaten  $X_2$  und  $X_3$  auf, es gilt:  $E = E(X_2, X_3)$ . Dadurch sind beliebige, über den Querschnitt veränderliche, materielle Eigenschaften möglich.

# Materialverhalten



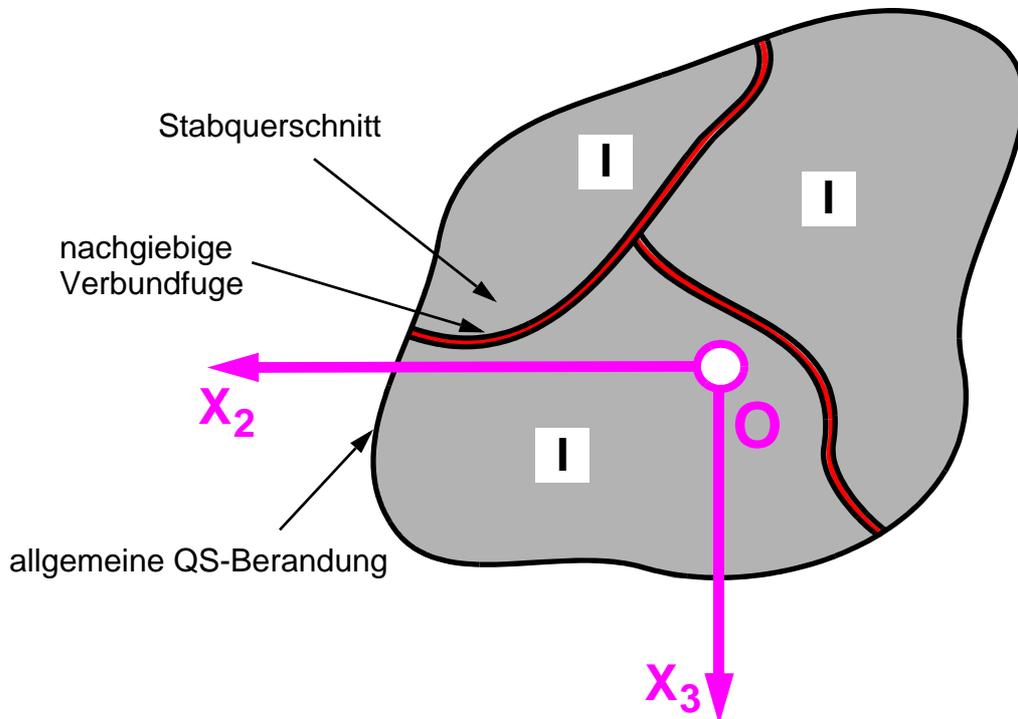
Der Arbeit zugrunde gelegtes Materialverhalten

*Abb. 3.8: Materieller Aufbau eines Stabquerschnitts bzw. eines Einzelquerschnittsteils*

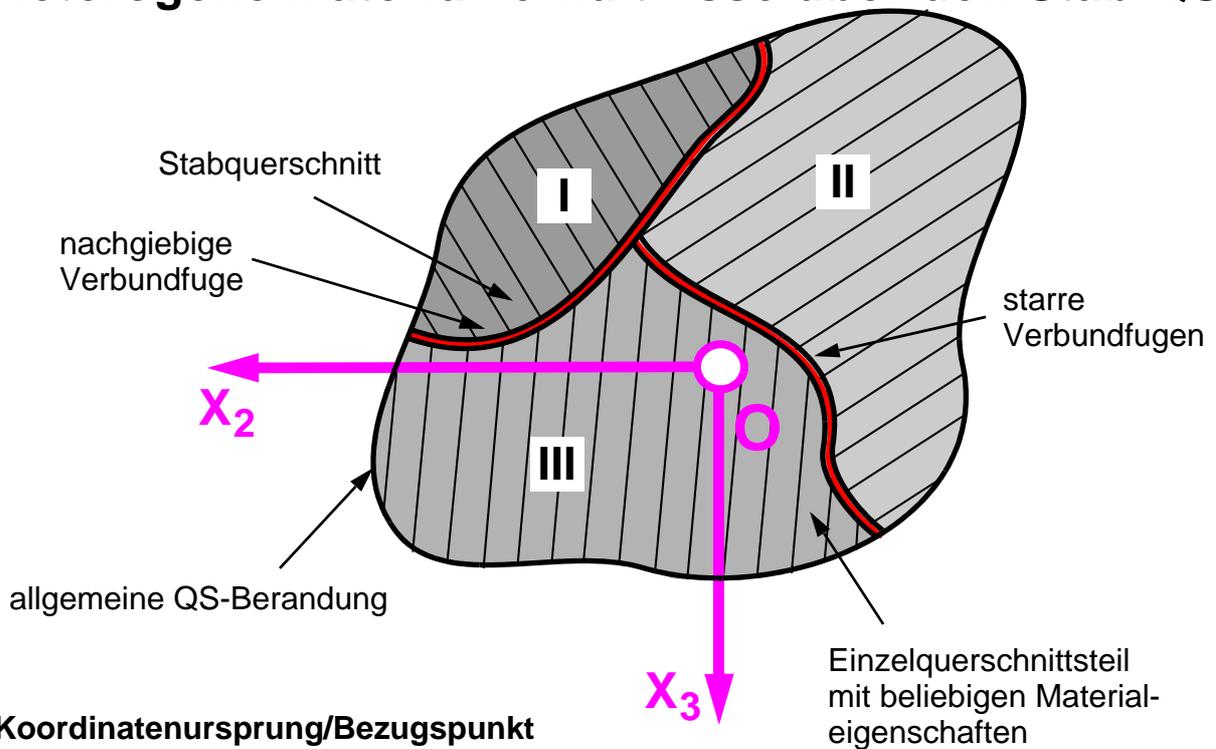
**(a) Homogener kompakter QS****(b) Heterogener kompakter QS**

**Abb. 3.9:** Allgemeine Querschnittsberandung des einteiligen und mehrteiligen Querschnittsteils mit starren Verbundfugen

**(a) Homogene Materialverhältnisse über den Stab-QS**



**(b) Heterogene Materialverhältnisse über den Stab-QS**



O ... Koordinatenursprung/Bezugspunkt

*Abb. 3.10: Allgemeine Berandung des mehrteiligen QS mit nachgiebigen Verbundfugen zwischen den einzelnen EQS*

## Monosymmetrischer kompakter Querschnitt: starre Verbundfugen

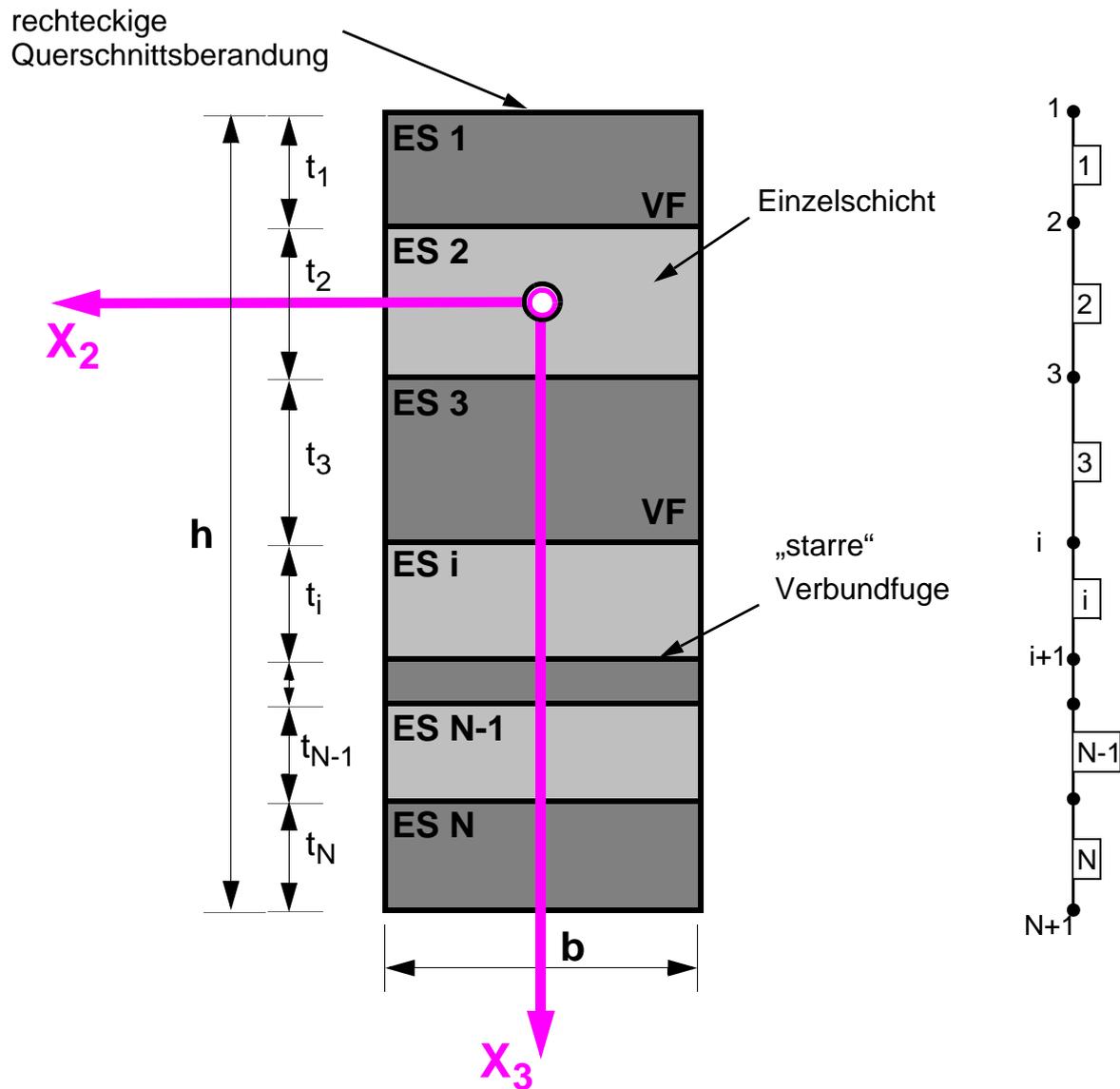


Abb. 3.11: Geschichteter Rechteckquerschnitt mit starren Verbundfugen und heterogenem materiellem Aufbau

## Monosymmetrischer kompakter Querschnitt: nachgiebige Verbundfugen

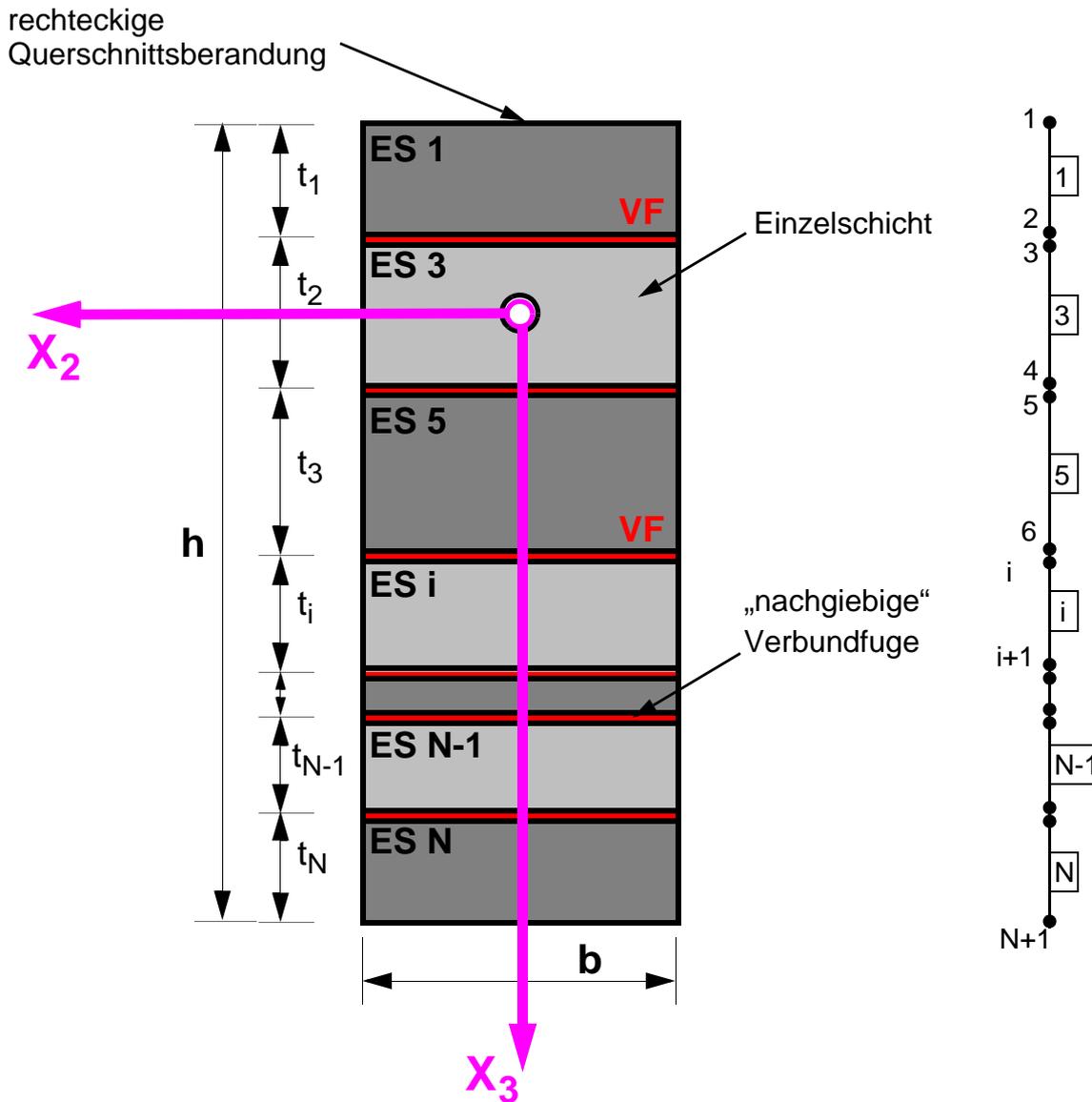


Abb. 3.12: Geschichteter Rechteckquerschnitt mit nachgiebigen Verbundfugen und heterogenem materiellem Aufbau

## Dünnwandiger zellenartiger Querschnitt

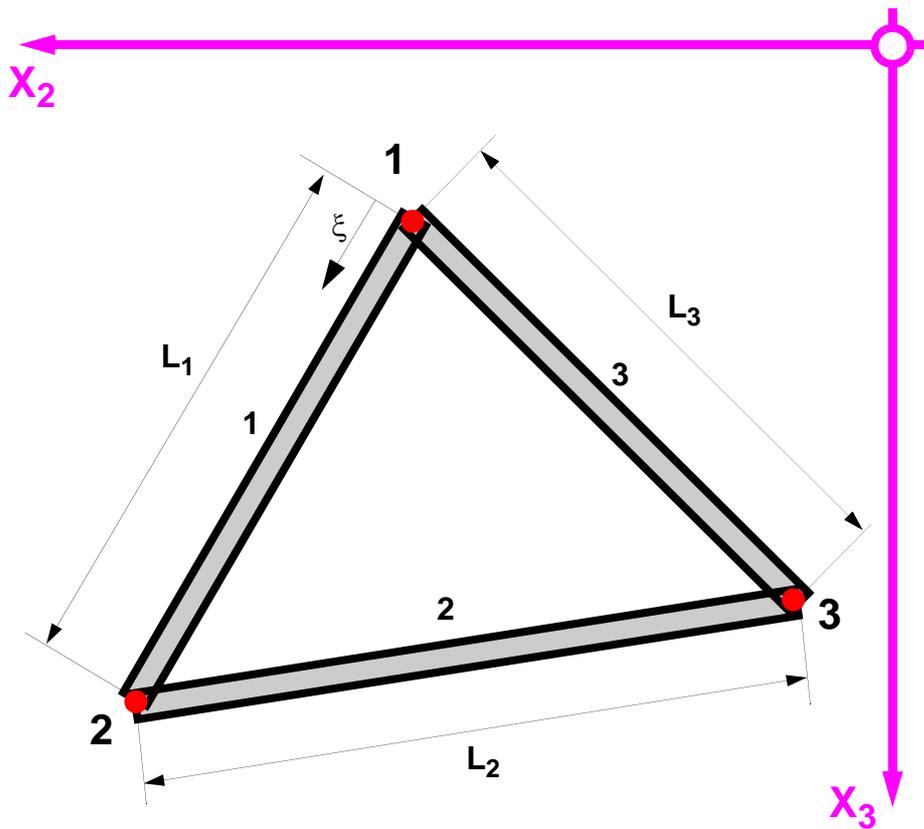


Abb. 3.13: Geschlossener dünnwandiger Querschnitt aus drei Einzelementen

## Dünnwandiger offener Querschnitt

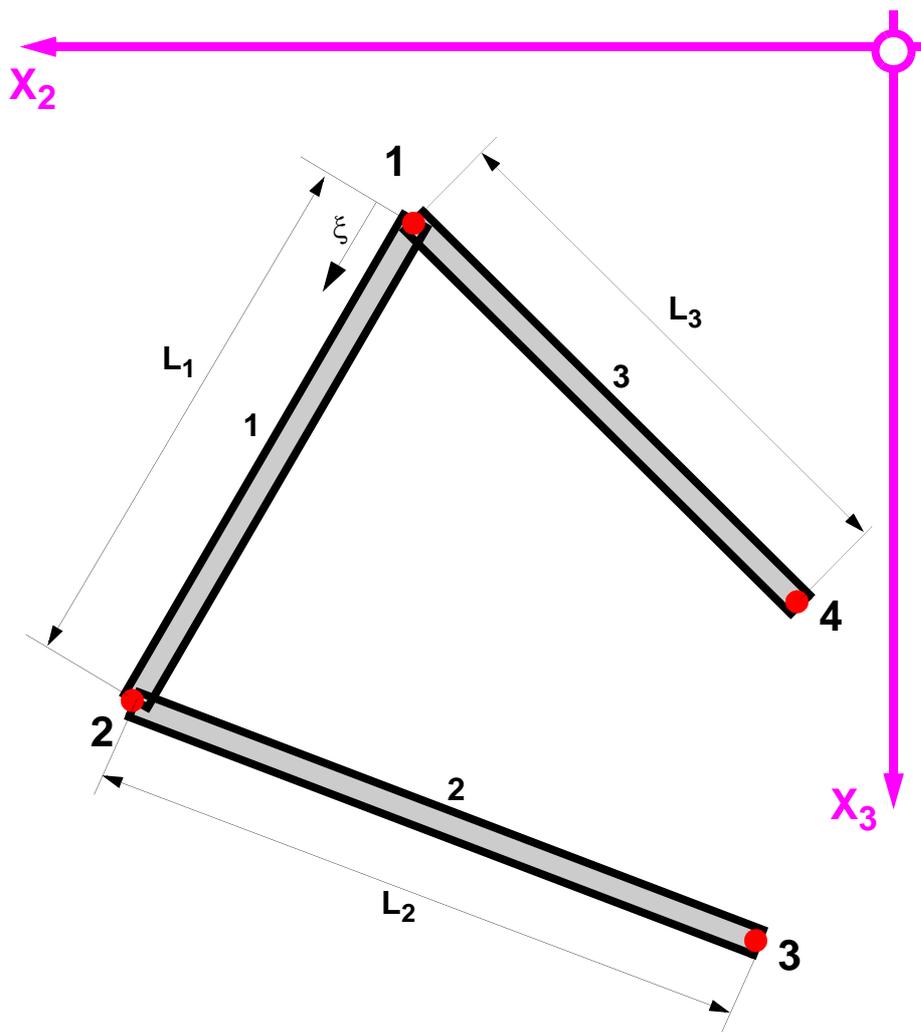


Abb. 3.14: Offener dünnwandiger Querschnitt aus drei Einzelementen

**4**

**3D-Mechanik**

## 4.1 Einleitung

Wie aus Kapitel 3 hervorgeht, werden für die Herleitung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen für das etablierte Stabmodell keinerlei geometrische Restriktionen definiert. Sämtliche bei klassischen Stabtheorien verwendete technischen Einschränkungen entfallen. Die im Rahmen der klassischen Stabtheorie verwendete gravierendste Einschränkung ist durch die Annahme der linearen Spannungsverteilung über den gesamten Stabquerschnitt (Navier'sche Spannungsverteilung) gegeben. Werden nun sämtliche Einschränkungen verworfen und sollen zusätzlich die 3D-Gleichgewichtsgleichungen exakt erfüllt werden, bleibt als einzige Möglichkeit eine Formulierung des Gesamtproblems im Kontext der vollständigen 3D-Kontinuumsmechanik, wobei in diesem Zusammenhang das Teilgebiet der „Mechanik der deformierbaren Körper“ zur Anwendung kommt. Die Mechanik der deformierbaren Körper beschäftigt sich in diesem Zusammenhang mit der Berechnung von Kraft- und Verschiebungsgrößen unter statischen Verhältnissen (vgl. Mang & Hofstetter, 2004, S. 1).

Alle in Kapitel 3 beschriebenen Stabquerschnittsgeometrien erfüllen die Anforderungen an das 3D-Kontinuum. „Unter Kontinuum versteht man eine den Raum zusammenhängend ausfüllende Materie.“ (Mang & Hofstetter, 2004, S. 1)

Oberstes Ziel der klassischen Kontinuumsmechanik ist die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den unter Belastung auftretenden Stabverformungen(-verzerrungen) und den Stabbeanspruchungen (Spannungen).

Für den Fall der 3D-Kontinuumsbetrachtungen werden für die Darstellung dieses Zusammenhangs die folgenden formalen Grundbausteine der Festigkeitslehre verwendet (vgl. Guggenberger, 2008):

- 3D-Kinematik zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den globalen Stabverformungen und den 3D-Verzerrungen
- 3D-Konstitution zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den 3D-Verzerrungen und den 3D-Spannungen
- 3D-Kinetik zur Beschreibung des 3D-Gleichgewichts am 3D-Volumenelement

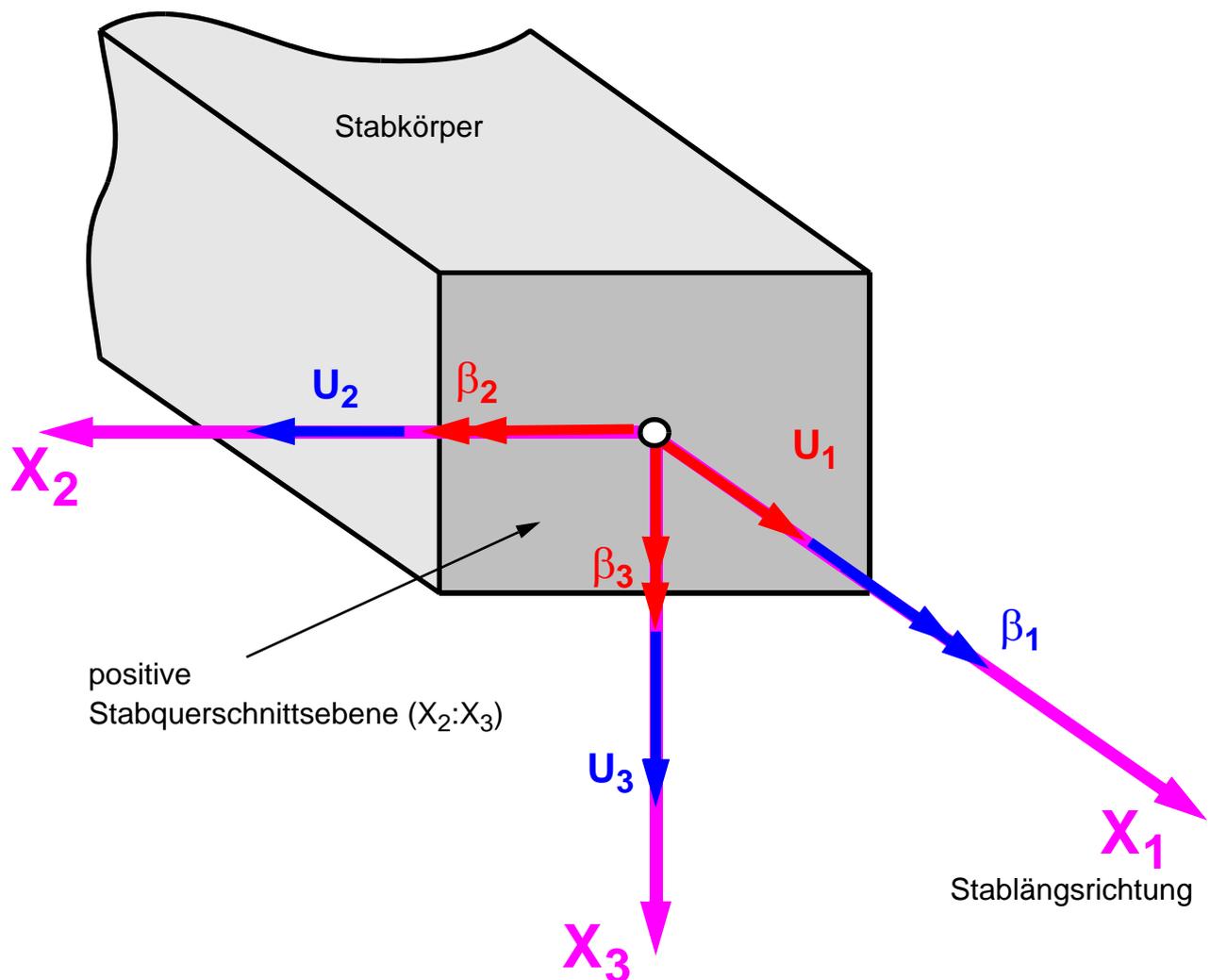
Werden diese drei formalen Einzelteile zusammengeführt, lässt sich daraus die Feldgleichung in Form des 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems des 3D-Stabes ermitteln. Zur vollständigen Beschreibung des Gleichgewichtszustands des 3D-Stabes ist die Definition von Kraft- und Verformungsrandbedingungen entlang der gesamten Staboberfläche erforderlich.

Die für die Herleitung der Grundgleichungen erforderlichen mechanischen Grundbausteine werden der Vollständigkeit halber im folgenden Kapitel in zusammengefasster Form angeführt.

Die gezeigten Grundlagen beziehen sich ausschließlich auf die Grundlagen der 3D-Kontinuumsmechanik und nehmen keinerlei Bezug auf die Eigenschaften des neu etablierten Stabmodells dieser Arbeit. Darauf aufbauende, erweiterte Formulierungen, die für die Erweiterung und die Etablierung eines neuen Stabmodells erforderlich werden, werden in den Kapiteln 5 und 6 definiert und in das Konzept der 3D-Mechanik eingearbeitet.

Für die folgenden Herleitungen wird die Vorzeichenkonvention, bezogen auf das kartesische Koordinatensystem für die drei Verschiebungen und für die drei Verdrehungen, definiert. Am positiven Schnittufer des Stabes zeigen die Komponenten des Stabverformungsparameters in die positive Koordinatenrichtung, am negativen Schnittufer zeigen diese in die negative Richtung.

## Vorzeichenkonvention im kartesischen Koordinatensystem: positives Schnittufer und positiver Stabverformungsparameters



- Verformungsfreiheitsgrade, die zu axialen Querschnittsverformungen führen
- Verformungsfreiheitsgrade, die zu Querschnittsverformungen in der Querschnittsebene führen

Abb. 4.1: Vorzeichenkonventionen für die globalen Verschiebungs- und Verdrehungsfreiheitsgrade am positiven Schnittufer

## 4.2 Kinematik

„Die Kinematik, im Kontext der Festkörpermechanik, beschäftigt sich mit der Beschreibung von Bewegungs- und Deformationsvorgängen, und zwar einerseits auf globalem Niveau und andererseits auf lokalem Niveau in der infinitesimalen Umgebung von Punkten, d. h. in unserem Fall speziell mit der Berechnung von Streckungen und Verzerrungen“ (Guggenberger, 2008, S. 17).

Den Herleitungen vorausgesetzt, ist die geometrische Linearität und die damit verbundenen kleinen (infinitesimalen) Verformungen.

### 4.2.1 Das 3D-Verschiebungsfeld des anonymen 3D-Kontinuums

Das 3D-Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_{3D}$  des anonymen 3D-Kontinuums, wie in Glg. 4-2 dargestellt, dient als Grundlage für die Definition des verallgemeinerten Verschiebungsansatzes für den 3D-Stab. In der Literatur wird das 3D-Verschiebungsfeld auch als Verschiebungsansatz oder Verschiebungsvektor bezeichnet. Als Basis für die Definition des 3D-Verschiebungsfeldes dient ein kartesisches Koordinatensystem. Der Querschnittsbezugspunkt für die Formulierung des 3D-Verschiebungsansatzes ist in der Koordinatenebene des Querschnitts ( $X_2 - X_3$ ) ohne Einschränkung frei wählbar. Dadurch ist das 3D-Verschiebungsfeld, siehe Glg. 4-2, durch die drei 3D-Verschiebungen in den drei Raumrichtungen eindeutig festzulegen. Das gesuchte 3D-Verschiebungsfeld stellt den direkten Zusammenhang zwischen der unverformten Anfangsgeometrie eines Materialpunkts des Kontinuums und dessen Lage in der deformierten Endgeometrie/Momentangeometrie dar. Somit lässt sich für jeden Materialpunkt des 3D-Kontinuums die Lage im Raum zu jedem Zeitpunkt einer Deformation eindeutig verfolgen. Formal lässt sich der deformierte Endzustand eindeutig in Abhängigkeit der Anfangsgeometrie darstellen (Guggenberger, 2008, S. 7 ff):

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_c(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) \quad [4-1]$$

Es gilt:

$\mathbf{x}$  Gegebene undeformierte Anfangsgeometrie für einen beliebigen Materialpunkt des 3D-Kontinuums

$\mathbf{x}_c(\mathbf{x})$  Unbekannte deformierte Momentangeometrie/Endgeometrie für einen beliebigen Materialpunkt des 3D-Kontinuums

$\mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x})$  Gesuchtes 3D-Verschiebungsfeld für einen beliebigen Materialpunkt des 3D-Kontinuums

Nach Guggenberger (2008) folgt aus der direkten Darstellung des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}_{3D}$  eine eindeutige mathematische Abhängigkeit vom deformierten Endzustand und von der Anfangsgeometrie. Dadurch weist das 3D-Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_{3D}$  die Grundkoordinaten der Anfangsgeometrie als Argument auf, es gilt:

$$\mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_c(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \quad [4-2]$$

Diese Art der Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes wird auch von Mang & Hofstetter (2004, S. 19 ff) verwendet.

Das Verschiebungsfeld stellt dabei per Definition eine bijektive kontinuierliche topologische Abbildung dar, d. h. die Nachbarschaftsverhältnisse der Anfangsgeometrie bleiben auch im deformierten Zustand (Endzustand) eindeutig erhalten. In der Anfangsgeometrie benachbarte Punkte bleiben auch in der deformierten Geometrie, nach der Festkörperdeformation, benachbarte Materialpunkte. Es ist weder ein

Aufreißen des Körpers noch ein gegenseitiges Durchdringen im verformten Zustand möglich. Beim Verschiebungsfeld handelt es sich um eine eindeutig mathematisch umkehrbare Beziehung, so Guggenberger (2008, S. 8), es gilt:

$$\mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(X_1; X_2, X_3) \\ u_2(X_1; X_2, X_3) \\ u_3(X_1; X_2, X_3) \end{bmatrix} \quad [4-3]$$

$\mathbf{u}_{3D}$  3D-Verschiebungsfeld des Stabes, definiert durch eine mathematisch kontinuierliche Funktion

$u_1$  3D-Verschiebungskomponente in  $X_1$ -Richtung des 3D-Stabes (Stablängsrichtung)

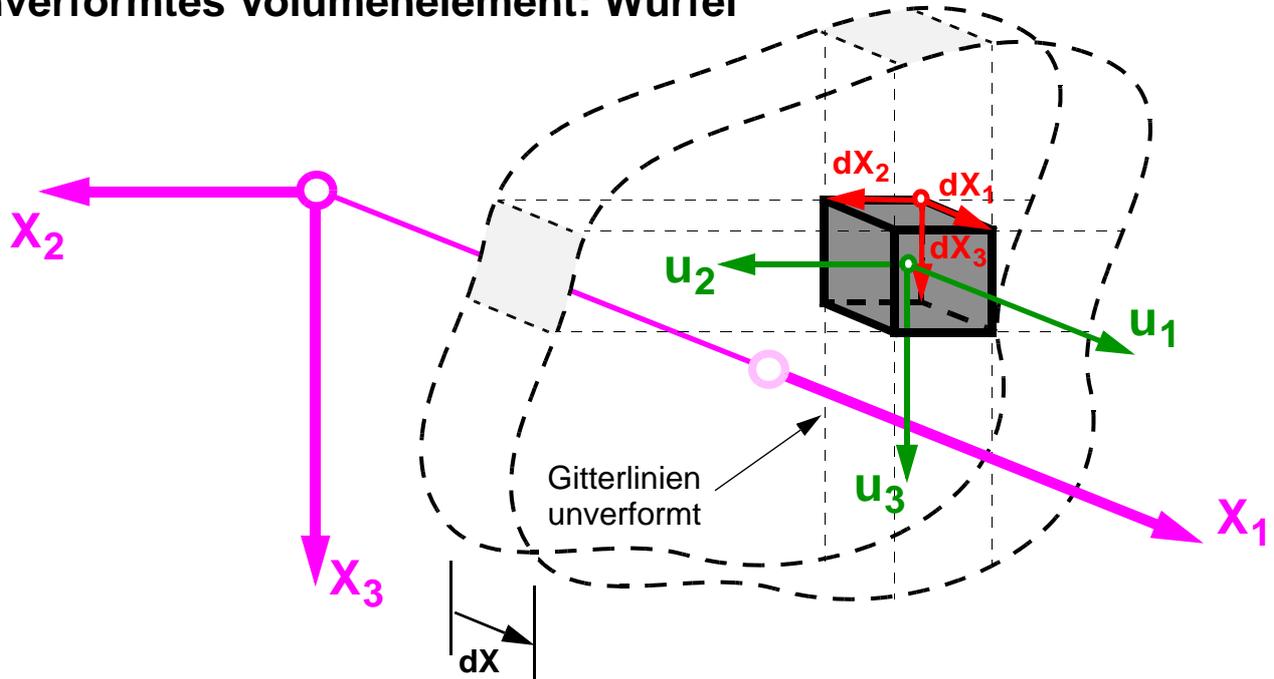
$u_2, u_3$  3D-Verschiebungskomponenten in der  $X_2$ - $X_3$ -Ebene des 3D-Stabes (Querschnittsebene)

**Anmerkung:** Diese Art der mathematischen Abbildung kommt bei vielen physikalischen Problemen für unterschiedliche physikalische Größen vor. In Flüssigkeiten trifft diese Forderung der Nachbarschaftseigenschaften beispielsweise nicht auf die Verschiebung, sondern auf die Geschwindigkeit benachbarter Teilchen zu.

Nach Glg. 4-3 ist, ausgehend von der Anfangsgeometrie, jeder Materialpunkt durch das 3D-Verschiebungsfeld des Querschnitts eindeutig im Raum bestimmt. Für einen einzelnen Materialpunkt lässt sich aus diesen drei Verschiebungsgrößen des 3D-Verschiebungsfeldes jedoch keine allgemeine Verdrehung eines einzelnen Materialpunkts im Raum, wie sie im verformten System (siehe Abb. 4.2) auftritt, bestimmen.

Erst die Betrachtung des Verhaltens des Gesamtsystems, d. h. die Betrachtung aller vorkommenden benachbarten Materialpunkte, ermöglicht die Ermittlung der Verdrehung eines Materialpunkts im Raum. Dazu bedarf es der Definition sogenannter Gitterlinien, die stets benachbarte Materialpunkte verbinden. Im unverformten System als gerade definierte Gitterlinien (Netzlinsen) sind bei allgemeiner Verformung im verformten System nicht mehr gerade. Aus diesen Verformungen der Gitterlinien lassen sich die Verdrehungen aller Materialpunkte im Raum eindeutig durch die Ableitungen bestimmen.

### Unverformtes Volumenelement: Würfel



### Verformtes Volumenelement: Parallelepiped

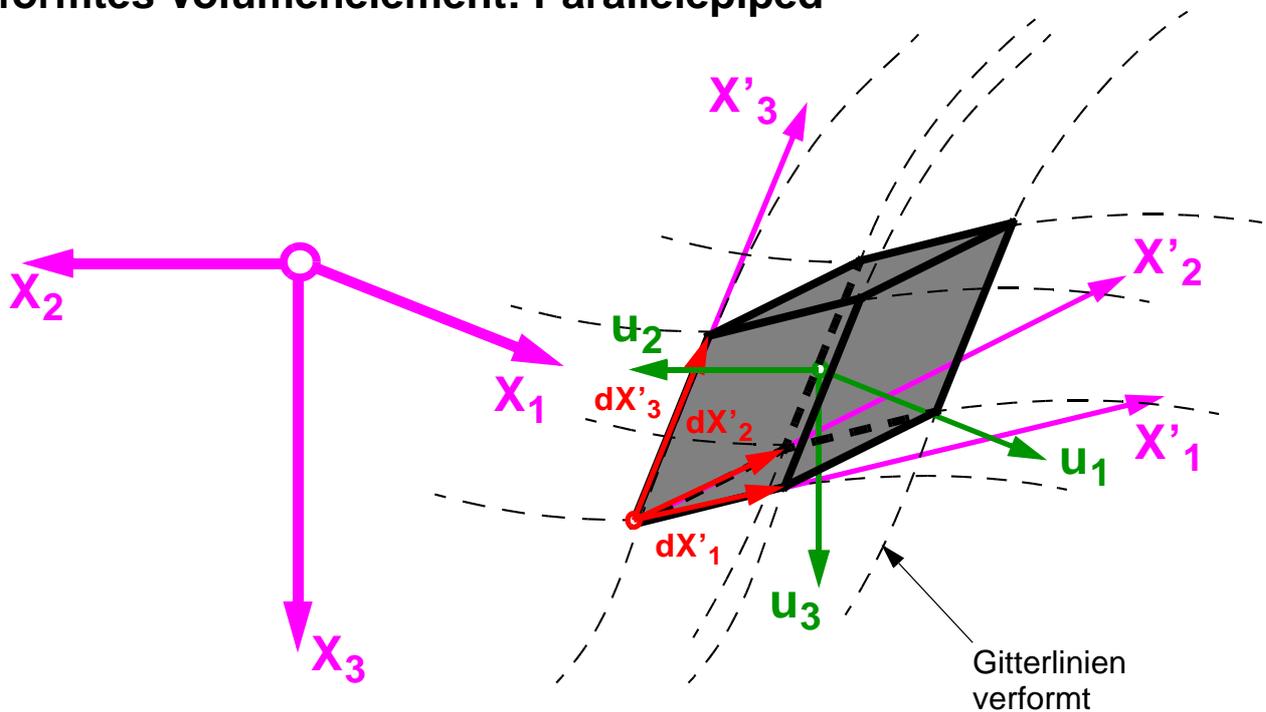
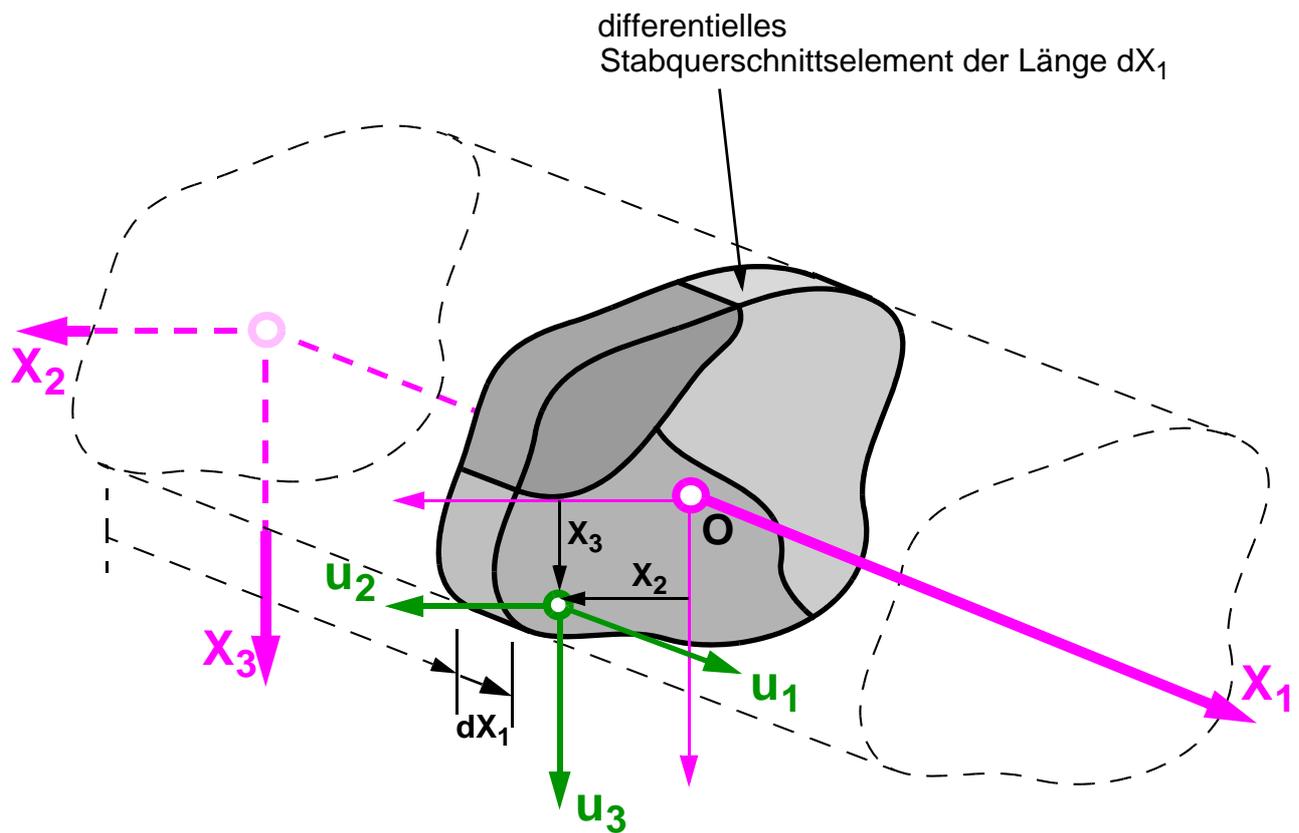


Abb. 4.2: Unverformtes und verformtes Volumenelement, dargestellt mit den zugehörigen Gitterlinien



$$\mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(X_1; X_2, X_3) \\ u_2(X_1; X_2, X_3) \\ u_3(X_1; X_2, X_3) \end{bmatrix}$$

**Abb. 4.3:** 3D-Verschiebungsfeld über den Stabquerschnitt

### 4.2.2 Unstrukturiertes 3D-Gesamtverzerrungsfeld für den Querschnitt

Ausgehend von den in der undeformierten Anfangskonfiguration definierten Green-Lagrange-Verzerrungen werden unter Vernachlässigung der quadratischen Verzerrungsmaße die Verzerrungen in der Cauchy'schen Darstellungsform verwendet (vgl. Pilkey & Wunderlich, 1994, S. 12). Die unstrukturierte Darstellung des 3D-Gesamtverzerrungsfeldes weist die in Glg. 4-4 dargestellte Anordnung der Verzerrungskomponenten auf. Das Ordnungsprinzip der Verzerrungen reiht konsequent die Normal- und die Schubverzerrungen mit steigendem Index, was zu einer anschaulichen und kompakten Darstellung der Differentialoperatormatrix führt. Nach Guggenberger (2007, S. 33) lassen sich die Normal- und Schubverzerrungen in Matrixnotation wie folgt darstellen.

$$\mathbf{e}_{3D, US} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{3D, US} \cdot \mathbf{u}_{3D} \quad [4-4]$$

### 4.2.3 Strukturiertes 3D-Gesamtverzerrungsfeld für den Querschnitt

Für die weitere Problembeschreibung wird eine strukturierte Darstellung der Verzerrungen verwendet, siehe Punkt 6.2.2. Das Farbschema bezeichnet den Balken- und den Querschnittsverformungszustand.

$$\mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{3D} \cdot \mathbf{u}_{3D} \quad [4-5]$$

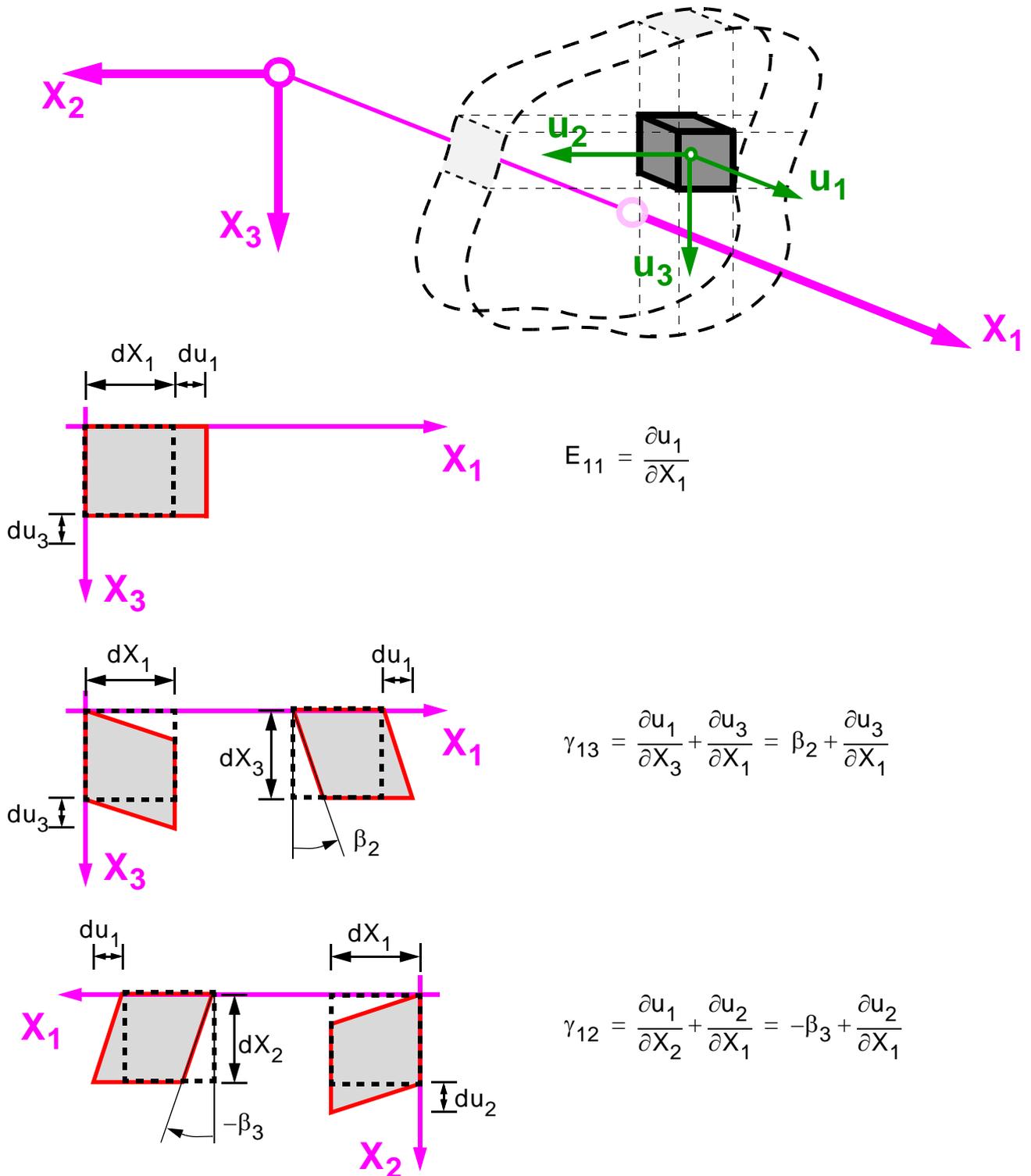


Abb. 4.4: Definition der 3D-Verzerrungszustände für den klassischen Stab (QS-Verwölbungen: „⊥“)

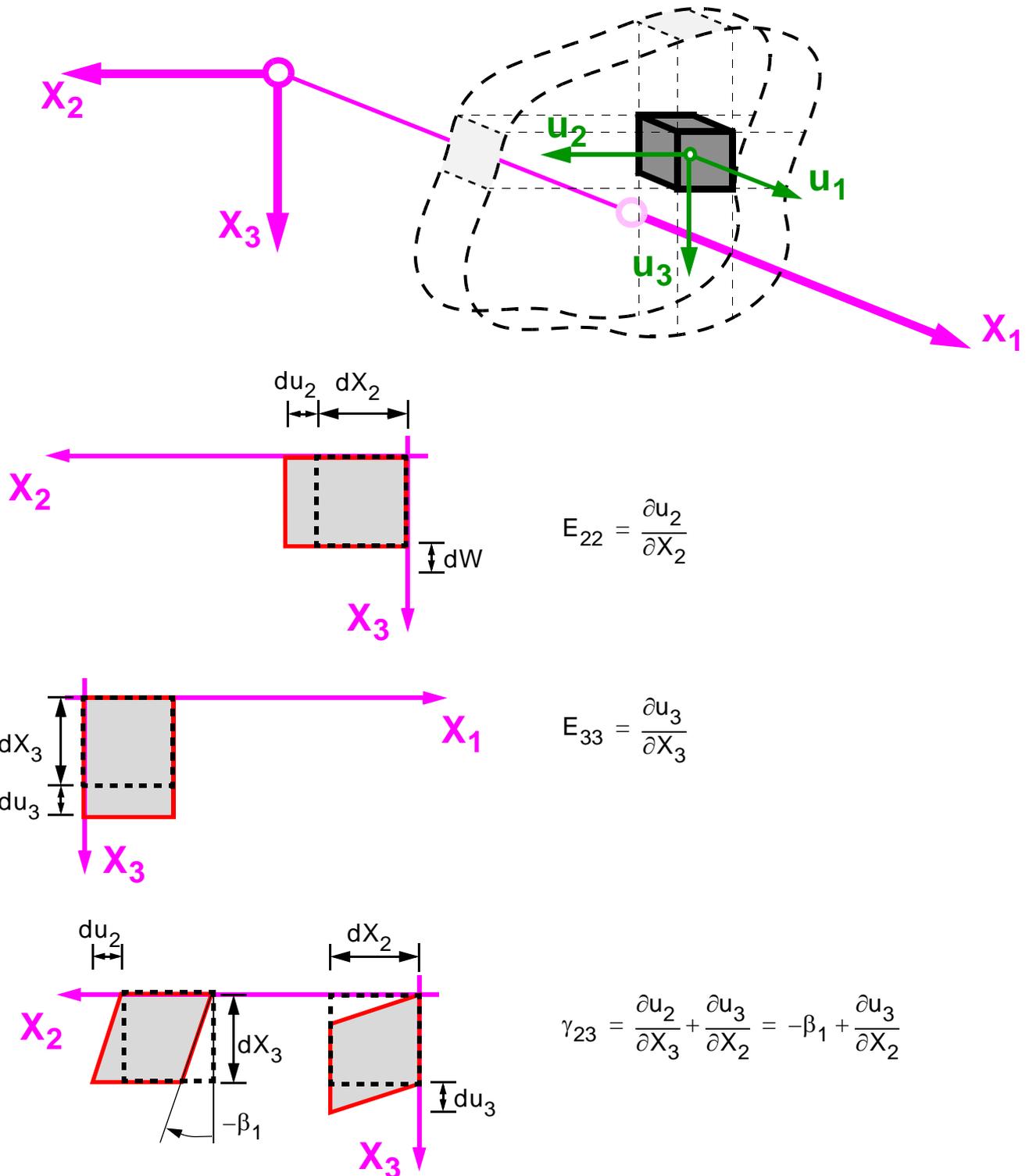


Abb. 4.5: Definition der 3D-Verzerrungszustände für die echte Querschnittsverformung „/“

#### 4.2.3.1 Differentialoperatormatrix für das Gesamtproblem mit separierten Ableitungen in der problemstrukturierten Darstellung

Für die verschiedenen Herleitungsschritte ist die Differentialoperatormatrix, in der nach ihren Ableitungen separierten Darstellungsform, in Blockmatrizenschreibweise erforderlich. Dies gilt beispielsweise für die Durchführung der partiellen Integration nach ausgewählten Koordinatenrichtungen. Zudem lässt sich die Differentialoperatormatrix dadurch in ihrer kompaktesten Form, basierend auf der Trennung der Operatoren und der konstanten Vorfaktormatrizen, darstellen. Im Sinne der Einstein'schen Summenkonvention für  $i=1$  bis 3 gilt:

$$\mathbf{B}_{3D}^T = \mathbf{B}_{3D,i,0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_i} \quad [4-6.a]$$

$$\mathbf{B}_{3D}^T = \mathbf{B}_{3D,1}^T + \mathbf{B}_{3D,2}^T + \mathbf{B}_{3D,3}^T = \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D,2,0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} + \mathbf{B}_{3D,3,0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [4-6.b]$$

$$\mathbf{B}_{3D}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D,1,0}^T} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D,2,0}^T} \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D,3,0}^T} \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [4-6.c]$$

### 4.2.3.2 Alternative Darstellung der Differentialoperatormatrix

Die kompakteste Darstellungsform der Differentialoperatormatrix für die drei Koordinatenrichtungen  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  ergibt sich aus der Produktdarstellung der Matrix der Ableitungsvorschriften mit den zugehörigen konstanten Vorfaktorenmatrizen.

$$\mathbf{B}_{3D}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{I} & \frac{\partial}{\partial X_2} \mathbf{I} & \frac{\partial}{\partial X_3} \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D,X}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \\ \mathbf{B}_{3D,2,0}^T \\ \mathbf{B}_{3D,3,0}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D,0}^T} = \mathbf{B}_{3D,X}^T \cdot \mathbf{B}_{3D,0}^T \quad [4-7.a]$$

Als Sonderfall gilt für die Differentialoperatormatrix mit den Ableitungsvorschriften für die Querschnittskoordinatenrichtungen  $X_2$  und  $X_3$ :

$$\mathbf{B}_{3D,2+3}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_2} \mathbf{I} & \frac{\partial}{\partial X_3} \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D,2,0}^T \\ \mathbf{B}_{3D,3,0}^T \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{3D,X,2+3}^T \cdot \mathbf{B}_{3D,2+3,0}^T \quad [4-7.b]$$

Für die Matrizen der Ableitungsvorschriften und die Matrizen der konstanten Vorfaktoren gilt:

$$\mathbf{B}_{3D,X}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{I} & \frac{\partial}{\partial X_2} \mathbf{I} & \frac{\partial}{\partial X_3} \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{3D,X,2+3}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_2} \mathbf{I} & \frac{\partial}{\partial X_3} \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad [4-7.c]$$

$$\mathbf{B}_{3D,0}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \\ \mathbf{B}_{3D,2,0}^T \\ \mathbf{B}_{3D,3,0}^T \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{3D,2+3,0}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D,2,0}^T \\ \mathbf{B}_{3D,3,0}^T \end{bmatrix} \quad [4-7.d]$$

Für die Belegung der konstanten Vorfaktorenmatrizen gilt:

$$\mathbf{B}_{3D,1,0}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B}_{3D,1,\perp,0}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4-7.e]$$

$$\mathbf{B}_{3D,2,0}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B}_{3D,3,0}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4-7.f]$$

## 4.3 Konstitution

Im Rahmen der konstitutiven Beziehungen werden die folgenden Punkte im Detail behandelt:

- Definition der 3D-Spannungen am infinitesimalen Element, siehe Punkt 4.3.1.
- Darstellung des Zusammenhangs zwischen den 3D-Spannungen  $\mathbf{s}_{3D}$  und den 3D-Verzerrungen  $\mathbf{e}_{3D}$  in unstrukturierter Darstellungsform, siehe Punkt 4.3.4.

Als Ergebnis der konstitutiven Beziehungen resultiert die Darstellung der 3D-Spannungen  $\mathbf{s}_{3D}$  in Abhängigkeit der 3D-Verzerrungen  $\mathbf{e}_{3D}$ .

Im Rahmen dieses Kapitels werden die Materialsteifigkeitsmatrizen für die Materialhauptachsenlage, die Materialhauptachsen stimmt mit den Koordinatenachsen des geometrischen Bezugssystem überein, definiert. Darüber hinausgehende materielle Eigenschaften, wie z. B. um die  $X_1$ -Achse gedrehte Materialhauptachsen mit deren Materialsteifigkeitsmatrizen, werden unter Punkt 6.3 im Detail erläutert.

### 4.3.1 Grundlagen und Definition der Spannungen

Die „3D-Spannung“ ist eine infinitesimale Kraftgröße, die auf ein infinitesimales Flächenelement im inneren eines 3D-Körpers (infinitesimale Schnittfläche) wirkt. Diese infinitesimale Kraftgröße wirkt im Raum und wird in die drei orthogonalen Komponenten des kartesischen Koordinatensystems zerlegt. Demzufolge weisen Spannungen stets die Einheit einer Kraft bezogen auf eine Fläche, d. h.  $N/mm^2$ , auf.

An jeder der sechs Würfelschnittflächen des infinitesimalen Würfels treten folgende 3D-Spannungskomponenten im Tripel auf:

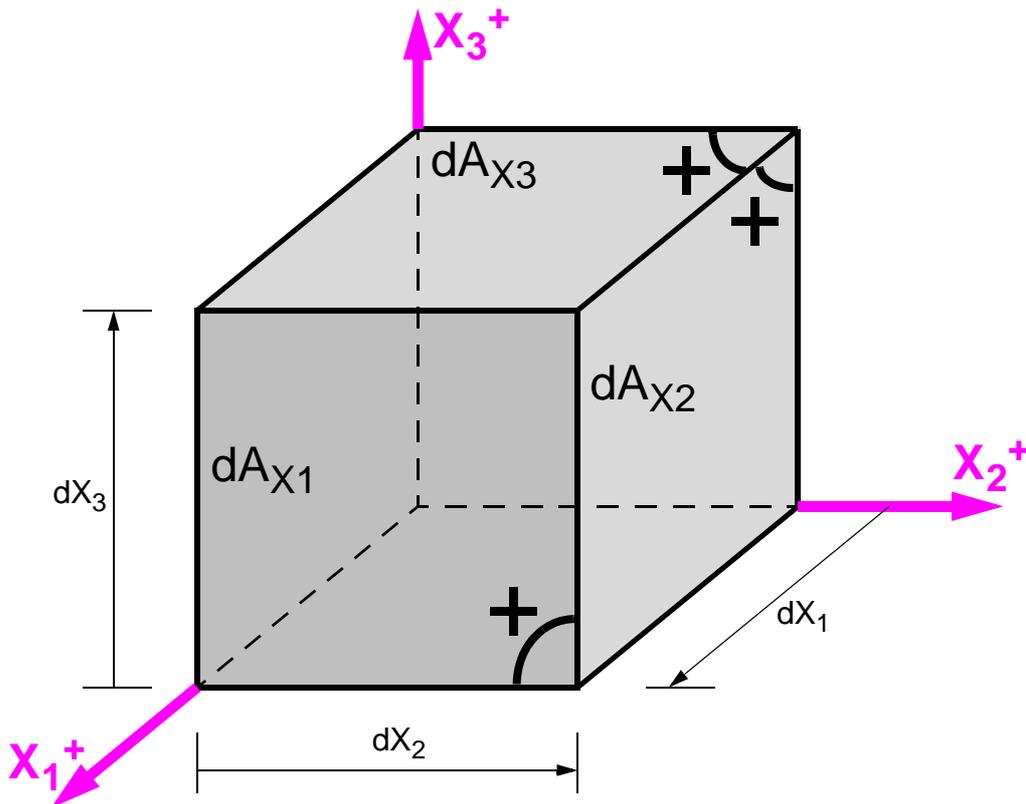
- eine Normalspannungskomponente in Richtung der Flächennormalen
- zwei Schubspannungskomponenten in den Richtungen der beiden Flächenvektoren

#### 4.3.1.1 Vorzeichenkonvention

- Eine Spannungskomponente ist dann positiv, wenn sie an der positiven Schnittfläche in die positive Koordinatenrichtung weist.
- Eine Spannungskomponente ist dann positiv, wenn sie an der negativen Schnittfläche in die negative Koordinatenrichtung weist.

Die Spannungskomponenten, welche an den Schnittflächen eines aus dem Körper herausgeschnitten gedachten infinitesimalen Volumenelements wirken, müssen systematischerweise mit zwei Indizes versehen und bezeichnet werden:

- Der 1. Index bezeichnet die Wirkungsrichtung der Spannungskomponente im gewählten globalen kartesischen Koordinatensystem.
- Der 2. Index bezieht sich auf die Orientierung der jeweiligen Schnittfläche. Diese ist durch die Richtung des Normalenvektors der betrachteten Schnittfläche im gewählten globalen kartesischen Koordinatensystem eindeutig gekennzeichnet. Eine Schnittfläche wird dann als positiv bezeichnet, wenn ihr Normalenvektor in die Richtung der zugeordneten positiven globalen Koordinatenrichtung des Bezugssystems weist.



**+** Definition der positiven Schnittflächen am infinitesimalen Würfel im kartesischen Koordinatensystem

*Abb. 4.6: Infinitesimales Volumenelement mit der Darstellung der positiven Schnittflächen (Vorzeichenkonvention)*

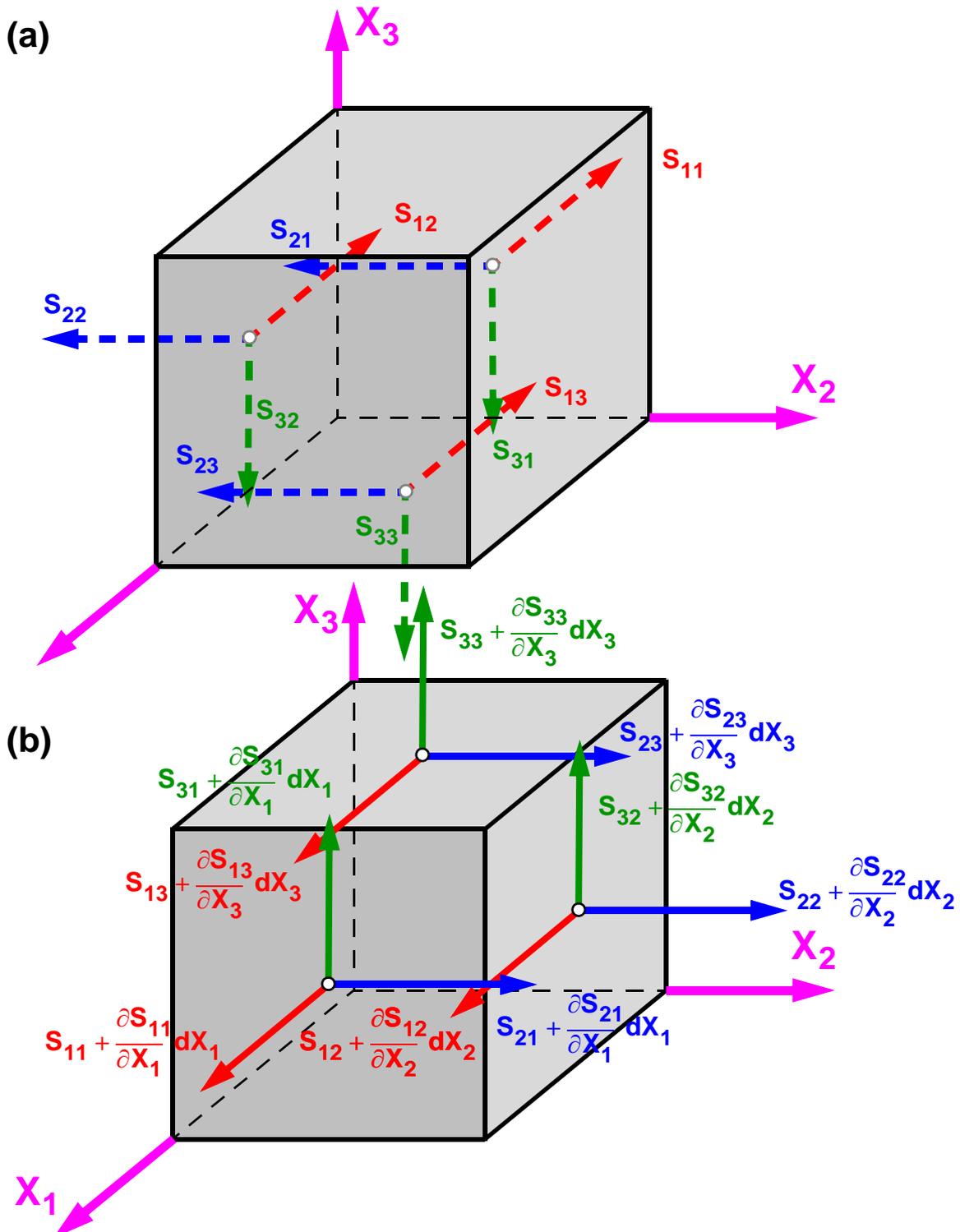
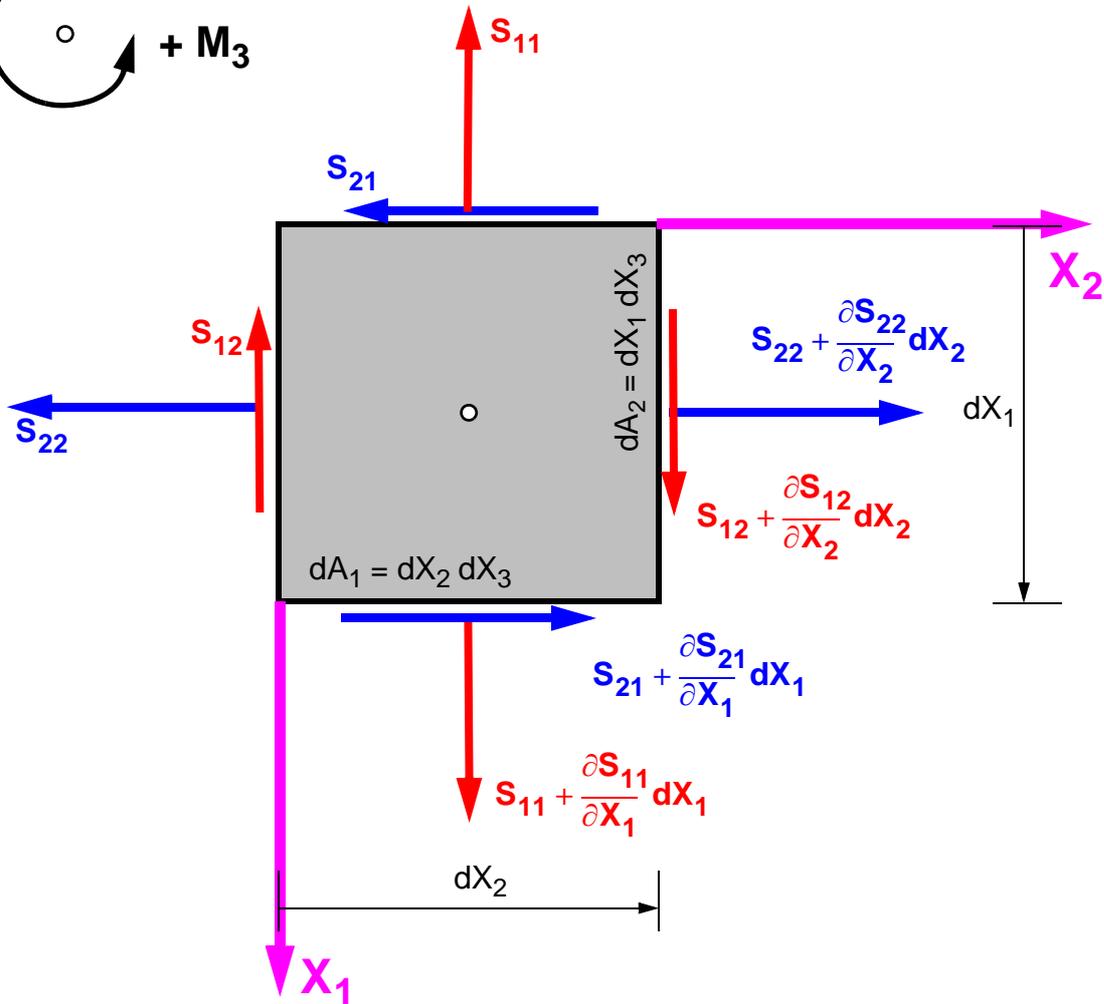
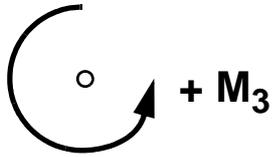


Abb. 4.7: Spannungen am infinitesimalen Element für die negativen (a) und positiven (b) Schnittflächen

Positiver Drehsinn



- Für die Wahl des Drehpunkts gelten keine Einschränkungen

Abb. 4.8: Momentengleichgewicht um die  $X_3$ -Achse

#### 4.3.1.2 Herleitung der Dualität der Schubspannungen an orthogonalen Ecken

Für die Herleitung der Schubspannungsdualität an orthogonalen Ecken werden von den sechs allgemeinen 3D-Gleichgewichtsgleichungen im Raum nur die drei Momentengleichgewichtsgleichungen verwendet. Exemplarisch wird im Folgenden die Formulierung des Drehgleichgewichts um die  $X_3$ -Achse gezeigt.

##### Momentengleichgewicht um die $X_3$ -Achse am Volumenelement

$$\begin{aligned}
 & -S_{12} \cdot dA_2 \cdot \frac{dX_2}{2} + S_{21} \cdot dA_1 \cdot \frac{dX_1}{2} + \\
 & -\left(S_{12} + \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} dX_2\right) \cdot dA_2 \cdot \frac{dX_2}{2} + \left(S_{21} + \frac{\partial S_{21}}{\partial X_1} dX_1\right) \cdot dA_1 \cdot \frac{dX_1}{2} = 0
 \end{aligned} \tag{4-8.a}$$

$$-S_{12} + S_{21} - S_{12} - \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} dX_2 + S_{21} + \frac{\partial S_{21}}{\partial X_1} dX_1 = 0 \tag{4-8.b}$$

Wird der Grenzübergang  $dX_1 \rightarrow 0$  und  $dX_2 \rightarrow 0$  durchgeführt, dann folgt aus Glg. 4-8.b die bekannte Beziehung für die Schubspannungsdualität:

$$-S_{12} + S_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{12} = S_{21} \tag{4-8.c}$$

Die Momentengleichgewichtsgleichungen um die  $X_1$ - bzw.  $X_2$ -Achse liefern in analoger Form die Definitionen der Dualität der Schubspannungen an orthogonalen Schnittflächen für die Schubspannungen  $S_{13}$  und  $S_{23}$ .

##### Darstellung der Schubspannungsdualität für alle Schubspannungskomponenten

$$\begin{aligned}
 S_{12} &= S_{21} \\
 S_{13} &= S_{31} \\
 S_{23} &= S_{32}
 \end{aligned} \tag{4-8.d}$$

Die drei Kräftegleichgewichtsgleichungen für die Verschiebungen im Raum werden zu gegebener Zeit verwendet, um das 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem in originaler Differentialformulierung für das Querschnittproblem zu gewinnen.

### 4.3.2 Darstellung des 3D-Spannungsvektors auf der Staboberfläche

#### 4.3.2.1 3D-Spannungsvektor auf einer freien Oberfläche

Für die Definition der Randbedingungen an den Stabmantelflächen und an den Stabendquerschnitten ist als Grundlage die Bestimmung des Spannungsvektors  $\mathbf{s}_v$  für eine schräge Schnittfläche erforderlich. Der 3D-Spannungsvektor  $\mathbf{s}_v$  stellt dabei die aus dem Inneren des Stabkörpers heraus an der Staboberfläche resultierenden Oberflächenspannungen dar, die ihrerseits wiederum im globalen Koordinatensystem definiert sind. Durch Anwendung der trigonometrischen Funktionen lassen sich die Spannungskomponenten des 3D-Spannungsvektors  $\mathbf{s}_v$  in einfacher direkter Form aus dem allgemeinen 3D-Spannungsvektor  $\mathbf{s}_{3D}$  für ein beliebiges Oberflächenelement ermitteln.

Basierend auf der strukturierten Darstellung des 3D-Spannungsvektors werden die drei Spannungskomponenten des allgemeinen Oberflächenspannungsvektors  $\mathbf{s}_v$  bestimmt. Dafür wird die Cauchy'sche Spannungsformel verwendet (vgl. Mang & Hofstetter, 2004, S. 47). Werden die Spannungskomponenten des Oberflächenspannungsvektors  $\mathbf{s}_v$  bestimmt, so ist aus Glg. 4-9.a eindeutig ersichtlich, dass sich dieser aus den beiden Anteilen „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ in gemischter Form zusammensetzt.

Für eine allgemein orientierte Oberfläche gilt für die Einzelkomponenten:  $N_1 \neq 0$ ,  $N_2 \neq 0$  und  $N_3 \neq 0$ .

$$\mathbf{s}_v = \begin{bmatrix} S_{1N} \\ S_{2N} \\ S_{3N} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{s}_{3D} \cdot \mathbf{v}}_{\text{Cauchy-Formel}} \equiv \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & N_3 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}^T} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} \quad [4-9.a]$$

mit

$$\mathbf{s}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & \tau^T \\ \tau & S_{||} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad [4-9.b]$$

$\mathbf{s}_v$  3D-Spannungsvektor auf einer schrägen Schnittfläche mit dem Normalenvektor  $\mathbf{v}$

$\mathbf{s}_{3D}$  3x3 3D-Spannungsmatrix in ihrer Urform

Die Darstellung des Spannungsvektors  $\mathbf{s}_v$  für eine schräge Schnittfläche in Matrixnotation in der Standarddarstellung der Cauchy-Formel ist in Glg. 4-9.a dargestellt.

In Abb. 4.9 sind der allgemein orientierte 3D-Spannungsvektor sowie der Normalenvektor auf eine beliebige Oberfläche dargestellt.

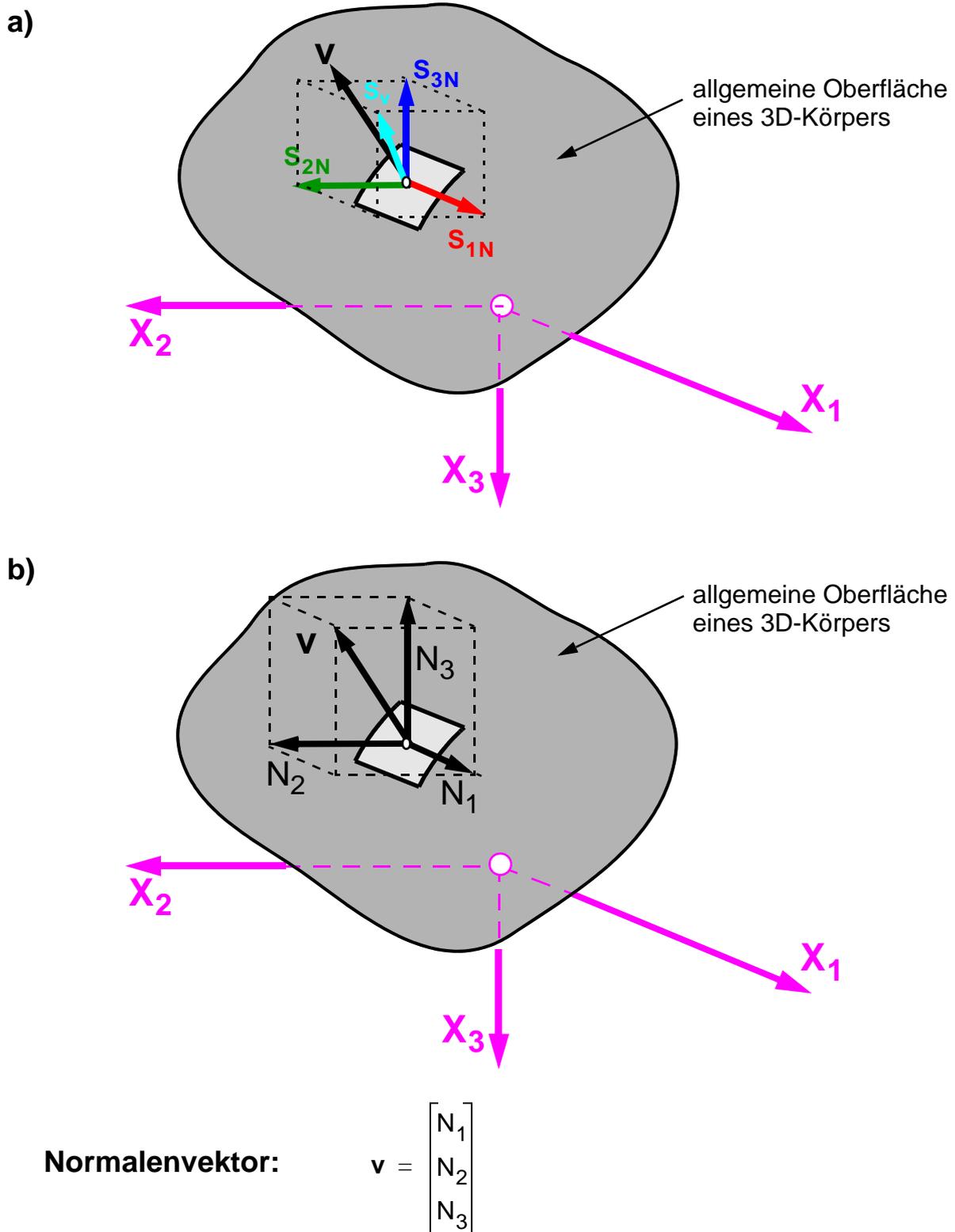


Abb. 4.9: a) Spannungsvektor auf der Oberfläche eines 3D-Körpers, b) Normalenvektor auf der Oberfläche eines 3D-Körpers

**Matrix der Richtungskosinuse in Blockmatrizenschreibweise**

Analog zur Darstellung der Differentialoperatormatrix wird auch die Operatormatrix der Richtungskosinuse in der bekannten Blockmatrizenschreibweise zur übersichtlichen Darstellung dieser verwendet. Durch die Aufspaltung der Matrix der Normalenvektoren in deren konstante Vorfaktormatrizen und in deren Richtungskosinuse kann diese durch folgende kompakte Form ausgedrückt werden. Im Sinn der Einstein'schen Summenkonvention gilt für den systematischen Zusammenbau der Matrix der Normalenvektoren:  $i=1$  bis 3

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{B}_{3D,i,0}^T \cdot N_i \tag{4-10.a}$$

$$\mathbf{V}^T(X_1, X_2, X_3) = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)^T = (N_1 \cdot \mathbf{V}_{1,0} + N_2 \cdot \mathbf{V}_{2,0} + N_3 \cdot \mathbf{V}_{3,0})^T \tag{4-10.b}$$

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & N_3 & N_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{1,0}^T} \cdot N_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{2,0}^T} \cdot N_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{3,0}^T} \cdot N_3 \tag{4-10.c}$$

### Alternative Darstellung der Matrix der Richtungskosinuse

Analog zur Darstellung der Differentialoperatormatrix gilt auch für die kompakteste Darstellungsform der Matrix der Normalenvektorenkomponenten  $\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{N}_2$  und  $\mathbf{N}_3$  die folgende Form in Blockmatrizenschreibweise:

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{B}_{3D,v}^T \cdot \mathbf{N}_0^T = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \mathbf{I} & \mathbf{N}_2 \mathbf{I} & \mathbf{N}_3 \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{1,0}^T \\ \mathbf{N}_{2,0}^T \\ \mathbf{N}_{3,0}^T \end{bmatrix} \quad [4-10.d]$$

$$\text{mit } \mathbf{B}_{3D,v} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \mathbf{I} \\ \mathbf{N}_2 \mathbf{I} \\ \mathbf{N}_3 \mathbf{I} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{V}_0^T = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1,0}^T \\ \mathbf{V}_{2,0}^T \\ \mathbf{V}_{3,0}^T \end{bmatrix} \quad [4-10.e]$$

$$\mathbf{V}_{1,0}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{V}_{1,\perp,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4-10.f]$$

$$\mathbf{V}_{2,0}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{V}_{3,0}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [4-10.g]$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4-10.h]$$

### 4.3.2.2 Gegenüberstellung von $\mathbf{B}_{3D}^T$ und $\mathbf{V}$

An dieser Stelle sei auf den analogen strukturellen Aufbau der Normalenvektor-Operatormatrix  $\mathbf{V}$  – diese beinhaltet die Richtungskomponenten des Normalenvektors – und der Differentialoperatormatrix  $\mathbf{B}_{3D}^T$  – diese beinhaltet die Ableitungsvorschriften nach den einzelnen Koordinatenrichtungen – hingewiesen. Unter Beachtung und Ausnutzung dieser Analogie ist eine übersichtliche und kompakte Herleitung der Integralformulierung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen in Matrix-Differentialoperatornotation möglich.

- Aus den Gleichungen 4-6.a bis 4-7.f gilt für die Differentialoperatormatrix

$$\mathbf{B}_{3D}^T = \mathbf{B}_{3D,X}^T \cdot \mathbf{B}_{3D,0}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{I} & \frac{\partial}{\partial X_2} \mathbf{I} & \frac{\partial}{\partial X_3} \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \\ \mathbf{B}_{3D,2,0}^T \\ \mathbf{B}_{3D,3,0}^T \end{bmatrix} \quad [4-11.a]$$

- Aus den Gleichungen 4-10.a bis 4-10.g gilt für den Richtungsvektor der Staboberfläche

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{B}_{3D,N}^T \cdot \mathbf{V}_0^T = \mathbf{B}_{3D,N}^T \cdot \mathbf{B}_{3D,0}^T = \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{I} & N_2 \mathbf{I} & N_3 \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \\ \mathbf{B}_{3D,2,0}^T \\ \mathbf{B}_{3D,3,0}^T \end{bmatrix} \quad [4-11.b]$$

Für die konstanten Vorfaktormatrizen für die Berechnung der Differentialoperatormatrix und der Normalenvektormatrix gilt auf Grund der zugrunde gelegten geometrischen Verhältnisse und der kinematischen Annahmen die vollständige mathematische Analogie.

$$\mathbf{B}_{3D,1,0}^T = \mathbf{V}_{1,0}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [4-11.c]$$

$$\mathbf{B}_{3D,2,0}^T = \mathbf{V}_{2,0}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4-11.d]$$

$$\mathbf{B}_{3D,3,0}^T = \mathbf{V}_{3,0}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [4-11.e]$$

### 4.3.2.3 Spannungsvektor $\mathbf{s}_N$ auf der Staboberfläche im Falle der Prismatizität

Auf Grund der Prismatizität des Stabes verschwindet die Komponente des Normalenvektors in Richtung der Stabachsenkoordinate  $X_1$ , d. h. der Normalenvektor liegt stets in der Querschnittsebene (Koordinatenebene  $X_2$ - $X_3$ ) des Stabkörpers.

Für die Einzelkomponenten des Normalenvektors gilt:  $N_1 = 0$ ,  $N_2 \neq 0$  und  $N_3 \neq 0$ .

Unter Berücksichtigung der Einzelkomponenten in der Matrix der Komponenten des Normalenvektors gilt für den Oberflächenspannungsvektor  $\mathbf{s}_v$  nach Glg. 4-12.a folgender Zusammenhang:

$$\mathbf{s}_v = \begin{bmatrix} S_{1N} \\ S_{2N} \\ S_{3N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_{2+3}^T} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{v}_{2+3}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \quad [4-12.a]$$

$$\mathbf{v}_{2+3}^T = \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot N_\alpha \quad [4-12.b]$$

Im Sinne der Einstein'schen Summenkonvention gilt zur Bestimmung der Komponenten der Matrix des Normalenvektors für den Index  $\alpha=1$  bis 2 für das Aufsummieren der Einzelanteile:

$$\mathbf{v}_{2+3}^T = \mathbf{B}_{3D, N, 2+3}^T \cdot \mathbf{v}_{2+3, 0}^T = \mathbf{B}_{3D, N, 2+3}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3, 0}^T = \begin{bmatrix} N_2 \mathbf{I} & N_3 \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D, 2, 0}^T \\ \mathbf{B}_{3D, 3, 0}^T \end{bmatrix} \quad [4-12.c]$$

mit

$$\mathbf{B}_{3D, N, 2+3}^T = \begin{bmatrix} N_2 \mathbf{I} & N_3 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{2+3, 0}^T = \mathbf{B}_{3D, 2+3, 0}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D, 2, 0}^T \\ \mathbf{B}_{3D, 3, 0}^T \end{bmatrix} \quad [4-12.d]$$

$$\mathbf{v}_{2, 0}^T = \mathbf{B}_{3D, 2, 0}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_{3, 0}^T = \mathbf{B}_{3D, 3, 0}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [4-12.e]$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4-12.f]$$

#### 4.3.2.4 Spannungsvektor $\mathbf{s}_v$ für einen Stabquerschnitt im Falle der Prismaticität

Wird der Spannungsvektor für ein Oberflächenelement im ausgezeichneten Fall eines beliebigen Stabquerschnitts bestimmt, dann gelten auf Grund der festgelegten Prismaticität des Stabkörpers für die Einzelkomponenten des zugehörigen Normalenvektors die folgenden Beziehungen:

$$N_1 \neq 0, N_2 = 0 \text{ und } N_3 = 0$$

$$\mathbf{s}_{v, QS} = \begin{bmatrix} S_{1N} \\ S_{2N} \\ S_{3N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_1^T} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{s}_{3D} = \mathbf{s}_{3D, \perp} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} \quad [4-13.a]$$

$$\mathbf{V}_1^T = N_1 \cdot \mathbf{V}_{1,0}^T = N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \quad [4-13.b]$$

$$\mathbf{V}_{1,0}^T = \mathbf{B}_{3D,1,0}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [4-13.c]$$

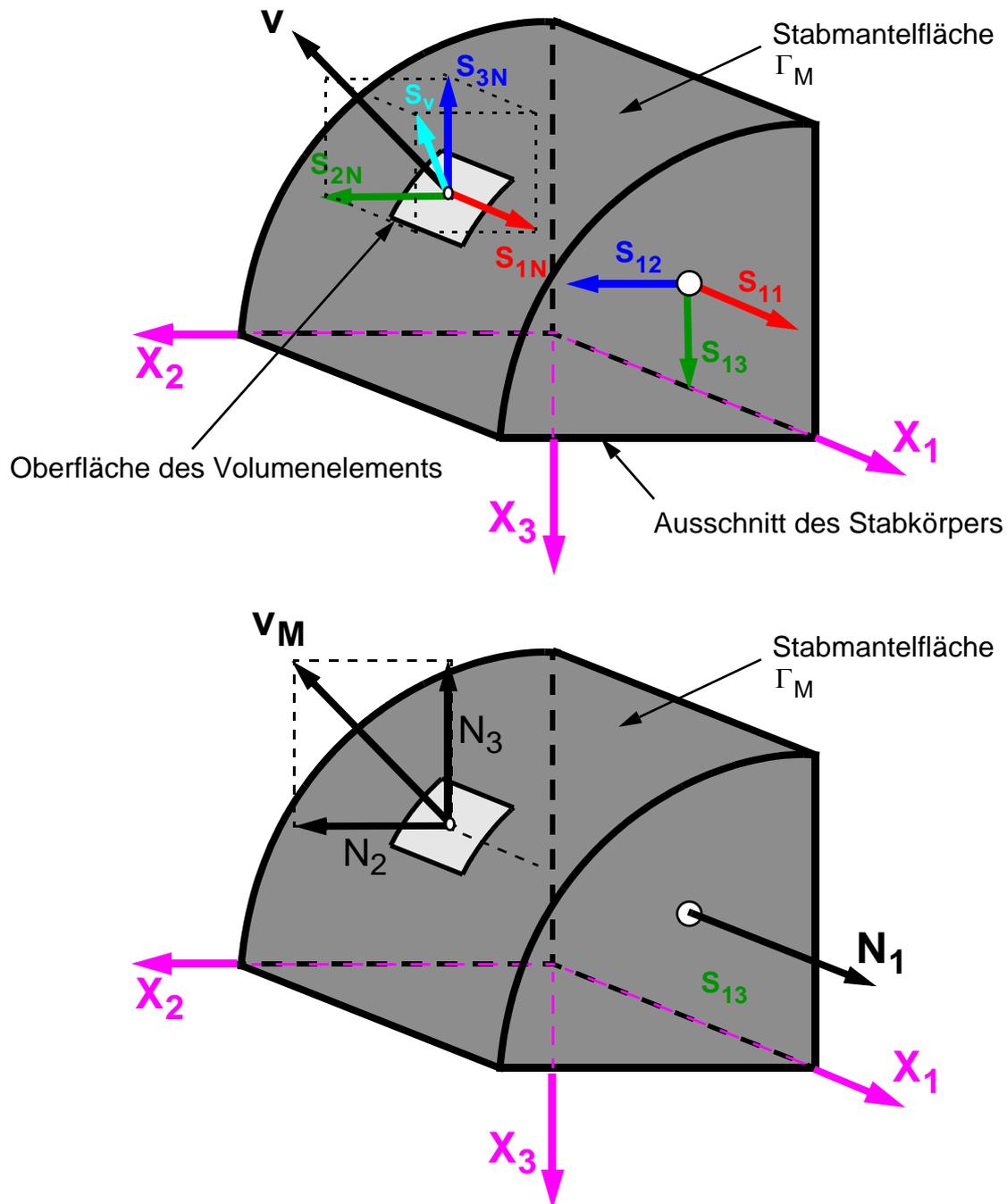
Auf Grund der definierten Prismaticität des 3D-Stabes entsprechen die Oberflächenspannungen an einem beliebigen Stabquerschnitt genau dem Spannungszustand aus dem reinen Balkenverformungszustand „L“.

#### Spannungsvektoren $\mathbf{s}_{N,A}$ und $\mathbf{s}_{N,E}$ für den Sonderfall der Stabendquerschnitte

Zur Bestimmung der Spannungsvektoren für die Sonderfälle der beiden Stabenden ist die folgende Vorzeichenkonvention zu beachten. Am positiven Schnittufer des Stabendquerschnitts ( $X=L$ ) stimmen die Vorzeichen für die globale positive Richtung. Im Falle des Stabanfangsquerschnitts ( $X=0$ ) ist eine Vorzeichenkorrektur im Sinne der negativen Schnittfläche durchzuführen.

$$\mathbf{s}_{N,A} = \begin{bmatrix} S_{1N} \\ S_{2N} \\ S_{3N} \end{bmatrix}_A = \mathbf{V}_{1,A}^T \cdot \mathbf{s}_{3D,A} = \underbrace{N_{1,A}}_{-1} \cdot \mathbf{V}_{1,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D,A} = -\mathbf{s}_{3D, \perp, A} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix}_A \quad [4-13.d]$$

$$\mathbf{s}_{N,E} = \begin{bmatrix} S_{1N} \\ S_{2N} \\ S_{3N} \end{bmatrix}_E = \mathbf{V}_{1,E}^T \cdot \mathbf{s}_{3D,E} = \underbrace{N_{1,E}}_1 \cdot \mathbf{V}_{1,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D,E} = \mathbf{s}_{3D, \perp, E} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix}_E \quad [4-13.e]$$



Am prismatischen Stab gilt für die Stabmantelfläche:  $N_1=0$

Am prismatischen Stab gilt für den Stabquerschnitt:  $N_2=N_3=0$

Abb. 4.10: Spannungsvektor auf der differentiellen Oberfläche eines prismatischen Stabkörpers

### 4.3.3 Definition der Materialhauptachsen für das betrachtete Materialverhalten

Die Materialhauptachsen sind für alle angeführten Materialbeziehungen in einem kartesischen Koordinatensystem festgelegt.

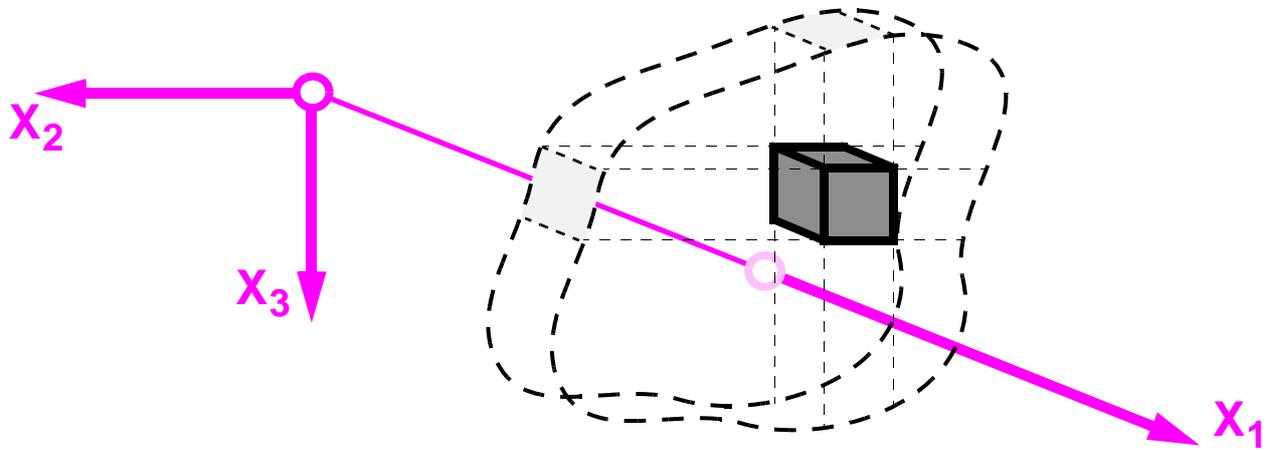
Im Rahmen dieser Arbeit wird orthotropes Materialverhalten verwendet, wobei die Materialhauptachsendefinitionen für die zwei folgenden Fälle definiert werden:

- **Bezüglich des Bezugskordinatensystems ungedrehte Materialhauptachsen**

Die Materialhauptachsen der orthotropen Materialformulierung des Kontinuums stimmen mit den Koordinatenrichtungen des kartesischen Bezugssystems eindeutig überein.

- **Bezüglich des Bezugskordinatensystems um die  $X_1$ -Achse gedrehte Materialhauptachsen**

Die Materialhauptachsen der orthotropen Materialformulierung des Kontinuums werden bezüglich der Koordinatenrichtung  $X_1$  des kartesischen Bezugssystems um einen beliebigen Winkel verdreht. Somit stimmt nur mehr die  $X_1$ -Richtung des Materials mit dem kartesischen Koordinatensystem überein.



(a)  
Materialhauptachsen  
entsprechen dem  
globalen Bezugssystem

(b)  
Materialhauptachsen  
sind um die  $X_1$ -Achse  
um den Winkel  $\alpha$  verdreht

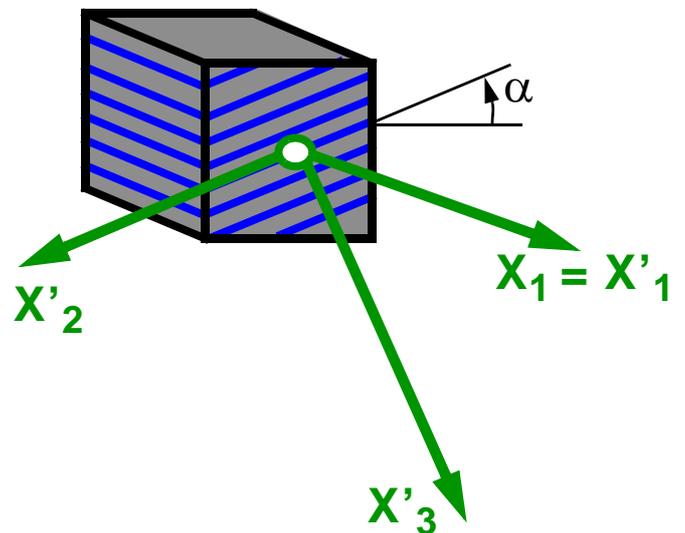
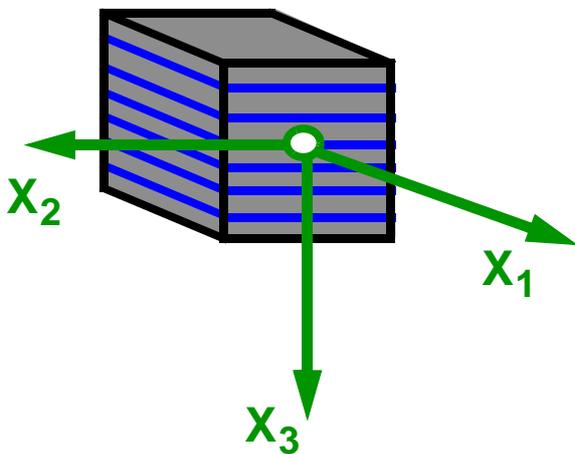


Abb. 4.11: Materialverhalten des prismatischen Stabes:  
(a) ungedrehte, (b) gedrehte Materialhauptachsen

### 4.3.4 Isotropes und Orthotropes Materialverhalten – Materialhauptachsenlage

Für die Darstellung des Materialverhaltens sind folgende Definitionen für die Bezeichnung des kartesischen Koordinatensystems wichtig:

- $X_1, X_2$  und  $X_3$  beschreiben das globale kartesische Koordinatensystem des Bezugssystems
- $X'_1, X'_2$  und  $X'_3$  beschreiben das lokale Hauptachsensystem der Materialsteifigkeitsmatrix, in der die klassische entkoppelte Darstellung der Normal- und Schubspannungen für die Orthotropie gilt.

#### 4.3.4.1 Orthotropes Materialverhalten in unstrukturierter Darstellung

Das orthotrope Materialverhalten gilt als Sonderfall der allgemeinen Anisotropie und ist durch drei ausgezeichnete Richtungen von Materialsymmetrien definiert, Guggenberger (2008), Mang & Hofstetter (2004) und Pilkey & Wunderlich (1994). Das orthotrope Materialverhalten ist durch neun voneinander unabhängige Materialparameter (im Allgemeinen drei Elastizitätsmoduli, drei Schubmoduli und drei Querkontraktionsziffern) eindeutig definiert.

Die Materialsteifigkeitsmatrix in der klassischen Darstellung zeigt eine vollständige Entkoppelung der Normalspannungen und der Schubspannungen, ausgedrückt durch die mit Null identen Nebendiagonal-Koppelungs-Matrizen. Für den in Glg. 4-14.a dargestellten Fall der allgemeinen Orthotropie in Materialhauptachsenlage, d. h. ohne jeglichen Materialachsendrehungen um eine Bezugsachse (das globale Bezugssystem stimmt mit den lokalen Materialhauptachsen überein), gilt:

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, MHA} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_S \end{bmatrix}_{HA} \cdot \mathbf{e}_{3D} \quad [4-14.a]$$

Auf Grund der Symmetrieanforderungen an die Materialsteifigkeitsmatrix gilt für die Einzelsteifigkeitsterme in den Nebendiagonalen:

$$D_{12} = D_{21} ; D_{23} = D_{32} ; D_{13} = D_{31} \quad [4-14.b]$$

Für die weiteren Formulierungen des orthotropen Materialverhaltens wird die in Materialhauptachsenlage definierte Materialsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{D}_{3D, MHA}$  mit  $\mathbf{D}'_{3D}$  bezeichnet.

Die Materialsteifigkeitsmatrix entspricht der invertierten Materialnachgiebigkeitsmatrix. Diese lässt sich wie folgt einfach definieren:

$$\mathbf{D}'_{3D} = \mathbf{C}'_{3D}^{-1} \quad [4-15.a]$$

Für die Materialnachgiebigkeitsmatrix gilt:

$$\mathbf{C}_{3D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{\nu_{12}}{E_{22}} & \frac{\nu_{13}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{\nu_{23}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31}}{E_{11}} & \frac{\nu_{32}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \quad [4-15.b]$$

Auf Grund der zwingenden Symmetrie der Materialnachgiebigkeitsmatrix liegen neun unabhängige Materialkonstanten vor, es gilt:

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{C}_{ji} \quad [4-15.c]$$

Die neun unabhängigen Materialkonstanten für das orthotrope Materialverhalten lauten:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$$

#### 4.3.4.2 Isotropes Materialverhalten in unstrukturierter Darstellung

Die in Glg. 4-14.a gezeigte Besetzung der Materialsteifigkeitsmatrix, definiert in Materialhauptachsenlage, gilt sinngemäß auch für isotropes Materialverhalten. Isotropes Materialverhalten wird durch zwei unabhängige Materialkonstanten definiert ( $E$ ,  $\nu$ ).

$$\mathbf{D}_{3D, MHA, ISO} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad [4-16.a]$$

Für die einzelnen Einträge der Materialsteifigkeitsmatrix gilt nach Guggenberger (2007):

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \cdot \frac{1 - \nu}{\nu} = D_{12} \cdot \frac{1 - \nu}{\nu} = \lambda \cdot \frac{1 - \nu}{\nu} \quad [4-16.b]$$

$$D_{12} = D_{13} = D_{23} = \lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \quad [4-16.c]$$

$$D_{44} = D_{55} = D_{66} = \mu = G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad [4-16.d]$$

$\lambda$  und  $\mu$  stellen in dieser Form der Darstellung der Materialkonstanten die nach Gabriel Lamé (1795-1870) benannten Lamé-Konstanten dar (vgl. Pilkey & Wunderlich, 1994, S. 18).

Somit gilt:

Für die weiteren Formulierungen des isotropen Materialverhaltens wird die in Materialhauptachsenlage definierte Materialsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{D}_{3D, MHA, ISO}$  mit  $\mathbf{D}'_{3D, ISO}$  bezeichnet.

## 4.4 Kinetik

Im Rahmen der Kinetik werden unter Verwendung der Kinematik und der Konstitution die 3D-Gleichgewichtsgleichungen für den 3D-Stab in der originalen 3D-Differentialformulierung ermittelt.

### 4.4.1 Kräfte- bzw. Translationsgleichgewicht am Volumenelement

Im Raum stehen insgesamt sechs 3D-Gleichgewichtsgleichungen für die Bestimmung der 3D-Verschiebungsfelder zur Verfügung. Die drei Rotationsgleichgewichtsgleichungen führen, wie unter Punkt 4.3.1.2 gezeigt, zur Definition der Dualität der Schubspannungen an orthogonalen Flächen. Somit stehen letztendlich zur Berechnung des 3D-Verschiebungsfeldes drei Kräfte-Gleichgewichtsgleichungen in den drei Raumrichtungen des kartesischen Koordinatensystems entsprechend dem unstrukturierten 3D-Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  zur Verfügung. Neben den 3D-Spannungen sind für den inhomogenen Stabbelastungsfall die äußeren Volumenlasten  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$  und  $\mathbf{q}_3$  zu berücksichtigen. Diese sind im homogenen Stabbelastungsfall identisch mit Null.

#### 4.4.1.1 3D-Gleichgewicht in $X_1$ -Richtung

Wird das Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Volumenelement in  $X_1$  Richtung definiert, lässt sich der folgende Zusammenhang der Spannungskomponenten und der äußeren Kraftkomponenten ermitteln:

$$\begin{aligned} & \left( \cancel{S_{11}} + \frac{\partial S_{11}}{\partial X_1} dX_1 - \cancel{S_{11}} \right) \cdot dA_1 + \left( \cancel{S_{12}} + \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} dX_2 - \cancel{S_{12}} \right) \cdot dA_2 + \\ & + \left( \cancel{S_{13}} + \frac{\partial S_{13}}{\partial X_3} dX_3 - \cancel{S_{13}} \right) \cdot dA_3 + q_1 \cdot dV = 0 \end{aligned} \quad [4-17.a]$$

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial X_1} dX_1 \cdot dA_1 + \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} dX_2 \cdot dA_2 + \frac{\partial S_{13}}{\partial X_3} dX_3 \cdot dA_3 + q_1 \cdot dV = 0 \quad [4-17.b]$$

Durch Division dieser 3D-Gleichgewichtsgleichung durch das Volumen  $dV$  ergibt sich die Darstellung des 3D-Gleichgewichts in  $X_1$  Richtung für jeden beliebigen Punkt innerhalb des Stabkörper  $\mathbf{V}$ :

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial X_3} + q_1 = 0 \quad [4-17.c]$$

Bei Betrachtung der Spannungskomponenten in Glg. 4-17.c wird der Zusammenhang zwischen den Normalspannungskomponenten und den Schubspannungskomponenten mit identer Richtung ersichtlich. Die Herleitung der Gleichgewichtsgleichungen in  $X_2$ - bzw.  $X_3$ -Richtung verläuft in analoger Form.

#### 4.4.1.2 3D-Gleichgewicht in $X_2$ -Richtung und $X_3$ -Richtung

$$\frac{\partial S_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial S_{23}}{\partial X_3} + q_2 = 0 \quad [4-17.d]$$

$$\frac{\partial S_{31}}{\partial X_1} + \frac{\partial S_{32}}{\partial X_2} + \frac{\partial S_{33}}{\partial X_3} + q_3 = 0 \quad [4-17.e]$$

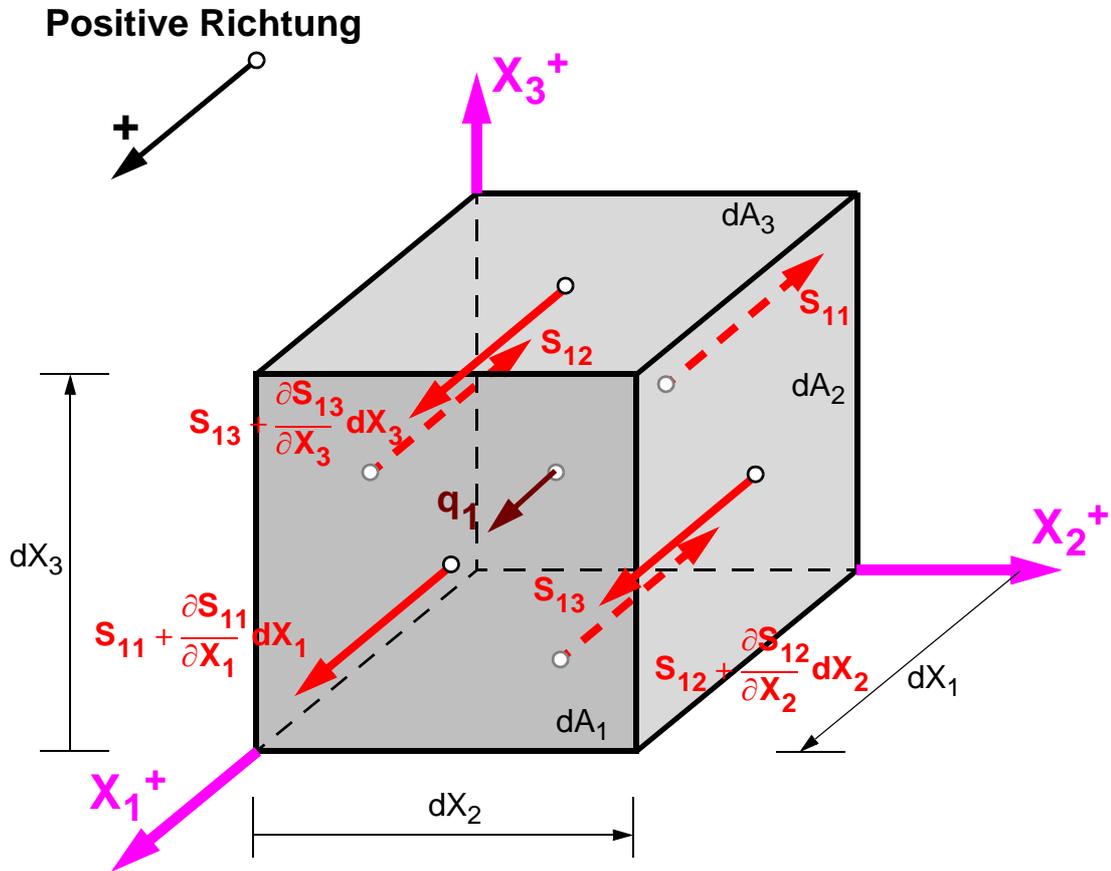


Abb. 4.12: Kräftegleichgewicht am Volumenelement für die  $X_1$ -Richtung

## 4.5 3D-Gleichgewichtsgleichungen in originaler Differentialform

### 4.5.1 3D-Feldgleichungen des Gleichgewichts

Werden die Glg. 4-17.c bis Glg. 4-17.e in vereinter Form dargestellt, so folgt die bekannte Darstellung des 3D-Gleichgewichts für das Volumenelement in originaler Differentialform. Auf Grund der Koppelung der drei 3D-Gleichgewichtsgleichungen, dies resultiert aus der Schubspannungsdualität, wird auch vom 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem gesprochen, siehe Glg. 4-18.a.

$$\mathbf{g}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial \mathbf{S}_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial \mathbf{S}_{13}}{\partial X_3} + \mathbf{q}_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{S}_{12}}{\partial X_1} + \frac{\partial \mathbf{S}_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial \mathbf{S}_{23}}{\partial X_3} + \mathbf{q}_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{S}_{13}}{\partial X_1} + \frac{\partial \mathbf{S}_{23}}{\partial X_2} + \frac{\partial \mathbf{S}_{33}}{\partial X_3} + \mathbf{q}_3 = 0 \end{bmatrix} \quad [4-18.a]$$

In Differentialoperator Schreibweise lässt sich das partikuläre 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem in Differentialform wie folgt darstellen.

$$\mathbf{g}_{3D} = \tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D}, \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{in } \boldsymbol{\gamma} \quad [4-18.b]$$

Diese Art der Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen gilt für das differentielle Volumenelement, d. h. es gilt im Sinne des Stabes an jeder beliebigen Stelle des Stabkörpers. Somit stellt diese Art des 3D-Gleichgewichts eine rein lokale Gleichgewichtsaussage dar (vgl. Mang & Hofstetter, 2004).

Diese Darstellung des Gleichgewichts liefert im Fall der Berechnung von 3D-Körpern ausschließlich Aussagen über das lokale 3D-Gleichgewicht am infinitesimalen Volumenelement innerhalb des 3D-Körpers. In diesem Zusammenhang wird auch von den Feldgleichungen des 3D-Gleichgewichts gesprochen. Um Aussagen über das globale 3D-Gleichgewicht treffen zu können, sind zu den 3D-Feldgleichungen zusätzliche 3D-Oberflächenrandbedingungen in Form von Kraft- und Verschiebungsrandbedingungen zu definieren. Erst die Kombination der 3D-Feldgleichungen mit den 3D-Oberflächenrandbedingungen stellt das originale gesamtliche 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem in Differentialdarstellung dar.

### 4.5.2 Randbedingungen an den Staboberflächen des Stabkörpers

Auf der Oberfläche des Stabkörpers sind Spannungs- und Verschiebungsrandbedingungen in folgender Form zu definieren:

$$\mathbf{g}_\Gamma: \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\Gamma, s} \\ \mathbf{g}_{\Gamma, u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{s}_v + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} = -\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \\ -\mathbf{u}_{3D} + \mathbf{u}_{3D, \Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [4-18.c]$$

Für die Definitionsgebiete der beiden Anteile der Randbedingungen gelten die folgenden Bedingungen,

wobei die Gleichzeitigkeit des Auftretens einer Verschiebungs- und Spannungsrandbedingung für ein und denselben Punkt ist per Definition ausgeschlossen ist.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{\Gamma, \mathbf{s}} &= \mathbf{0} & \text{auf} & \Gamma_{\mathbf{s}} \\
 \mathbf{g}_{\Gamma, \mathbf{u}} &= \mathbf{0} & \text{auf} & \Gamma_{\mathbf{u}} \\
 \Gamma_{\mathbf{s}} \cup \Gamma_{\mathbf{u}} &= \Gamma \text{ und} & \Gamma_{\mathbf{s}} \cap \Gamma_{\mathbf{u}} &= \{ \}
 \end{aligned} \tag{4-18.d}$$

### 4.5.3 Vollständige Form des 3D-Gleichgewichts in Differentialformulierung

Durch das Zusammenführen der 3D-Feldgleichungen des Gleichgewichts, definiert über den gesamten Stabkörper, mit sämtlichen Randbedingungen an den Stabkörperoberflächen ergibt sich die vollständige Darstellung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen in originaler Differentialformulierung.

- **3D-Feldgleichungen des Gleichgewichts**

$$\mathbf{g}_{3D} = \tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D}, \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{in } \boldsymbol{\gamma} \tag{4-19.a}$$

- **Randbedingungen**

$$\mathbf{g}_{\Gamma}: \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\Gamma, \mathbf{s}} \\ \mathbf{g}_{\Gamma, \mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{s}_{\mathbf{v}} + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} = -\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \\ -\mathbf{u}_{3D} + \mathbf{u}_{3D, \Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4-19.b}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{\Gamma, \mathbf{s}} &= \mathbf{0} & \text{auf} & \Gamma_{\mathbf{s}} \\
 \mathbf{g}_{\Gamma, \mathbf{u}} &= \mathbf{0} & \text{auf} & \Gamma_{\mathbf{u}} \\
 \Gamma_{\mathbf{s}} \cup \Gamma_{\mathbf{u}} &= \Gamma \text{ und} & \Gamma_{\mathbf{s}} \cap \Gamma_{\mathbf{u}} &= \{ \}
 \end{aligned} \tag{4-19.c}$$

Werden die materiellen Beziehungen explizit eingearbeitet, entstehen die beschreibenden 3D-Grundgleichungen des Gleichgewichts. Im Rahmen dieser Arbeit werden die 3D-Gleichgewichtsgleichungen für orthotropes und isotropes Materialverhalten dargestellt.

Werden die 3D-Gleichgewichtsgleichungen nach Glg. 4-18.a betrachtet, so ist eindeutig erkennbar, dass ausschließlich drei Gleichgewichtsgleichungen für die drei Raumrichtungen zur Verfügung stehen. Parallel dazu lässt sich nach Glg. 6-2.b die Anzahl der Freiheitsgrade für die Formulierung der Kinematik der klassischen Stabtheorie mit sechs bestimmen. Für erweiterte Stabtheorien steigt die Anzahl der Unbekannten der QS-Kinematik um die zusätzlich eingeführten Freiheitsgrade an.

In der originalen Differentialdarstellung des 3D-Gleichgewichts liegen zur Problemlösung zu wenig Gleichgewichtsbedingungen vor. Der Ausweg aus diesem Dilemma wird über die Formulierung des Gleichgewichts in Integralform gefunden, wodurch eine übereinstimmende Anzahl an Gleichgewichtsgleichungen und globalen Systemfreiheitsgraden gewonnen werden kann.

Die Überführung der originalen Differentialform der 3D-Gleichgewichtsgleichungen in die Integralform der 3D-Gleichgewichtsgleichungen wird im Folgenden gezeigt.

## 4.6 3D-Gleichgewichtsgleichungen in Integralformulierung

### 4.6.1 3D-Gleichgewichtsgleichungen in Integralform in originaler Darstellung

Werden die Spannungen durch die 3D-Verschiebungsansätze ausgedrückt, fällt auf, dass bei der Differentialform des 3D-Gleichgewichts den Unbekannten des stabachsenbezogenen Verformungsparameters nur drei 3D-Feldgleichungen gegenüberstehen. Eine Systemlösung basierend auf diesen drei Gleichgewichtsgleichungen ist dadurch nicht zielführend.

Auf Grund der angesetzten durchmischten globalen und lokalen Kinematik (hierarchisch geordnete Verschiebungsfelder) muss die standardmäßig in Differentialform angeschriebene statische Kontinuumsleichgewichtsgleichung in äquivalenter Integralform ausgedrückt werden, um das der gewählten Kinematik (mit den zugehörigen Verformungsfreiheitsgraden) entsprechende 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem generieren zu können.

Die Darstellung der Integralform des 3D-Gleichgewichts erfolgt in Matrix-Differentialoperator-Notation. Als Ausgangspunkt für die Herleitung der Integralformulierung des 3D-Gleichgewichts wird die Differentialform des 3D-Gleichgewichts verwendet.

Ausgehend von der originalen Differentialform des Gleichgewichts mit ihren drei 3D-Gleichgewichtsgleichungen  $\mathbf{g}_{3D}$  in den drei Raumrichtungen und den zugehörigen Randbedingungen  $\mathbf{g}_\Gamma$  erfolgt die Überführung auf die originale Integralform des Gleichgewichts, wie in Glg. 4-20 dargestellt. Der wesentliche Punkt dabei liegt in der absoluten Beliebigkeit der Gewichtsfunktionen  $\boldsymbol{\eta}$ , was bedeutet, dass ausnahmslos alle möglichen denkbaren Funktionen zugelassen sind. Die Gewichtsfunktionen sind weder in deren Form der Verteilung über das Überwachungsgebiet  $\mathcal{V}$  noch in ihrer absoluten Größe eingeschränkt. Zudem liegen diese in einer dimensionslosen Darstellung vor.

**Anmerkung:** Die Gewichtsfunktionen werden gelegentlich auch als Kontrollfunktionen bzw. Wächterfunktionen bezeichnet. In dieser Abhandlung wird die Bezeichnung als Gewichtsfunktionen verwendet. Die Bezeichnung als Wächterfunktionen soll mit Prägnanz die Aufgabe dieser Funktionen im Rahmen der mathematischen Gleichungserfüllung klarer deutlich machen. Die Wächterfunktionen haben entsprechend ihrer Bezeichnung die Aufgabe, die Erfüllung des Gleichgewichts über das gesamte Gebiet zu überwachen beziehungsweise zu kontrollieren.

originale Differentialform	$\Leftrightarrow$	originale Integralform	
$\mathbf{g}_{3D} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \mathcal{V}$ $\mathbf{g}_\Gamma = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \Gamma$	$\Leftrightarrow$	$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\eta}^T \cdot \mathbf{g}_{3D} d\mathcal{V} + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\eta}^T \cdot \mathbf{g}_\Gamma d\Gamma = 0$ <p style="text-align: center; margin-top: 5px;">wobei <math>\boldsymbol{\eta}</math> absolut beliebig ist</p>	[4-20]

Für die in Glg. 4-20 gezeigte mathematische Äquivalenz ist die Beliebigkeit aller Gewichtsfunktionen  $\boldsymbol{\eta}$  bedingungslose Voraussetzung.

**Anmerkung:** Die Integralform des Gleichgewichts nach Glg. 4-20 wird in der Literatur als „starke Form“ der Integraldarstellung bezeichnet. Diese Form der Integraldarstellung unterscheidet sich von der originalen Darstellung des Gleichgewichts in Differentialform ausschließlich in der Art und Weise wie die Erfüllung der in Glg. 4-20 angeführten Gleichungen an „jeder Stelle  $\mathbf{x}$ “ der Gebiete  $\mathcal{V}$  und  $\Gamma$  erzwungen bzw. überwacht wird. Die Qualität der Ergebnisse bleibt von der Art der Überwachung der Erfüllung der Gleichungen unberührt.

Für fix vorgegebene Verschiebungsrandbedingungen entfallen die entsprechenden Anteile aus der Gleichgewichtsformulierung. Das 3D-Gleichgewicht in Integralformulierung für den Fall des primatischen Stabes lautet dann wie folgt:

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\eta}^T \cdot (\tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \mathcal{V}}) \cdot d\mathcal{V} + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\eta}_s^T \cdot (-\mathbf{s}_v + \mathbf{q}_{3D, \Gamma}) \cdot d\Gamma_s = 0 \quad [4-21.a]$$

Sind die Verschiebungsrandbedingungen vorgegebene Größen, also keine fixen Größen, treten in der Gesamtdarstellung der Integralformulierung des Gleichgewichts die folgenden Zusatzterme in Erscheinung:

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\eta}^T \cdot (\tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \mathcal{V}}) \cdot d\mathcal{V} + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\eta}_s^T \cdot (-\mathbf{s}_v + \mathbf{q}_{3D, \Gamma}) \cdot d\Gamma_s + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u}_{3D} - \bar{\mathbf{u}}_{3D})^T \cdot \boldsymbol{\eta}_R \cdot d\Gamma_u = 0 \quad [4-21.b]$$

$\boldsymbol{\eta}_R$  und  $\boldsymbol{\eta}_s$  stellen dabei beliebige Gewichtsfunktionen definiert auf  $\Gamma_u$  und  $\Gamma_s$  dar.

Für die folgenden Überlegungen zur Erfüllung des Gleichgewichts wird das Gesamtsystem, das in Differentialform durch die 3D-Gleichgewichtsgleichungen  $\mathbf{g}_{3D}$  mit den zugehörigen Randbedingungen  $\mathbf{g}_r$  in den jeweiligen Gebieten des Stabkörpers definiert ist, mit „ $\mathbf{g}$ “ bezeichnet.

- Der „lebendige“ Aspekt des „Erfüllt-Sein-Sollens“ beziehungsweise des „Erfüllt-Sein-Müssens“ eines 3D-Gleichgewichtssystems „ $\mathbf{g}_{3D}$ “, über ein definiertes, kontinuierlich ausgedehntes Gebiet betrachtet, wird im Fall der Differentialformulierung durch den lapidaren Zusatz an „jeder Stelle  $\mathbf{x}$ “ ausgedrückt beziehungsweise realisiert. Man führe sich die praktischen Konsequenzen der Aussage an „jeder Stelle  $\mathbf{x}$ “ deutlich und umfassend vor Augen.
- Wählen wir hingegen die Integralformulierung zur Darstellung der gleichen Problemsituation „ $\mathbf{g}_{3D}$ “, so stellen wir zunächst trivialerweise fest, dass die zu erfüllenden Gleichungen über dasselbe kontinuierliche Gebiet die selben sind. Verändert hat sich jedoch die Methode der Überwachung beziehungsweise die Kontrolle des „Erfüllt-Seins“ dieser Gleichungen innerhalb dieses Gebiets. Die Überwachung erfolgt nun nicht mehr ausschließlich punktweise an „jeder Stelle  $\mathbf{x}$ “, sondern in sozusagen erweiterter bzw. erleichterter Art durch Einführung von sich über das gesamte Definitionsgebiet erstreckender dimensionsloser Gewichtsfunktionen  $\boldsymbol{\eta}$ . Von diesen Gewichtsfunktionen wird verlangt, dass sie beliebig sein können/sollen/müssen. Anschaulich gesprochen, werden nun anstelle der ursprünglichen punktweisen Überwachung alle nur denkbaren Methoden der Gebietsüberwachung zur Erfüllung der geforderten Bedingungen „ $\mathbf{g}_{3D}$ “ zugelassen, etabliert und zur Anwendung gebracht. Hier ist es der lapidare Zusatz  $\boldsymbol{\eta}$  „beliebig“, der das Vorherige an „jeder Stelle  $\mathbf{x}$ “ ersetzt und auf diese Art und Weise die selbe Rigorosität, Prägnanz, Schärfe oder Lückenlosigkeit der Überwachung der Erfüllung der Gleichungen „ $\mathbf{g}_{3D}$ “ etabliert und garantiert. Man führe sich die praktischen Konsequenzen deutlich und umfassend vor Augen, was es heisst  $\boldsymbol{\eta}$  „beliebig“ zu sein.

**Anmerkung:** Werden für die Gewichtsfunktionen  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$  Dirac-Delta-Funktionen mit dem Aufpunkt innerhalb des Definitionsgebiets gewählt, ist erkennbar, dass im Grenzfall der (überlappenden) Gebietsüberwachung der Spezialfall, der (nicht überlappenden) Punktüberwachung in vollem Umfang mit enthalten ist.

### Überlegungen und Gegenüberlegungen zur Punkt- und Gebietsüberwachung

Es folgt der Beweis, dass durch die Beliebigkeit der Gewichtsfunktionen eindeutig von einer mathematischen Äquivalenz der beiden Methoden der Darstellung des Gleichgewichts gesprochen werden kann. Dazu wird ein indirekter Beweis durch Konstruktion eines Widerspruches gezeigt.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Differentialform} & & \text{Integralform} \\
 \boxed{\mathbf{g}_{3D} = \mathbf{0}} & \Leftrightarrow & \boxed{\mathcal{E}(\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{g}_{3D}) = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\eta}^T \cdot \mathbf{g}_{3D} \cdot d\mathcal{V} = 0} \quad [4-22.a]
 \end{array}$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$

mit „ $\boldsymbol{\eta}$ “ beliebig

$$\mathbf{g}_{3D} = \mathbf{g}_{3D}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{3D}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$$

„ $\mathbf{g}_{3D}$ “ 3D-Gesamtproblembeschreibung nach Punkt 6.4.1.1

„ $\boldsymbol{\eta}$ “ stellen die beliebigen zu „ $\mathbf{g}_{3D}$ “ passenden Gewichtsfunktionen für die Formulierung des Gleichgewichts in Integralformulierung dar.

$\mathcal{E}$  stellt den Fehler innerhalb des Gebiets  $\mathcal{V}$  in Abhängigkeit von „ $\boldsymbol{\eta}$ “ „ $\mathbf{g}_{3D}$ “.

Angenommen, es gibt ein Subgebiet  $\text{sub}(\mathcal{V})$  innerhalb des Gebiets  $\mathcal{V}$ , für das die in Glg. 4-22.a dargestellte Forderung für das Verschwinden des Fehlers  $\mathcal{E} = 0$  nicht erfüllt ist, so gilt:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \text{sub}(\mathcal{V}) \quad [4-22.b]$$

Auf Grund der Voraussetzung für die Beliebigkeit der Gewichtsfunktionen setzen wir nun die Gewichtsfunktionen „ $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ “ gleich der Fehlerfunktion  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  und erhalten damit eine eindeutige Aussage über die Beschaffenheit der Fehlerfunktion:

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \int_{\text{sub}(\mathcal{V})} \mathcal{E}(\mathbf{x})^2 \cdot d\mathcal{V} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad [4-22.c]$$

Wird die Gewichtsfunktion „ $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ “ gleich einer beliebigen partiellen postulierten Fehlerfunktion  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  gesetzt, so resultiert daraus unmittelbar die Forderung nach dem „Identisch-Null-Sein“ dieser speziellen Fehlerfunktion  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  im Gebiet  $\text{sub}(\mathcal{V})$ . Dadurch, dass  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  beliebig gewählt und vorgegeben werden kann, resultiert daraus das „Identisch-Null-Sein“ der Fehlerfunktion  $\mathcal{E}(\mathbf{x})$  im Gesamtgebiet  $\mathcal{V}$ , d. h. an „jeder Stelle  $\mathbf{x}$ “.

**Anmerkung:** Dieser Sachverhalt bildet den Startpunkt für den Aufbau der Variationsrechnung, wo die Gewichtsfunktionen „ $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ “ allgemein als Variationen der unbekanntenen Feldgrößen „ $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ “ bezeichnet werden und stellt damit das sogenannte Grundlemma der Variationsrechnung dar.

**Anmerkung:** Als Grundlemma wird in diesem Zusammenhang ein „Fundamentaler-Hilfssatz“ verstanden.

### Kontinuitäts- oder Stetigkeitsbetrachtungen für „ $\mathbf{g}$ “ und „ $\boldsymbol{\eta}$ “( $\mathbf{X}$ )

Für die Kontinuitäts- beziehungsweise Stetigkeitseigenschaften der Funktionen „ $\mathbf{u}_{3D}$ “( $\mathbf{x}$ ) im Gesamtsystem „ $\mathbf{g}_{3D}$ “ und der verwendeten Gewichtsfunktionen „ $\boldsymbol{\eta}$ “( $\mathbf{x}$ ) gelten zwingend die folgenden Überlegungen bezüglich der Stetigkeitsanforderungen:

„ $\mathbf{u}_{3D}$ “( $\mathbf{x}$ ): An jeder Stelle  $\mathbf{x}$  müssen die erforderlichen Ableitungen von „ $\mathbf{u}_{3D}$ “( $\mathbf{x}$ ) bis zur höchsten vorkommenden Ordnung „ $n$ “ eindeutig existieren, d. h. endlich sind und bis zur Ordnung „ $n-1$ “ stetig existieren.

„ $\boldsymbol{\eta}$ “( $\mathbf{x}$ ): Es bestehen keine Anforderungen und Limits an die Stetigkeit und Ableitbarkeit der verwendeten Gewichtsfunktionen, diese sind, wie oben beschrieben, absolut beliebig wählbar.

**Anmerkung:** Die Diskretisierung der „starken Form“ der Integraldarstellung des Gleichgewichts liefert oder repräsentiert die allgemeine Form einer „Method of Weighted Residuals (MWR, gewichtete Residuen Methode). Die in diesem Kontext zu leistenden Aufgaben sind

- die diskrete Approximation der gesuchten unbekanntenen Funktionssysteme „ $\mathbf{u}_{3D}$ “( $\mathbf{x}$ ) und
- die Wahl des Gewichtsfunktionensystems „ $\boldsymbol{\eta}$ “( $\mathbf{x}$ )

unter Beachtung der vorstehenden Kontinuitäts- oder Stetigkeitsbetrachtungen dieser.

### 4.6.2 3D-Gleichgewichtsgleichungen in Integralform nach partieller Integration

Ausgehend von der originalen Darstellung des 3D-Gleichgewichts in Integralform wird im Folgenden die sogenannte umgewandelte Integralform ermittelt. Diese Art des 3D-Gleichgewichts ist in erster Linie für die numerische Berechnung, z. B. bei der FEM, erforderlich. Der Terminus „umgewandelt“ bedeutet dabei, dass an der originalen Integralform Veränderungen in Form der partiellen Integration und der Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes vorgenommen werden.

Die partielle Integration der Integralformulierung des Gleichgewichts impliziert direkt geänderte Kontinuitäts- oder Stetigkeitsanforderungen an die Funktionssysteme „ $\mathbf{u}_{3D}$ ”(x) und an die im Weiteren mit „ $\delta\mathbf{u}_{3D}$ ”(x) bezeichneten Gewichtsfunktionen, die zur Kontrolle des Gleichgewichts verwendet werden. Durch die Anwendung der partiellen Integration ändert sich die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung der Funktionssysteme „ $\mathbf{u}_{3D}$ ”(x). Für die unbekannt Funktionen „ $\mathbf{u}_{3D}$ ”(x) resultieren daraus typischerweise abgeschwächte Kontinuitätsanforderungen, da durch die partielle Integration eine Verschiebung der Ableitung von den unbekannt Funktionen „ $\mathbf{u}_{3D}$ ”(x) hin zu den Gewichtsfunktionen „ $\delta\mathbf{u}_{3D}$ ”(x) vollzogen wird. Für die Gewichtsfunktionen hingegen resultieren Einschränkungen in der Beliebigkeit, da nach vollzogener partieller Integration auch an diese Stetigkeits- und Kontinuitätsanforderungen zu stellen sind.

Zudem werden im Gegensatz zur „starken Form“, bei der den Gewichtsfunktionen keinerlei physikalische Bedeutungen zukommen, bei der schwachen Form der Integralformulierung die Gewichtsfunktionen als Verschiebungen aufgefasst. Diese müssen die kinematischen Beziehungen der realen Verschiebungen vollständig erfüllen. Sie müssen zudem den Grundsatz der Kleinheit erfüllen (linearisierte Geometrie, unendliche kleine Verschiebungen im Sinne der „virtuellen“ Denkweise). Die Gewichtsfunktionen „ $\delta\mathbf{u}_{3D}$ ”(x) werden auf Grund der oben genannten Eigenschaften als „virtuelle Verschiebungen“ bezeichnet (vgl. Linder, 2001).

Durch Einführung dieser Gedanken stellen die Einzelausdrücke der Integralform in Glg. 4-23.a virtuelle Arbeitsausdrücke dar. Erst in diesem Kontext wird vom Gleichgewicht auf Basis des „Prinzips der virtuellen Arbeit“ gesprochen.

Die Gewichtsfunktionen werden in weiterer Folge aus dem Fundus der möglichen Funktionensysteme „ $\mathbf{u}_{3D}$ ”(x) bezogen, wodurch wiederum keine Einschränkung in der Erfüllung der Gleichgewichtsgleichungen gegeben ist.

Nach Glg. 4-21.a gilt für das Gleichgewicht in originaler Integralform bei Berücksichtigung von „ $\delta\mathbf{u}_{3D}$ ”(x):

$$\delta W = \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot d\mathcal{V} + \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot (-\mathbf{s}_v + \mathbf{q}_{3D, \Gamma}) \cdot d\Gamma_s + \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \mathcal{V}} \cdot d\mathcal{V} = 0 \quad [4-23.a]$$

In dieser Darstellung wird von fixen Verschiebungsrandbedingungen an den Staboberflächen ausgegangen, die Anteile an der virtuellen Arbeit verschwinden dadurch.

Die partielle Integration des ersten Ausdruckes der virtuellen Gesamtarbeit, unter Berücksichtigung der Integralidentitäten aus Anhang A unter A.1, liefert die oben beschriebenen abgeschwächten Anforderungen an die Stetigkeit und an die Kontinuität der Systemfunktionen „ $\mathbf{u}_{3D}$ ”(x) sowie die Einschränkung der Beliebigkeit der Gewichtsfunktionen „ $\delta\mathbf{u}_{3D}$ ”(x):

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot d\mathcal{V} = \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot d\Gamma_s - \int_{\mathcal{V}} \underbrace{(\tilde{\mathbf{B}}_{3D} \cdot \delta \mathbf{u}_{3D})^T}_{\delta \mathbf{e}_{3D}^T} \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot d\mathcal{V} \quad [4-23.b]$$

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot d\mathcal{V} = \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_V \cdot d\Gamma_s - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{e}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot d\mathcal{V} \quad [4-23.c]$$

Durch Ausführung der partiellen Integration und durch die Überführung der Volumenintegrale mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes verschwinden die Kräfte-Randterme an den Staboberflächen.

$$\begin{aligned} \delta W = & - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{e}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot d\mathcal{V} + \\ & + \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_V \cdot d\Gamma_s - \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_V \cdot d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\Gamma} \cdot d\Gamma_s + \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\mathcal{V}} \cdot d\mathcal{V} = 0 \end{aligned} \quad [4-23.d]$$

$$\delta W = - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{e}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot d\mathcal{V} + \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\Gamma} \cdot d\Gamma_s + \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\mathcal{V}} \cdot d\mathcal{V}$$

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} \quad [4-23.e]$$

mit

$$\delta W_{\text{int}} = - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{e}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot d\mathcal{V} \quad [4-23.f]$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\Gamma} \cdot d\Gamma_s + \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\mathcal{V}} \cdot d\mathcal{V} \quad [4-23.g]$$

Diese umgewandelte Integraldarstellung stellt das „Prinzip der virtuellen Arbeit“ in seiner vollständigen Form dar und gilt als äquivalentes Redundant zur originalen Gleichgewichtsdarstellung in Differentialformulierung.

**Anmerkung:** Die Funktionssysteme „ $\mathbf{u}_{3D}$ “( $\mathbf{x}$ ) und die Gewichtsfunktionen „ $\delta \mathbf{u}_{3D}$ “( $\mathbf{x}$ ) haben jetzt die gleichen Kontinuitätsanforderungen. Je nach Ordnung der originalen DGL „ $\mathbf{g}_{3D}$ “ werden die partiellen Integrationen so lange durchgeführt, bis sich die Ordnungen von „ $\mathbf{u}_{3D}$ “ und „ $\delta \mathbf{u}_{3D}$ “ angeglichen haben. Diese ausgezeichnete Endform stellt das „Prinzip der virtuellen Arbeit“ dar, in mechanischer Terminologie gilt:  $\delta W = 0$

**Anmerkung:** Diese Form der Integraldarstellung des Gleichgewichts wird in der Literatur häufig als die „schwache Form“ der Integralformulierung bezeichnet. Der Ausdruck „schwache Form“ bedeutet dabei keinesfalls eine Einschränkung in der Erfüllung des Gleichgewichts, vielmehr bezieht er sich auf die Einschränkungen der Beliebigkeit bzw. die Kontinuitätsanforderungen der Gewichtsfunktionen, an die, im Gegensatz zur „starken Form“ der Integraldarstellung, abgeschwächte Anforderungen gestellt werden.

# 5

**Grundlagen für das  
etablierte  
Stabmodell**

## 5.1 Einleitung

Für die detaillierte Herleitung der 3D-Grundgleichungen für den prismatischen Stab, siehe Kapitel 6, sowie für die analytische Lösung der 3D-Gleichgewichtsdifferenzialgleichungen, siehe Kapitel 7, werden für einen einheitlichen Sprachgebrauch im Folgenden die grundlegenden Begriffe für das zu etablierende 3D-Stabmodell im Detail beschrieben.

Ziel dieses Abschnitts ist es, alle erforderlichen Grundlagen und Definitionen festzulegen, die für die lückenlose Beschreibung des Leistungsumfangs des neu etablierten Stabmodells erforderlich sind.

Soweit es möglich ist, orientieren sich die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und Definitionen an dem in der Literatur bereits vorhandenen und verwendeten Sprachgebrauch. Vereinzelt sind zusätzliche Definitionen – in Teilbereichen präzise Erweiterungen der vorhandenen Definitionen – erforderlich.

Aufbauend auf den Definitionen aus Kapitel 3 werden alle darüber hinaus gehenden zusätzlich erforderlichen Grundlagen festgehalten:

- Die verallgemeinerte Kinematik des Querschnitts
- Der verallgemeinerte Verschiebungsansatz des 3D-Kontinuums
- Orthogonalitätsprinzip für die 3D-Einzelverschiebungsfelder
- Linear elastisches Materialverhalten in strukturierter Darstellung
- Belastungssituation für den prismatischen Stab
- Strukturierter Produktansatz für Belastungen des prismatischen Stabes
- Der prismatische Stabzug
- Randbedingungen und Koppelungsbedingungen

Zum besseren Verständnis werden die einzelnen Definitionen durch Skizzen erläutert.

Die in den Definitionen verwendeten Formelbezeichnungen orientieren sich an der der gesamten Abhandlung zugrunde gelegten Differenzialoperator-Matrix-Schreibweise, siehe Guggenberger (2007) und Pilkey & Wunderlich (1994).

Der einheitliche Sprachgebrauch, der für die Definitionen verwendet wird, erleichtert dabei das Erkennen aller Gemeinsamkeiten von Stäben mit komplexem Querschnittsaufbau mit verschiedenen Verformungs- und Belastungszuständen.

## 5.2 Die verallgemeinerte Kinematik des Querschnitts

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Kinematik des Querschnitts als Querschnittskinetik bezeichnet. Die Querschnittskinetik beschreibt im Sinne der technischen Mechanik den Zusammenhang zwischen den globalen Stabverformungsunbekannten und den lokalen Verzerrungszuständen eines echten 3D-Festkörpers (vgl. Guggenberger, 2007, S. 17 ff und Salzgeber, 2000 S. 14). Diese Definition hat für jeden Querschnittspunkt Gültigkeit. Als Grundlage für diese Arbeit wird geometrische Linearität vorausgesetzt, was gleich bedeutend mit „kleinen“ bzw. „infinitesimalen“ Verformungen ist. Sämtliche Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik kommen dadurch mit der auf den undeformierten Anfangszustand bezogenen Form zur Anwendung (vgl. Guggenberger, 2007).

Auf die Art der Darstellung und auf die Beschreibung des strukturierten Verschiebungsansatzes wird an dieser Stelle nicht im Detail eingegangen, sondern auf Punkt 5.3 verwiesen. In diesem Abschnitt wird ausschließlich auf die grundlegenden Modellannahmen der Querschnittskinetik des allgemeinen Querschnitts eingegangen und es werden die grundlegenden Abhängigkeiten des gesamten 3D-Verschiebungsfeldes von den globalen Querschnittskordinaten besprochen.

Unter verallgemeinerter QS-Kinetik wird in dieser Arbeit die geometrische Beschreibung des Verformungsverhaltens des Querschnitts ohne jegliche geometrische Einschränkung im Sinne der 3D-Festkörpermechanik verstanden.

In der Vergangenheit haben sich die folgenden kinematischen Ansätze zur Beschreibung der Querschnittsverformungen durchgesetzt.

### 5.2.1 2D-Querschnittskinetik

Von einer 2D-Kinetik wird in dieser Arbeit dann gesprochen, wenn der Verschiebungsansatz  $\mathbf{u}$  des Querschnitts eine Abhängigkeit von beiden Querschnittskordinaten  $X_2$  und  $X_3$  aufweist, es gilt somit:  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(X_2, X_3)$ . Diese Art der Querschnittskinetik ist in der Regel für echte, im Sinne der FE-Diskretisierung, geometrische 2D-repräsentative Querschnittsformen erforderlich. Querschnitte mit der zugrunde gelegten 2D-Kinetik weisen grundsätzlich keinerlei Einschränkungen in den möglichen Stabverformungen auf. Zudem treten durch die Modellannahmen keine ausgezeichneten Beanspruchungsrichtungen im Querschnitt auf, wie dies definitionsbedingt bei Querschnitten mit 1D-Querschnittskinetik in Erscheinung tritt.

Für den Fall der 2D-Kinetik treten im Allgemeinen alle sechs Verzerrungskomponenten in jedem Querschnittspunkt auf.

### 5.2.2 1D-Querschnittskinetik

Die 1D-Querschnittskinetik ist durch die in Elementdickenrichtung konstanten Verformungsverhältnisse charakterisiert. Dies gilt vorzugsweise für technisch dünnwandige Querschnittselemente. Dies führt zu einer vereinfachten Querschnittsbeschreibung des Querschnittsteils durch Vernachlässigung aller Dickenrichtungseffekte. Dadurch lassen sich die Eigenanteile aus den Dickenrichtungseffekten (reale veränderliche Spannung in Dickenrichtung der Querschnittsteile) bei den Steifigkeitskoeffizienten in der Gesamtsteifigkeitsmatrix des dünnwandigen Elements nicht berücksichtigen. Dies führt zu den bekannten singulären Steifigkeitsmatrizen für diverse ausgezeichnete Querschnittsformen. Dies gilt beispielsweise für das Querkraftabscheren in Dickenrichtung eines homogenen dünnwandigen Querschnitts und für die Torsion des Einzelquerschnittsteils.

Von einer 1D-Kinetik wird in dieser Arbeit dann gesprochen, wenn der Verschiebungsansatz  $\mathbf{u}$  ausschließlich mit einer Abhängigkeit von einer Querschnittskordinate (klassischerweise durch die

Umfangskoordinate) definiert ist; es gilt:  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{s})$ . Dies ist in der Regel für die dünnwandige Querschnittsformulierung durch die Querschnittsteil-Längskoordinate  $\mathbf{s}$  gegeben. Dadurch treten neben den axialen Normalverzerrungen ausschließlich Schubverzerrungen in der Ebene der Querschnittsteilmittelfläche auf. Durch diese starken Einschränkungen sind die Spannungsrandbedingungen an den Stabmantelflächen der Querschnittsteile automatisch vollständig erfüllt. Die Schubspannungen verlaufen stets parallel zu den Querschnittsberandungen der Querschnittsteile. Die Koppelung von dünnwandigen Querschnittsteilen an den Elementgrenzen erfolgt in der Kante der Mittelfläche.

### 5.2.3 $1D^+$ -Querschnittskinematik

Die modifizierte  $1D^+$ -Querschnittskinematik des dünnwandigen Einzelelements bedient sich der Grundlagen des klassischen dünnwandigen Querschnittselements. Die Erweiterung betrifft weniger die kinematischen Grundansätze, sondern es werden die oben erwähnten Singularitätsprobleme der Steifigkeitsmatrix vielmehr durch direkte Korrektur der einzelnen Steifigkeitsterme behoben. Dafür werden sämtliche Eigensteifigkeitsanteile des dünnwandigen Querschnittsteils, d. h. Biegesteifigkeit und Schubsteifigkeit für die Einzelelement-Querrichtung sowie die Eigentorsionssteifigkeit, ohne Einführung neuer globaler Systemfreiheitsgrade an den entsprechenden Stellen in die Steifigkeitsmatrix direkt eingearbeitet. Diesem Vorgehen geht die Orthogonalisierung des Gleichungssystems voraus. Die zusätzlichen kinematischen Möglichkeiten werden in Abhängigkeit von den bereits bekannten vorhandenen globalen Systemunbekannten ausgedrückt, vorab bestimmt und eingearbeitet. Eine Koppelung von verschiedenen modifizierten dünnwandigen Querschnittsteilen an den Elementgrenzen erfolgt in der Systemachse ohne Veränderung wie auch bei der Koppelung für das klassische dünnwandige Element.

Als Beispiel kann in diesem Zusammenhang die Erweiterung der klassischen dünnwandigen Querschnittsbeschreibung um die Eigentorsions- und Eigenschubanteile erwähnt werden.

Diese Vorgangsweise wurde bereits bei Roik & Sedlacek (1970, S. 23) in Grundzügen vorgestellt.

### 5.2.4 1D- & 2D-Kinematik

Die oben erwähnten kombinierten Querschnitte weisen neben den charakteristischen geometrischen Eigenschaften auch kombinierte Ansätze der Querschnittskinematik auf, wobei jedem Querschnittsteil eine eindeutige Beschreibung der Querschnittskinematik zugeordnet ist. Innerhalb eines Querschnittsteils liegt nur eine der Möglichkeiten der Querschnittskinematik vor ( $1D$ ,  $1D^+$  &  $2D$ ).

# 1D- und 2D- Querschnittskinematik

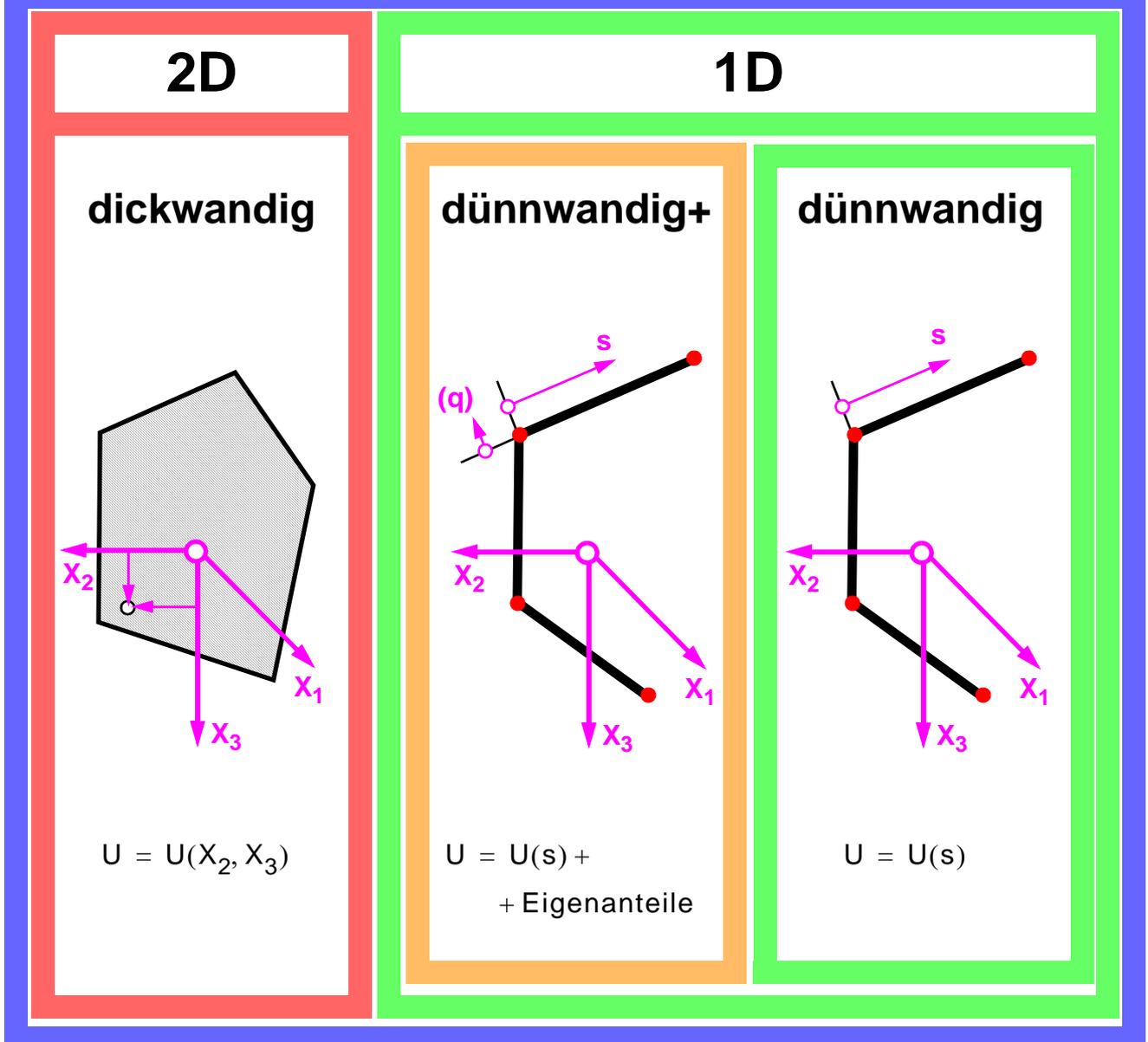


Abb. 5.1: Definition der Verschiebungsansätze für 1D-, 1D<sup>+</sup>- und 2D- Querschnittskinematik

## 5.3 Der verallgemeinerte Verschiebungsansatz des 3D-Kontinuums

In diesem Abschnitt wird, ausgehend vom 3D-Verschiebungsansatz des anonymen 3D-Kontinuums in allgemeiner Darstellung, die Darstellung des 3D-Verschiebungsansatzes des 3D-Stabes gezeigt.

### 5.3.1 Grundlagen für das 3D-Verschiebungsfeld

Die kinematische Beschreibung des 3D-Stabes wird in dieser Arbeit auf Basis eines strukturiert hierarchisch geordneten Produktansatzes definiert. Diese Art der Darstellung des 3D-Verschiebungsansatzes ist einerseits in der dadurch klaren unmissverständlichen Darstellung der Gleichgewichtsdifferentialgleichungen des Gesamtproblems für den „3D-Stab“ und andererseits durch die Notwendigkeit für die systematische Problemlösung begründet. Alle bis dato bekannten Darstellungsformen der Grundgleichungen treten dadurch in leicht problemadaptierter Form auf, weisen dadurch aber keinerlei Veränderung in deren Aussagekraft auf.

### 5.3.2 Hierarchisch strukturiertes Verschiebungsfeld in Produktdarstellung

#### Strukturierte geordnete Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes

Die strukturierte geordnete Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes bezeichnet die konsequente Separation des klassischen Balkenverformungszustands und des Querschnittsverformungszustands (ebener Spannungszustand). Der Balkenverformungszustand wird auf Grund der auftretenden Verformungen senkrecht zur Querschnittsebene mit „ $\perp$ “, der Querschnittsverformungszustand auf Grund der Verformungen in der Querschnittsebene mit „ $\parallel$ “ bezeichnet. Die Separation dieser beiden Anteile wird in Kapitel 6 im Rahmen der Herleitung gezeigt. Zusätzlich dazu bezeichnet die strukturierte geordnete Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes die Aufspaltung des 3D-Verschiebungsfeldes in die Anteile des globalen und lokalen Verschiebungsfeldes.

Das globale 3D-Verschiebungsfeld beschreibt jenen Anteil des gesamten 3D-Verschiebungsfeldes, dem eindeutige Starrkörperbewegungen des Querschnitts zuzuordnen sind.

Das lokale 3D-Verschiebungsfeld, auch als relatives Verschiebungsfeld bezeichnet, ist als Differenz zwischen dem gesamten 3D-Verschiebungsfeld und dem globalen Verschiebungsfeld definiert.

Definitionsgemäß stellt sowohl das globale als auch das lokale 3D-Verschiebungsfeld ein 3D-Teilverschiebungsfeld des gesamten 3D-Verschiebungsfeldes dar.

#### Hierarchische Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes

Die hierarchische Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes beschreibt die Darstellung des relativen 3D-Verschiebungsfeldes in Form von Stapeln an orthogonalen 3D-Einzelverschiebungsfeldern. Durch die Linearkombination der orthogonalen 3D-Einzelverschiebungsfelder lässt sich das relative 3D-Verschiebungsfeld eindeutig darstellen.

Für die eindeutige Darstellung in der hierarchischen Form müssen die globalen und lokalen 3D-Verschiebungsfelder die Eigenschaft der mechanischen Orthogonalität erfüllen.

### 5.3.2.1 Separation des gesamten 3D-Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}_{3D}$ in seine globalen und lokalen Anteile

Das gesamte 3D-Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_{3D}$  setzt sich demnach aus zwei additiven 3D-Teilverschiebungsfeldern zusammen. Diese werden durch das eindeutige globale und das lokale 3D-Teilverschiebungsfeld beschrieben. Das globale 3D-Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_{3D,0}$  beschreibt dabei die Verformungen, die den 3D-Starrkörperbewegungen des Querschnitts zugeordnet sind.

$$\mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\text{glob}} + \mathbf{u}_{\text{lok}} = \mathbf{u}_{3D,0} + \mathbf{u}_{3D,\Omega} = \begin{bmatrix} u_{1,0}(X_1;X_2, X_3) \\ u_{2,0}(X_1;X_2, X_3) \\ u_{3,0}(X_1;X_2, X_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1,\Omega}(X_1;X_2, X_3) \\ u_{2,\Omega}(X_1;X_2, X_3) \\ u_{3,\Omega}(X_1;X_2, X_3) \end{bmatrix} \quad [5-1]$$

$\mathbf{u}_{3D,0}$  Globales 3D-Teilverschiebungsfeld für den Stabkörper zufolge der Starrkörperverschiebungsfelder  $\mathbf{A}_0(X_2, X_3)$  der Querschnittskinematik und der zugehörigen Amplituden der Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade  $\mathbf{u}_0$  des Stabquerschnitts. Was die Bezeichnungen betrifft gilt:  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{0,\text{starr}}$

$\mathbf{u}_{3D,\Omega}$  Lokales 3D-Teilverschiebungsfeld für den Stabkörper zufolge der Relativverschiebungen der Querschnittspunkte, bezogen auf das globale 3D-Starrkörperverschiebungsfeld.

### 5.3.2.2 Produktartiger Aufbau der globalen und lokalen Teilverschiebungsfelder

Sowohl das globale als auch das lokale 3D-Teilverschiebungsfeld des gesamten 3D-Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}_{3D}$  ist für die weitere Behandlung in produktartiger Darstellungsform zu definieren. Unter produktartiger Darstellung der 3D-Verschiebungsfelder wird die nach den Querschnittskordinaten und nach der Stabachsenkoordinate separierte Darstellungsform verstanden. Dadurch ergibt sich sowohl das globale als auch das lokale 3D-Teilverschiebungsfeld aus der Multiplikation des kinematischen Querschnittsverhaltens mit dem Verhalten in Stablängsrichtung. Das heißt, jedes der 3D-Teilverschiebungsfelder wird als Produkt eines zweidimensionalen QS-Verschiebungsfeldes  $\Omega(X_2, X_3)$  über den gesamten Querschnitt (Koordinatenebene  $X_2$ - $X_3$ ) und des zugehörigen eindimensionalen Verlaufs  $\psi(X_1)$  in der Stablängsrichtung ( $X_1$ ) beschrieben.

In allgemeiner Darstellung gilt für das gesamte 3D-Verschiebungsfeld:

$$u(X_1;X_2, X_3) = u(X_2, X_3) \cdot u(X_1) \quad [5-2.a]$$

Für das globale 3D-Teilverschiebungsfeld gilt nach Glg. 6-2.a:

$$\mathbf{u}_{3D,0}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0(X_2, X_3) \cdot \mathbf{u}_0(X_1) \quad [5-2.b]$$

Für das lokale 3D-Teilverschiebungsfeld gilt nach Glg. 6-3.a:

$$\mathbf{u}_{3D,\Omega}(\mathbf{x}) = \Omega(X_2, X_3) \cdot \psi(X_1) \quad [5-2.c]$$

Die produktartige Aufgliederung der 3D-Verschiebungsfelder wird erst durch die Voraussetzung der Prismatizität der kontinuierlichen stabartigen Gesamtstruktur ermöglicht, siehe Punkt 3.2.2.

### 5.3.2.3 Hierarchisch strukturierte Darstellung der 3D-Verschiebungsfelder

Wie Schardt (1989) und auch Sedlacek (1971) bereits feststellen, lässt sich sowohl das globale als auch das lokale 3D-Teilverschiebungsfeld in Form von linear kombinierbaren orthogonalen 3D-Einzelverschiebungsfeldern darstellen. Die systematische Darstellung des globalen und des relativen 3D-Verschiebungsfeldes in Form von Stapeln an 3D-Einzelverschiebungsfeldern wird im Folgenden als „hierarchisch“ bezeichnet.

Wesentlich für die hierarchische Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes ist die mechanische Orthogonalität. Die Orthogonalisierung im mechanischen Sinne liefert eindeutige 3D-Einzelverschiebungsfelder, die gegenseitig keine mechanischen Arbeiten verrichten.

Die Grundlagen für die Orthogonalisierung werden unter Punkt 5.4 beschrieben.

### 5.3.2.4 Vorteile der Produktdarstellung für die Problemlösung

Für die Lösung des Differentialgleichungssystems sind grundsätzlich zwei unterschiedliche Lösungsstrategien in Abhängigkeit der Darstellung des Verschiebungsfeldes denkbar:

- Lösung basierend auf einer anonymen exakten Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes
- Lösung basierend auf einer hierarchisch geordneten strukturierten produktartigen Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes

#### Anonyme exakte Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes

Für die anonyme exakte Darstellung im 3D-FE Sinn sind in allen drei Raumrichtungen, d. h. im Querschnitt und in der Stablängsrichtung, jeweils unendlich viele Stützstellen erforderlich. Für die praktische Umsetzung erfolgt die Wahl der Anzahl der Stützstellen nach den Qualitätsanforderungen an die Ergebnisse. Es sind stets alle Unbekannten in die Berechnung des Stabproblems mit einzubeziehen. Eine Diskretisierung des Stabkörpers und dessen numerische Lösung ist stets für den gesamten Querschnitt und die Stabachse in vollem Umfang erforderlich.

#### Hierarchisch geordnete strukturierte produktartige 3D-Teilverschiebungsfelder

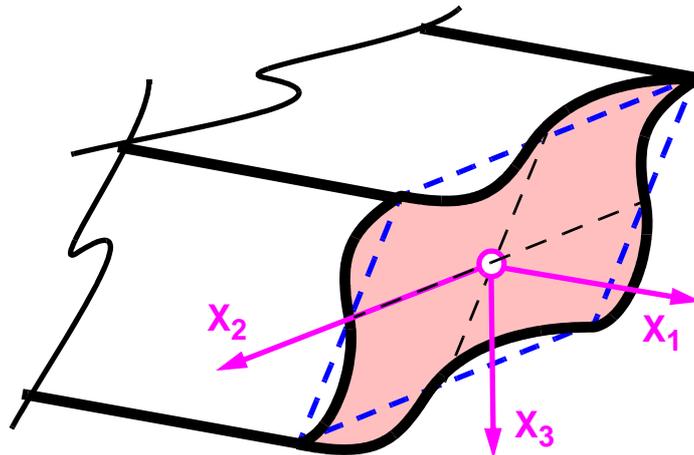
Für die Lösung der Gleichgewichtsgleichungen bringt eine produktartige Darstellung der 3D-Verschiebungsfelder wesentliche Vorteile:

Die hierarchisch geordnete strukturierte produktartige Darstellung der 3D-Verschiebungsfelder erfordert für die Berechnung eines Stabkörpers die folgende zweistufige Diskretisierungsstrategie. Für die Beschreibung des Querschnitts sind gleich viele diskrete Stützstellen wie bei der Querschnittsdarstellung in der anonymen Darstellungsform erforderlich. Eine Diskretisierung in Stablängsrichtung ist auf Grund der analytischen Lösung in Stabrichtung nicht erforderlich, was erhebliche Vorteile im Rechenaufwand und in der Genauigkeit der Ergebnisse mit sich bringt. Die Lösungsstrategie lautet wie folgt:

- Vorabintegration über den Querschnitt und Bestimmung der globalen und der lokalen 3D-Einzelverschiebungsfelder unter Beachtung des Orthogonalitätsprinzips. Dafür ist eine vollständige Diskretisierung des Querschnitts erforderlich.
- Für die Lösung des DGL-Systems in Stablängsrichtung dienen die jedem 3D-Einzelverschiebungsfeld eindeutig zugehörigen analytischen Verläufe in Stablängsrichtung. Die analytischen Verläufe sind dabei durch die Eigenwerte/Abklingzahlen aus dem Eigenwertproblem definiert. Somit reduziert sich das Problem in Stabrichtung mathematisch auf ein 1D-Problem.

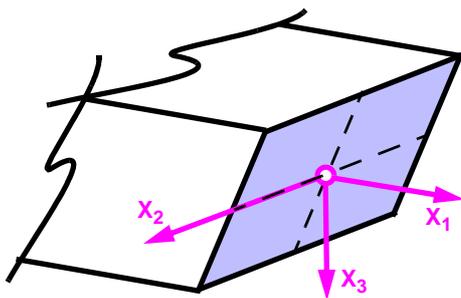
Lokale Störungen pflanzen sich nur wenig in das Stabinnere fort, die relativen 3D-Verschiebungsfelder sind voneinander unabhängig und lassen sich je nach der geforderten Ergebnisqualität ins Spiel bringen.

# 3D-Gesamtverschiebungsfeld



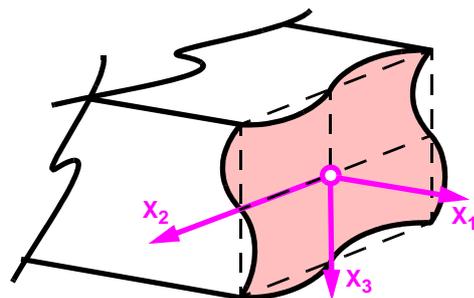
## 3D-Teilverschiebungsfelder des Querschnitts

### Globales 3D-Teilverschiebungsfeld



6 Einzelverschiebungsfelder  
der  
Starrkörperbewegungen

### Lokales 3D-Teilverschiebungsfeld



$N_1$ -Querschnittsverformungen  
und  
 $N_2$ -Querschnittsverwölbungen

Abb. 5.2: Zerlegung des 3D-Gesamtverschiebungsfeldes in seine 3D-Teilverschiebungsfelder

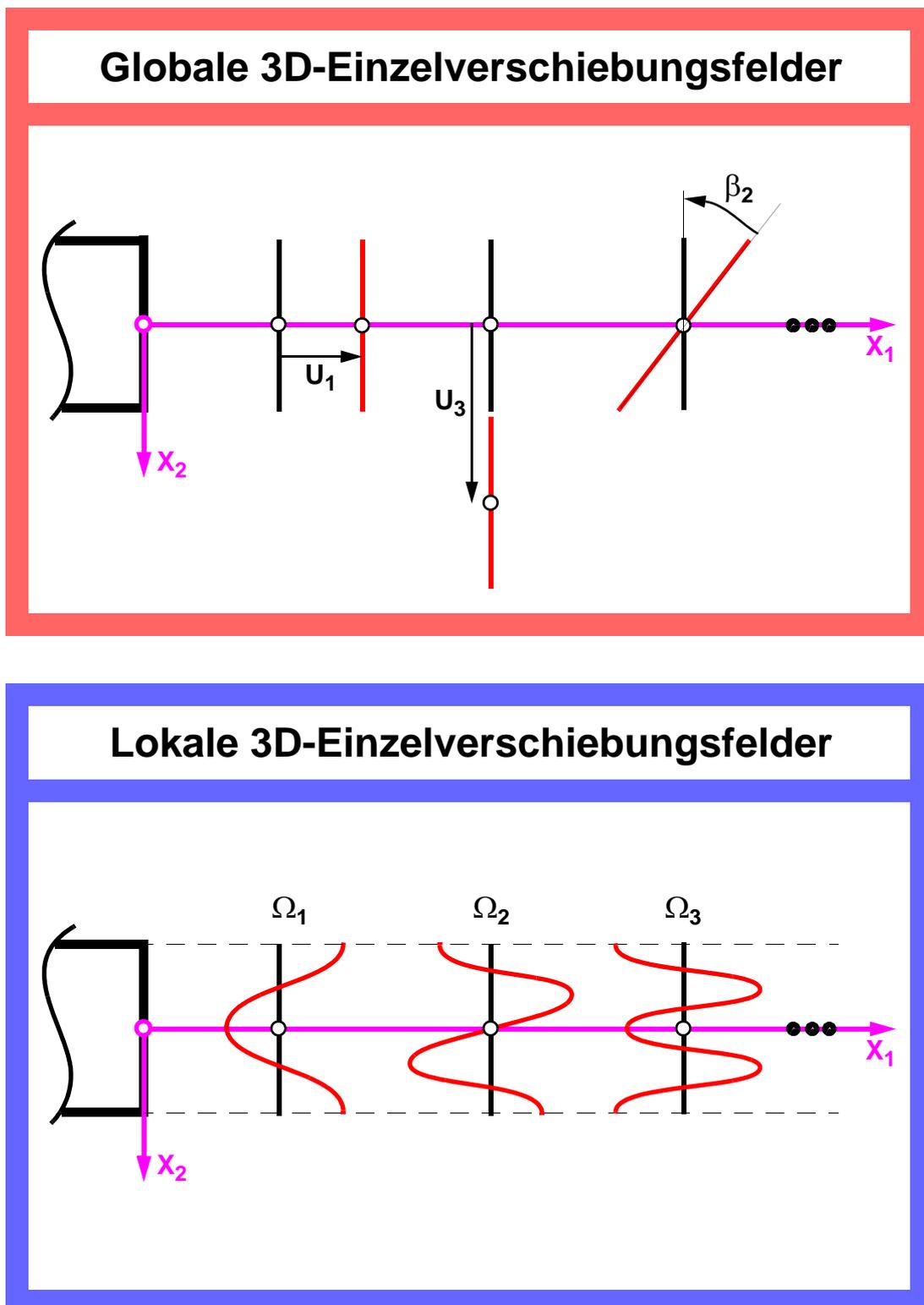


Abb. 5.3: Zerlegung der lokalen und globalen 3D-Teilverschiebungsfelder in die 3D-Einzelverschiebungsfelder

## 5.4 Orthogonalitätsprinzip für die 3D-Einzelverschiebungsfelder

Um das oben erwähnte eindeutige hierarchisch additive Ordnungsschema konsequent verfolgen zu können, ist die Orthogonalität der 3D-Einzelverschiebungsfelder untereinander zwingend erforderlich, d. h. Spannungen, die aus einem 3D-Einzelverschiebungsfeld resultieren, verrichten mit den Verzerrungen eines beliebigen anderen 3D-Einzelverschiebungsfeldes keine Arbeit. Diese Grundsätze gelten sowohl zwischen den globalen und lokalen 3D-Einzelverschiebungsfeldern sowie zwischen den 3D-Einzelverschiebungsfeldern innerhalb der globalen und lokalen 3D-Teilverschiebungsfelder. Dadurch sind alle Verschiebungsanteile des Starrkörperverschiebungsfeldes eindeutig dem globalen Teilverschiebungsfeld zugeordnet. Damit sind alle lokalen 3D-Einzelverschiebungsfelder frei von jeglichen Anteilen aus der Starrkörperbewegung des Querschnitts.

Die Orthogonalisierung für die 3D-Einzelverschiebungsfelder ist nach der folgenden Beziehung durchzuführen:

$$\int_A \Omega_i \cdot \Omega_j \cdot \varpi \cdot dA = 0 \quad [5-3]$$

$\varpi$  stellt dabei eine frei wählbare Gewichtungsfunktion dar.

Für  $\varpi = 1$  liegt eine rein geometrische 3D-Verschiebungsfeld-Orthogonalisierung vor. Im Falle der in dieser Arbeit benötigten Orthogonalisierung im Sinne von mechanischen Kriterien wird die Gewichtungsfunktion im Allgemeinen von eins verschieden sein.

Die Orthogonalisierung für das globale 3D-Teilverschiebungsfeld ist manuell durchzuführen. Die für die Ermittlung der relativen 3D-Verschiebungsfelder verwendete Eigenwert-Prozedur garantiert die Orthogonalität der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder untereinander. Um die Orthogonalität zwischen den globalen und lokalen 3D-Teilverschiebungsfeldern zu erreichen, sind die Anteile des globalen 3D-Teilverschiebungsfeldes im Rahmen der Ermittlung der Eigenvektoren, mit den zugehörigen Eigenwerten in der Eigenwertprozedur herauszufiltern.

Die Durchführung der Orthogonalisierung für das vorliegende Stabproblem wird unter 7.3 im Detail beschrieben.

## 5.5 Linear elastisches Materialverhalten in strukturierter Darstellung

### 5.5.1 Materialverhalten der linear elastischen Orthotropie

Den Herleitungen der 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen des 3D-Stabes liegt das Hook'sche Gesetz in seiner verallgemeinerten Form ohne jegliche Restriktionen, zugrunde.

Den Untersuchungen wird ausschließlich linear elastisches Materialverhalten zugrunde gelegt. Eine Erweiterung der verallgemeinerten Biegetheorie auf plastisches Materialverhalten wird nicht vollzogen.

Die Anforderungen, die die Prismaticität an die Materialbeschaffenheit stellt, lassen sich durch im Querschnitt variables Materialverhalten mit konstanten Verhältnissen in Stab-Längsrichtung erfüllen. Demzufolge erfüllen eingeschränkte Materialformulierungen wie die Orthotropie und die Isotropie die oben genannten Bedingungen des prismatischen Stabes.

Für die weiteren Untersuchungen wird den Herleitungen ein orthotropes Materialverhalten als Ausgangspunkt zugrunde gelegt, wie unter Punkt 5.5.2.1 beschrieben. Dabei müssen die Richtungen der Materialhauptachsen  $X'_2$  und  $X'_3$  nicht mit den Richtungen des globalen QS-Bezugssystemes  $X_2$  und  $X_3$  übereinstimmen. Einzig die Materialhauptachse  $X'_1$  muss mit der globalen Koordinatenrichtung  $X_1$  des globalen Bezugssystemes übereinstimmen. Dies entspricht einer Drehung des Materials um die Stabachse, siehe Punkt 5.5.2.2.

### 5.5.2 Materialsteifigkeitsmatrizen in strukturierter neu geordneter Darstellung

Die Darstellung der Materialgleichungen basiert auf Guggenberger (2008), Lekhnitskii (1981), Mang & Hofstetter (2004) und Pilkey & Wunderlich (1994). Die Darstellung der Materialmatrix ist auf die in dieser Arbeit verwendete strukturierte Darstellung anzupassen. Dies führt zu einer strukturierten Anordnung der Materialmatrix, in Abhängigkeit der beiden Stab-Verformungszustände des 3D-Stabes:

- Klassischer Balkenverformungszustand verbunden mit axialen „Querschnittsverwölbungen“
- Echter Querschnittsverformungszustand verbunden mit „echten Querschnittsverformungen“

Die ungeordnete Darstellung gilt für alle im Folgenden angeführten Materialgesetze, wie in Punkt 5.5.2.1 bis Punkt 5.5.2.3 dargestellt.

An dieser Stelle werden die Materialsteifigkeitsmatrizen in zusammengefasster Form angeführt, da für die Problemdiskussion grundsätzlich nur die Matrizenbelegung für die verschiedenen Materialverhalten erforderlich ist. Die detaillierten Matriceinträge der Einzelkomponenten sind unter Punkt 6.3 gezeigt.

Durch die strukturierte Darstellung der Verschiebungs- und Materialgleichungen kristallisieren sich die, Koppelungssteifigkeitseinträge eindeutig heraus. Diese wesentlichen Koppelglieder treten dabei in der Nebendiagonalmatrix auf und werden durch die Nebendiagonalmatrix  $\mathbf{D}_{3D,c}$  zusammengefasst.

Die Nebendiagonalmatrix  $\mathbf{D}_{3D,c}$ , auch Koppelungsmatrix der Verformungszustände genannt, wird im Wesentlichen durch die Querkontraktionsziffern bestimmt. Wird die Querkontraktion zu Null gesetzt, dann tritt für alle Materialmodelle (isotrop, orthotrop und orthotrop gedreht) eine vollständige materielle Entkoppelung der beiden Stab-Verformungszustände auf.

Auf Grund der allgemein schwachen Besetzung der Nebendiagonalmatrizen der Materialsteifigkeiten kann von einer geringen Interaktion zwischen den beiden Verformungszuständen gesprochen werden. Außer bei der materiellen Orthotropie mit gedrehten Hauptachsen treten Koppelungen nur zwischen den Normalspannungszuständen in Erscheinung, bestimmt durch die Querkontraktionsziffern.

**5.5.2.1 Orthotropes Materialverhalten in Materialhauptachsenlage**

Die Materialmatrix für die Orthotropie lässt sich in strukturierter Darstellung wie folgt anschreiben:

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, MHA} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & D_{12} & D_{13} & 0 \\ 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & D_{22} & D_{23} & 0 \\ D_{31} & 0 & 0 & D_{32} & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [5-4.a]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, MHA} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{3D} \quad [5-4.b]$$

Die detaillierte Darstellung der Materialbeziehungen für das orthotrope Materialverhalten in Materialhauptachsenlage ist in Glg. 6-13.a dargestellt.

**5.5.2.2 Orthotropes Materialverhalten mit um  $X_1$  gedrehten Materialhauptachsen**

Durch die Drehung der Materialachsen tritt gegenüber der klassischen Orthotropie ein zusätzlicher Koppelterm in der Nebendiagonalmatrix auf. Dieser Koppelterm beschreibt die Koppelung der Querschnittsschubverzerrung in der Querschnittsebene mit der axialen Normalspannungskomponente. Die Materialbeziehungen für die materielle Orthotropie mit um die Stabachse gedrehten Materialeigenschaften lassen sich in der strukturierten Darstellung wie folgt anschreiben:

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & D_{12} & D_{13} & D_{16} \\ 0 & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{54} & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & D_{22} & D_{23} & D_{26} \\ D_{31} & 0 & 0 & D_{32} & D_{33} & D_{36} \\ D_{61} & 0 & 0 & D_{62} & D_{63} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [5-5.a]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, MHA} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{3D} \quad [5-5.b]$$

Die detaillierte Darstellung der Materialbeziehungen für das orthotrope Materialverhalten mit gedrehten Materialachsen in Materialhauptachsenlage ist in Glg. 6-25.b dargestellt.

Die durch die Materialdrehung um die  $X_1$ -Achse zustande gekommenen  $D_{16} = D_{61}$ -Koppelungsterme verschwinden in der Materialmatrix für den Fall der Gleichheit der Querkontraktionskoppelsteifigkeiten  $D_{12} = D_{13}$ .

### 5.5.2.3 Isotropes Materialverhalten

Die Materialbeziehungen lassen sich für die materielle Isotropie in der strukturierten Darstellung wie folgt anschreiben:

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, MHA, ISO} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & D_{12} & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & D_{22} & D_{23} & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & D_{32} & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [5-6.a]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, MHA, ISO} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp, ISO} & \mathbf{D}_{3D, c, ISO} \\ \mathbf{D}_{3D, c, ISO}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel, ISO} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{3D} \quad [5-6.b]$$

Die detaillierte Darstellung der Materialbeziehungen für das isotrope Materialverhalten in Materialhauptachsenlage ist in Glg. 6-14.a darstellt.

Für isotropes Materialverhalten haben Materialachsendrehungen keine Auswirkungen auf die Materialsteifigkeitskoeffizienten in der Materialmatrix.

### 5.5.2.4 Isotropes Materialverhalten ohne Querkontraktion

Die Materialbeziehungen lassen sich für die materielle Isotropie unter Vernachlässigung der Querkontraktionseffekte wie folgt anschreiben.

Wie in Glg. 5-7 dargestellt, verschwindet für diesen Fall des Materialverhaltens die Interaktion zwischen den zwei Stabverformungszuständen vollständig. Eine getrennte Problemlösung für die beiden Stabverformungszustände ist dadurch möglich.

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, MHA, ISO} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{22} & D_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{32} & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [5-7]$$

## 5.6 Belastungssituation für den prismatischen Stab

Für die weiteren Betrachtungen dieser Arbeit werden zwei wesentliche Belastungssituationen für den prismatischen Stab unterschieden, wie in den Abb. 5.4 bis Abb. 5.9 dargestellt:

- **Der homogene Belastungsfall, d. h. Krafteinleitungen an den Stabenden, siehe in Abb. 5.9.**
- **Der partikuläre Belastungsfall, d. h. Krafteinleitungen im Stabinneren, siehe in Abb. 5.10.**

### 5.6.1 Der homogene Belastungsfall

Der homogene Stab-Belastungsfall ist durch Krafrandbedingungen an den Stabendquerschnitten (A-QS und E-QS) definiert. Die Kräfte an den Stabendquerschnitten müssen nicht im Bezugspunkt (0-Punkt) des Stabquerschnitts angreifen, sondern können als beliebig verteilte Flächenlasten über die gesamte Fläche der Stabendquerschnitte oder über beliebige Teilbereiche des Stabendquerschnitts eingeleitet werden.

### 5.6.2 Der partikuläre Belastungsfall (Nicht Teil der Arbeit)

Der partikuläre Belastungsfall ist durch Flächen- und Volumenbelastungen im Stabinneren ( $0 < X < L$ ) definiert, welche innerhalb des Stabkörpers und/oder auf der Stabmantelfläche angreifen. Folgende Arten an Belastungen sind im Stabinneren möglich:

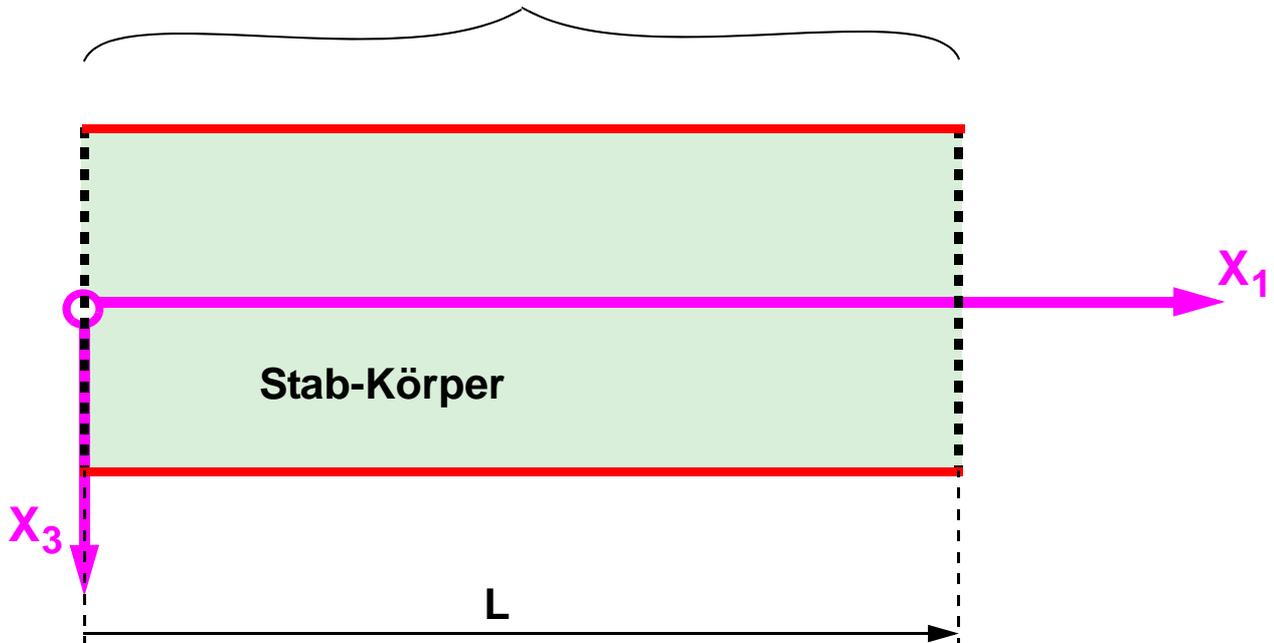
- konstante Belastungen im Stabinneren, diese erfüllen die Anforderungen an die Prismaticität des geraden Stabes
- veränderliche Belastungen im Stabinneren, diese erfüllen die Anforderungen an die Prismaticität des geraden Stabes nicht.

Die Stab-Belastungen im inneren des Stabes haben eine Sonderstellung in Bezug auf die gerade Prismaticität, da grundsätzlich keine konstanten Belastungsverhältnisse in Stablängsrichtung vorliegen müssen. Bei veränderlichen Belastungen liegt grundsätzlich eine Verletzung der Prismaticität vor. Die Lösung des Stabproblems mit veränderlichen Belastungen im Stabinneren ist auf Basis von partikulären Lösungen möglich.

Grundsätzlich besteht auch die Möglichkeit in Stablängsrichtung veränderliche Belastungen in Knotenlasten überzuführen, wodurch ein Stabzug mit einem homogenen Belastungszustand entsteht, dies ist jedoch nicht Teil dieser Arbeit.

(a)

**Stabinneres: Oberflächenlasten**  
**Stabinneres: Volumenlasten**



(b)

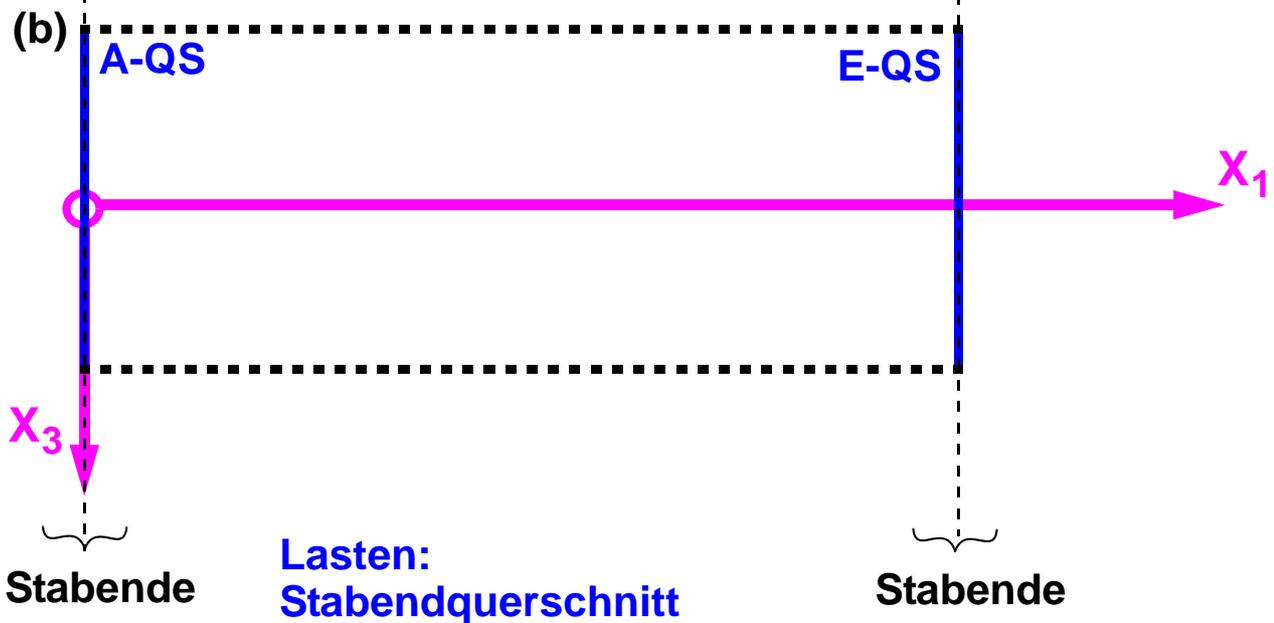
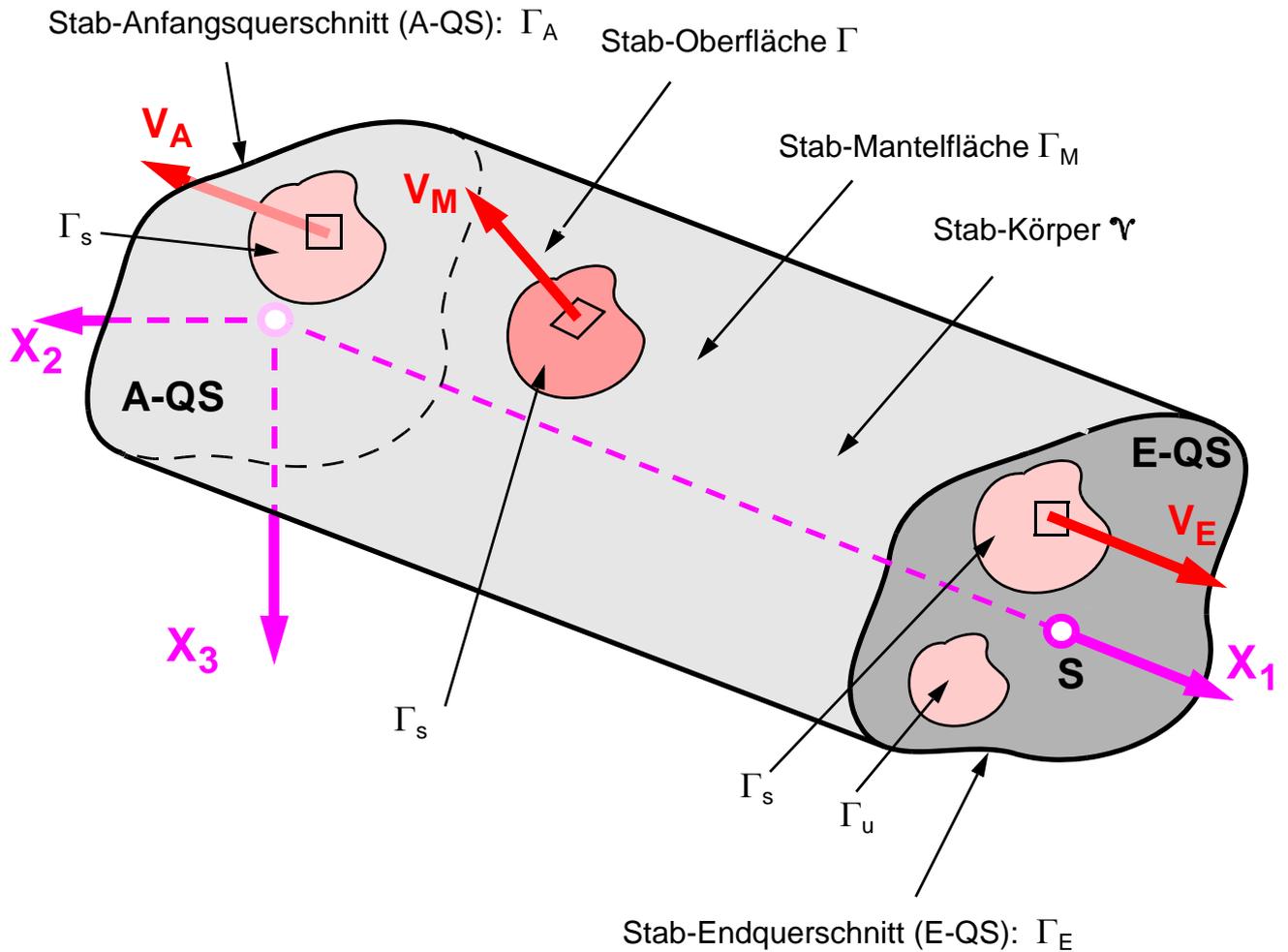


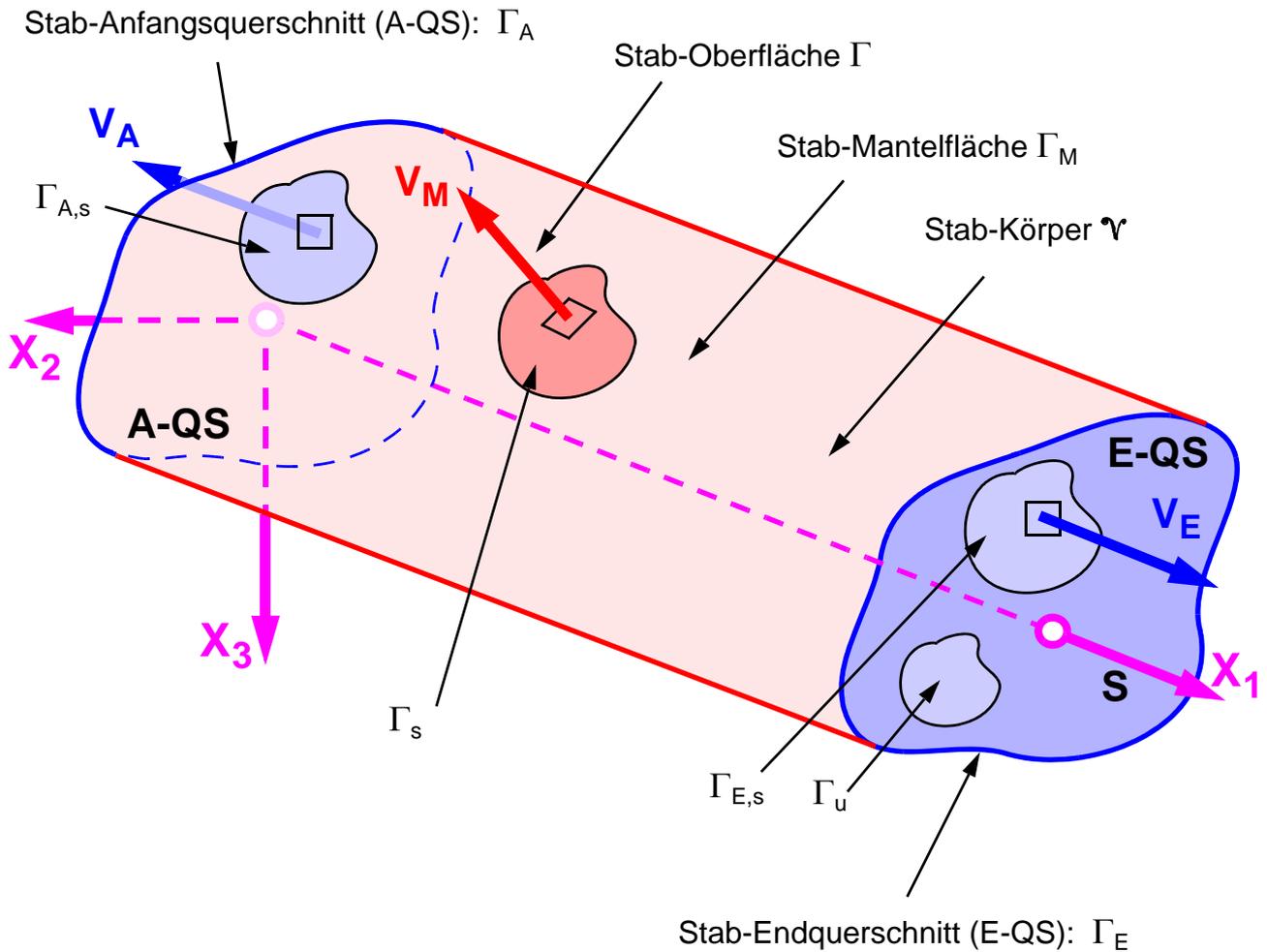
Abb. 5.4: Grundbegriffe für die Definitionsgebiete der Belastungen am Stab: (a) Stabinneres, (b) Stabquerschnittsenden



$$\Gamma = \Gamma_M + \Gamma_{A,E}$$

$$\Gamma_{A,E} = \Gamma_A + \Gamma_E$$

**Abb. 5.5:** Definitionen an der Stab-Oberfläche im 3D-Kontext: Bezeichnungen und Normalenvektoren



$$\Gamma = \Gamma_M + \Gamma_{A,E}$$

$$\Gamma_{A,E} = \Gamma_A + \Gamma_E$$

**Abb. 5.6:** *Belastungen auf der Staboberfläche im Stab-Kontext im Stabinneren und an den Stabenden*

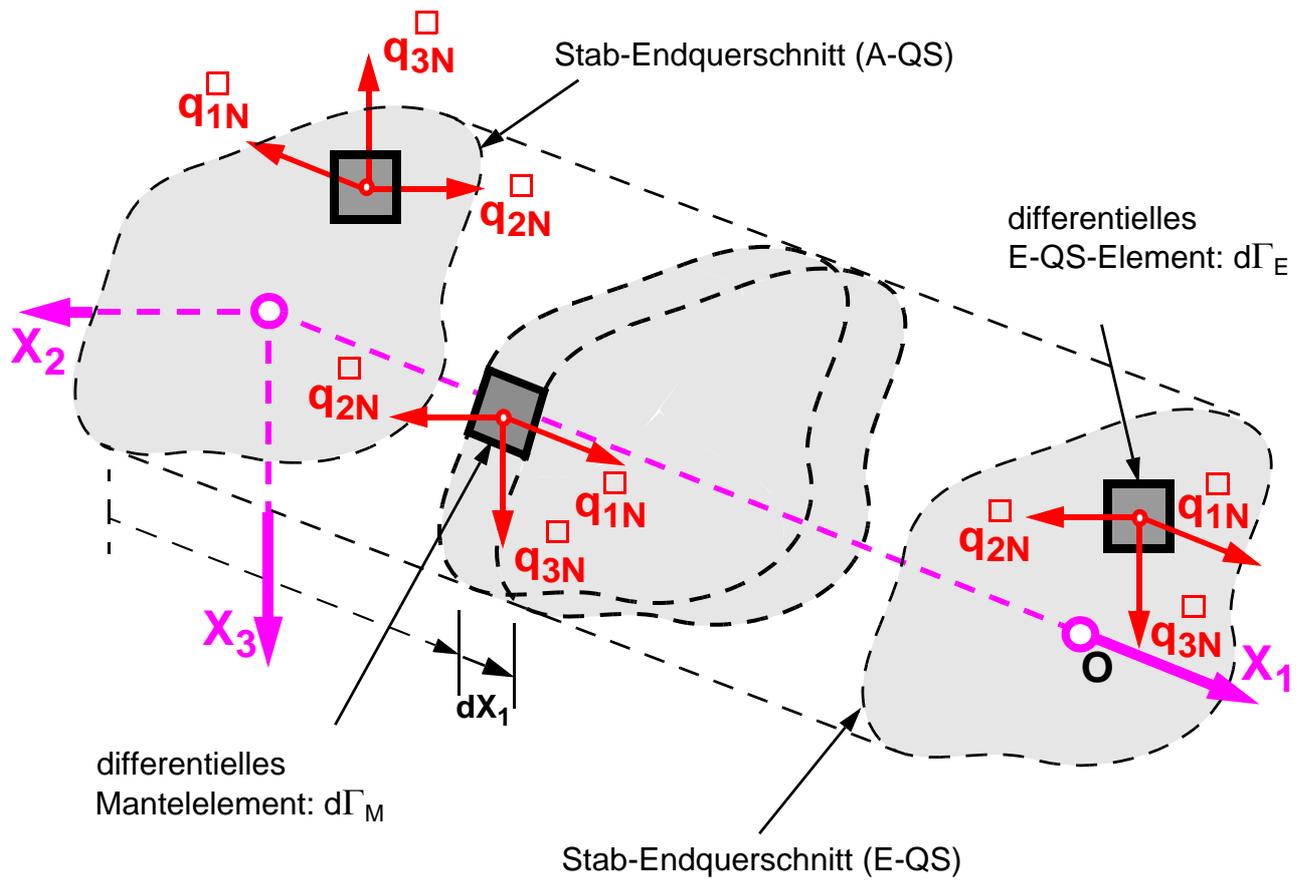
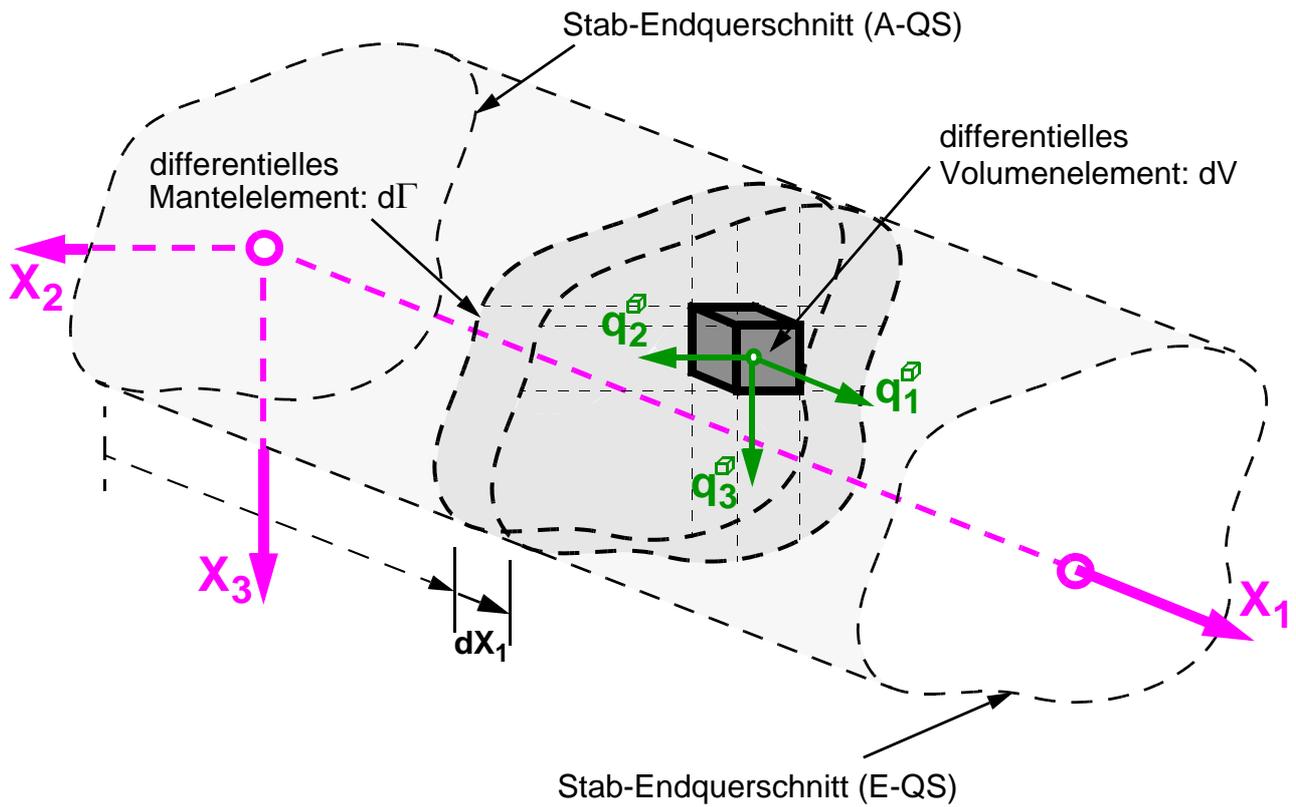


Abb. 5.7: *Belastungen an der Stabmantelfläche und an den Stab-Endquerschnitten im 3D-Kontext*



**Abb. 5.8:** Partikuläre Volumenbelastungen im Stabkörperinneren im 3D-Kontext

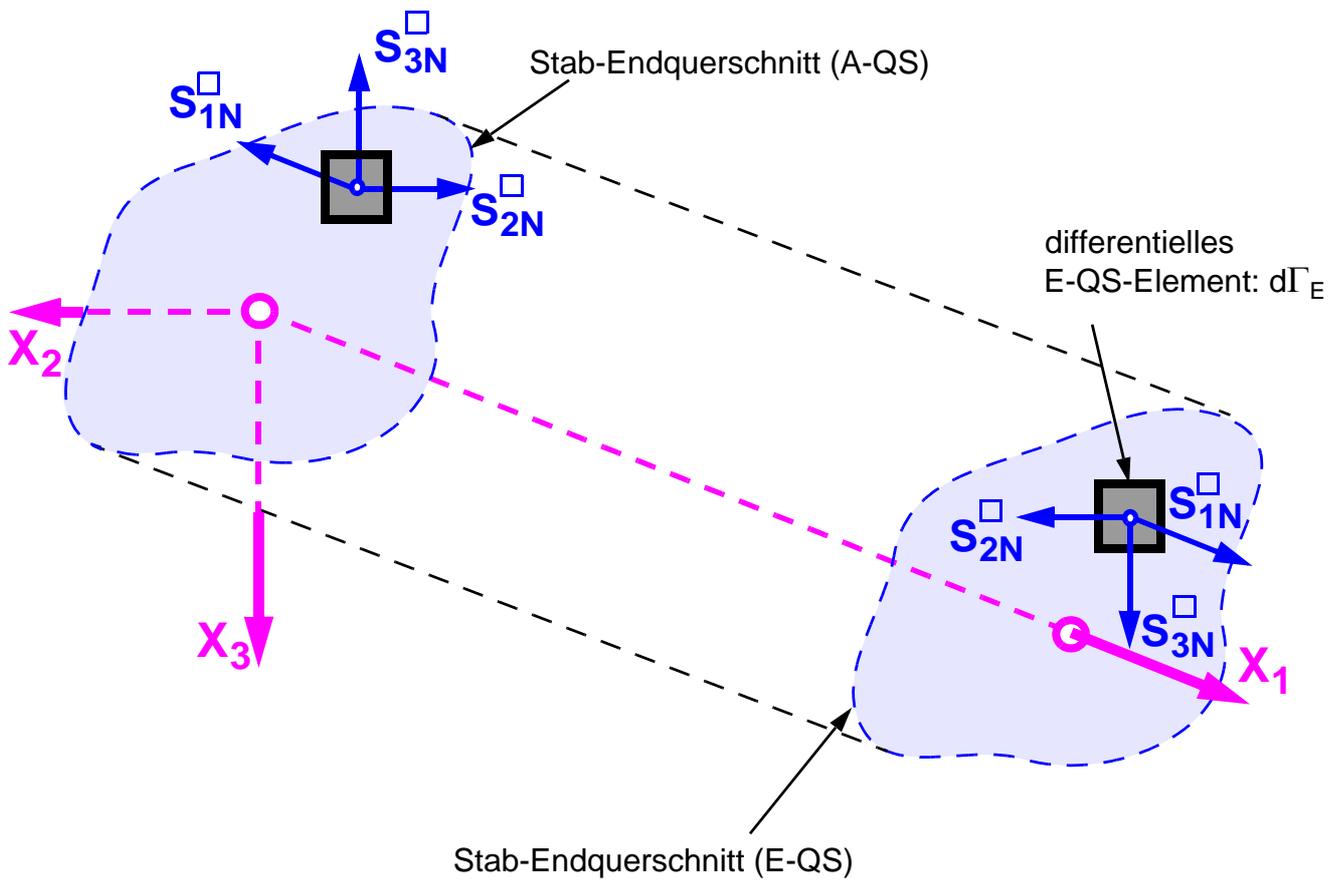


Abb. 5.9: Homogene Belastungen auf den Stabendquerschnitten

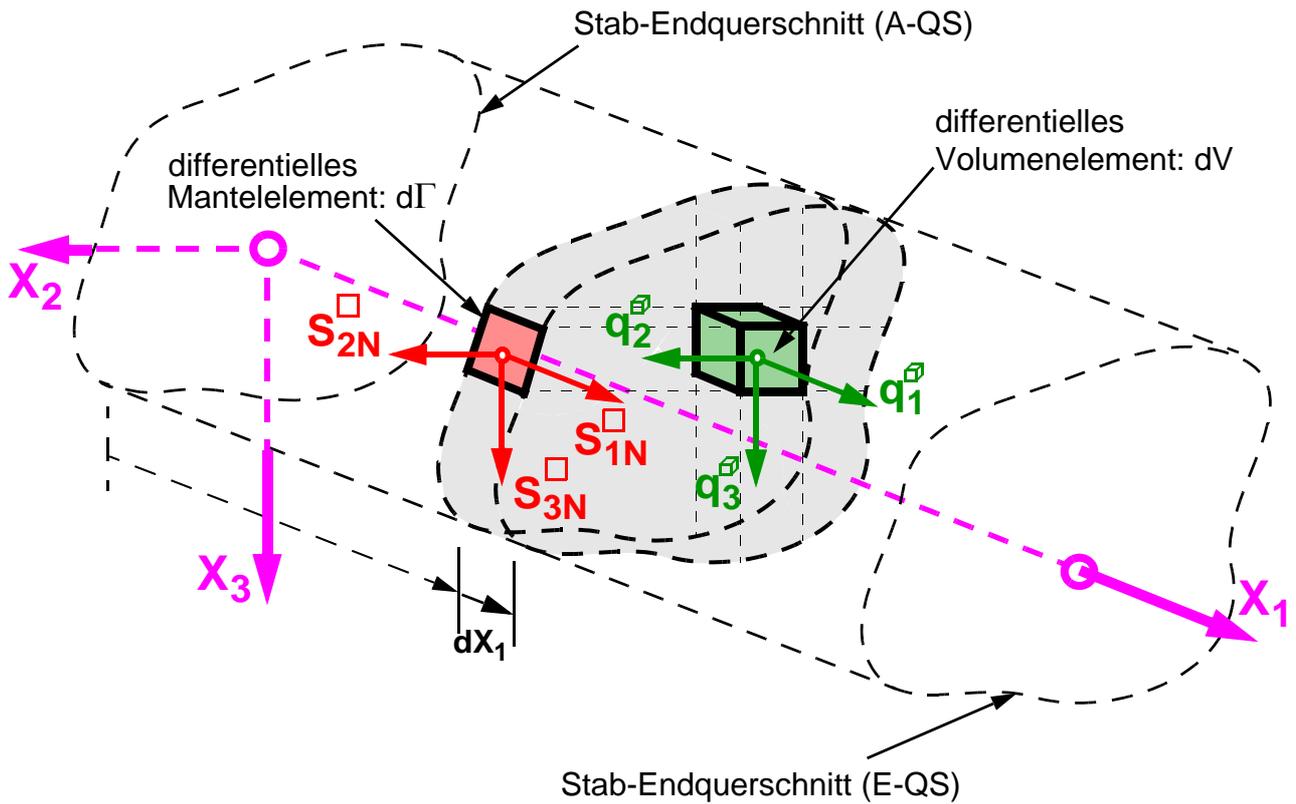


Abb. 5.10: Partikuläre Belastungen im Stabinneren im Stabkontext

## 5.7 Strukturierter Produktansatz für Belastungen des prismatischen Stabes

Die Darstellung des strukturierten Produktansatzes für die Belastungen wird im Rahmen dieser Arbeit für die Aufstellung der 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen benötigt.

### 5.7.1 Belastungsansatz im 3D-Kontext

Die betrachteten 3D-Belastungen treten, wie detailliert unter Punkt 5.6 dargelegt, sowohl innerhalb des gesamten Stabkörpers als auch auf der gesamten Staboberfläche auf. Im 3D-Kontext lassen sich die Volumen- und Oberflächenbelastungen formal in Abhängigkeit des Definitionsgebiets wie folgt definieren:

#### 5.7.1.1 Partikuläre Volumenbelastungen innerhalb des Stabkörpers

Die Volumenbelastungen stellen in diesem Zusammenhang auf das Einheitsvolumen bezogene Kraftgrößen dar. Die Einheit dieses Lasttyps ist dadurch mit  $\text{N}/\text{m}^3$  definiert. Das Definitionsgebiet erstreckt sich dabei auf das gesamte Stabvolumen des Stabkörpers, siehe Abb. 5.8. Wie in Glg. 5-8 gezeigt, weisen allgemein verteilte partikuläre Volumenlasten eine Abhängigkeit vom Ortsvektor  $\mathbf{x}$  auf. Als Sonderfall einer konstant über das gesamte Stabvolumen verteilten partikulären Volumenbelastung kann das Eigengewicht genannt werden.

$$\mathfrak{q}_{3\text{D}}^{\square} = \mathfrak{q}_{3\text{D}, \mathcal{V}} = \mathfrak{q}_{3\text{D}, \mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \mathfrak{q}_{3\text{D}, \mathcal{V}}(X_1, X_2, X_3) \quad [5-8]$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$

Das Symbol  $\mathfrak{q}$  soll den Volumen-Charakter des Belastungsterms  $\mathfrak{q}_{3\text{D}, \mathcal{V}}$  verdeutlichen, in weiterer Folge wird auf diese zusätzliche symbolische Kennzeichnung der Volumenlasten verzichtet und ausschließlich der Index  $\mathcal{V}$  für die Kennzeichnung dieser Lastart verwendet.

#### 5.7.1.2 Belastungen an der Staboberfläche

- **Homogene und partikuläre Flächenbelastungen in Form von Spannungen**

Die definierten Flächenbelastungen stellen in diesem Zusammenhang auf die Einheitsfläche bezogene Kraftgrößen dar. Die Einheit dieses Lasttyps ist dadurch mit  $\text{N}/\text{m}^2$  definiert. Das Definitionsgebiet erstreckt sich dabei auf die gesamte Staboberfläche, siehe Abb. 5.9. An den Stabendquerschnitten sind die homogenen Flächenbelastungen, auf der Stabmantelfläche die partikulären Flächenbelastungen definiert. Die Flächenbelastungen zeigen eine allgemeine Abhängigkeit von den zwei Oberflächenkoordinaten.

$$\mathfrak{q}_{3\text{D}, \Gamma}^{\square} = \mathfrak{q}_{3\text{D}, \Gamma}(\boldsymbol{\xi}) = \mathfrak{q}_{3\text{D}, \Gamma}(\xi_1, \xi_2) \quad [5-9]$$

mit  $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{\text{S}}$  wobei gilt:  $\Gamma_{\text{S}}$  ... Definitionsgebiet der Oberflächenbelastungen in Form von Spannungen

mit  $\Gamma_{\text{S}} \in \Gamma$

Das Symbol  $\square$  soll den Flächen-Charakter des Belastungsterms  $\mathfrak{q}_{3\text{D}, \Gamma}$  verdeutlichen. In weiterer Folge wird auf diese zusätzliche symbolische Kennzeichnung der Flächenbelastungen verzichtet und ausschließlich der Index  $\Gamma$  für die Kennzeichnung dieser Lastart verwendet. Im 3D-Kontext wird keinerlei Unterscheidung getroffen, ob die Stabmantelfläche oder die Stabendquerschnitte von der Belastung betroffen sind.

- **Verschiebungsrandbedingungen**

Randbedingungen in Form von Oberflächenverschiebungsrandbedingungen können auf der Stabmantelfläche und auf den Stabendquerschnitten definiert sein. Linear elastisch nachgiebige und starre Lagerungsbedingungen an den beiden Stabenden fallen ebenfalls unter die Kategorie der Verschiebungsrandbedingungen.

Das Definitionsgebiet für Verschiebungsrandbedingungen wird im Folgenden mit  $\Gamma_u$  bezeichnet. Für die Verschiebungsrandbedingungen gilt als Definitionsgebiet:  $\Gamma_u \in \Gamma$

### 5.7.2 Hierarchisch geordneter Produktansatz für die Belastungen im Stabkontext

Für die Herleitung der Grundgleichungen erscheint es sinnvoll, analog zum strukturierten Verschiebungsansatz auch für den Belastungsansatz die produktartige Aufspaltung der Volumen- und Oberflächenbelastungen nach den Querschnittskordinaten ( $X_2$  und  $X_3$ ) und nach der Stablängskoordinate  $X_1$  durchzuführen.

Diese Darstellung gilt für alle äußeren 3D-Belastungen, d. h. für die Volumenbelastungen und die Oberflächenbelastungen in Form der Kraft- und Verschiebungsrandbedingungen.

- **Volumenbelastungen im Stabkörper**

Die produktartige Darstellung der 3D-Volumenbelastungen erfolgt durch die Separation des Belastungsfeldes nach den von den Querschnittskordinaten ( $X_2$ - $X_3$ ) und von den Stablängskordinaten ( $X_1$ ) abhängigen Anteilen. Das gesamte Belastungsfeld ergibt sich demnach aus der Multiplikation der Belastungsverteilung über den Querschnitt mit der Verlaufsfunktion in Stablängsrichtung.

$$\mathbf{q}_{3D, \gamma} = \mathbf{q}_{3D, \gamma}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{3D, \gamma}(X_1; X_2, X_3) = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \gamma}(X_2, X_3) \cdot \psi_q(X_1) \quad [5-10.a]$$

Es gilt:

$\mathbf{X} \in \mathcal{V}$  als Definitionsgebiet gilt das gesamte Stabvolumen,

$$\tilde{\mathbf{q}}_{3D, \gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{3D, 1}(X_2, X_3) \\ \mathbf{q}_{3D, 2}(X_2, X_3) \\ \mathbf{q}_{3D, 3}(X_2, X_3) \end{bmatrix}_{\gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{3D, 1} \\ \mathbf{q}_{3D, 2} \\ \mathbf{q}_{3D, 3} \end{bmatrix}_{\gamma} \quad \text{als Belastungsverteilung über den Querschnitt} \quad [5-10.b]$$

$\psi_q(X_1)$  als Belastungsamplitudenverlaufsfunktion in Stablängsrichtung.

Volumenbelastungen sind im Stabkörper mit dem Volumen  $\mathcal{V}$  definiert. Die Lastamplitude  $\psi_q(X_1)$  gilt dabei für einen einzelnen Lastfall. Für mehrere Lastfälle sind entsprechend deren Anzahl unabhängige Belastungsamplitudenverläufe in Längsrichtung erforderlich.

- **Oberflächenbelastungen auf der Stabmantelfläche**

Die produktartige Darstellung der Oberflächenbelastungen auf der Stabmantelfläche des Stabes erfolgt durch die Separation des Belastungsfeldes nach von der lokalen Oberflächenkoordinate ( $\xi$ ) und von den Stablängskordinaten ( $X_1$ ) abhängigen Anteilen. Das gesamte Belastungsfeld ergibt sich demnach aus der Multiplikation der Belastungsverteilung über die Oberfläche mit der Verlaufsfunktion in Stablängsrichtung.

$$\mathbf{q}_{3D, \Gamma}^{\square} = \mathbf{q}_{3D, \Gamma}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{3D, \Gamma}(X_1; \xi) = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma}(\xi) \cdot \psi_q(X_1) \quad [5-11.a]$$

Es gilt:

$\Gamma_M$  als Definitionsgebiet gilt die Stabmantelfläche,

$$\tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} = \begin{bmatrix} q_{1N}(\xi) \\ q_{2N}(\xi) \\ q_{3N}(\xi) \end{bmatrix}_{\Gamma} = \begin{bmatrix} q_{1N} \\ q_{2N} \\ q_{3N} \end{bmatrix}_{\Gamma} \quad \text{als Belastungsverteilung entlang der QS-Berandung} \quad [5-11.b]$$

$\psi_q(X_1)$  als Belastungsamplitudenverlaufsfunktion in Stablängsrichtung.

Für die Integration der Randterme muss die QS-Betrachtung in der Darstellung  $X_2(\xi)$  und  $X_3(\xi)$  vorliegen. Für die parametrische Darstellung gilt:

$$ds = \sqrt{\dot{X}_2^2 + \dot{X}_3^2} \cdot d\xi \quad [5-11.c]$$

- **Oberflächenbelastungen auf den Stab-Endquerschnitten**

Für die Oberflächenbelastungen auf den beiden Stabendquerschnitten (**A-QS** und **E-QS**) in Form der Krafrandbedingungen wird der Durchgängigkeit halber ebenfalls die produktartige Darstellung verwendet. Die Verlaufsfunktion stellt in diesem Fall keine entlang der Stabachse kontinuierliche Verlaufsfunktion dar, sondern sie ist ausschließlich in Form einer diskreten Lastamplitude im jeweiligen Stabendquerschnitt definiert. Basierend auf der allgemeinen Produktdarstellung gilt:

$$\mathbf{q}_{3D, \Gamma, A}^{\square} = \mathbf{q}_{3D, \Gamma, A}(X_2, X_3) = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma, A}(X_2, X_3) \cdot \psi_{q, A} \quad [5-12.a]$$

definiert auf dem Stabanfangsquerschnitt  $\Gamma_A$

$$\mathbf{q}_{3D, \Gamma, E}^{\square} = \mathbf{q}_{3D, \Gamma, E}(X_2, X_3) = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma, E}(X_2, X_3) \cdot \psi_{q, E} \quad [5-12.b]$$

definiert auf dem Stabendquerschnitt  $\Gamma_E$

- **Verschiebungsrandbedingungen**

Randbedingungen in Form von Oberflächenverschiebung können sowohl auf der Stabmantelfläche als auch für den Stabanfangs- und den Stabendquerschnitt definiert sein.

Für das Definitionsgebiet der Verschiebungsrandbedingungen gilt:  $\Gamma_u \in \Gamma$ .

Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Verschiebungsrandbedingungen an den beiden Stabendquerschnitten  $\Gamma_u \in \Gamma_{A+E}$  in Form von Stablagerungsbedingungen zugelassen.

## 5.8 Der prismatische Stabzug

Unter Punkt 3.2 wurde bereits im Detail auf den geraden prismatischen Stab eingegangen. Die Erfüllung der Eigenschaften der vollständigen Prismaticität ist zwingende Grundlage für die analytische Problemlösung des 3D-Stabes. Werden die Grundlagen der geraden Prismaticität für einen Stab verletzt, lässt sich eine Problembehandlung durch diskrete Stabteilung in Stababschnitte mit stückweise prismatischen Eigenschaften herbeiführen.

Dadurch werden die geforderten Eigenschaften der Prismaticität für den 3D-Stab abschnittsweise erfüllt. Die Abbildungsgenauigkeit der veränderlichen Eigenschaften des ursprünglichen Stabes wird dabei durch die Teilungsfeinheit in Stablängsrichtung bestimmt.

Für die einzelnen dadurch prismatisch gewordenen Einzelstäbe dieses gewonnenen Stabzuges, gelten wiederum die in Punkt 7 dargelegten Lösungsstrategien.

Auf die Koppelungen zwischen benachbarten Stäben innerhalb eines Stabzuges wird im Detail unter Punkt 5.9.2 eingegangen.

### 5.8.1 Gerade Stabsysteme aus geraden gekoppelten prismatischen Einzelstäben

Diese Abhandlung beschränkt sich auf die Beschreibung von geraden prismatischen Stäben, trotzdem soll ein Ausblick auf Stäbe mit verletzten prismatischen konstanten Eigenschaften entlang der geraden Stabachse für die folgenden Bereiche gegeben werden:

- Anfangsgeometrie: Stäbe mit nicht konstantem Querschnitt entlang der Stabachse, wie beispielsweise Stäbe mit Ausschnitten in Form von Durchbrüchen und Wechseln im Stabquerschnitt, siehe Abb. 5.11 und Abb. 5.12.
- Materieller Aufbau: Entlang der Stabachse liegt ein veränderliches Materialverhalten vor, wie beispielsweise eine Veränderung der Faserstruktur, siehe Abb. 5.13.
- Kraft- und Verformungsrandbedingungen an der Staboberfläche in Form von starren bzw. nachgiebigen elastischen Bettungen für ausgewählte Verschiebungsfreiheitsgrade, siehe Abb. 5.15.
- Belastungssituationen in Form von seitlichen Teilflächenpressungen als Sonderfall, da diese im Allgemeinen auch über partikuläre Lösungsansätze abbildbar sind.

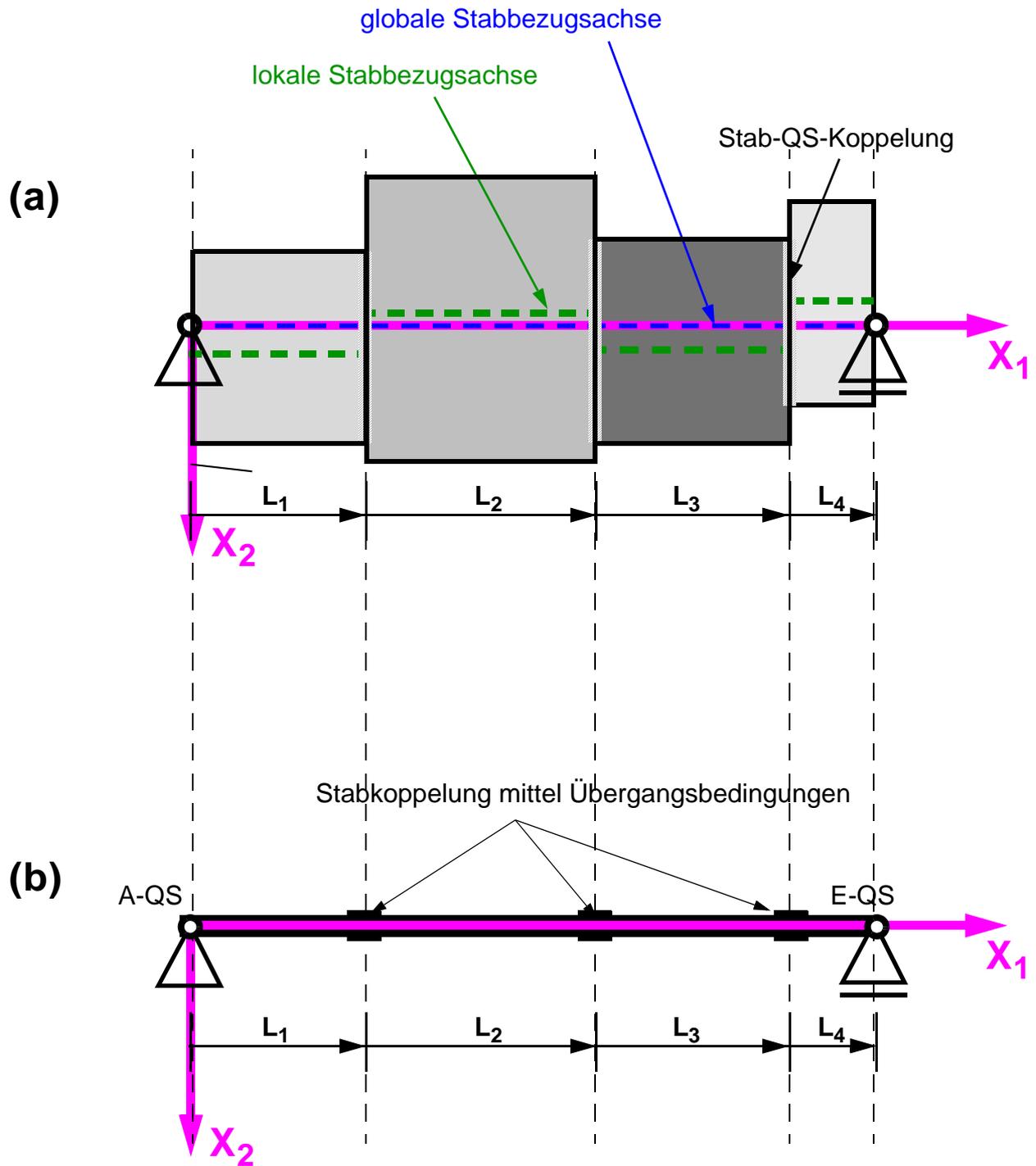


Abb. 5.11: Verletzung der Prismaticität: (a) Querschnittssprünge, (b) Stabzug

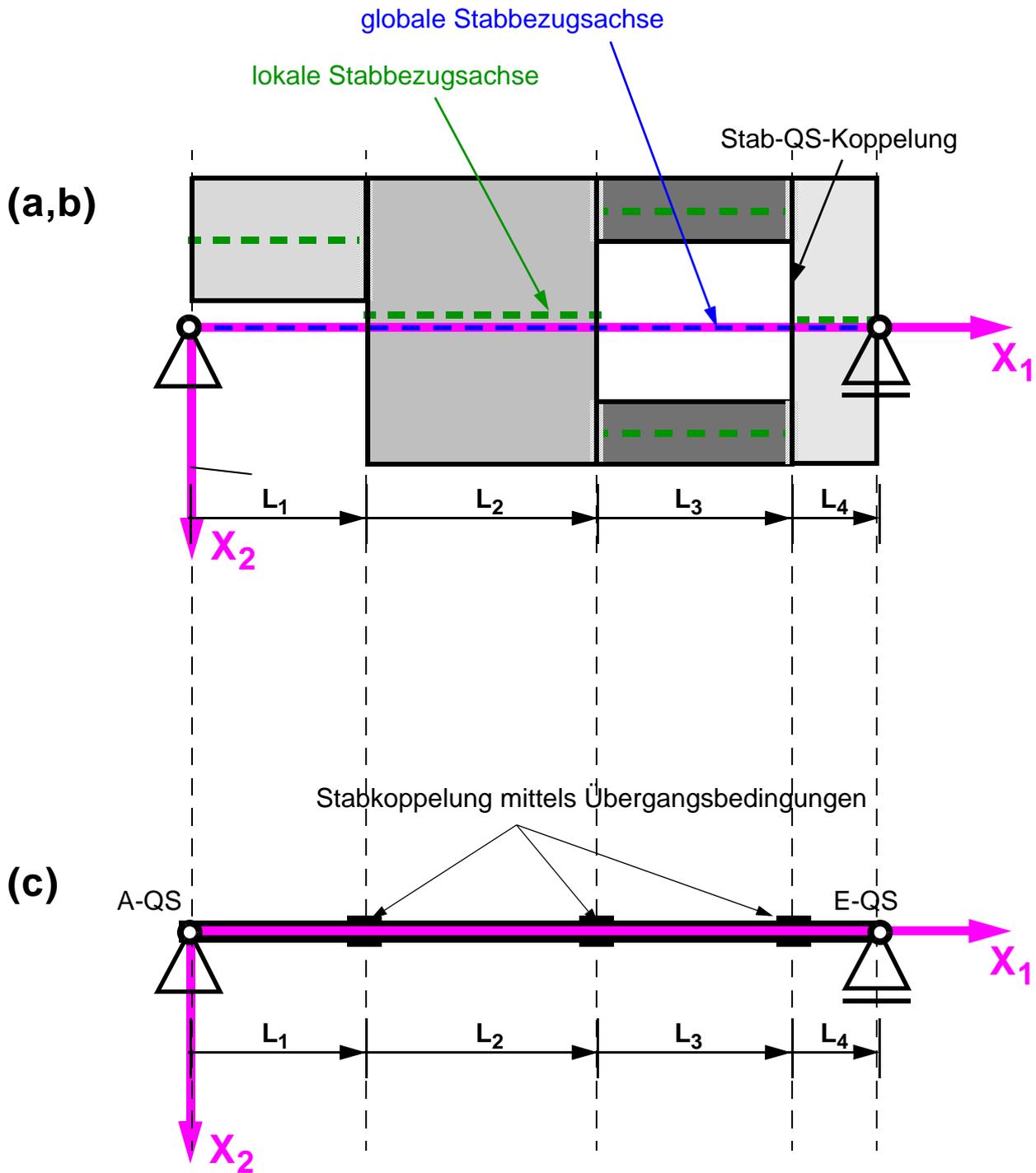


Abb. 5.12: Verletzung der Prismaticität: (a) Ausklüngen, (b) Querschnittsdurchbrüche, (c) Stabzug

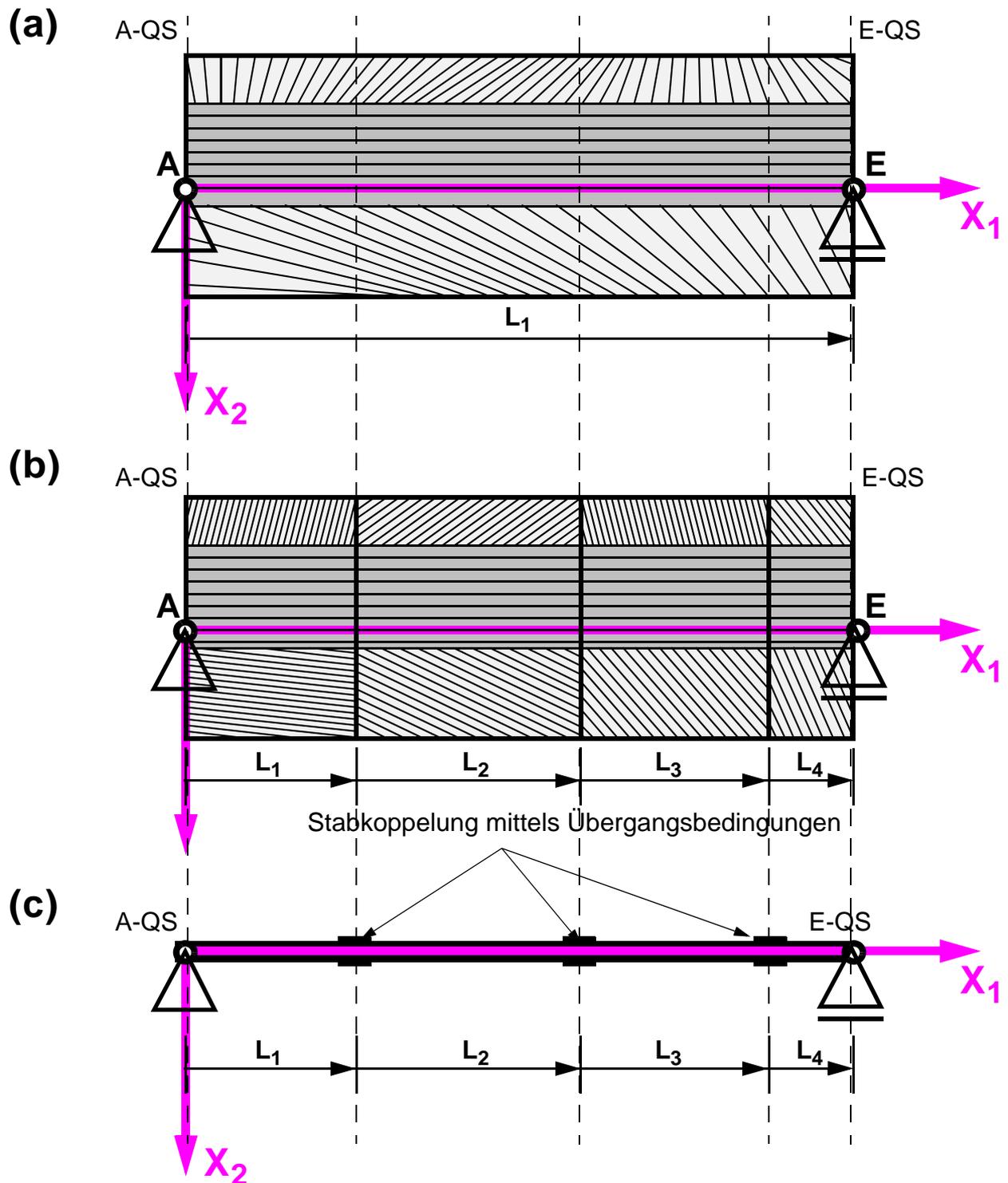


Abb. 5.13: *Verletzte Prismaticität: (a) variables, (b) stückweise stetiges Material in Stablängsrichtung, (c) Stabzug*

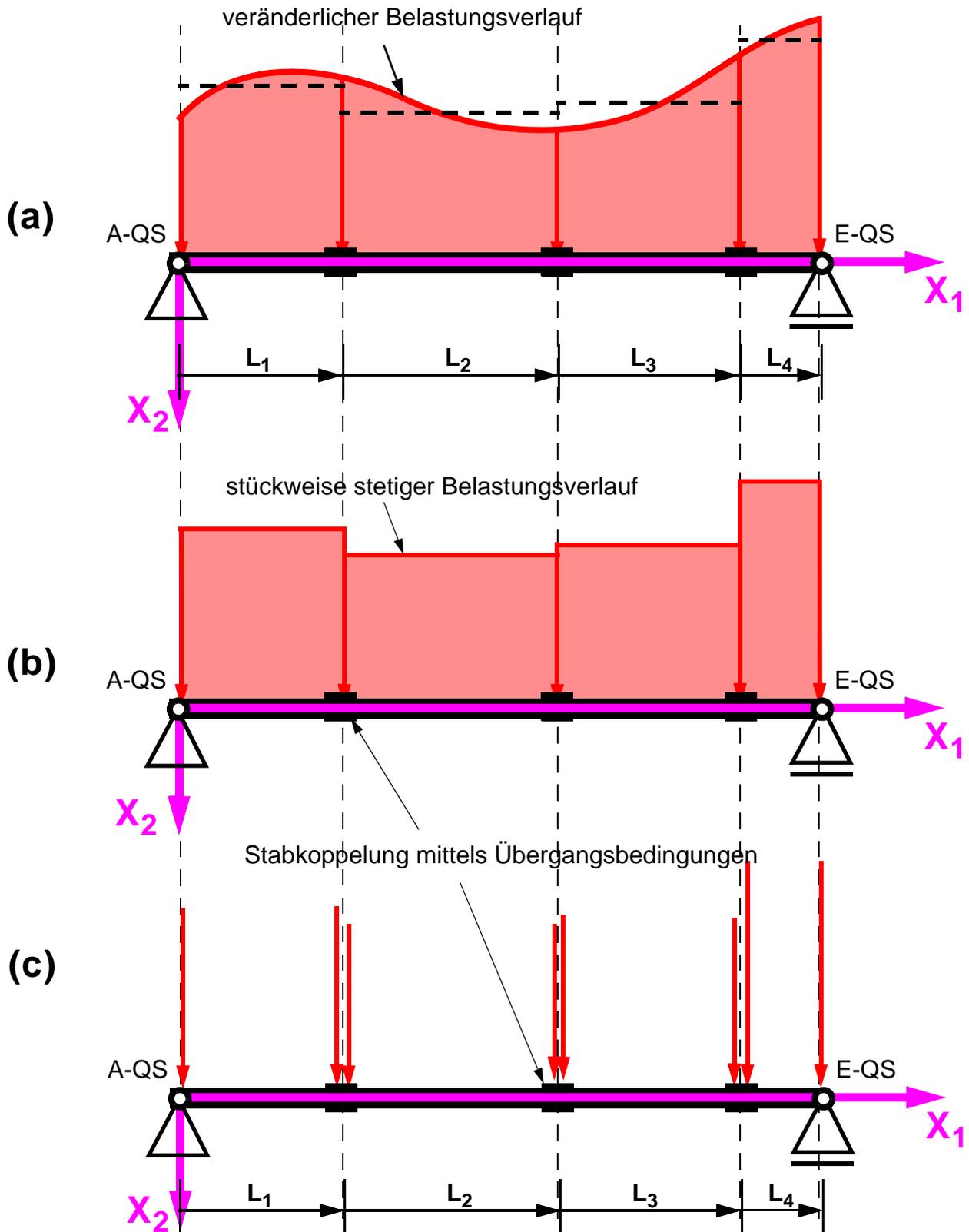


Abb. 5.14: Verletzung der Prismaticität: (a) Veränderliche Lasten, (b) stückweise stetige Lasten, (c) Knoten-Belastungen

## 5.9 Randbedingungen und Koppelungsbedingungen

### 5.9.1 Randbedingungen an der Staboberfläche

Die Lagerung von Stäben erfolgt standardmäßig über die Stabendquerschnitte (A und E) in Form von 3D-Verschiebungsrandbedingungen oder 3D-Kraftrandbedingungen. Diese Randbedingungen können die globalen und lokalen 3D-Verformungsmuster in gleicher Weise betreffen. Die Art der Lagerung kann in Form einer starren oder in Form einer linear elastischen nachgiebigen Form erfolgen. Im Gegensatz zur klassischen Stabtheorie können bei dieser Form der erweiterten Stabtheorie auch lokale Verformungseffekte durch Randbedingungen beeinflusst werden. Als Beispiel sei an dieser Stelle der eingespannte Stabquerschnitt mit völlig unterbundenen Querschnittsverwölbungen und Querschnittsverformungen erwähnt. In gleicher Weise, wie echte Auflagerbedingungen an den Stabendquerschnitten, sind auch die sogenannten Koppelungs- bzw. Übergangsbedingungen zwischen aneinander gereihten Stäben von stückweise prismatischen Stabzügen zu verstehen.

### 5.9.2 Koppelung und Übergangsbedingungen an den Stabendquerschnitten

Werden Stabzüge in Form von aneinander gereihten geraden prismatischen Einzelstäben gebildet, dann ist die Definition von Übergangsbedingungen (Kontinuität) für aufeinander folgende Einzelstäbe in Stablängsrichtung erforderlich. Diese Übergangsbedingungen lassen sich mit starren und nachgiebigen Koppelungen zwischen den benachbarten Stabenden realisieren, siehe Abb. 5.15.

Was die materiellen Eigenschaften der Koppelungselemente (elastische Federn) betrifft, gelten die gleichen formalen Beziehungen wie für die elastischen Verbundfugen. Für die Ausbildung dieser Koppelungen sind im Wesentlichen zwei Fälle zu unterscheiden:

- **Koppelung bei geometrisch übereinstimmenden Freiheitsgraden benachbarter Stabenden**

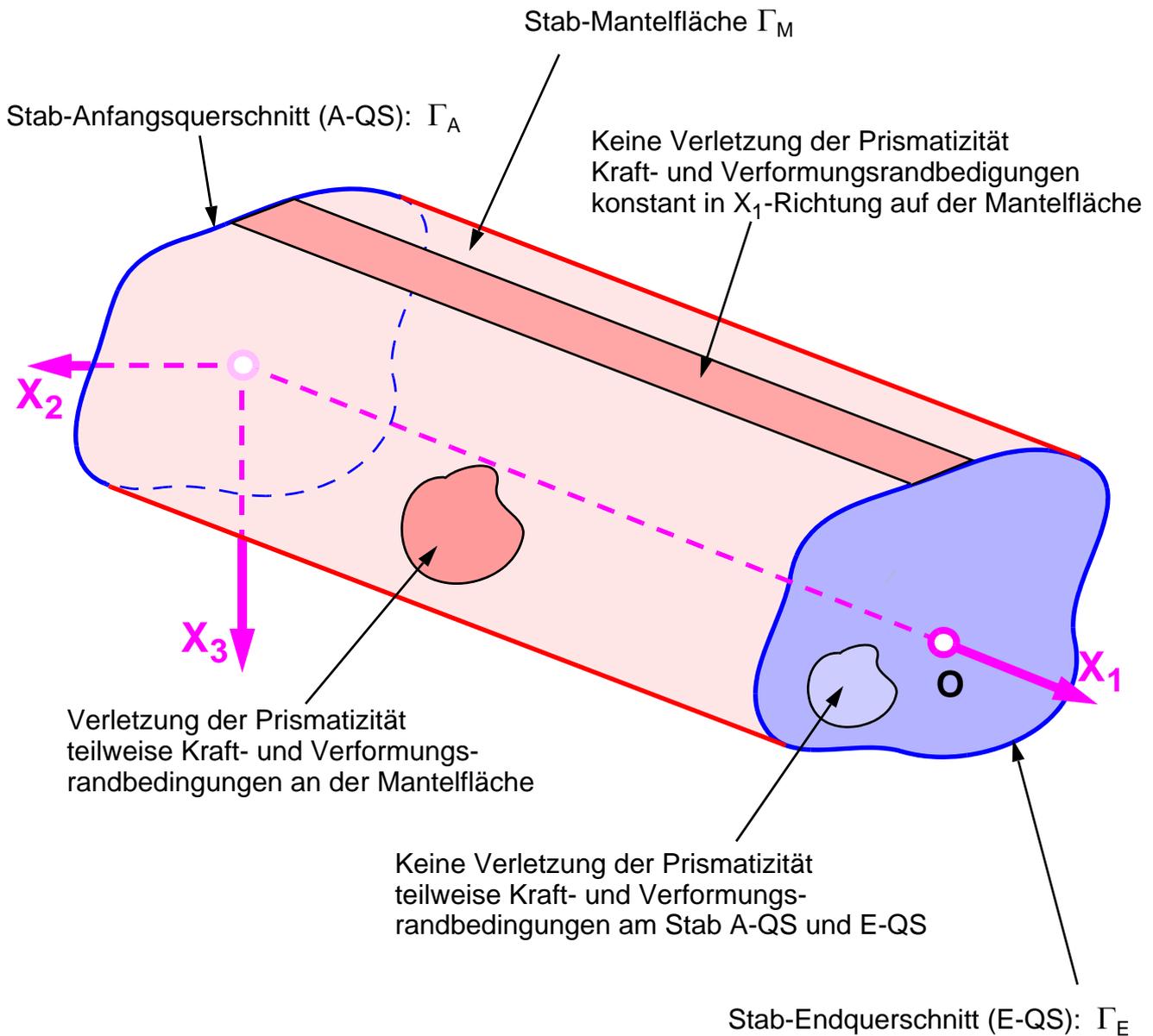
Liegen zwei idente benachbarte Stabendquerschnitte vor, bei denen die Freiheitsgrade in ihrer geometrischen Lage übereinstimmen, dann kann eine direkte Koppelung der zugeordneten Freiheitsgrade erfolgen.

- Starre Koppelungen auf Basis von Zwangsgleichungen zwischen den Querschnittsenden sind dabei durch die direkte Verformungskoppelung der Freiheitsgrade umzusetzen.
- Nachgiebige Koppelungen zwischen den Querschnittsenden lassen sich durch diskrete elastische Federelemente realisieren.

- **Koppelung bei geometrisch nicht übereinstimmenden Freiheitsgraden benachbarter Stabenden**

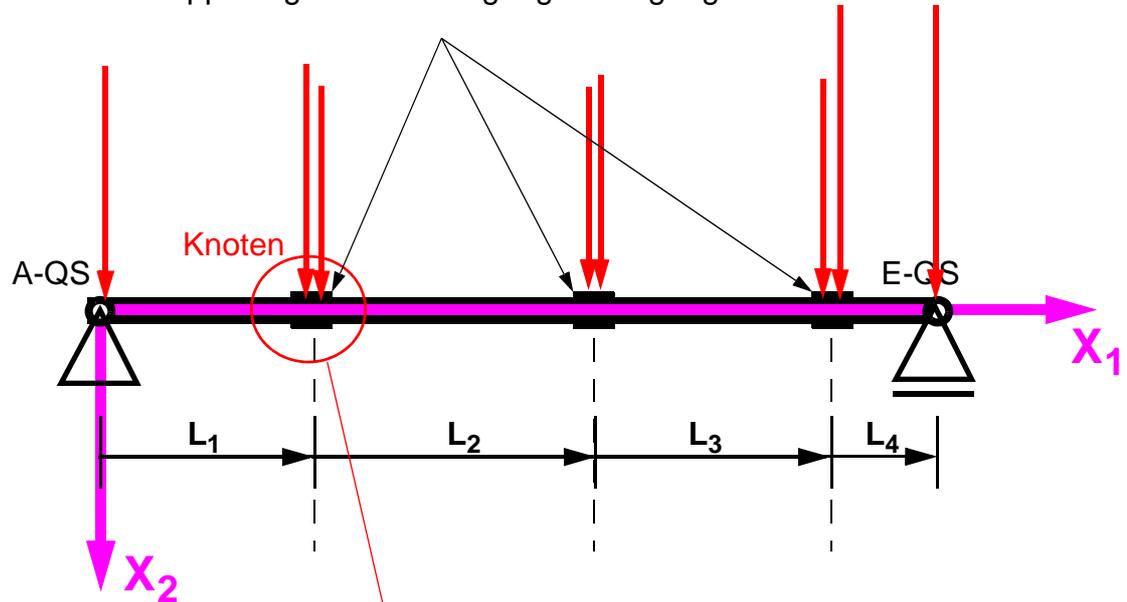
Liegen zwei benachbarte Stabendquerschnitte vor, bei denen die Freiheitsgrade in ihrer geometrischen Lage nicht übereinstimmen, dies gilt beispielsweise für verschiedene Querschnittsgeometrien, kann keine direkte Koppelung der Freiheitsgrade erfolgen. Eine Koppelung der benachbarten Querschnittsenden erfolgt dann auf Basis einer bestmöglichen Übereinstimmung der 3D-Verschiebungsfelder der zu koppelnden Stabenden auf Basis einer Minimierung des Fehlerquadrates. Auch für diesen Fall sind starre und nachgiebige Koppelungen möglich. Diese beiden Arten der Stabkoppelung wurden bereits von Salzgeber (1999, S. 4) beschrieben, wobei die Stabendenkoppelung im Sinne der geometrischen Fehlerquadratminimierung nach folgender Gleichung durchgeführt wird:

$$\int_A (u_{3D,L} - u_{3D,R})^2 dA \stackrel{!}{=} \text{MIN} \quad [5-13]$$



**Abb. 5.15:** *Kraft- und Verschiebungsrandbedingungen im Stabinneren und an den Stabenden*

## Stabkoppelung mittels Übergangsbedingungen



## Stabkoppelung

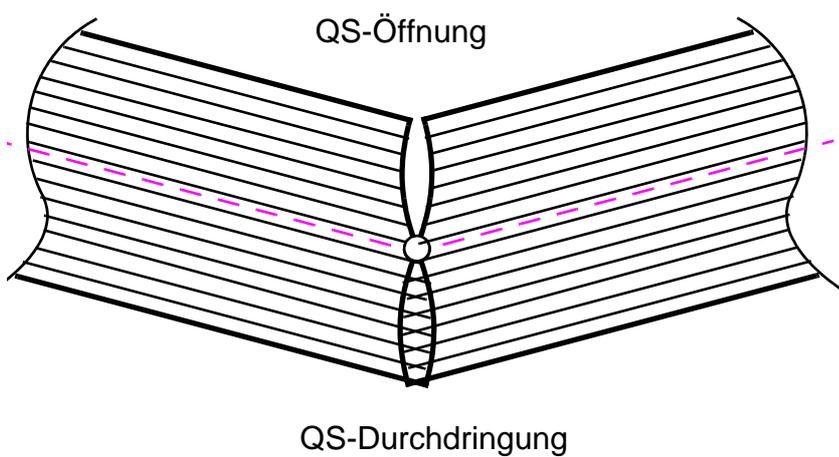
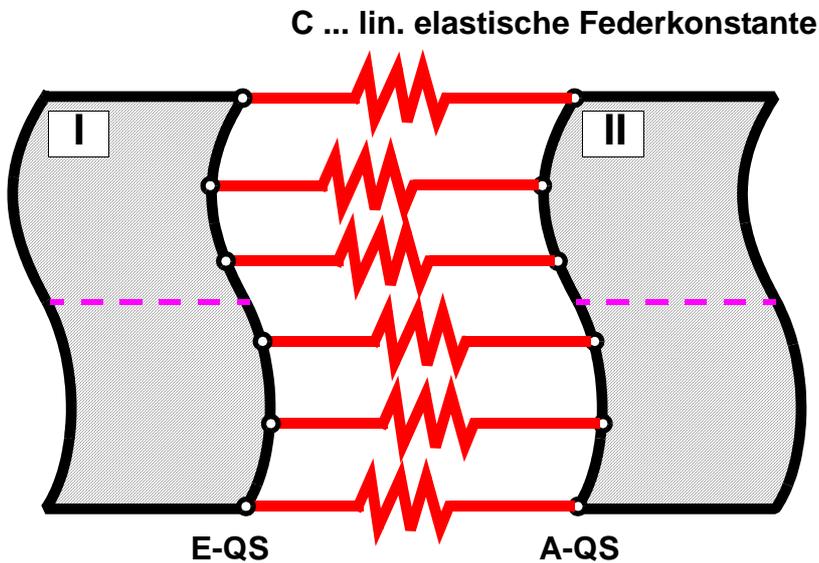


Abb. 5.16: Koppelung von Stabendquerschnitten für gerade Stabzüge: Klaffende und durchdrungene Querschnittsbereiche

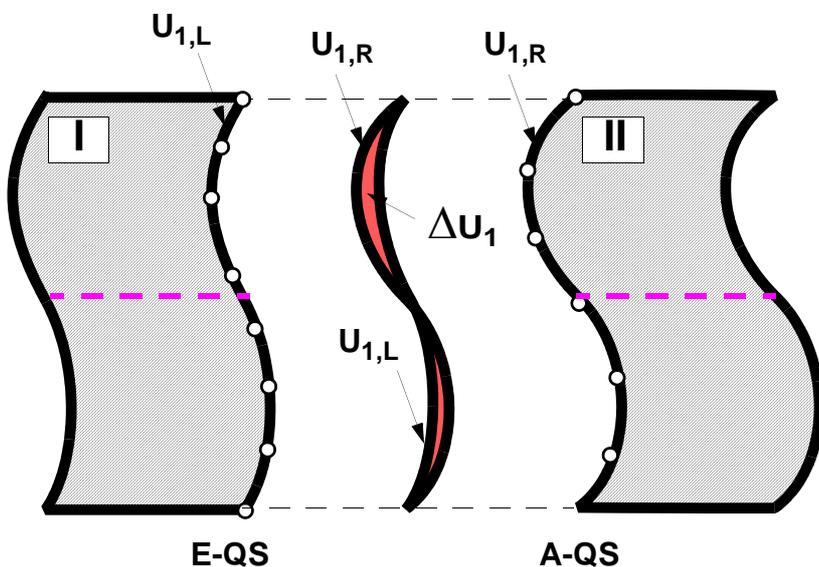
### (a) Übereinstimmung der DOF's



#### Zwei Möglichkeiten

- 1) starre Koppelung mit geometrischen Zwangsgleichungen
- 2) nachgiebige Koppelung mit elastischen Federelementen

### (b) Keine Übereinstimmung der DOF's



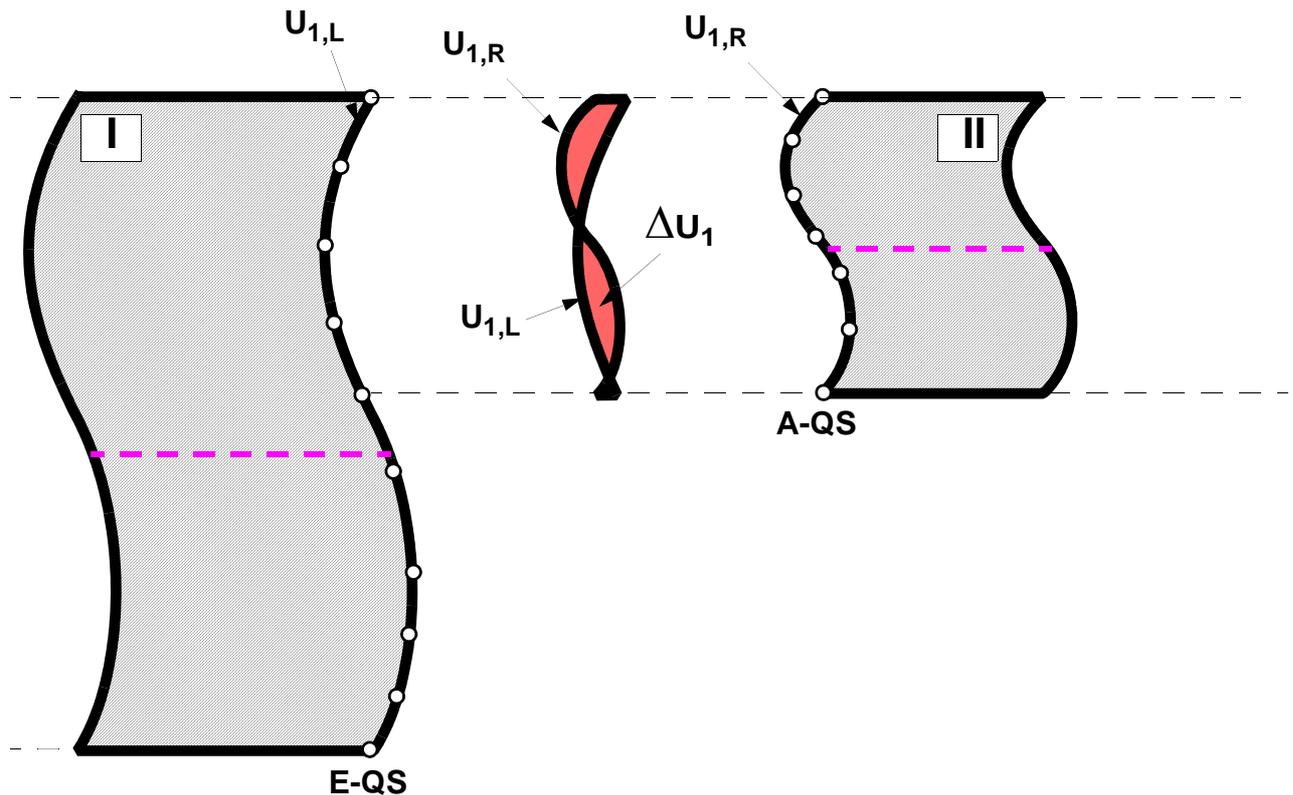
#### Fehlerquadrat Minimum

$$\Delta U_1 = U_{1,L} - U_{1,R}$$

$$\int_A (U_{1,L} - U_{1,R})^2 \cdot dA \stackrel{!}{=} \text{Min}$$

Abb. 5.17: Koppelung von Stabendquerschnitten: (a) mechanische Zwangsgleichungen, (b) geometrische Koppelung nach dem Fehler-Quadrat-Minimum Prinzip

## Keine Übereinstimmung der DOF's verschiedene Querschnittsgeometrien



### Fehlerquadrat Minimum

$$\Delta U_1 = U_{1,L} - U_{1,R}$$

$$\int_A (U_{1,L} - U_{1,R})^2 \cdot dA \stackrel{!}{=} \text{Min}$$

Im Sinn der Fehlerquadratminimierung gilt es, die benachbarten Querschnittsenden durch Fehlerminimierung von  $\Delta U_1$  in Übereinstimmung zu bringen. Die Koppelung betrifft dabei nur übereinstimmende Querschnittsbereiche.

*Abb. 5.18: Koppelung von Stabendquerschnitten: Geometrische Koppelung nach dem Fehler-Quadrat-Minimum Prinzip für verschiedene Querschnittsgeometrien*

## 5.10 Festlegungen und Zusammenfassung für das etablierte Stabmodell

Es gelingt, den Modell-Typus „Stab“ durch Einprägung von zwei sehr allgemein gehaltenen zweckgerichteten Festlegungen I und II in vollem Umfang zu etablieren. Die Einführung dieser beiden Festlegungen stellt keinerlei Annahmen, Hypothesen oder sogar Einschränkungen dar. Die Einprägung dieser Festlegungen erfolgt in Bezug auf ein anonymes 3D-Kontinuum, und zwar hinsichtlich der Beschaffenheit des anfänglichen Modellzustands: Geometrie, Material, Randbedingungen Belastung sowie hinsichtlich eines hierarchisch geordneten Aufbaus der verformungsgeometrischen Beschreibung und der hierarchisch geordneten Belastung.

Die beiden charakterisierenden genannten Modellfestlegungen für das etablierte Stabmodell lauten:

- **Festlegung I: Prismaticität des Kontinuummodells**
  - Anfangsgeometrie (der prismatische Stab, beliebig komplexer Querschnitt, Querschnittsaufbau)
  - Materieller Aufbau
  - Belastungen
  - Lagerungsbedingungen und Koppelungsbedingungen
  - Besondere Verletzungen der geraden Prismaticität und deren Bedeutung
- **Festlegung II: Hierarchisch strukturierter Verschiebungs- und Belastungsansatz**

Dies dient als Grundlage für die gesamte Formulierung der beschreibenden Systemgleichungen für den prismatischen Stab auf Basis der bekannten Grundgleichungen

- Kinematik
- Konstitution
- Kinetik.

Für sämtliche notwendigen Grundgleichungen gilt

- die verallgemeinerte Querschnittskinematik (siehe Punkte 5.3) des Querschnitts,
- der Produktansatz, d. h. die strikte Trennung der querschnitts- und stablängsrichtungsabhängigen Gleichungsanteile für den Verschiebungs- und Belastungsansatz sowie
- die strukturierte und hierarchisch geordnete Darstellung des 3D-Verschiebungsansatzes.

Ziel ist es, einen hierarchisch strukturierten geordneten Aufbau des

- Gesamtverschiebungsfeldes (siehe Punkt 5.3) und des
- Gesamtbelastungsfeldes (siehe Punkt 5.7)

in extremer Anlehnung an die in I getroffenen Modellannahmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit, ausgehend von den anonymen Verformungs- und Belastungsfeldern der originalen Kontinuumsstruktur, mit konsequenter Verfolgung durch die Gesamtformulierung zu etablieren.

# 6

**Herleitung der  
Grundgleichungen  
für den 3D-Stab**

## 6.1 Einleitung und Vorgangsweise für die Herleitung der Grundgleichungen

In diesem Abschnitt wird die Herleitung aller 3D-Grundgleichungen für das etablierte Stabmodell des 3D-Stabes gezeigt. Alle dafür erforderlichen Grundlagen und Festlegungen wurden in den voranstehenden Kapiteln detailliert erläutert.

Die einzige zwingende Voraussetzung für das etablierte Stabmodell stellt die vollständige Erfüllung der Eigenschaften der geraden Prismaticität des Stabes dar. Ansonsten liegen diesem 3D-Stabmodell keine Einschränkungen und Restriktionen zugrunde. Die zugrunde gelegte 3D-Kinematik beschreibt das Verformungsverhalten des 3D-Kontinuums in vollem Umfang.

Als wesentlicher Punkt, im Vergleich zu vielen Arbeiten rund um das Thema des 3D-Stabes, gilt, die bei der Herleitung der Grundgleichungen verwendete Separation der „globalen“ und „lokalen“ 3D-Teilverschiebungsfelder sowie die separierte Darstellung der „Balkenverformung“ und der „echten Querschnittsverformung“. Durch die farbliche Kennzeichnung innerhalb der Gleichungen lassen sich die Einzelzustände (Balkenverformung und echte Querschnittsverformung) eindeutig trennen, wie auch mögliche Berührungspunkte in Form von Interaktionsbeziehungen detektieren.

Die Herleitung der Grundgleichungen für das etablierte Stabmodell folgt dem Konzept von Guggenberger (2007), dem zufolge das beschreibende Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem in Differentialdarstellung durch das Zusammenführen der „kinematischen“, der „konstitutiven“ und der „kinetischen“ Grundbeziehungen der Kontinuumsmechanik resultiert. Es wird dabei die Differentialoperator-Matrix-Schreibweise verwendet.

Die Herleitung wird für einen Querschnittsteil gezeigt, darauf aufbauend lassen sich homogene und heterogene mehrteiligen Querschnitte beschreiben.

Die Grundlagen für die 3D-kontinuumsmechanischen Gleichungen wurden in Kapitel 4 für die unstrukturierte Darstellung für alle wesentlichen Punkte gezeigt. Darauf aufbauend werden die 3D-Gleichgewichtsgleichungen für den Stab hergeleitet, mit allen für die strukturierte geordnete hierarchische Darstellung erforderlichen Erweiterungen.

In Kapitel 7 wird ausgehend von den aufbereiteten 3D-Gleichgewichtsgleichungen die Lösung des Differentialgleichungssystems für den Sonderfall der Isotropie ohne Querkontraktionseffekte ( $\nu=0$ ) für die erwähnten Lösungsanteile (FF-Lösung der Querschnittskinematik und Abklinglösung der Querschnittskinematik) gezeigt.

## 6.2 Kinematik

Im Rahmen der kinematischen Beschreibung des 3D-Stabes werden die folgenden Punkte im Detail behandelt:

- Definition des strukturierten 3D-Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}_{3D}$  für den prismatischen Stab, siehe Punkt 6.2.1.
- Definition der 3D-Verzerrungen  $\mathbf{e}_{3D}$  in strukturierter Form, siehe Punkt 6.2.2.

Als Ergebnis der Kinematik resultiert daraus die Darstellung der 3D-Verzerrungen  $\mathbf{e}_{3D}$  in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Gesamtverzerrungsparameters  $\mathbf{e}$  und in weiterer Folge in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Stabverformungsparameters  $\mathbf{u}$ .

### 6.2.1 Verschiebungsansatz

#### 6.2.1.1 Strukturierter Verschiebungsansatz

Als wesentlicher Punkt dieser Arbeit gilt der erwähnte zugrunde gelegte strukturierte 3D-Verschiebungsansatz. Neben der Abspaltung des Starrkörperverschiebungsanteils  $\mathbf{u}_{3D,0}$  der Querschnittskinematik vom 3D-Gesamtverschiebungsfeld ist für die weitere Problemstrukturierung insbesondere die Aufspaltung des echten 3D-Verformungsverhaltens des Stabquerschnitts in den Balkenverformungszustand und den echten Querschnittsverformungszustand zu erwähnen. Dadurch lässt sich der 3D-Stabverzerrungszustand des Stabes durch die zwei 3D-Verschiebungsfelder des Balkenverformungszustands und des Querschnittsverformungszustands definieren. Zudem erfolgt eine hierarchische Darstellung aller 3D-Einzelverschiebungsfelder.

Zur grafischen Verdeutlichung der einzelnen 3D-Teilverformungszustände wird ein Farbschema definiert, mit dem in den wesentlichen Gleichungen die Gleichungsanteile gekennzeichnet werden.

- **Reiner Balkenverformungszustand ohne jegliche Querschnittsverformung**

Der reine Balkenverformungszustand wird durch die 3D-Verschiebungen  $\mathbf{u}_1$  hervorgerufen. Diese sind senkrecht zur Querschnittsebene des Stabes definiert und werden im Allgemeinen als „Querschnittsverwölbungen“ bezeichnet. Der reine Balkenverformungszustand ist frei von jeglicher Querschnittsverformung in der QS-Ebene („||“-Anteil) und wird im Folgenden immer mit „senkrecht“ bzw. der Abkürzung „ $\perp$ “ bezeichnet. Die farbliche Kennzeichnung aller Beziehungen innerhalb der Gleichungen erfolgt mit roter Hinterlegung:

- **Echte Querschnittsverformung – Ebener Verzerrungszustand**

Der echte Querschnittsverformungszustand wird durch die 3D-Verschiebungen  $\mathbf{u}_2$  und  $\mathbf{u}_3$  hervorgerufen. Diese sind parallel zur bzw. in der Querschnittsebene des Stabes definiert und werden im Allgemeinen als „Querschnittsverformungen“ bezeichnet. Die Querschnittsverformung wird im Folgenden immer mit „parallel“ bzw. der Abkürzung „||“ bezeichnet. Die farbliche Kennzeichnung innerhalb der Gleichungen erfolgt mit blauer Hinterlegung:

- **Interaktionsterme**

Mit Grün  gekennzeichnete Einträge in den formalen Beziehungen stellen Quellen für potenzielle Interaktionen der Teilverformungszustände „parallel“ und „senkrecht“ zur Querschnittsebene dar. Die Frage der tatsächlichen Interaktion zwischen den beiden Verformungsanteilen kann erst nach Vorliegen von konkreten Materialbeziehungen, beantwortet werden, da nicht alle Matrixeinträge der Materialsteifigkeitskoppelungsmatrizen von null verschieden sind.

Der strukturierte geordnete Verschiebungsansatz für den kompletten 3D-Stab wird wie folgt ohne Beschränkung der Allgemeinheit definiert, wobei in der folgenden formalen Beziehung die strikte Trennung der globalen und lokalen 3D-Teilverschiebungsfelder zugrunde gelegt ist. Die Grundlagen für das 3D-Gesamtverschiebungsfeld sind unter Punkt 4.2 im Detail beschrieben. Im Sinne der strukturierten Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes wird die konsequente separierte Darstellung der globalen und lokalen 3D-Verschiebungsfelder wie folgt vorgenommen.

$$\mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{3D,0} + \mathbf{u}_{3D,\Omega} = \mathbf{A}_0(X_2, X_3) \cdot \mathbf{u}_0(X_1) + \Omega(X_2, X_3) \cdot \psi(X_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \psi \end{bmatrix} \quad [6-1]$$

- $\mathbf{A}_0$      Verschiebungsinterpolationsmatrix für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik des Stabquerschnitts
- $\mathbf{u}_0$      Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik des Stabquerschnitts
- $\Omega$        Vektor der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder
- $\psi$        Amplitudenverlauf in Stablängsrichtung für die relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder

### 6.2.1.2 Beschreibung des globalen 3D-Teilverschiebungsfeldes des Stabkörpers

Das globale 3D-Teilverschiebungsfeld nimmt eine Sonderstellung ein. Es definiert sämtliche Anteile der Querschnittskinematik, die in Zusammenhang mit den Starrkörperbewegungen des 3D-Stabes im Raum stehen. Es stellt den polaren Fall des 3D-Stabes dar, d. h. es treten keinerlei Querschnittsverwölbungen und Querschnittsverformungen unter Beanspruchung auf. Der globale Anteil der 3D-Querschnittskinematik erfüllt die Annahmen des „ebenen unverformten“ Querschnitts.

$$\mathbf{u}_{3D,0}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0(X_2, X_3) \cdot \mathbf{u}_0(X_1) \quad [6-2.a]$$

Die Matrix des Starrkörperverschiebungsfeldes  $\mathbf{A}_0$  wird durch die sechs globalen Starrkörperverschiebungsfeldvektoren für die zugehörigen Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade beschrieben. Diese zeigt wegen der produktartigen Aufspaltung des 3D-Stabkörperverschiebungsfeldes nur eine Abhängigkeit von den Stabquerschnittskordinaten  $X_2$  und  $X_3$ . Der Vektor der Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade zeigt die Abhängigkeit von der Stablängskoordinate  $X_1$ .

$$\mathbf{u}_{3D,0} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_0} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ U_2 \\ U_3 \\ \beta_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,\perp} & \mathbf{A}_{0,\parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{0,\perp} \\ \mathbf{u}_{0,\parallel} \end{bmatrix} \quad [6-2.b]$$

Die Spalten der Querschnittsinterpolationsmatrix  $\mathbf{A}_0$  für den Starrkörperanteil stellen dabei die Starrkörperverschiebungsfeldvektoren für die zugehörigen Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik  $\mathbf{u}_0$  des Stabquerschnitts dar.

In der nach den „ $\perp$ “- und „ $\parallel$ “-Anteilen separierten Form sind die beiden Verschiebungsinterpolationsmatrizen für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinetik des Stabquerschnitts für den axialen Balkenverformungszustand und den echten Querschnittsverformungszustand wie folgt darstellt:

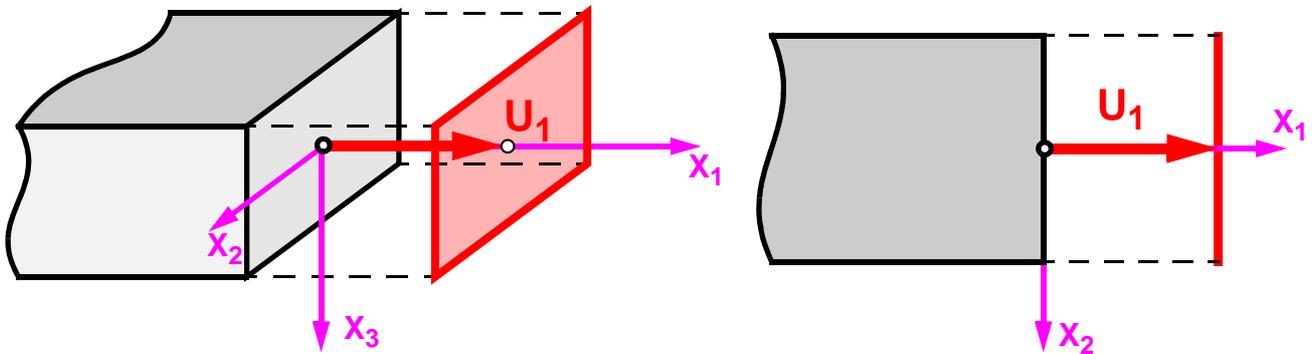
$$\mathbf{A}_{0,\perp}(X_2, X_3) = \begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{A}_{0,\parallel}(X_2, X_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -X_3 \\ 0 & 1 & X_2 \end{bmatrix} \quad [6-2.c]$$

$$\mathbf{u}_{0,\perp} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{u}_{0,\parallel} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad [6-2.d]$$

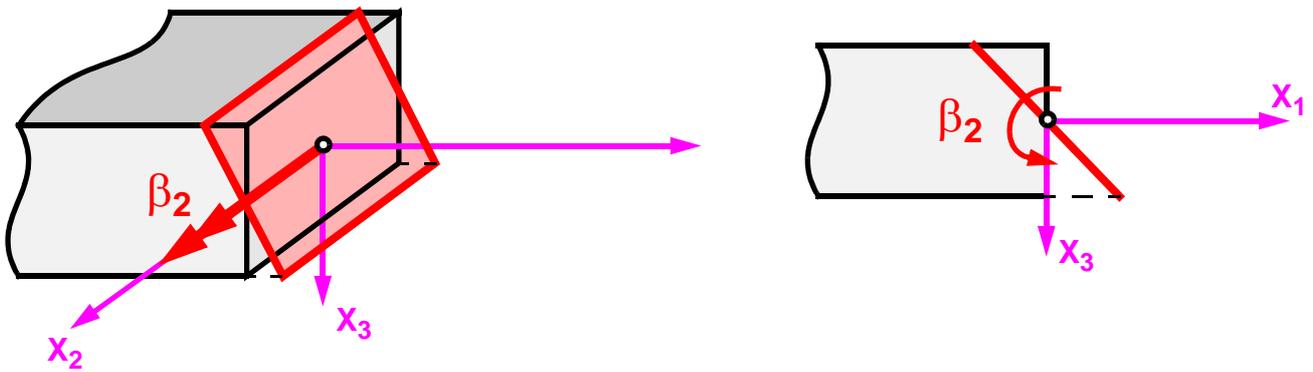
$\mathbf{A}_{0,\perp}$  Verschiebungsinterpolationsmatrix für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinetik des Stabquerschnitts für den Balkenverzerrungszustand  $\perp$  zur Querschnittsebene

$\mathbf{A}_{0,\parallel}$  Verschiebungsinterpolationsmatrix für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinetik des Stabquerschnitts für den Balkenverzerrungszustand  $\parallel$  (ebener Verzerrungszustand) zur Querschnittsebene

### Starrkörperverschiebung: $U_1$



### Starrkörperverschiebung: $\beta_2$



### Starrkörperverschiebung: $\beta_3$

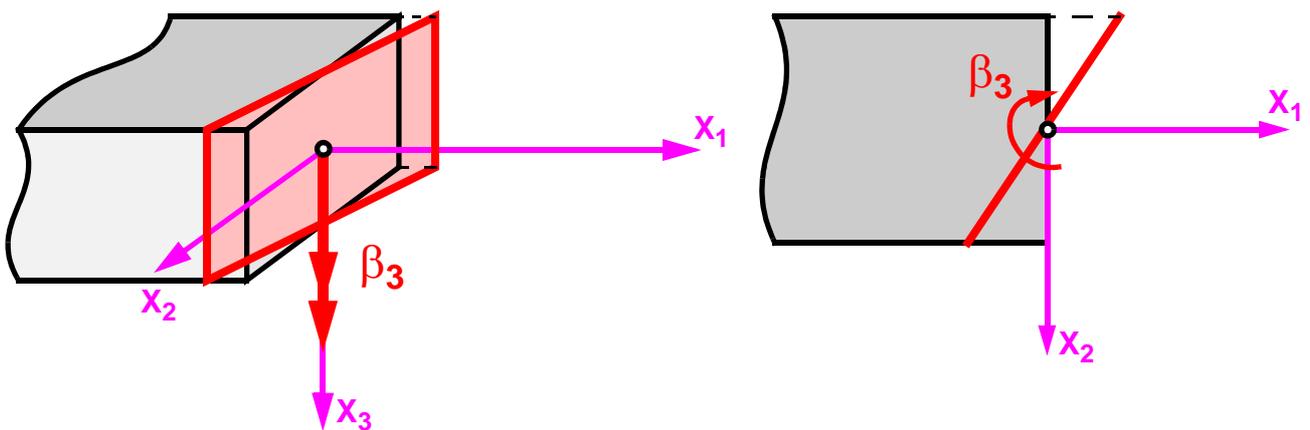
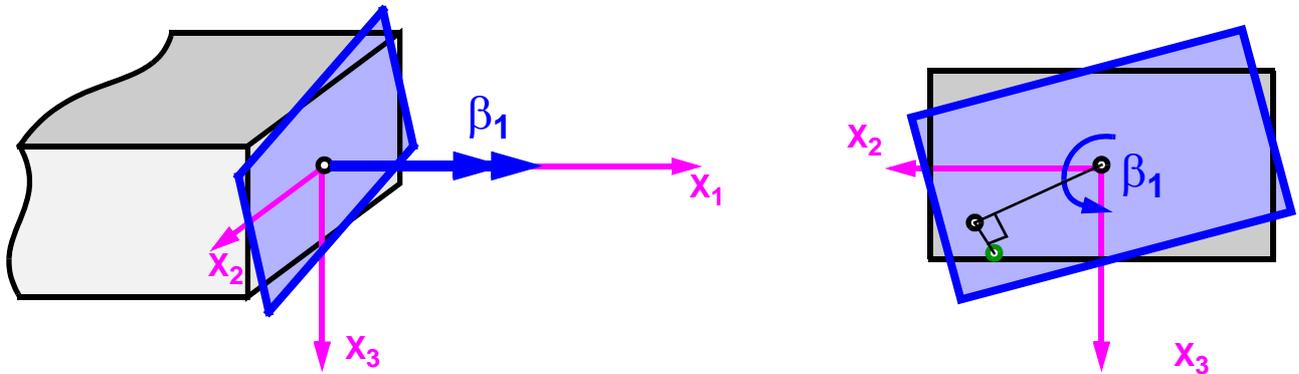
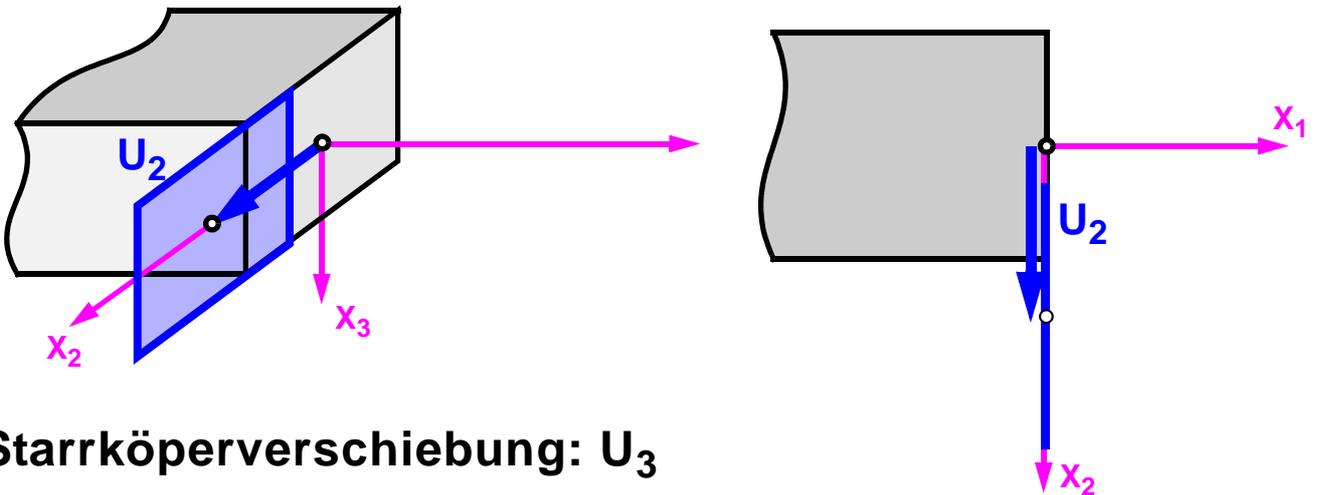
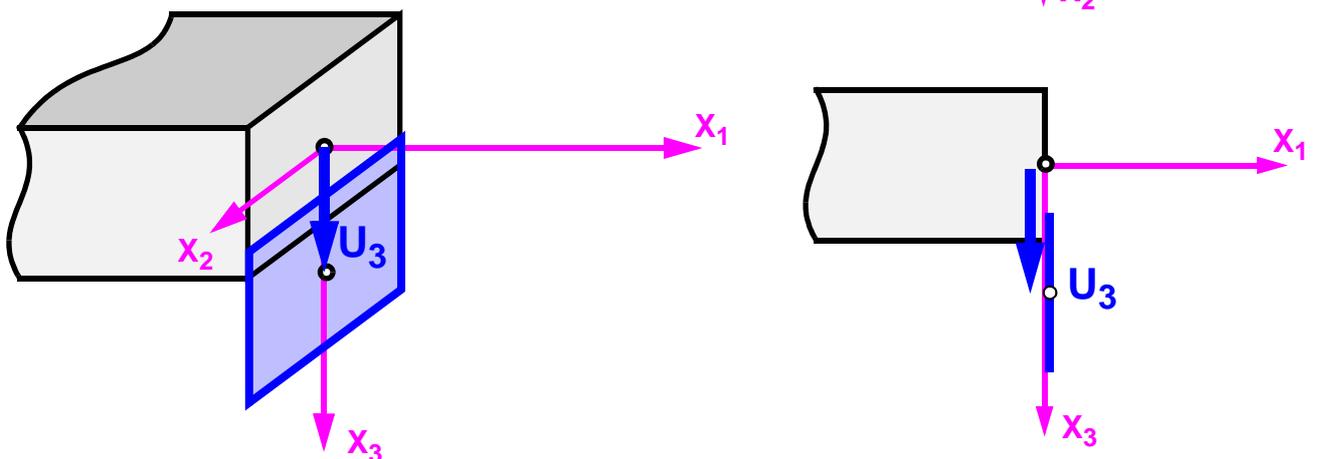


Abb. 6.1: Starrkörperverschiebungsfelder für die einzelnen Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade: Verschiebungskomponenten in  $x_1$ -Richtung

**Starrkörperverschiebung:  $\beta_1$** **Starrkörperverschiebung:  $U_2$** **Starrkörperverschiebung:  $U_3$** 

*Abb. 6.2: Starrkörperverschiebungsfelder für die einzelnen Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade: Verschiebungskomponenten in  $X_2$ - $X_3$ -Richtung*

### 6.2.1.3 Beschreibung des lokalen 3D-Teilverschiebungsfeldes des Stabkörpers

Die lokalen 3D-Teilverschiebungsfelder sind zunächst unbekannte Verformungsfelder. Diese folgen ebenfalls der Produktdarstellung und der strikten Trennung nach Querschnittsverwölbungen und den echten Querschnittsverformungen.

Im Gegensatz dazu stellen die Einträge der Querschnittsinterpolationsmatrix  $\mathbf{A}_0$  für den Starrkörperanteil die bekannten Verformungsfelder über den Querschnitt dar, siehe Glg. 6-2.b. Diese beschreiben den polaren Querschnittsverformungszustand des Querschnitts unter Einhaltung des ebenen Stabquerschnitts.

Die lokalen 3D-Teilverschiebungsfelder stellen über den Starrkörperanteil der Querschnitts kinematik hinausgehende additive Verformungsfelder des Querschnitts dar. Diese sind zur Beschreibung der exakten 3D-Kinematik des 3D-Kontinuums erforderlich.

Die Wölbverformungsfelder  $\Omega_1$ - $\Omega_3$  stellen über den Stabquerschnitt definierte normierte Verschiebungsfelder dar. Sie geben ausschließlich den Formverlauf über den Stabquerschnitt an. Unter Normierung wird in diesem Zusammenhang die Skalierung des Querschnittsverformungsfeldes verstanden. Besteht der Querschnitt aus mehreren Querschnittsteilen, dann besteht jedes Wölbverformungsfeld ebenfalls nur aus einer über den gesamten Querschnitt definierten Verlaufsfunktion.

Die lokalen Querschnittsverformungen können grundsätzlich mit beliebiger Anzahl ins Spiel gebracht werden, wobei stets ein Dreierpaket  $\Omega_1$ - $\Omega_3$  mit einem Systemfreiheitsgrad  $\psi$  zusammenhängt. Dies resultiert aus der Tatsache, dass aus in Stablängsrichtung veränderlichen Querschnittsverwölbungen begleitende Querschnittsverformungen auftreten, wobei diese Koppelung durch die materiellen Stabeigenschaften beeinflusst wird. Die gesamte Herleitung der Grundgleichungen wird für ein solches Dreierpaket  $\Omega_1$ - $\Omega_3$  mit einem zugehörigen Systemfreiheitsgrad  $\psi$  gezeigt. Durch das Einführen eines Matrizenelements  $\Omega$  für das relative 3D-Teilverschiebungsfeld und eines Vektorfeldes für die Systemfreiheitsgrade  $\psi$  wird die Darstellung der Grundgleichungen in vollem Umfang für eine beliebige Anzahl an 3D-Einzelverschiebungsfeldern erreicht.

$$\mathbf{u}_{3D,\Omega} = \Omega(X_2, X_3) \cdot \psi(X_1) = \begin{bmatrix} \Omega_1(X_2, X_3) \\ \Omega_2(X_2, X_3) \\ \Omega_3(X_2, X_3) \end{bmatrix} \cdot \psi(X_1) \quad [6-3.a]$$

mit dem lokalen relativen 3D-Teilverschiebungsfeld

$$\Omega(X_2, X_3) = \begin{bmatrix} \Omega_1(X_2, X_3) \\ \Omega_2(X_2, X_3) \\ \Omega_3(X_2, X_3) \end{bmatrix} \quad [6-3.b]$$

- $\Omega_1$  Wölbverformungsfelder für die axiale Querschnittsverwölbung des Stabquerschnitts, d. h. Verschiebungskomponenten senkrecht zur Querschnittsebene
- $\Omega_2, \Omega_3$  Wölbverformungsfelder für die echte Querschnittsverformung des Stabquerschnitts, d. h. Verschiebungskomponenten parallel zur Querschnittsebene

### 6.2.1.4 Darstellung des Gesamtverschiebungsfeldes

Das gesamte 3D-Verschiebungsfeld setzt sich aus den globalen und den lokalen 3D-Teilverschiebungsfeldern zusammen. Das gesamte 3D-Verschiebungsfeld ist durch das Produkt aus der gesamten Querschnittsinterpolationsmatrix und dem erweiterten Stabverformungsparameter definiert. Diese Art der Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes wird auch von Pilkey & Wunderlich (1994, S. 671) verwendet, wobei in dieser Arbeit die Querschnittsinterpolationsmatrix zusätzlich um die echten 3D-Querschnittsverformungen erweitert wird.

$$\mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{3D,0} + \mathbf{u}_{3D,\Omega} = \mathbf{u}_{glob} + \mathbf{u}_{lok} \quad [6-4.a]$$

$$\mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{3D,0} + \mathbf{u}_{3D,\Omega} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 & 0 & 0 & 0 & \Omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_3 & \Omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 & \Omega_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_u} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ U_2 \\ U_3 \\ \beta_1 \\ \psi \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

bekannte globale 3D-Einzelverschiebungsfelder

unbekannte relative 3D-Einzelverschiebungsfelder

[6-4.b]

$$\mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{3D,0} + \mathbf{u}_{3D,\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,\perp} & \vdots & \mathbf{A}_{0,\parallel} & \vdots & \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{0,\perp} \\ \mathbf{u}_{0,\parallel} \\ \psi \end{bmatrix} \quad [6-4.c]$$

$$\mathbf{u}_{3D}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{3D,0} + \mathbf{u}_{3D,\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{A}_u \cdot \mathbf{u} \quad [6-4.d]$$

$\mathbf{A}_u$  Querschnittsinterpolationsmatrix für den Stabverformungsparameter des Stabquerschnitts  
 $\mathbf{u}$  erweiterter Stabverformungsparameter des Stabquerschnitts

### 6.2.2 Strukturiertes 3D-Gesamtverzerrungsfeld für den Stabquerschnitt

Für das strukturierte 3D-Gesamtverzerrungsfeld gelten alle formalen Grundlagen analog denen, die auch für die Definition des 3D-Verschiebungsfeldes verwendet wurden. Im Sinne der durchgängigen Herleitung sind alle formalen Beziehungen für die 3D-Verzerrungen basierend auf den strukturierten hierarchisch geordneten Verschiebungsansätzen zu definieren. Durch die Ableitung der 3D-Verschiebungen nach den entsprechenden Querschnittskordinaten bzw. nach der Stabachsenkoordinate berechnen sich die Normal- und die Schubverzerrungen im 3D-Kontext.

### 6.2.2.1 Unstrukturiertes 3D-Gesamtverzerrungsfeld für den Stabquerschnitt

Der Ausgangspunkt für die Herleitung der Grundgleichungen liegt in der unstrukturierten Darstellung des 3D-Verzerrungsfeldes. Die unstrukturierte Darstellung des 3D-Gesamtverzerrungsfeldes weist die in Glg. 6-5 dargestellte Anordnung der einzelnen 3D-Verzerrungskomponenten auf. Das Ordnungsprinzip der Verzerrungen reiht in konsequenter Weise die Normalverzerrungen und die Schubverzerrungen mit steigendem Index nacheinander, was zu einer anschaulichen und kompakten Darstellung der Differentialoperatormatrix führt. Der Index **US** deutet auf die unstrukturierte Darstellungform hin.

$$\mathbf{e}_{3D, US} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D, N} \\ \mathbf{B}_{3D, S} \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{u}_{3D, 0} + \mathbf{u}_{3D, \Omega}) = \mathbf{B}_{3D, US} \cdot \mathbf{u}_{3D} \quad [6-5]$$

In der unstrukturierten Darstellung des 3D-Gesamtverzerrungsfeldes können die Anteile für den Balkenverformungszustand und den Querschnittsverformungszustand mit deren Interaktionsbeziehungen nur schwer verdeutlicht werden. Aus diesem Grund erscheint die strukturierte Darstellung für das 3D-Gesamtverzerrungsfeld sinnvoll.

### 6.2.2.2 Strukturiertes 3D-Gesamtverzerrungsfeld für den Stabquerschnitt

Die Darstellung der strukturierten 3D-Gesamtverzerrungsfelder für den 3D-Stabquerschnitt in Abhängigkeit des 3D-Gesamtverschiebungsfeldes  $\mathbf{u}_{3D}$  definiert sich durch die folgenden zwei Strukturierungen des Gesamtproblems.

- Strukturierung I: Ordnung der 3D-Verzerrungen in die „ $\perp$ “- und „ $\parallel$ “-Anteile
- Strukturierung II: Einbau des hierarchisch geordneten Verformungsansatzes

- **Strukturierung I: Ordnung der 3D-Verzerrungen in die „ $\perp$ “- und „ $\parallel$ “-Anteile**

Die Strukturierung des 3D-Gesamtverzerrungsfeldes wird durch die gezielte separiert blockartige Anordnung der Verzerrungskomponenten für den „ $\perp$ “-Anteil  $\mathbf{e}_{3D, \perp}$  (Querschnittsverwölbungen) und des „ $\parallel$ “-Anteils (echtes Querschnittsverformungsproblem)  $\mathbf{e}_{3D, \parallel}$  erreicht.

$$\mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D, \perp} \\ \mathbf{e}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D, \perp} \\ \mathbf{B}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D, \perp} & \mathbf{B}_{3D, c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_{3D} \quad [6-6.a]$$

Die mit   gekennzeichneten Einträge in der Differentialoperator-Matrix  $\mathbf{B}_{3D, c}$  stellen dabei die Quelle einer möglichen Interaktion der QS-Verwölbungsfelder ( $\perp$ ) und der QS-Verformungsfelder ( $\parallel$ ) dar. Zu beachten ist dabei, dass die 3D-Balkenverzerrungen „ $\perp$ “ durch in Stablängsrichtung veränderliche echte Querschnittsverformungen beeinflusst werden können. In  $X_1$ -Richtung veränderliche echte Querschnittsverformungen treten beispielsweise bei linearem Biegemomentenverlauf in Erscheinung. Wie in Glg. 6-6.a ersichtlich, entstehen in entgegengesetzter Richtung aus möglichen Querschnittsverwölbungen unter keinen Umständen Querschnittsverzerrungen, „ $\parallel$ “.

- **Strukturierung II: Einbau des hierarchisch geordneten Verformungsansatzes**

Für die Darstellung des 3D-Gesamtverzerrungsfeldes wird durch Implementierung der hierarchisch geordneten 3D-Teilverschiebungsfelder eine Trennung der globalen und lokalen Verzerrungsanteile des 3D-Verzerrungsfeldes erreicht.

$$\mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D, \perp} \\ \mathbf{e}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D, \perp, 0 + \Omega} \\ \mathbf{e}_{3D, \parallel, 0 + \Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D, \perp, 0} \\ \mathbf{e}_{3D, \parallel, 0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D, \perp, \Omega} \\ \mathbf{e}_{3D, \parallel, \Omega} \end{bmatrix} \quad [6-6.b]$$

$$\mathbf{e}_{3D} = \mathbf{B}_{3D} \cdot \mathbf{u}_{3D} = \mathbf{B}_{3D} \cdot (\mathbf{u}_{3D, 0} + \mathbf{u}_{3D, \Omega}) \quad [6-6.c]$$

$\mathbf{e}_{3D}$  strukturiertes 3D-Verzerrungsfeld des Gesamtquerschnitts

$\mathbf{B}_{3D}$  Differentialoperatormatrix

Für die weiteren Herleitungsschritte wird die Differentialoperatormatrix in, nach den Ableitungsvorschriften der einzelnen Koordinatenrichtungen, getrennter Form dargestellt. Dies macht Sinn, da in weiterer Folge Ableitungen nach der Stablängsrichtung ( $X_1$ ) und nach den Querschnittskoordinaten ( $X_2$ - $X_3$ ) in getrennter Form erforderlich sind. Die „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ separierte Darstellungsform bleibt dabei konsequent erhalten. Die Differentialoperatormatrix wird problemspezifisch in unterschiedlichen alternativen Darstellungsformen benötigt, wobei als oberstes Ziel stets die kompakte Darstellung der Grundgleichungen Priorität hat. Die alternativen gleichberechtigten Darstellungsformen werden im Folgenden für die beiden Anteile „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ dargestellt. Diese

Darstellungsformen wurden unter Punkt 4.2.2 im Detail erläutert.

• **Differentialoperatormatrix für den „⊥“-Anteil**

Die Differentialoperatormatrix für den „⊥“-Anteil wird durch die folgenden beiden Anteile für die Ableitungen nach der Koordinate  $X_1$  sowie für Ableitungen nach den Koordinaten  $X_2$  und  $X_3$  in getrennter Form dargestellt. Die mit   gekennzeichneten Matrixeinträge weisen auf Koppelterme der „⊥“- und „||“-Zustände hin, in diesem Fall treten Koppelungen zwischen den beiden Zuständen auf.

$$\mathbf{B}_{3D, \perp} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{3D, \perp, 1} + \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \quad [6-6.d]$$

$$\mathbf{B}_{3D, \perp} = \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \quad [6-6.e]$$

$$\text{mit } \mathbf{B}_{3D, \perp, 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6-6.f]$$

• **Differentialoperatormatrix für den „||“-Anteil**

Die Differentialoperatormatrix für den „||“-Anteil wird durch die folgenden beiden Anteile für die Ableitungen nach der Koordinate  $X_1$  sowie für Ableitung nach den Koordinaten  $X_2$  und  $X_3$  dargestellt. Die mit   gekennzeichneten Matrixeinträge weisen auf Koppelterme der „⊥“- und „||“-Zustände hin, in diesem Fall treten keine Koppelungen auf.

$$\mathbf{B}_{3D, ||} = \mathbf{B}_{3D, ||, 2+3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{3D, ||, 1} = \mathbf{0} \quad [6-6.g]$$

**6.2.2.3 Berechnung des 3D-Verzerrungsfeldes für den QS-Verwölbungsanteil: „⊥“-Zustand**

Im Rahmen der Strukturierung II wird der hierarchisch geordnete 3D-Verschiebungsansatz verwendet,

um die 3D-Verzerrungen in der erwähnten strukturierten Darstellungsform auszudrücken.

Das 3D-Verzerrungsfeld für den Balkenverformungszustand „ $\perp$ “ wird im Folgenden behandelt:

$$\mathbf{e}_{3D,\perp} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} \quad [6-7.a]$$

Im Rahmen der Herleitungen wird die Differentialoperatormatrix separiert nach den Ableitungsvorschriften verwendet. Der 3D-Verschiebungsansatz wird getrennt nach den Anteilen der globalen und lokalen 3D-Kinematik für die Berechnung der 3D-Verzerrungen  $\mathbf{e}_{3D,\perp}$  verwendet.

$$\mathbf{e}_{3D,\perp} = \mathbf{B}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{u}_{3D} = \mathbf{B}_{3D,\perp} \cdot (\mathbf{u}_{3D,0} + \mathbf{u}_{3D,\Omega}) \quad [6-7.b]$$

$$\mathbf{e}_{3D,\perp} = (\mathbf{B}_{3D,\perp,1} + \mathbf{B}_{3D,\perp,2+3}) \cdot (\mathbf{u}_{3D,0} + \mathbf{u}_{3D,\Omega}) \quad [6-7.c]$$

$$\mathbf{e}_{3D,\perp} = \left( \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D,\perp,2+3} \right) \cdot (\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\psi}) \quad [6-7.d]$$

Der Übersicht halber werden die globalen und lokalen Anteile der 3D-Verzerrungsmatrix des Balkenverformungszustands in getrennter Weise ermittelt. Diese ergeben sich unter Anwendung der Rechenregeln für die Multiplikationen in Glg. 6-7.d wie folgt:

$$\mathbf{e}_{3D,\perp} = \mathbf{e}_{3D,\perp,0} + \mathbf{e}_{3D,\perp,\Omega} \quad [6-7.e]$$

$$\mathbf{e}_{3D,\perp} = \left( \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D,\perp,2+3} \right) \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \left( \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D,\perp,2+3} \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\psi} \quad [6-7.f]$$

Durch Einsetzen aller bekannten Größen, dies sind die Differentialoperatormatrizen und die Querschnittsinterpolationsmatrizen für den globalen und lokalen Anteil, kann der direkte Zusammenhang zwischen den 3D-Verzerrungen  $\mathbf{e}_{3D}$  und dem Stabverformungsparameter  $\mathbf{u}$  gewonnen werden.

• **3D-Verzerrungsfelder des „⊥“-Anteil der Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade (globaler Anteil)**

Der 3D-Verzerrungsanteil für den 3D-Balkenverzerrungszustand aus den globalen Starrkörperanteilen des Stabverformungsparameters wird wie folgt ermittelt:

$$\mathbf{e}_{3D, \perp} = \underbrace{\left( \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \right) \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0}_{\mathbf{e}_{3D, \perp, 0}} + \underbrace{\left( \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{e}_{3D, \perp, \Omega}} \quad [6-8.a]$$

Auf Grund der produktartigen Darstellung des 3D-Verschiebungsansatzes liegen bekannterweise eindeutige Koordinatenabhängigkeiten der einzelnen Gleichungsbestandteile vor: Die Querschnittsinterpolationsmatrix  $\mathbf{A}_0$  weist ausschließlich eine Abhängigkeit von den Querschnittskordinaten, der Stabverformungsparameter  $\mathbf{u}$  ausschließlich eine Abhängigkeit von der Stabachsenkoordinate auf. Die Anwendung der Ableitungsvorschrift nach der Stabachsenkoordinate kann auf den Stabverformungsparameter direkt angewendet werden. Für die kompakte Darstellung der Ableitungen nach der Koordinate  $X_1$  gilt:

$$\frac{\partial}{\partial X_1} = ( )' \quad [6-8.b]$$

$$\mathbf{e}_{3D, \perp, 0} = \left( \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \right) \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0' \quad [6-8.c]$$

Für die Ableitung der Querschnittsinterpolationsmatrix  $\mathbf{A}_0$  nach der oben genannten Vorschrift gilt:

$$\mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \cdot \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6-8.d]$$

In zusammengefasster Darstellung lässt sich das 3D-Verzerrungsfeld für den globalen Anteil am Balkenverformungszustand folgendermaßen anschreiben:

$$\mathbf{e}_{3D, \perp, 0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ U_2 \\ U_3 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \\ U_2' \\ U_3' \\ \beta_1' \end{bmatrix} \quad [6-8.e]$$

Werden die beiden Anteile in geeigneter Weise kombiniert, dann ergibt sich der stabachsenbezogene Verzerrungsparameter wie folgt:

$$\mathbf{e}_{3D,\perp,0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_0} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \\ U_2' - \beta_3 \\ U_3' + \beta_2 \\ \beta_1' \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_0} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \quad [6-8.f]$$

$$\mathbf{e}_{3D,\perp,0} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \quad [6-8.g]$$

$\mathbf{A}_0$  Verschiebungs- und zugleich Verzerrungsinterpolationsmatrix für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade des Stabquerschnitts

$\mathbf{e}_0$  Stabachsenbezogener Stabverzerrungsparameter für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade

### Darstellung der stabachsenbezogenen Stabverzerrungsparameter

Der stabachsenbezogene Verzerrungsparameter lässt sich in einfacher Weise durch die Matrizenmultiplikation der Differentialoperatormatrix für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade mit dem Stabverformungsparameter darstellen.

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} U_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \\ U_2' - \beta_3 \\ U_3' + \beta_2 \\ \beta_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ( )' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ( )' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ( )' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ( )' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ( )' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ( )' \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_0} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ U_2 \\ U_3 \\ \beta_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_0} = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \quad [6-8.h]$$

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \quad [6-8.i]$$

$\mathbf{B}_0$  Differentialoperatormatrix der Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik

Für die einzelnen Verzerrungsmaße des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters gelten die folgenden formalen allgemein bekannten Beziehungen:

$$E_{11,0} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = U_1' \quad ; \quad \gamma_{12,0} = \frac{\partial U_2}{\partial X_1} - \beta_3 = U_2' - \beta_3 \quad ; \quad \gamma_{13,0} = \frac{\partial U_3}{\partial X_1} + \beta_2 = U_3' + \beta_2 \quad [6-8.j]$$

$$\kappa_1 = \frac{\partial \beta_1}{\partial X_1} = \beta_1' \quad ; \quad \kappa_2 = \frac{\partial \beta_2}{\partial X_1} = \beta_2' \quad ; \quad \kappa_3 = \frac{\partial \beta_3}{\partial X_3} = \beta_3' \quad [6-8.k]$$

Durch Einsetzen von Glg. 6-8.h in Glg. 6-8.g gilt für die allgemeine Darstellung des 3D-Verzerrungsfeldes des „⊥“-Anteil der Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade (globaler Anteil):

$$\mathbf{e}_{3D, \perp, 0} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{A}_0(X_2, X_3) \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{u}_0(X_1) \quad [6-8.l]$$

• **3D-Verzerrungsfelder des „⊥“-Anteil der relativen QS-Verformungsfelder**

Der 3D-Verzerrungsanteil für den 3D-Balkenverzerrungszustand aus den lokalen Anteilen des Stabverformungsparameters wird wie folgt ermittelt:

$$\mathbf{e}_{3D, \perp} = \underbrace{\left( \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \right) \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0}_{\mathbf{e}_{3D, \perp, 0}} + \underbrace{\left( \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{e}_{3D, \perp, \Omega}} \quad [6-9.a]$$

Unter Beachtung der Eigenschaften aus den Definitionen der produktartigen Darstellung des 3D-Verschiebungsansatzes gilt für den 3D-Verzerrungsanteil des 3D-Balkenverzerrungszustands aus den lokalen Anteilen:

$$\mathbf{e}_{3D, \perp, \Omega} = \left( \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} + \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\psi} = \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\psi}' \quad [6-9.b]$$

$$\mathbf{e}_{3D, \perp, \Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\psi} + \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\psi}' \quad [6-9.c]$$

Werden die beiden Anteile in geeigneter Weise kombiniert, dann ergibt sich der stabachsenbezogene Verzerrungsparameter  $\mathbf{e}_\Omega$  für die lokalen Anteile wie folgt:

$$\mathbf{e}_{3D, \perp, \Omega} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \Omega_1 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} & \Omega_2 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} & \Omega_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\Omega, \perp}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}' \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_\Omega} = \mathbf{A}_{\Omega, \perp} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ \frac{\partial}{\partial X_1} & \cdot \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_\Omega} \cdot \boldsymbol{\psi} = \mathbf{A}_{\Omega, \perp} \cdot \mathbf{b}_\Omega \cdot \boldsymbol{\psi} \quad [6-9.d]$$

Für die Darstellung des stabachsenbezogenen Stabverzerrungsparameters für die Relativverschiebungsfreiheitsgrade des Balkenverformungszustands  $\mathbf{e}_\Omega$  gilt:

$$\mathbf{e}_\Omega = \mathbf{b}_\Omega \cdot \psi \quad [6-9.e]$$

$$\text{mit } \mathbf{e}_\Omega = \begin{bmatrix} \psi \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \kappa_\Omega \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{b}_\Omega = \begin{bmatrix} 1 \\ ( )' \end{bmatrix} \quad [6-9.f]$$

$\mathbf{A}_\Omega$  Verzerrungsinterpolationsmatrix für die Relativverschiebungsfreiheitsgrade der Querschnittskinematik

$\mathbf{e}_\Omega$  Stabachsenbezogener Stabverzerrungsparameter für die Relativverschiebungsfreiheitsgrade

$\mathbf{b}_\Omega$  Differentialoperatorvektor für die Relativverschiebungsfreiheitsgrade

Für die allgemeine Darstellung des 3D-Verzerrungsfeldes des „ $\perp$ “-Anteils der Relativverschiebungsfreiheitsgrade (lokaler Anteil) gilt der folgende formale Zusammenhang:

$$\mathbf{e}_{3D, \perp, \Omega} = \mathbf{A}_{\Omega, \perp} \cdot \mathbf{e}_\Omega = \mathbf{A}_{\Omega, \perp} \cdot \mathbf{b}_\Omega \cdot \psi \quad [6-9.g]$$

• **Zusammenfassung: Darstellung des Gesamtverzerrungsfeldes für den „ $\perp$ “-Anteil**

Nach Gleichung Glg. 6-7.f ergibt sich das 3D-Verzerrungsfeld für den Balkenverzerrungsanteil bei Einarbeitung von Glg. 6-8.1 und Glg. 6-9.g in folgender Form, wobei die Einzelteile zur Gesamtmatrix der Verzerrungsinterpolation und zum Gesamtvektor des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters für den Balkenverzerrungszustand zusammengefasst sind.

$$\mathbf{e}_{3D, \perp} = \mathbf{e}_{3D, \perp, 0} + \mathbf{e}_{3D, \perp, \Omega} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{A}_{\Omega, \perp} \cdot \mathbf{e}_\Omega = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{\Omega, \perp} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_\perp} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_\Omega \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_\perp \cdot \mathbf{e} \quad [6-10.a]$$

Das resultierende 3D-Verzerrungsfeld für den Balkenverzerrungsanteil lässt sich unter Anwendung der folgenden Beziehungen in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Stabverformungsparameters darstellen:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad [6-10.b]$$

$$\mathbf{e}_{3D, \perp} = \mathbf{A}_\perp \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad [6-10.c]$$

mit:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_\Omega \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_\Omega \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \psi \end{bmatrix} \quad [6-10.d]$$

Gegenüber der für den klassischen 3D-Stab bekannten Verzerrungsinterpolationsmatrix sowie der bekannten Differentialoperatormatrix ergibt sich für den um die relativen 3D-Verschiebungsfelder erweiterten 3D-Stab eine erweiterte Verzerrungsinterpolationsmatrix und Differentialoperatormatrix, diese ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{A}_{\perp} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{\Omega, \perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_3 & \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} & \Omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 & \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} & \Omega_3 \end{bmatrix} \quad [6-10.e]$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ( )' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ( )' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ( )' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ( )' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ( )' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ( )' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ( )' \end{bmatrix} \quad [6-10.f]$$

#### 6.2.2.4 Berechnung des 3D-Verzerrungsfeldes für den Querschnittsverformungsanteil: „||“-Anteil

Im Rahmen der Strukturierung II wird der hierarchisch geordnete 3D-Verschiebungsansatz verwendet, um die 3D-Verzerrungen in der erwähnten strukturierten Darstellungsform auszudrücken.

Das 3D-Verzerrungsfeld für den Balkenverformungszustand „||“ wird im Folgenden behandelt:

$$\mathbf{e}_{3D, ||} = \begin{bmatrix} E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [6-11.a]$$

Im Rahmen der Herleitungen wird auch für den echten Querschnittsverformungsanteil – „||“-Anteil – die Differentialoperatormatrix separiert nach den Ableitungsvorschriften und der 3D-Verschiebungsansatz getrennt nach den Anteilen der globalen und lokalen 3D-Kinematik für die Berechnung der 3D-Verzerrungen  $\mathbf{e}_{3D, ||}$  verwendet. Wie aus Glg. 6-6.a ersichtlich, treten in der Differentialoperatormatrix  $\mathbf{B}_{3D, ||}$  keinerlei Ableitung nach der Stablängskoordinate auf:

$$\mathbf{e}_{3D, ||} = \mathbf{B}_{3D, ||} \cdot \mathbf{u}_{3D} = \mathbf{B}_{3D, ||} \cdot (\mathbf{u}_{3D, 0} + \mathbf{u}_{3D, \Omega}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \Omega \cdot \psi) \quad [6-11.b]$$

Wird die Differentialoperatormatrix  $\mathbf{B}_{3D,||}$  auf die Verschiebungsinterpolationsmatrix der Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade angewendet, lässt sich die folgende Darstellung finden:

$$\mathbf{e}_{3D,||} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_0 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{0}} \quad [6-11.c]$$

$$\mathbf{e}_{3D,||} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \quad [6-11.d]$$

Daraus folgt eine endgültige Darstellung der 3D-Verzerrungen  $\mathbf{e}_{3D,||}$  für den echten Querschnittsverformungszustand als Funktion der Stabverzerrungsparameter  $\mathbf{e}$  und in weiterer Folge als Funktion des stabachsenbezogenen Verformungsparameters.

Zur Zusammenfassung der Einzelzustände, Balkenverformungs- und echter Querschnittsverformungszustand ist für den Anteil des echten Querschnittsverformungszustands die folgende Darstellungsweise in konsistenter Weise zum Verzerrungsanteil aus dem Balkenverformungszustand sinnvoll:

$$\mathbf{e}_{3D,||} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\Omega,||} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_{\Omega} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{||} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{A}_{||} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad [6-11.e]$$

Für die  $\mathbf{A}_{\Omega,||}$  gilt dabei die folgende erweiterte Darstellungsform:

$$\mathbf{A}_{\Omega,||} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} & 0 \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{\Omega} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\kappa}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [6-11.f]$$

### 6.2.2.5 Zusammenfassung für das gesamte strukturierte 3D-Verzerrungsfeld

Werden die beiden einzelnen Verzerrungszustände des Balkenverformungszustands nach Glg. 6-10.a und des Balkenverformungszustands nach Glg. 6-11.e zusammengefasst, dann resultiert daraus die Gesamtdarstellung des 3D-Verzerrungsfeldes für den prismatischen 3D-Stab. Durch diese Zusammenführung entsteht die gesamte Verzerrungsinterpolationsmatrix des Gesamtstabproblems des Stabquerschnitts.

$$\mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D,\perp} \\ \mathbf{e}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\perp} \\ \mathbf{A}_{\parallel} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^*_0 & \mathbf{A}_{\Omega} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{\Omega,\perp} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\Omega,\parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_{\Omega} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} \quad [6-12.a]$$

- A** Verzerrungsinterpolationsmatrix für das Gesamtstabproblem des Stabquerschnitts
- A<sub>⊥</sub>** Verzerrungsinterpolationsmatrix für das Querschnittsverwölbungsproblem
- A<sub>∥</sub>** Verzerrungsinterpolationsmatrix für das Querschnittsverformungsproblem
- A<sub>Ω</sub>** Verzerrungsinterpolationsmatrix für die Relativverschiebungsfreiheitsgrade
- A<sub>0</sub>** Verzerrungsinterpolationsmatrix für die Starrkörperbewegungsfreiheitsgrade

$$\mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \Omega_1 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} & \Omega_2 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} & \Omega_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} & 0 \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \psi \\ \kappa_{\Omega} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} \quad [6-12.b]$$

Die Verzerrungsinterpolationsmatrix des Stabquerschnitts lässt sich durch die folgende Darstellung beschreiben, wobei die Einzelbestandteile durch die folgenden Untermatrizen definiert sind. Die farbliche Kennzeichnung der einzelnen Matrixeinträge bleibt für die Rückverfolgbarkeit ihres Entstehens erhalten.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^*_0 & \mathbf{A}_{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{\Omega,\perp} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\Omega,\parallel} \end{bmatrix} \quad [6-12.c]$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 \end{bmatrix} \quad [6-12.d]$$

$$\mathbf{A}_{\Omega, \perp} = \left[ \mathbf{a}^*_{\Omega, \perp} \quad \boldsymbol{\Omega} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_1 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} & \Omega_2 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} & \Omega_3 \end{bmatrix} \quad [6-12.e]$$

$$\mathbf{A}_{\Omega, \parallel} = \left[ \mathbf{a}^*_{\Omega, \parallel} \quad \mathbf{0} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} & 0 \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} & 0 \end{bmatrix} \quad [6-12.f]$$

$$\mathbf{a}^*_{\Omega, \perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{a}^*_{\Omega, \parallel} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \quad [6-12.g]$$

### 6.3 Konstitution

„Die Beschreibung des Materialverhaltens oder der Konstitution stellt das fehlende notwendige Bindeglied zwischen Spannungen und Verzerrungen dar. Gesucht ist der allgemeine Zusammenhang zwischen Verzerrungen  $\mathbf{E}$  und den Spannungen  $\mathbf{S}$  (Spannungsmatrix)“, Guggenberger (2008, S. 57). Die Arbeit von Lekhnitskii (1981) stellt die materiellen Zusammenhänge für elastische anisotrope Körper eindrücklich dar und dient in diesem Zusammenhang als Grundlage für diese Abhandlung.

Die Herleitung der Gleichungen erfolgt für den Fall der allgemeinen orthotropen Materialdarstellung. Die Struktur der Gleichungen für die isotrope Materialdarstellung lässt sich in einfacher Weise durch Reduktion ermitteln. Auf Grund der Bekanntheit dieser materiellen Beziehungen wird auf die Herleitungen dieser verzichtet. Die Auswirkungen der strukturierten Problemdarstellung auf die Materialsteifigkeitsmatrizen wurden bereits in Kapitel 5 gezeigt.

#### 6.3.1 Strukturierte Darstellung des Materialverhaltens in Materialhauptachsenlage

##### 6.3.1.1 Orthotropes Materialverhalten in strukturierter umgeordneter Darstellung

Die problemadaptierte Darstellung mit Gruppierung der querschnitts-verwölbaffektierten 3D-Verzerrungs- und den zugehörigen 3S-Spannungskomponenten  $\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix}$  und der querschnittsverformungsaffektierten 3D-Verzerrungs- und den zugehörigen 3S-Spannungskomponenten  $\begin{bmatrix} E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}$  erlaubt eine direkte Beurteilung der Koppelungseigenschaften der Querschnittsverwölbungs- und Querschnittsverformungsfelder. Es stellt sich heraus, dass für orthotropes Materialverhalten Zustandskoppelungen durch die Querkontraktionssteifigkeiten  $D_{12}$  und  $D_{13}$  hervorgerufen werden. Eine vollständige Entkoppelung der beiden Anteile „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ ist nur für den Sonderfall der Orthotropie mit  $\nu_{12}=\nu_{13}=0$  möglich, was im Grunde genommen einem neuen Materialverhalten entspricht. Die Querkontraktionsziffer  $\nu_{23}$  muss dabei nicht Null sein. Für die in Glg. 6-13.a dargestellte Materialsteifigkeitsbeziehung gelten wiederum die Grundlagen aus Punkt 4.3.4.1.

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, MHA} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & D_{12} & D_{13} & 0 \\ 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & D_{22} & D_{23} & 0 \\ D_{31} & 0 & 0 & D_{32} & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [6-13.a]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, MHA} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{3D} \quad [6-13.b]$$

Der Index „c“ in  $\mathbf{D}_{3D, c}$  steht für „coupling“, die Einträge in der Nebendiagonalmatrix beschreiben dabei die möglichen Interaktionen zwischen den Verformungsfeldern „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “. Der Nebendiagonalmatrix  $\mathbf{D}_{3D, c}$  gilt wegen der Koppelungseffekte der zwei Relativverformungsmechanismen „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ bei den weiteren Überlegungen besondere Aufmerksamkeit.

### 6.3.1.2 Isotropes Materialverhalten in strukturierter umgeordneter Darstellung

Die problemadaptierte Darstellung mit Gruppierung der querschnitts-verwölbaffektieren 3D-Verzerrungs- und den zugehörigen 3S-Spannungskomponenten  $\begin{matrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{matrix}$  und der querschnittsverformungsaffektieren 3D-Verzerrungs- und den zugehörigen 3S-Spannungskomponenten  $\begin{matrix} S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{matrix}$  erlaubt eine direkte Beurteilung der Koppelungseigenschaften der Querschnittsverwölbungs- und Querschnittsverschiebungsfelder. Es stellt sich heraus, dass für isotropes Materialverhalten Zustandskoppelungen durch die Querkontraktionssteifigkeiten  $D_{12}$  hervorgerufen werden. Eine vollständige Entkoppelung der beiden Anteile „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ ist nur für den Sonderfall der Isotropie mit  $\nu_{12}=\nu_{13}=0$  möglich, was im Grunde genommen einem neuen Materialverhalten entspricht. Für die in Glg. 6-14.a dargestellten Materialsteifigkeitsbeziehung gelten wiederum die Grundlagen aus Punkt 4.3.4.2.

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, \text{MHA, ISO}} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & D_{12} & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & D_{22} & D_{23} & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & D_{32} & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [6-14.a]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D, \text{MHA, ISO}} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp, \text{ISO}} & \mathbf{D}_{3D, \text{c}, \text{ISO}} \\ \mathbf{D}_{3D, \text{c}, \text{ISO}}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel, \text{ISO}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{3D} \quad [6-14.b]$$

Der Index „c“ in  $\mathbf{D}_{3D, \text{c}}$  steht für „coupling“, die Einträge in der Nebendiagonalmatrix beschreiben dabei die möglichen Interaktionen zwischen den Verformungsfeldern „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “. Der Nebendiagonalmatrix  $\mathbf{D}_{3D, \text{c}}$  gilt wegen der Koppelungseffekte der zwei Relativverformungsmechanismen „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ bei den weiteren Überlegungen besondere Aufmerksamkeit.

### 6.3.2 Drehung der Materialhauptachsen um die $X_1$ -Achse

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & D_{12} & D_{13} & X \\ 0 & D_{44} & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & D_{22} & D_{23} & X \\ D_{31} & 0 & 0 & D_{32} & D_{33} & X \\ X & 0 & 0 & X & X & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [6-15.a]$$

Die in Glg. 6-15.a dargestellte Materialbeziehung (Belegung der Materialsteifigkeitsmatrix) gilt für den Fall elastischer Isotropie/Orthotropie mit einer der Materialhauptachsen parallel zur  $X_1$ -Achse. Die  $X'_2$ - $X'_3$ -Materialhauptachsen in der Querschnittsebene können dabei um den Winkel  $\alpha$  um die  $X_1$ -Achse beliebig verdreht sein. In diesem Fall entstehen zusätzliche mit  $X$  bezeichnete Koppelterme in der Materialsteifigkeitsmatrix.

Folgende Interpretation gilt: Durch die Drehung der Materialhauptachsen um den Winkel  $\alpha$  um die  $X_1$ -Achse geht die ursprüngliche Normal-Schubspannungsentkoppelung ohne Veränderung des eigentlichen orthotropen Materialverhaltens verloren. Ausgedrückt wird dieses Verhalten durch Koppelung der axialen Normalspannungen  $S_{11}$  mit der Querschnittsschubverzerrung  $\gamma_{23}$ . Somit ist das dadurch entstandene anisotrope Materialverhalten nicht auf den ersten Blick als eigentliches orthotropes Materialverhalten erkennbar.

Die zufolge der verdrehten Materialhauptachsen hinzukommenden  $X$ -Terme bewirken zusätzliche Koppelungen über die Koppelungsmatrix  $D_{3D,c}$  von den 3D-Querschnittsverwölbungs- und den Querschnitts-Verformungsfeldern.

$$\mathbf{s}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D,\perp} \\ \mathbf{s}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D,\perp} & \mathbf{D}_{3D,c} \\ \mathbf{D}_{3D,c}^T & \mathbf{D}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D,\perp} \\ \mathbf{e}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad [6-15.b]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D,\perp} \\ \mathbf{s}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D,\perp} \\ \mathbf{e}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} \quad \text{wobei gilt:} \quad [6-15.c]$$

$$\mathbf{s}_{3D,\perp} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{s}_{3D,\parallel} = \begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_{3D,\perp} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_{3D,\parallel} = \begin{bmatrix} E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [6-15.d]$$

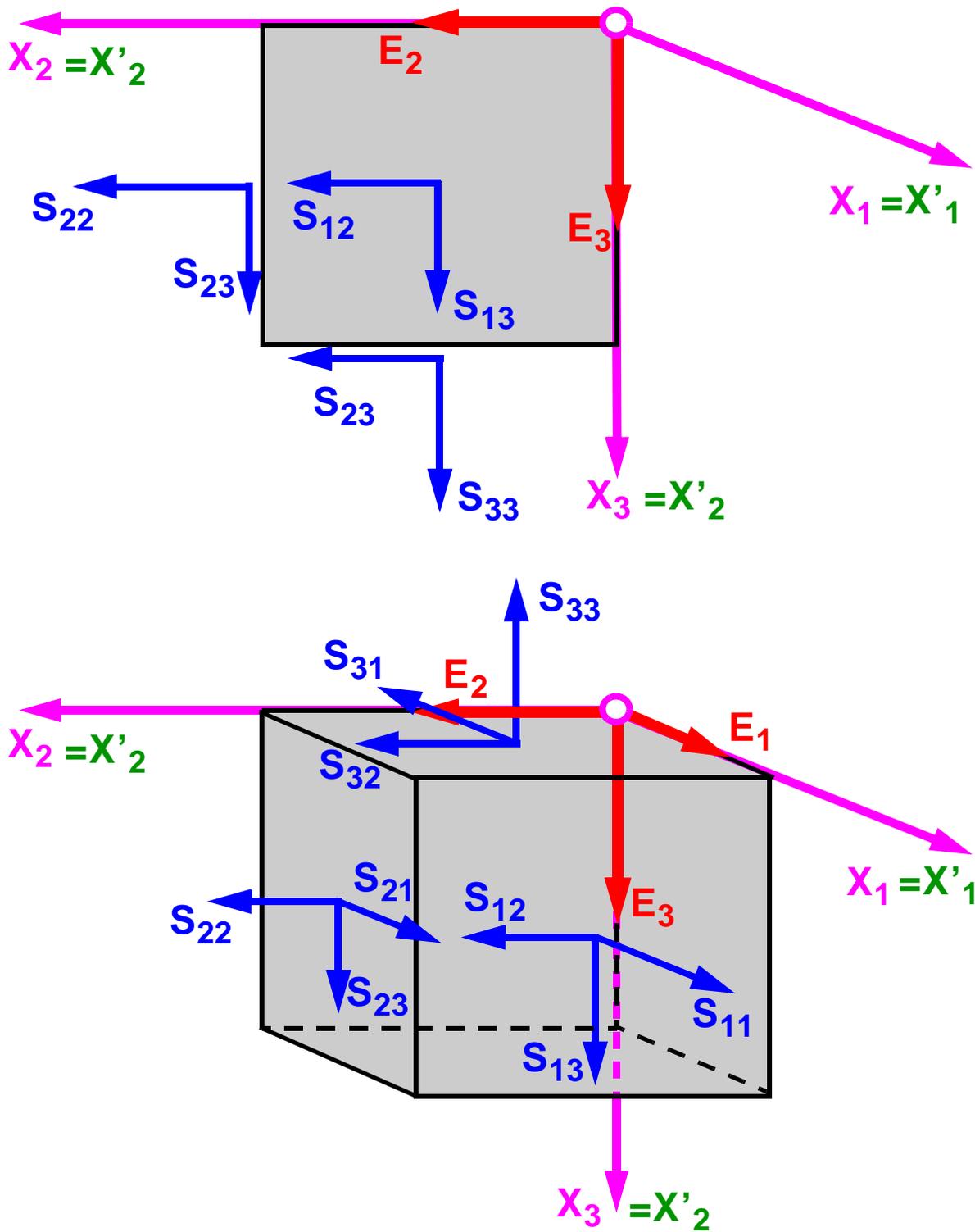


Abb. 6.3: 3D-Spannungen für eine Drehung um die  $X_1$ -Achse

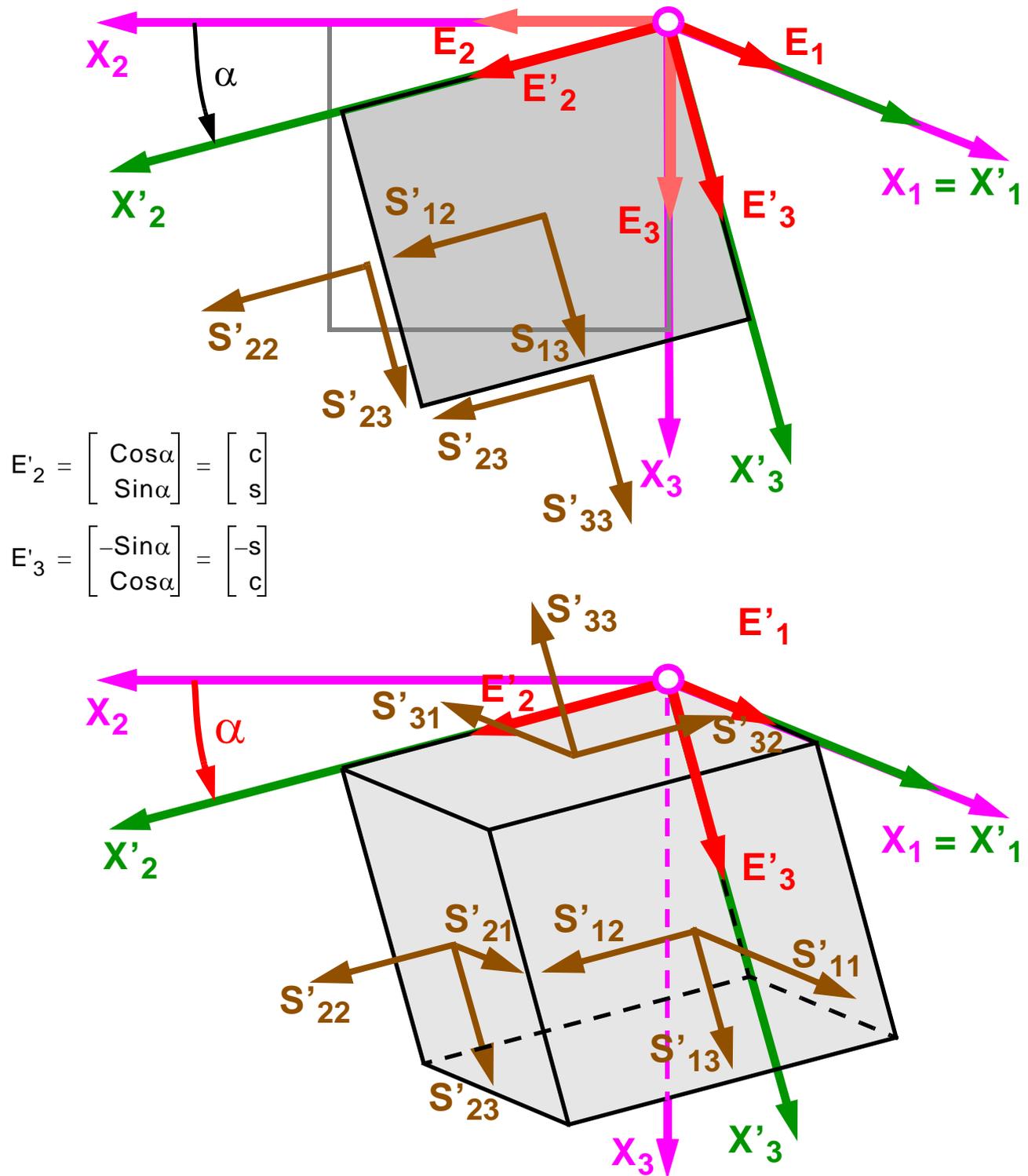


Abb. 6.4: 3D-Spannungen für eine Drehung um die  $X_1$ -Achse

### 6.3.2.1 Transformationsbeziehungen für Materialdrehungen um die $X_1$ -Achse

Die Drehung der Materialhauptachsen wird im Folgenden am Beispiel der linear elastischen Orthotropie gezeigt. Unter Zugrundelegung der linear elastischen isotropen Materialsteifigkeitsmatrix in Hauptachsenlage gelten die Transformationsbeziehungen sinngemäß.

Die Transformationsvorschrift für die Materialsteifigkeitsmatrix unter Zugrundelegung des elastisch-orthotropen Materialverhaltens mit den lokalen Materialhauptachsen lautet:

$$\mathbf{s}_{3D} = \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}'_{3D} \cdot \mathbf{T}^T}_{\mathbf{D}_{3D}} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_\perp & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\parallel \end{bmatrix} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{3D,\perp} & \mathbf{D}'_{3D,c} \\ \mathbf{D}'_{3D,c}^T & \mathbf{D}'_{3D,\parallel} \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}'_{3D}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\perp^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\parallel^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{3D}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D,\perp} \\ \mathbf{e}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} \quad [6-16.a]$$

Die zugrunde gelegte lokale Materialsteifigkeitsmatrix des orthotropen Materialverhaltens, definiert in Hauptachsenlage für die problemadaptierte umgeordnete Darstellung, lautet:

$$\mathbf{D}'_{3D} = \mathbf{D}_{3D, MHA} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{11} & 0 & 0 & \mathbf{D}'_{12} & \mathbf{D}'_{13} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}'_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}'_{55} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}'_{21} & 0 & 0 & \mathbf{D}'_{22} & \mathbf{D}'_{23} & 0 \\ \mathbf{D}'_{31} & 0 & 0 & \mathbf{D}'_{32} & \mathbf{D}'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}'_{66} \end{bmatrix} \quad [6-16.b]$$

Die Transformationen der 3D-Verzerrungen und der 3D-Spannungen lassen sich für die beiden Anteile „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ in getrennter Weise, wie im Folgenden gezeigt, durchführen.

Die Einheitsvektoren für das gedrehte Koordinatensystem, siehe Abb. 6.4, sowie die daraus resultierende Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^T$  für die Materialtransformationen sind wie folgt definiert.

$$\mathbf{e}'_2 = \begin{bmatrix} \text{Cos}\alpha \\ \text{Sin}\alpha \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}'_3 = \begin{bmatrix} -\text{Sin}\alpha \\ \text{Cos}\alpha \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\alpha & \text{Sin}\alpha \\ -\text{Sin}\alpha & \text{Cos}\alpha \end{bmatrix} \quad [6-17]$$

Für die Herleitungen werden folgende Abkürzungen für die trigonometrischen Funktionen verwendet:

$$\text{Cos}\alpha = \mathbf{c} \quad \text{und} \quad \text{Sin}\alpha = \mathbf{s}$$

### 6.3.2.2 Drehung des „ $\perp$ “-Anteil um die Koordinatenachse $X_1$ :

Aus der Transformationsmatrix ist die unabhängige Transformation der Normal- und Schubspannungskomponenten sowie der Normal- und Schubverzerrungskomponenten erkennbar, es gilt:

**Achsendrehung für die 3D-Verzerrungen:  $E \rightarrow E'$**

$$\mathbf{e}'_{3D,\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{3D,\perp} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^T_{\perp,E}} \cdot \mathbf{e}_{3D,\perp} = \mathbf{T}^T_{\perp,E} \cdot \mathbf{e}_{3D,\perp} \quad [6-18.a]$$

**Achsendrehung für die 3D-Spannungen:  $E' \rightarrow E$**

$$\mathbf{s}_{3D,\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \mathbf{s}'_{3D,\perp} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{\perp,S}} \cdot \mathbf{s}'_{3D,\perp} = \mathbf{T}_{\perp,S} \cdot \mathbf{s}'_{3D,\perp} \quad [6-18.b]$$

**Zusammengefasst gilt für die Transformationsmatrix:  $\mathbf{T}_{\perp}$**

$$\mathbf{T}_{\perp} = \mathbf{T}_{\perp,E} = \mathbf{T}_{\perp,S} \quad [6-18.c]$$

### 6.3.2.3 Drehung des „ $\parallel$ “-Anteil um eine Koordinatenachse:

Die Einheitsvektoren für das gedrehte Koordinatensystem sowie die daraus resultierende Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^T$  sind wie folgt definiert:

$$\mathbf{e}'_2 = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}'_3 = \begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad [6-19]$$

**Achsendrehung für die 3D-Verzerrungen:  $E \rightarrow E'$**

Guggenberger (2008) definiert die Verzerrungstransformation wie folgt:

$$\mathbf{E}'_{3D,\parallel} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{E}_{3D,\parallel} \cdot \mathbf{T} \quad [6-20.a]$$

$$\begin{bmatrix} E'_{22} & E'_{23} \\ E'_{23} & E'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad [6-20.b]$$

$$\mathbf{E}'_{3D,\parallel} = \mathbf{T}^T_{\parallel,E} \cdot \mathbf{E}_{3D,\parallel} \quad [6-20.c]$$

Für die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_{\parallel, E}^T$  gilt in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} E'_{22} \\ E'_{33} \\ E'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{22} \\ E_{33} \\ E_{23} \end{bmatrix} \quad [6-21.a]$$

mit  $E_{23} = \frac{\gamma_{23}}{2}$

$$\begin{bmatrix} E'_{22} \\ E'_{33} \\ \gamma'_{23} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{\parallel, E}^T} \cdot \begin{bmatrix} E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [6-21.b]$$

**Achsendrehung für die 3D-Spannungen:  $E' \rightarrow E$**

$$\mathbf{S}_{3D, \parallel} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}'_{3D, \parallel} \cdot \mathbf{T}^T \text{ unter Anwendung: } \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1} \quad [6-22.a]$$

$$\begin{bmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S'_{22} & S'_{23} \\ S'_{23} & S'_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad [6-22.b]$$

$$\mathbf{s}_{3D, \parallel} = \mathbf{T}_{\parallel, S} \cdot \mathbf{s}'_{3D, \parallel} \quad [6-22.c]$$

Für die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_{\parallel, S}$  gilt in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{\parallel, S}} \cdot \begin{bmatrix} S'_{22} \\ S'_{33} \\ S'_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\parallel, S} \cdot \mathbf{s}'_{3D, \parallel} \quad [6-23.a]$$

**Zusammengefasst gilt für die Transformationsmatrix:  $\mathbf{T}_{\parallel}$**

$$\mathbf{T}_{\parallel} = \mathbf{T}_{\parallel, E} = \mathbf{T}_{\parallel, S} \quad [6-23.b]$$

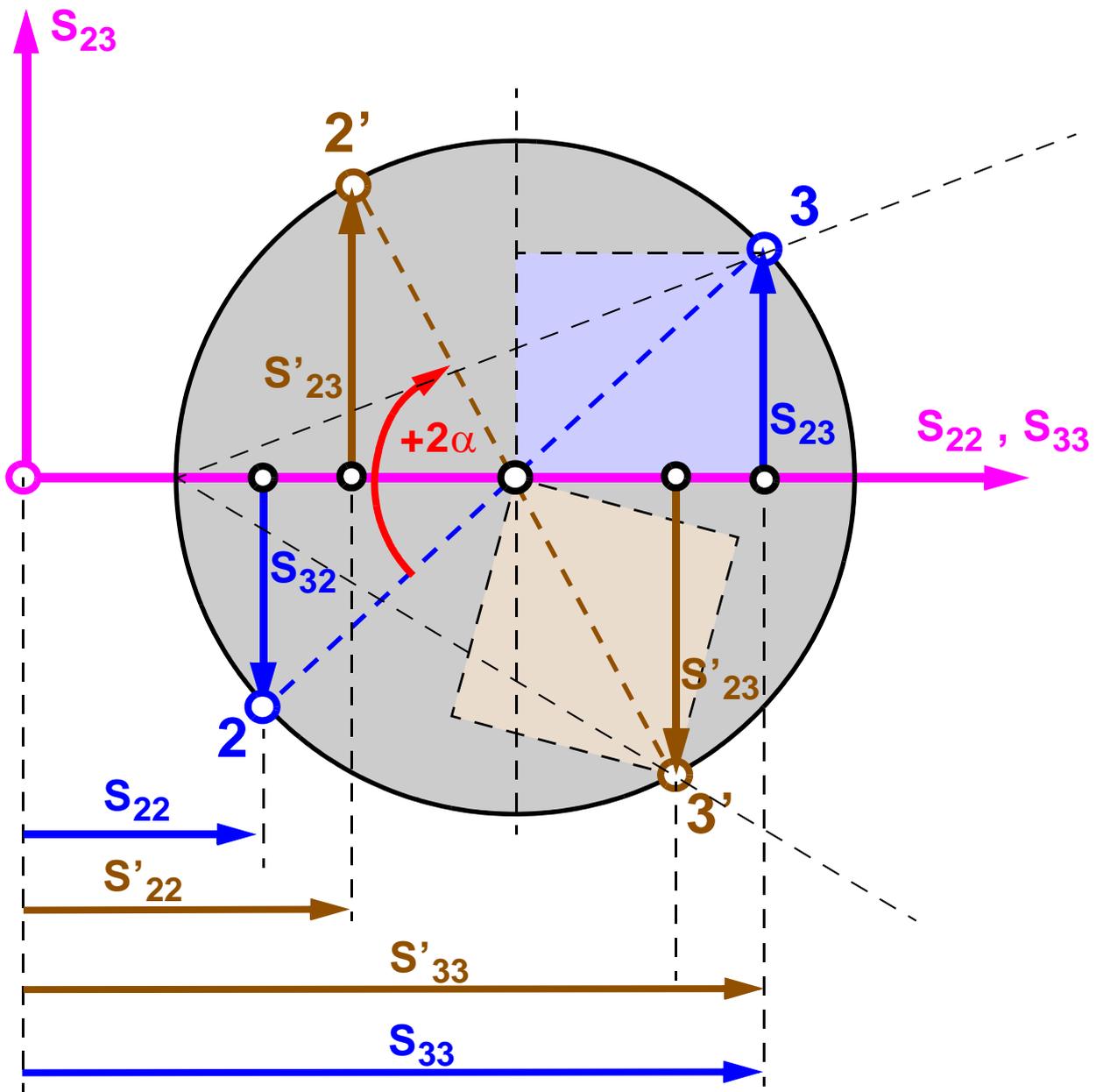


Abb. 6.5: Mohr'scher Spannungskreis (Spannungstransformation)

### 6.3.2.4 Zusammenfassung der Transformationsmatrix für den „⊥“- und „||“-Anteil

Mit den unter den Punkten 6.3.2.2 und 6.3.2.3 hergeleiteten Transformationsbeziehungen für die beiden Anteile der Verzerrungen und der Spannungen ergibt sich die Transformationsmatrix, wie in Lekhnitskii (1981, S. 46) gezeigt, für die problemadaptierte geordnete orthotrope/isotrope globale Materialsteifigkeitsmatrix wie folgt:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\perp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & c & -s & & & \\ 0 & s & c & & & \\ & & & \mathbf{0} & & \\ & & & & c^2 & s^2 & -2sc \\ & & & & s^2 & c^2 & 2sc \\ & & & & sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad [6-24]$$

### 6.3.2.5 Darstellung der transformierten Materialsteifigkeitsmatrix

In Glg. 6-25.b ist die vom lokalen Materialhauptachsensystem in das globale kartesische Bezugssystem gedrehte Materialsteifigkeitsmatrix gezeigt.

$$\mathbf{s}_{3D} = \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}'_{3D} \cdot \mathbf{T}^T}_{\mathbf{D}_{3D}} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\perp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{3D, \perp} & \mathbf{D}'_{3D, c} \\ \mathbf{D}'_{3D, c}^T & \mathbf{D}'_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\perp}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\parallel}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{3D}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D, \perp} \\ \mathbf{e}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \quad [6-25.a]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & D_{12} & D_{13} & D_{16} \\ 0 & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{54} & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & D_{22} & D_{23} & D_{26} \\ D_{31} & 0 & 0 & D_{32} & D_{33} & D_{36} \\ D_{61} & 0 & 0 & D_{62} & D_{63} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [6-25.b]$$

Die durch die Materialdrehung um die  $X_1$ -Achse zustande gekommenen Koppelungsterme  $D_{16} = D_{61}$  verschwinden für den Fall der Gleichheit der Querkontraktionskoppelsteifigkeiten  $D_{12} = D_{13}$ .

### 6.3.3 Global gedrehte orthotrope Materialsteifigkeitsmatrix

Die zugrunde liegende orthotrope Materialsteifigkeitsmatrix in HA-Lage ist in Glg. 6-13.a gegeben.

$$\mathbf{D}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D,\perp} & \mathbf{D}_{3D,c} \\ \mathbf{D}_{3D,c}^T & \mathbf{D}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\perp & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\parallel \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{3D,\perp} & \mathbf{D}'_{3D,c} \\ \mathbf{D}'_{3D,c}^T & \mathbf{D}'_{3D,\parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\perp^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\parallel^T \end{bmatrix} \quad [6-26.a]$$

$$\mathbf{D}_{3D,\perp} = \begin{bmatrix} D'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D'_{44}c^2 + D'_{55}s^2 & (D'_{44} - D'_{55})cs \\ 0 & (D'_{44} - D'_{55})cs & D'_{44}s^2 + D'_{55}c^2 \end{bmatrix} \quad [6-26.b]$$

$$\mathbf{D}_{3D,c} = \begin{bmatrix} D'_{12}c^2 + D'_{13}s^2 & D'_{13}c^2 + D'_{12}s^2 & (D'_{12} - D'_{13})sc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6-26.c]$$

$$\mathbf{D}_{3D,\parallel} = \begin{bmatrix} D_{22} & D_{23} & D_{26} \\ D_{32} & D_{33} & D_{36} \\ D_{62} & D_{63} & D_{66} \end{bmatrix} \quad [6-26.d]$$

$$D_{22} = D'_{22}c^4 + 2(D'_{23} + 2D'_{66})c^2s^2 + D'_{33}s^4 \quad [6-26.e]$$

$$D_{32} = D_{23} = D'_{23}(c^4 + s^4) + (D'_{22} + D'_{33} - 4D'_{66})c^2s^2 \quad [6-26.f]$$

$$D_{62} = D_{26} = (D'_{22} - D'_{23} - 2D'_{66})c^3s^2 + (D'_{23} - D'_{33} + 2D'_{66})c^2s^3 \quad [6-26.g]$$

$$D_{33} = D'_{33}c^4 + 2(D'_{23} + 2D'_{66})c^2s^2 + D'_{22}s^4 \quad [6-26.h]$$

$$D_{66} = D'_{66}(c^4 + s^4) + (D'_{22} - 2D'_{23} + D'_{33} - 2D'_{66})c^2s^2 \quad [6-26.i]$$

$$D_{63} = D_{36} = (D'_{23} - D'_{33} + 2D'_{66})c^3s^2 + (D'_{22} - D'_{23} - 2D'_{66})c^2s^3 \quad [6-26.j]$$

### 6.3.4 Global gedrehte isotrope Materialsteifigkeitsmatrix

Die zugrunde liegende isotrope Materialsteifigkeitsmatrix in HA-Lage ist in Glg. 6-14.a gegeben.

#### 6.3.4.1 Isotropes Materialverhalten: $\nu \neq 0$

$$\mathbf{D}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D,\perp} & \mathbf{D}_{3D,c} \\ \mathbf{D}_{3D,c}^T & \mathbf{D}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\perp & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\parallel \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{3D,\perp,ISO} & \mathbf{D}'_{3D,c,ISO} \\ \mathbf{D}'_{3D,c,ISO}^T & \mathbf{D}'_{3D,\parallel,ISO} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\perp^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\parallel^T \end{bmatrix} \quad [6-27.a]$$

$$\mathbf{D}_{3D,\perp} = \begin{bmatrix} D'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D'_{44} & 0 \\ 0 & 0 & D'_{44} \end{bmatrix} \quad [6-27.b]$$

$$\mathbf{D}_{3D,c} = \begin{bmatrix} D'_{12} & D'_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6-27.c]$$

$$\mathbf{D}_{3D,\parallel} = \begin{bmatrix} D_{22} & D_{23} & D_{26} \\ D_{32} & D_{33} & D_{36} \\ D_{62} & D_{63} & D_{66} \end{bmatrix} \quad [6-27.d]$$

$$D_{22} = D'_{11}(c^4 + s^4) + 2(D'_{12} + 2D'_{44})c^2s^2 \quad [6-27.e]$$

$$D_{32} = D_{23} = D'_{12}(c^4 + s^4) + (2D'_{11} - 4D'_{44})c^2s^2 + D'_{12}s^4 \quad [6-27.f]$$

$$D_{62} = D_{26} = (D'_{11} - D'_{12} - 2D'_{44})c^3s^2 + (D'_{12} - D'_{11} + 2D'_{44})c^2s^3 \quad [6-27.g]$$

$$D_{33} = D'_{11}(c^4 + s^4) + 2(D'_{12} + 2D'_{44})c^2s^2 \quad [6-27.h]$$

$$D_{66} = D'_{44}(c^4 + s^4) + 2(D'_{11} - D'_{12} - D'_{44})c^2s^2 \quad [6-27.i]$$

$$D_{63} = D_{36} = (D'_{12} - D'_{11} + 2D'_{44})c^3s^2 + (D'_{11} - D'_{12} - 2D'_{44})c^2s^3 \quad [6-27.j]$$

6.3.4.2 Isotropes Materialverhalten:  $\nu = 0$

$$\mathbf{D}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\perp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{3D, \perp, ISO} & \mathbf{D}'_{3D, c, ISO} \\ \mathbf{D}'_{3D, c, ISO}^T & \mathbf{D}'_{3D, \parallel, ISO} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\perp}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\parallel}^T \end{bmatrix} \quad [6-28.a]$$

$$\mathbf{D}_{3D, \perp} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad [6-28.b]$$

$$\mathbf{D}_{3D, c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6-28.c]$$

$$\mathbf{D}_{3D, \parallel} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad [6-28.d]$$

Für die einzelnen Materialsteifigkeitsterme gelten die Beziehungen nach Glg. 4-16.b bis Glg. 4-16.d. Für  $\nu = 0$  gilt für den Schubmodul nach Glg. 4-16.d:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{E}{2} \quad [6-28.e]$$

6.3.5 Unstrukturierte ungeordnete Darstellung: Drehung um die  $X_1$ -Achse

Werden die Materialhauptachsen um die  $X_1$ -Achse um einen beliebigen Winkel  $\alpha$  verdreht, so entstehen durch diese Transformation Materialsteifigkeitskoppelsterme, die eine Interaktion der Abscherkomponente  $\gamma_{23}$  (Abscherung der verdrehten Querschnittsebene  $X_2$ - $X_3$ ) mit den axialen Normalspannungskomponenten darstellen. Dies wird durch die Nebendiagonal-Koppelungs-Matrizen der gesamten Materialsteifigkeitsmatrix ausgedrückt. Die Transformationsbeziehungen für eine Materialdrehung bzw. Koordinatendrehung sind unter Punkt 6.3.1 angegeben sowie im Mohr'schen Spannungskreis, siehe Abb. 6.5, dargestellt.

Die einzige, von der Drehung unbeeinflusste Materialsteifigkeitsziffer ist dabei die axiale Materialsteifigkeitskomponente  $D_{11}$ . Alle anderen Materialsteifigkeitsziffern werden durch die Drehung beeinflusst, bzw. entstehen erst durch die Drehung um die  $X_1$ -Achse. Für die Belegung der Materialsteifigkeitsmatrix in unstrukturierter Darstellung gilt:

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & X \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & X \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & D_{55} & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [6-29]$$

- X      Hinzukommende (Koppel)Terme im Falle der Orthotropie mit der  $X_1$ -Achse als eine der Materialhauptachsen bei beliebiger rotierter Lage des  $X'_2$ - $X'_3$ -QS Koordinatensystems ( $X'_2$ - $X'_3$  stellen dabei orthogonale Materialhauptachsen dar)
- $D_{11}$     Axiale Dehnsteifigkeit, diese bleibt als einzige Materialsteifigkeit von der Drehung um die  $X_1$ -Achse unberührt.

### 6.3.6 Erweitertes/adaptiertes Materialgesetz in strukturierter Darstellung

Glg. 6-30.a zeigt ein über das isotrope/orthotrope Materialverhalten hinausgehendes, erweitertes Materialgesetz, das zu keinen zusätzlichen Koppelungen der beiden Anteile „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ führt. Die mit 0 gekennzeichneten Einträge in der Materialsteifigkeitsmatrix beeinflussen zudem bei Drehung der Materialachsen um die  $X_1$ -Achse die anderen Matrixeinträge nicht.

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & D_{12} & D_{13} & X \\ 0 & D_{44} & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & D_{22} & D_{23} & X \\ D_{31} & 0 & 0 & D_{32} & D_{33} & X \\ X & 0 & 0 & X & X & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad [6-30.a]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{3D} \quad [6-30.b]$$

Der Index „c“ in  $\mathbf{D}_{3D, c}$  steht für „coupling“, diese beschreiben dabei die Interaktion zwischen den beiden Verformungsanteilen „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “.

**Zugrunde gelegte lokale Materialsteifigkeitsmatrix**

$$\mathbf{D}_{3D} = \mathbf{D}'_{3D} = \begin{bmatrix}
 D'_{11} & o' & o' & D'_{12} & D'_{13} & 0 \\
 o' & D'_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 o' & 0 & D'_{55} & 0 & 0 & 0 \\
 D'_{21} & 0 & 0 & D'_{22} & D'_{23} & 0 \\
 D'_{31} & 0 & 0 & D'_{32} & D'_{33} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D'_{66}
 \end{bmatrix} \tag{6-31.a}$$

o... stellen jene Steifigkeitsziffern dar, die für ein eigens konstruiertes erweitertes Materialverhalten keine zusätzlichen Koppelungen für die Anteile „⊥“ und „||“ ergeben.

### 6.3.7 Darstellung der 3D-Spannungen

Die 3D-Spannungen werden in sogenannter Block-Matrizenschreibweise in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Stabverzerrungsparameters dargestellt. Der Zusammenhang zwischen den 3D-Spannungen und den 3D-Verzerrungen ist, wie erwähnt, eindeutig durch die Materialsteifigkeitsmatrix gegeben. Die konsequente Trennung der beiden Anteile der Querschnittsverwölbungen und der Querschnittsverformungen gilt auch für die Darstellung der 3D-Spannungen.

#### 6.3.7.1 Gesamtdarstellung der Spannungen

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} \quad [6-32.a]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D, \perp} \\ \mathbf{s}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3D, \perp} \\ \mathbf{e}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \quad [6-32.b]$$

Neben der strukturierten Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes („ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “) wird zusätzlich auch die hierarchisch geordnete Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes in die Darstellung der 3D-Spannungen eingearbeitet. Diese Systematik folgt den Festlegungen nach 6.2.2.2.

$$\mathbf{s}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D, \perp} \\ \mathbf{s}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{\Omega, \perp} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\Omega, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [6-32.c]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D, \perp} \\ \mathbf{s}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{A}_0 & \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{A}_{\Omega, \perp} + \mathbf{D}_{3D, c} \cdot \mathbf{A}_{\Omega, \parallel} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T \cdot \mathbf{A}_0 & \mathbf{D}_{3D, c}^T \cdot \mathbf{A}_{\Omega, \perp} + \mathbf{D}_{3D, \parallel} \cdot \mathbf{A}_{\Omega, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [6-32.d]$$

$$\mathbf{s}_{3D, \perp} = \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + (\mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{A}_{\Omega, \perp} + \mathbf{D}_{3D, c} \cdot \mathbf{A}_{\Omega, \parallel}) \cdot \mathbf{e}_{\Omega} \quad [6-32.e]$$

$$\mathbf{s}_{3D, \parallel} = \mathbf{D}_{3D, c}^T \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + (\mathbf{D}_{3D, c}^T \cdot \mathbf{A}_{\Omega, \perp} + \mathbf{D}_{3D, \parallel} \cdot \mathbf{A}_{\Omega, \parallel}) \cdot \mathbf{e}_{\Omega} \quad [6-32.f]$$

Unter Verwendung eines elastisch-orthotropen Materialverhaltens mit allgemeiner Materialhauptachsenlage und den Poissonzahlen  $\nu_{12} = \nu_{13} = 0$  verschwinden die Koppelterme  $\mathbf{D}_{3D, c}$ , es gilt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D, \perp} \\ \mathbf{s}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{A}_0 & \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{A}_{\Omega, \perp} \\ 0 & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \cdot \mathbf{A}_{\Omega, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [6-32.g]$$

### 6.3.7.2 Aufspaltung der Spannungen in die beiden Anteile 0 und $\Omega$

Analog der Aufbereitung des 3D-Verzerrungsfeldes gilt auch für die Herleitung des 3D-Spannungsvektors die strikte Trennung der Spannungsanteile aus den globalen und lokalen Anteilen der Querschnittskinematik des Stabquerschnitts.

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{s}_{3D,0} + \mathbf{s}_{3D,\Omega} = \mathbf{s}_{3D,0+\Omega} \quad [6-33.a]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D,\perp} \\ \mathbf{s}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D,\perp,0} \\ \mathbf{s}_{3D,\parallel,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D,\perp,\Omega} \\ \mathbf{s}_{3D,\parallel,\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D,\perp,0+\Omega} \\ \mathbf{s}_{3D,\parallel,0+\Omega} \end{bmatrix} \quad [6-33.b]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{s}_{3D,0} + \mathbf{s}_{3D,\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D,\perp} \\ \mathbf{D}_{3D,c}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D,\perp} & \mathbf{D}_{3D,c} \\ \mathbf{D}_{3D,c}^T & \mathbf{D}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_\Omega \cdot \mathbf{e}_\Omega \quad [6-33.c]$$

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{s}_{3D,0} + \mathbf{s}_{3D,\Omega} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{A}_\Omega \cdot \mathbf{e}_\Omega \quad [6-33.d]$$

mit

$$\mathbf{s}_{3D,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D,\perp,0} \\ \mathbf{s}_{3D,\parallel,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D,\perp} \\ \mathbf{D}_{3D,c}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \quad [6-33.e]$$

$$\mathbf{s}_{3D,\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{3D,\perp,\Omega} \\ \mathbf{s}_{3D,\parallel,\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D,\perp} & \mathbf{D}_{3D,c} \\ \mathbf{D}_{3D,c}^T & \mathbf{D}_{3D,\parallel} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_\Omega \cdot \mathbf{e}_\Omega = \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \quad [6-33.f]$$

mit:

$$\mathbf{A}_\Omega \cdot \mathbf{e}_\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_1 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} & \Omega_2 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} & \Omega_3 \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} & 0 \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi' \end{bmatrix} = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D, 2+3}} \cdot \Psi + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D, 1, 0}} \cdot \Psi' \right) \cdot \Omega \quad [6-33.g]$$

$$\mathbf{A}_\Omega \cdot \mathbf{e}_\Omega = (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \quad [6-33.h]$$

Somit gilt:

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{s}_{3D, 0} + \mathbf{s}_{3D, \Omega} = \underbrace{\mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0}_{\mathbf{s}_{3D, 0}} + \underbrace{\mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi')}_{\mathbf{s}_{3D, \Omega}} \cdot \Omega \quad [6-33.i]$$

Basierend auf Glg. 4-13.a gilt für die Berechnung des Spannungsvektors für den Balkenverformungszustand die folgende formale Beziehung. Diese Spannungskomponenten werden auf Grund der späteren mehrmaligen Verwendung an dieser Stelle angeführt.

$$\mathbf{s}_{3D, \perp} = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \quad [6-33.j]$$

## 6.4 Kinetik – Statisches 3D-Translationsgleichgewicht

### 6.4.1 3D-Gleichgewichtsgleichungen in Differentialformulierung

Die drei 3D-Gleichgewichtsgleichungen, entsprechend dem strukturellen Aufbau der 3D-Verzerrungsgleichungen auf Basis der unstrukturierten 3D-Felddarstellungen der 3D-Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , lauten im allgemeinen Fall unter der Berücksichtigung von äußeren Volumenlasten im Inneren des Stabkörpers, wie in Glg. 6-34 gezeigt.

$$\mathbf{g}_{3D} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial X_3} + q_1 = 0 \\ \frac{\partial S_{12}}{\partial X_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial S_{23}}{\partial X_3} + q_2 = 0 \\ \frac{\partial S_{13}}{\partial X_1} + \frac{\partial S_{23}}{\partial X_2} + \frac{\partial S_{33}}{\partial X_3} + q_3 = 0 \end{bmatrix} \quad [6-34]$$

Diese Darstellung wird als originale Differentialform des Gleichgewichts bezeichnet. Die 3D-Gleichgewichtsgleichungen gelten für jeden Materialpunkt innerhalb des Stabkörpers und werden aus diesem Grund auch als 3D-Feldgleichungen des Gleichgewichts bezeichnet.

#### 6.4.1.1 Differentialformulierung des Gleichgewichts in Matrixschreibweise

In Differentialoperator-Matrixschreibweise lassen sich die 3D-Gleichgewichtsgleichungen für den inhomogenen Stabbelastungsfall wie folgt darstellen

$$\mathbf{g}_{3D} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} s_{3D,\perp} \\ s_{3D,\parallel} \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_{3D}} + \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_{3D,\gamma}} = \tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D,\gamma} = \mathbf{0} \quad [6-35.a]$$

Diese in Glg. 6-35.a angeführte 3D-Gleichgewichtsbeziehung muss für jeden beliebigen Punkt innerhalb des gesamten Stabkörpers mit dem Gebiet  $\gamma$  exakt erfüllt sein, d. h. an „jeder Stelle  $\mathbf{X}$ “ des Stabkörpers. In kompakter Darstellung lassen sich die drei 3D-Feldgleichungen des Gleichgewichts für den inhomogenen Stabbelastungsfall wie folgt darstellen.

$$\mathbf{g}_{3D} = \tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D,\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{in } \gamma \quad [6-35.b]$$

Für die Darstellung der Feldgleichungen des 3D-Gleichgewichts für die homogene Stabbelastung gilt in kompakter Schreibweise unter Berücksichtigung von  $\mathbf{q}_{3D, \mathcal{V}} = \mathbf{0}$  :

$$\mathbf{g}_{3D} = \tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{V} \quad [6-35.c]$$

#### Gleichgewichtsdifferentialoperator-Matrix: $\mathbf{B}_{3D}^T$

Im Falle eines in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem definierten strukturierten 3D-Verschiebungsfeldes gilt für die Differentialoperatormatrix  $\mathbf{B}_{3D}^T$  (Bestimmung der 3D-Verzerrung) und die Differentialoperatormatrix  $\tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T$  (Bestimmung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen) folgende in Glg. 6-36 angeführte Identität. Die Übereinstimmung der Operatormatrizen zeigt die starke Verwandtschaft der gewählten QS-Kinematik mit den Gleichgewichtsbeziehungen.

$$\tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T = \mathbf{B}_{3D}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad [6-36]$$

Alternative Darstellungen der Differentialoperatormatrix sind in 4.2.3 gezeigt, diese werden in weiterer Folge zur Aufbereitung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen je nach formeller Erfordernis verwendet.

#### 6.4.1.2 Randbedingungen auf der Staboberfläche $\Gamma$ :

Neben den Feldgleichungen des 3D-Gleichgewichts, die innerhalb des Gebiets  $V$  an „jeder Stelle  $\mathbf{x}$ “ eindeutig erfüllt sein müssen, sind zur vollständigen Problembeschreibung in der Differentialform Randbedingungen an den Begrenzungen des Stabkörpers (Oberfläche  $\Gamma$  des Stabkörpers, definiert durch dessen Stabmantelfläche sowie den beiden Stab-Anfangs- und Stab-End-Querschnittsflächen) erforderlich. Die Randbedingungen kommen dabei in Form von Verschiebungsrandbedingungen (z. B. Auflagersituationen) und in Form von Kräfte-randbedingungen (z. B. elastische Bettungen) vor. Die genauen Anforderungen an die Randbedingungen samt deren Definitionsgebieten sind unter Punkt 5.9.1 angeführt.

##### • Randbedingungen in Form von Spannungsdefinitionen (Kräfte-randbedingungen)

Die Spannungsrandbedingungen sind in folgender Form für alle Bereiche der Oberfläche des Stabkörpers definiert.

$$\mathbf{g}_{\Gamma, s} = -\mathbf{s}_v + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} = -\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} = \mathbf{0} \quad [6-37]$$

$\mathbf{s}_v$  stellt den Vektor der vom inneren des Stabkörpers heraus auftretenden Spannungen an der Staboberfläche dar. Im Sinn der Erfüllung des Gleichgewichts an den Staboberflächen haben diese per Definition ident den an der Oberfläche angreifenden äußeren Spannungen zu sein.

Die Ermittlung des Spannungsvektors  $\mathbf{s}_v$  ist unter Punkt 4.3.2 im Detail angeführt, der Vollständigkeit halber sind die Ergebnisse an dieser Stelle angeführt.

### Bestimmung der Oberflächenspannungen in Differentialform

Der Spannungsvektor an der Oberfläche eines beliebigen 3D-Stabkörpers definiert sich nach Glg. 4-9.a:

$$\mathbf{s}_V = \begin{bmatrix} S_{1N} \\ S_{2N} \\ S_{3N} \end{bmatrix} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & N_3 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} \quad [6-38.a]$$

mit

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{B}_{3D, i, 0}^T \cdot N_i \quad [6-39.a]$$

Aufsummiert wird dabei über  $i=1$  bis 3

### Spannungsvektor $\mathbf{s}_V$ auf der Staboberfläche im Falle der Prismaticität

Der Spannungsvektor auf der Mantelfläche eines prismatischen 3D-Stabkörpers definiert sich nach Glg. 4-12.a wie folgt:

$$N_1 = 0 \quad [6-40.a]$$

$$\mathbf{s}_V = \begin{bmatrix} S_{1N} \\ S_{2N} \\ S_{3N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{2+3}^T} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \quad [6-40.b]$$

$$\mathbf{V}_{2+3}^T = \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot N_\alpha \quad [6-40.c]$$

Aufsummiert wird dabei über  $\alpha=1$  bis 2

### Spannungsvektor $\mathbf{s}_V$ für einen Stabquerschnitt im Falle der Prismaticität

Der Spannungsvektor für einen beliebigen Stabquerschnitt eines prismatischen 3D-Stabkörpers definiert sich nach Glg. 4-13.a wie folgt:

$$N_2 = 0 \text{ und } N_3 = 0$$

$$\mathbf{s}_{v, QS} = \begin{bmatrix} S_{1N} \\ S_{2N} \\ S_{3N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_1^T} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_1^T \cdot \mathbf{s}_{3D} = \mathbf{s}_{3D, \perp} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} \quad [6-40.d]$$

$$\mathbf{V}_1^T = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot N_1 \quad [6-40.e]$$

### Spannungsvektoren $\mathbf{s}_{N, A}$ und $\mathbf{s}_{N, E}$ für den Sonderfall der beiden Stabendquerschnitte

Die Spannungsvektoren für die beiden Endquerschnitte eines prismatischen 3D-Stabkörpers definieren sich nach Glg. 4-13.d und Glg. 4-13.e wie folgt:

$$\mathbf{s}_{N, A} = \begin{bmatrix} S_{1N} \\ S_{2N} \\ S_{3N} \end{bmatrix}_A = \mathbf{V}_{1, A}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, A} = \underbrace{N_{1, A}}_{-1} \cdot \mathbf{V}_{1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, A} = -\mathbf{s}_{3D, \perp, A} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix}_A \quad [6-40.f]$$

$$\mathbf{s}_{N, E} = \begin{bmatrix} S_{1N} \\ S_{2N} \\ S_{3N} \end{bmatrix}_E = \mathbf{V}_{1, E}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, E} = \underbrace{N_{1, E}}_1 \cdot \mathbf{V}_{1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, E} = \mathbf{s}_{3D, \perp, E} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix}_E \quad [6-40.g]$$

### • Randbedingungen in Form von Verschiebungsdefinitionen

Die Verschiebungsrandbedingungen sind in folgender Form für alle Bereiche der Oberfläche des Stabkörpers definiert:

$$\mathbf{g}_{\Gamma, u} = -\mathbf{u}_{3D} + \mathbf{u}_{3D, \Gamma} = \mathbf{0} \quad [6-41]$$

In diesem Zusammenhang stellt  $\mathbf{u}_{3D, \Gamma}$  den Vektor der von außen vorgegebenen Verschiebungen dar.

### • Zusammengefasst Darstellung der Randbedingungen

Zusammengefasst lassen sich die Spannungs- und Verschiebungsrandbedingungen in folgender Form darstellen:

$$\mathbf{g}_{\Gamma}: \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\Gamma, s} \\ \mathbf{g}_{\Gamma, u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{s}_v + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} = -\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \\ -\mathbf{u}_{3D} + \mathbf{u}_{3D, \Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [6-42.a]$$

Für die Definitionsgebiete der beiden Anteile der Randbedingungen gelten die folgenden Bedingungen. Die Gleichzeitigkeit des Auftretens einer Verschiebungs- und Spannungsrandbedingung für ein und den selben Punkt ist per Definition ausgeschlossen.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{\Gamma, s} &= \mathbf{0} & \text{auf} & \Gamma_s \\
 \mathbf{g}_{\Gamma, u} &= \mathbf{0} & \text{auf} & \Gamma_u \\
 \Gamma_s \cup \Gamma_u &= \Gamma & \text{und} & \Gamma_s \cap \Gamma_u = \{ \}
 \end{aligned}
 \tag{6-42.b}$$

### 6.4.1.3 Vollständige Form des 3D-Gleichgewichts in Differentialformulierung

Durch das Zusammenführen der 3D-Feldgleichungen des Gleichgewichts, diese sind über den gesamten Stabkörper definiert, mit sämtlichen Randbedingungen an den Stabkörperoberflächen, ergibt sich die vollständige Darstellung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen in originaler Differentialformulierung.

- **3D-Feldgleichungen des Gleichgewichts**

$$\mathbf{g}_{3D} = \tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D}, \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{in } \boldsymbol{\gamma}
 \tag{6-43.a}$$

- **Randbedingungen**

$$\mathbf{g}_{\Gamma}: \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\Gamma, s} \\ \mathbf{g}_{\Gamma, u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{s}_v + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} = -\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \\ -\mathbf{u}_{3D} + \mathbf{u}_{3D, \Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}
 \tag{6-44.a}$$

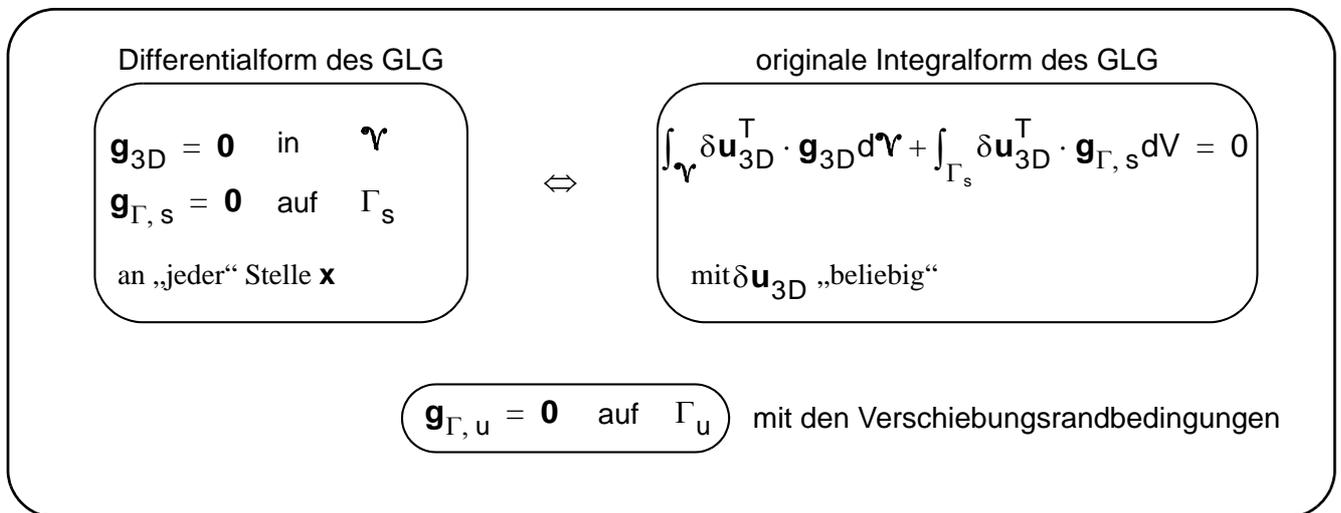
$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{\Gamma, s} &= \mathbf{0} & \text{auf} & \Gamma_s \\
 \mathbf{g}_{\Gamma, u} &= \mathbf{0} & \text{auf} & \Gamma_u \\
 \Gamma_s \cup \Gamma_u &= \Gamma & \text{und} & \Gamma_s \cap \Gamma_u = \{ \}
 \end{aligned}
 \tag{6-44.b}$$

## 6.5 Äquivalente Integraldarstellung der Gleichgewichtsgleichungen

Bei der Formulierung der 3D-Gleichgewichtsgleichungen sind sowohl in der Differential- als auch bei der Integralform die strukturierten hierarchisch geordneten Verschiebungs- und Belastungsansätze einzuarbeiten.

### 6.5.1 Übergang von der Differentialform auf die Integralform des Gleichgewichts

Zur Ermittlung der systemrelevanten 3D-Gleichgewichtsgleichungen wird der Übergang von den 3D-Gleichgewichtsgleichungen in originaler Differentialdarstellung auf die 3D-Darstellung des Gleichgewichts in originaler Integralform im 3D-Kontext vollzogen. Durch diesen Übergang lassen sich aus den drei 3D-Geichgewichtsgleichungen in Differentialdarstellung die dem strukturierten stabachsenbezogenen Stabverformungsparameter zugeordneten Gleichgewichtsgleichungen generieren.



[6-45.a]

Für die grundlegenden Feldgleichungen des 3D-Gleichgewichts sowie für die zugehörigen Randbedingungen gelten die formalen Beziehungen nach Punkt 6.4.1.3:

$$\mathbf{g}_{3D} = \tilde{\mathbf{B}}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D}, \mathcal{V} \quad [6-45.b]$$

$$\mathbf{g}_{\Gamma}: \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\Gamma, s} \\ \mathbf{g}_{\Gamma, u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{s}_v + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} = -\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \\ -\mathbf{u}_{3D} + \mathbf{u}_{3D, \Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [6-45.c]$$

$$\mathbf{g}_{\Gamma, s} = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \Gamma_s$$

$$\mathbf{g}_{\Gamma, u} = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \Gamma_u$$

$$\Gamma_s \cup \Gamma_u = \Gamma \quad \text{und} \quad \Gamma_s \cap \Gamma_u = \{ \} \quad [6-45.d]$$

### 6.5.1.1 Berücksichtigung des strukturierten 3D-Verschiebungsfeldes

Die Implementierung des vorgegebenen strukturierten hierarchisch geordneten 3D-Verschiebungsfeldes zieht entsprechend strukturierte, dem stabachsenbezogenen Stabverformungsparameter zugeordnete, Gleichgewichtsgleichungen nach sich. Diese sind für die weitere Problemanalyse erforderlich. Hierbei stellt die zur gegebenen Differentialformulierung mathematisch äquivalente Integralformulierung des Gleichgewichts, siehe Glg. 6-45.a, den allgemein gültigen Ausgangspunkt für die Herleitung dar.

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{g}_{3D} d\mathcal{V} + \int_{\Gamma_M} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{g}_{\Gamma, S} d\Gamma + \int_{\Gamma_{A, E}} \delta \mathbf{u}_{3D}^T \cdot \mathbf{g}_{\Gamma, \frac{A}{E}} d\Gamma = 0 \quad [6-46.a]$$

Die Spannungsrandbedingungen wurden in Glg. 6-46.a in für die Staboberfläche und für die Stabendquerschnitte getrennter Form dargestellt, da Spannungsrandbedingungen im Stabinneren zu den inhomogenen Belastungszuständen zählen. Spannungsrandbedingungen an den Stabendquerschnitten zählen dem entgegen zu den homogenen Belastungszuständen.

Auf Grund der Äquivalenz der Eigenschaften der virtuellen Verschiebungsansätze zu deren realen Verschiebungen ist die unter Punkt 5.3.2 beschriebene hierarchische Ordnung des 3D-Verschiebungsfeldes auch für die virtuellen 3D-Verschiebungsfelder, sprich für die Gewichtsfunktionen, mit voller Gültigkeit erforderlich.

Das 3D-Gesamtverschiebungsfeld mit der Trennung der globalen und lokalen 3D-Teilverschiebungsfelder nach Glg. 6-1 ist Ausgangspunkt für die Definition des virtuellen 3D-Verschiebungsfeldes.

$$\mathbf{u}_{3D} = \mathbf{A}_U \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{u}_{3D, 0} + \mathbf{u}_{3D, \Omega} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \Omega \cdot \psi \quad [6-46.b]$$

Das zugehörige virtuelle 3D-Gesamtverschiebungsfeld wird unter Beachtung der Rechenregeln für die Variationsrechnung wie folgt gewonnen:

Auf Grund der Beliebigkeit der relativen 3D-Verschiebungsfelder  $\Omega$  in der Querschnittsebene  $X_2$ - $X_3$  sowie des veränderlichen Verhaltens von  $\psi$  in Stablängsrichtung  $X_1$  sind zur Überwachung des Gleichgewichts, die in Glg. 6-46.c angegeben Gewichtsfunktionen  $\delta\Omega$  und  $\delta\psi$ , erforderlich.

Unter Anwendung der Produktregel der Differentialrechnung für das 3D-Teilverschiebungsfeld gilt, auf Grund der Veränderlichkeit der  $\Omega$ - und  $\psi$ -Terme, für das virtuelle 3D-Gesamtverschiebungsfeld:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_{3D} &= \delta(\mathbf{u}_{3D, 0} + \mathbf{u}_{3D, \Omega}) = \delta(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \Omega \cdot \psi) = \mathbf{A}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \underbrace{\delta(\Omega \cdot \psi)}_{\delta\Omega \cdot \psi + \Omega \cdot \delta\psi} \\ &= \mathbf{A}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \delta\Omega \cdot \psi + \Omega \cdot \delta\psi \\ &= \mathbf{A}_U \cdot \delta \mathbf{u} + \delta\Omega \cdot \psi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_0 \\ \delta\psi \end{bmatrix} + \delta\Omega \cdot \psi \end{aligned} \quad [6-46.c]$$

### 6.5.1.2 Originale Integralform des Gleichgewichts mit strukturierten 3D-Verschiebungsfeldern

Als Konsequenz der Einarbeitung des strukturierten Verschiebungsansatzes mit der produktartigen Aufspaltung ergibt sich zusätzlich zu den sieben Stabgleichgewichtsgleichungen ( $\delta \mathbf{u}_0$  und  $\delta \Psi$ ) in  $\mathbf{X}_1$ -Richtung eine Gleichgewichtsdifferentialgleichung für das Querschnittproblem ( $\delta \Omega$ ) in der Querschnittsebene. Nach Einsetzen des virtuellen 3D-Gesamtverschiebungsfeldes in Glg. 6-46.a gilt:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_L \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_A \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{g}_{3D} \cdot dA + \int_s \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{g}_{\Gamma, s} \cdot ds \right\} dX_1 + \delta \mathbf{u}_{\frac{A}{E}}^T \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{g}_{\Gamma, s, \frac{A}{E}} \cdot d\Gamma + \\ & + \int_L \psi \left\{ \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{g}_{3D} \cdot dA + \int_s \delta \Omega^T \cdot \mathbf{g}_{\Gamma, s} \cdot ds \right\} dX_1 + \psi_{\frac{A}{E}} \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{g}_{\Gamma, s, \frac{A}{E}} \cdot d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad [6-47.a]$$

Zusätzlich zu den Gleichgewichtsgleichungen aus den Spannungsanteilen (Feldgleichungen und Spannungsrandbedingungen) gelten die Verschiebungsrandbedingungen auf den Stabendquerschnitten (A-Querschnitt und E-Querschnitt) wie folgt:

$$\mathbf{g}_{\Gamma, u, \frac{A}{E}} = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \Gamma_{u, \frac{A}{E}} \quad [6-47.b]$$

Für die Einzelanteile der Gleichgewichtsgleichungen in Glg. 6-47.a gelten die Beziehungen aus Glg. 6-35.b und Glg. 6-37:

$$\mathbf{g}_{3D} = \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D}, \boldsymbol{\gamma} \quad [6-47.c]$$

$$\mathbf{g}_{\Gamma, s} = -\mathbf{s}_v + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} = -\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \quad [6-47.d]$$

Für die Spannungsrandbedingungen an den Stabendquerschnitten gelten die Beziehungen aus Glg. 6-40.f und Glg. 6-40.g in gleicher Weise.

$$\mathbf{g}_{\Gamma, s, \frac{A}{E}} = -\mathbf{s}_{N, \frac{A}{E}} + \mathbf{q}_{3D, \frac{A}{E}} = \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} + \mathbf{q}_{3D, \frac{A}{E}} \quad [6-47.e]$$

Die Definitionsgebiete für sämtliche Spannungsrandbedingungen an den Oberflächen des Stabkörpers sind nach Glg. 6-45.d eindeutig definiert.

### 6.5.1.3 Gleichgewicht in umgewandelter Integralform mit strukturierten 3D-Verschiebungsfeldern

Werden in einer der Koordinatenrichtungen weitere Umwandlungen und Umformungen vorgenommen, beispielsweise die partielle Integration über die Stabquerschnittsfläche  $A$  oder die Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes, so wird in diesem Kontext von der umgewandelten Integralform des 3D-Gleichgewichts gesprochen.

#### Integralumwandlung durch partielle Integration nach ausgewählten Koordinatenrichtungen $\alpha$

Für die weiteren Herleitungen ist die Anwendung der partiellen Integration über den Stabquerschnitt und die Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes zum Übergang auf die Randintegrale erforderlich.

Für die gezeigten Integralauswertungen und Umwandlungen gilt die Einstein'sche Summenkonvention für den Index  $i=1$  bis 3. In den Glg. 6-48.a bis Glg. 6-49.c ist die Umwandlung der Gleichungen stellvertretend am Beispiel des Starrkörperanteils der Querschnittskinetik gezeigt.

$$J_i = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,i,0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{s}_{3D} \, dA \quad [6-48.a]$$

$$J_i = - \int_A \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,i,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA + \oint_s \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{B}_{3D,i,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, ds \quad [6-48.b]$$

$$J_i = - \int_A \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,i,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA + \oint_s \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_v \, ds \quad [6-48.c]$$

Für die ausschließliche partielle Integration über die Querschnittskordinaten wird folgende Darstellung verwendet. Für die Summation über die Querschnittskordinaten  $X_2$  und  $X_3$  gilt  $\alpha = 2$  bis 3.

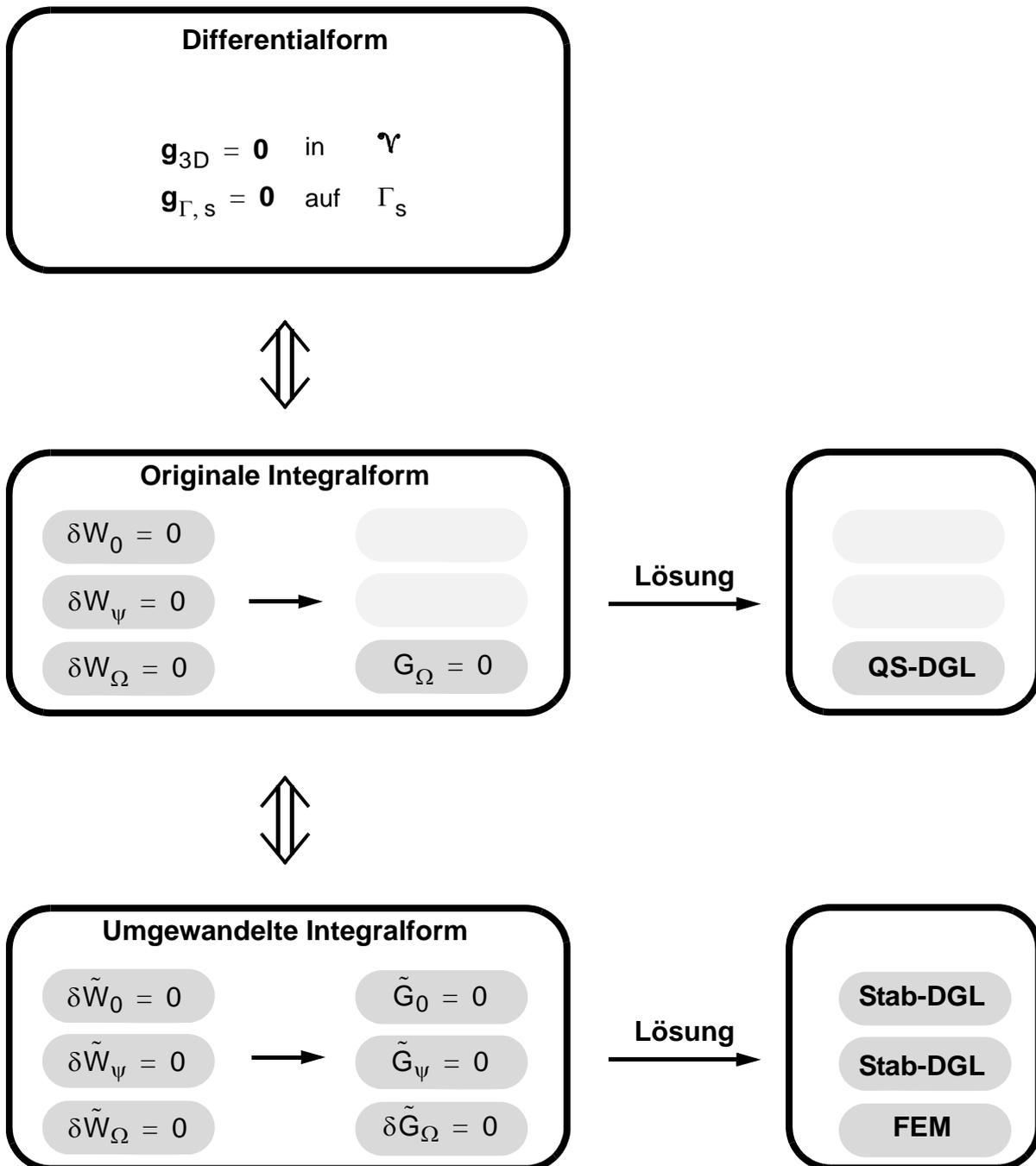
$$J_\alpha = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{s}_{3D} \, dA \quad [6-49.a]$$

$$J_\alpha = - \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA + \oint_s \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, ds \quad [6-49.b]$$

$$J_\alpha = - \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA + \oint_s \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_{v,2+3} \, ds \quad [6-49.c]$$

Werden diese Beziehungen eingearbeitet, so resultieren daraus die Gleichgewichtsgleichungen in ihrer umgewandelten Integralform. Diese sind an dieser Stelle auf Grund der erforderlichen Vielfalt nicht angeschrieben. Es wird auf die Punkte 6.5.4.2 für die partielle Integration nach den Querschnittskordinaten und auf die Punkte 6.5.5.2 und 6.5.6.2 für die partielle Integration nach den Stablängskordinaten verwiesen.

Im folgenden Schema, siehe Abb. 6.6, wird ein Überblick über die erforderlichen Darstellungsformen der Gleichgewichtsgleichungen gegeben, die für die Lösung des inhomogenen 3D-Stabproblems für den prismatischen Stab erforderlich sind.



**Anmerkung:** Mit „ $\tilde{\phantom{x}}$ “ bezeichnete Größen stellen die durch partielle Integration umgewandelte originale Integralform des Gleichgewichts dar.

**Abb. 6.6:** 3D-Gleichgewicht in Differentialform und Gleichgewicht in originaler und umgewandelter Integralform

## 6.5.2 Überblick über die Stab- und Querschnittsgleichgewichtsgleichungen

Wie in Abb. 6.6 dargestellt, liegen für die Berechnung des Stabproblems verschiedene Darstellungsformen für das Gleichgewicht des Stabes vor. Bei genauer Betrachtung des strukturierten virtuellen 3D-Gesamtverschiebungsfeldes resultieren daraus für die Berechnung des Stabproblems genau  $6+N$  Stabgleichgewichtsgleichungen ( $\mathbf{G}_{0+\psi}$ ). Die Anzahl der Stabgleichgewichtsgleichungen ergibt sich aus der Anzahl der sechs globalen Starrkörperfreiheitsgrade der Querschnittskinematik sowie einer beliebigen Anzahl  $N$  an lokalen Verformungsamplituden der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder. Zusätzlich treten auch die drei Gleichgewichtsgleichungen  $\mathbf{G}_\Omega$  in originaler und umgewandelter Form in Erscheinung.

Zusammengefasst können die Stabgleichgewichtsgleichungen sowie die Gleichgewichtsgleichungen für das Querschnittproblem, die für die Ermittlung der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder verwendet werden, wie folgt dargestellt werden.

Werden die Gleichgewichtsgleichungen für das Querschnittproblem in originaler Integralform dargestellt, dann gilt:

$$\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{G}}_{0+\psi} = \tilde{\mathbf{G}}_{0+\psi}(X_1) = \mathbf{0} & \text{auf } L \\ \mathbf{G}_\Omega = \mathbf{G}_\Omega(X_2;X_3) = \mathbf{0} & \text{auf } A \end{cases} \quad [6-50]$$

Werden die Gleichgewichtsgleichungen für das Querschnittproblem in umgewandelter Integralform dargestellt, dann gilt:

$$\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{G}}_{0+\psi} = \tilde{\mathbf{G}}_{0+\psi}(X_1) = \mathbf{0} & \text{auf } L \\ \tilde{\mathbf{G}}_\Omega = \tilde{\mathbf{G}}_\Omega(X_2;X_3) = \mathbf{0} & \text{auf } A \end{cases} \quad [6-51]$$

### 6.5.2.1 3D-Stabgleichgewichtsdifferentialgleichungen ( $6+N$ GLG in $X_1$ )

Die gesuchten 3D-Stabgleichgewichtsdifferentialgleichungen beschreiben das Stablängsproblem und sollen somit ausschließlich mit einer Abhängigkeit von  $X_1$  vorliegen. Als Grundlage zur Ermittlung dieser Gleichungen dient die umgewandelte Darstellung der Integralform des 3D-Gleichgewichts. Die Integraldarstellung erstreckt sich nur in den  $X_2$ - $X_3$ -Koordinatenrichtungen, d. h. über die Querschnittsebene des Stabkörpers. In  $X_1$ -Richtung bleibt die Differentialdarstellung der Gleichgewichtsgleichungen erhalten. Die partielle Integration wird für diesen Fall ausschließlich für die Querschnittskordinaten ( $X_2$ - $X_3$ ) durchgeführt. Die partielle Integration nach der Stablängskoordinate  $X_1$  wird ausdrücklich nicht durchgeführt. Zusätzlich zur partiellen Integration werden falls erforderlich Integralumwandlungen von Flächen auf Randintegrale durch die Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes vorgenommen.

In Abhängigkeit des eingeführten virtuellen 3D-Verschiebungsfeldes entstehen die  $6+N$  Gleichgewichtsgleichungen  $\mathbf{G}_{0+\psi}$  für das Stablängsproblem:

- Eine Normalkraftgleichgewichtsgleichung aus der axialen Verschiebung:  $\delta\mathbf{U}_1$
- Zwei Biegemomentengleichgewichtsgleichungen aus den Verdrehungen:  $\delta\beta_2, \delta\beta_2$
- Zwei Querkraftgleichgewichtsgleichungen aus den transversalen Verschiebungen:  $\delta\mathbf{U}_2, \delta\mathbf{U}_2$
- Eine Torsionsmomentengleichgewichtsgleichung aus der Verdrehung:  $\delta\beta_1$
- $N$  Wölbmomentengleichgewichtsgleichung aus den relativen 3D-Verschiebungsfeldern:  $\delta\psi$

### 6.5.2.2 3D-Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichung (drei GLG in $X_2$ und $X_3$ )

Für die Berechnung der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder sind die drei Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichungen erforderlich, diese werden sowohl in originaler als auch in umgewandelter Integralform aufbereitet, wobei gilt:

- Die originale Integralform liefert die Grundlage für die weitere Lösung des Querschnittproblems in analytischer Form zur Berechnung der 3D-Einzelverschiebungsfelder.
- Die umgewandelte Integralform liefert die Grundlagen für die weitere Lösung des Querschnittproblems zur Ermittlung der 3D-Einzelverschiebungsfelder auf Basis numerischer Berechnungen.

Für die weiteren Herleitungen der detaillierten Gleichgewichtsgleichungen werden die folgenden Gleichungsausdrücke in ausgearbeiteter Form benötigt.

### 6.5.2.3 Aufbereitungen der 3D-Gleichgewichtsgleichungen im Stabinneren

$$\mathbf{g}_{3D} = \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \gamma} \quad [6-52.a]$$

$$\mathbf{g}_{3D} = \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \right) \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \gamma} \quad [6-52.b]$$

$$\mathbf{g}_{3D} = \frac{\partial}{\partial X_1} \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp} + \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \gamma} \quad [6-52.c]$$

mit

$$\mathbf{B}_{3D}^T = \mathbf{B}_{3D, 1}^T + \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \quad [6-52.d]$$

Im Sinne der Einstein'schen Summenkonvention gilt für den Index  $\alpha = 2$  bis 3.

### 6.5.2.4 Aufbereitungen der Lastterme der Staboberflächen und der Endquerschnitte

$$\mathbf{g}_{\Gamma, s} = -\mathbf{s}_v + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} = -\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \quad [6-53.a]$$

$$\mathbf{g}_{\Gamma, s} = -N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} - N_\alpha \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} + \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \quad [6-53.b]$$

mit

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{V}_1^T + \mathbf{V}_{2+3}^T = N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T + N_\alpha \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \quad [6-53.c]$$

Im Sinne der Einstein'schen Summenkonvention gilt für den Index  $\alpha = 2$  bis 3.

In den folgenden Punkten 6.5.3 bis 6.5.6 werden die Gleichgewichtsgleichungen für den prismatischen 3D-Stab im Detail angeschrieben und für die weitere Verwendung aufbereitet.

### 6.5.3 Gleichgewicht in originaler Integraldarstellung

Ausgangspunkt für die weiteren Umwandlungen ist die originale Integraldarstellung, wobei im Folgenden die  $6+N$  Stabgleichgewichtsgleichungen sowie die Querschnittsgleichgewichtsgleichungen in aufgeschlüsselter Form angeführt sind. Das definierte Farbschema soll die Anteile an der virtuellen Arbeit deutlich machen, dieses Farbschema wird konsequent für alle Darstellungsformen verwendet. Neben den Gleichgewichtsgleichungen werden stets auch die zugehörigen Verschiebungsrandbedingungen an den Stabendquerschnitten mit angeführt.

#### 6.5.3.1 Gleichgewichtsgleichungen $\delta W = 0$

$$\begin{aligned}
 \delta W = & \int_L \delta \mathbf{u}^T \int_A \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dAdX_1 + \int_L \delta \mathbf{u}^T \int_A \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dAdX_1 + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}^T \int_s \mathbf{A}_u^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot dsdX_1 + \int_L \delta \mathbf{u}^T \int_s \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot dsdX_1 + \\
 & + \delta \mathbf{u}_{\frac{A}{E}}^T \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \mathbf{A}_u^T \cdot \left( -\mathbf{s}_{v, \frac{A}{E}} \right) \cdot dA + \delta \mathbf{u}_{\frac{A}{E}}^T \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \frac{A}{E}} \cdot dA + \\
 & + \int_L \psi \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dAdX_1 + \int_L \psi \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dAdX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_s \delta \Omega^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot dsdX_1 + \int_L \psi \int_s \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot dsdX_1 + \\
 & + \psi_{\frac{A}{E}} \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \left( -\mathbf{s}_{v, \frac{A}{E}} \right) \cdot dA + \psi_{\frac{A}{E}} \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \frac{A}{E}} \cdot d\Gamma = 0
 \end{aligned}$$

- Innere virtuelle Arbeit aus den 3D-Spannungen im Stabinneren
- Äußere virtuelle Arbeit aus Volumenlasten im Stabinneren
- Äußere virtuelle Arbeit aus Oberflächenlasten im Stabinneren
- Äußere virtuelle Arbeit aus Oberflächenlasten an den Stabenden

[6-54.a]

#### 6.5.3.2 Randbedingungen:

Verschiebungsrandbedingungen auf den Stabendquerschnitten

$$\mathbf{g}_{\Gamma, u, \frac{A}{E}} = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \Gamma_{u, \frac{A}{E}}$$

[6-54.b]

6.5.3.3 Gleichgewichtsgleichungen basierend auf dem strukturierten Verschiebungsansatz

• Virtuelle Gesamtarbeit

Wird der strukturierte Verschiebungsansatz in die Gleichgewichtsgleichungen eingearbeitet, so lässt sich die virtuelle Gesamtarbeit in vollständig aufgeschlüsselter Form für das Stabproblem wie folgt in übersichtlicher Weise darstellen.

$$\delta W = \delta W_0 + \delta W_\psi + \delta W_\Omega = 0$$

$$\begin{aligned}
 \delta W = & \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX_1 + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_s \mathbf{A}_0^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot ds dX_1 + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_s \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds dX_1 + \\
 & + \delta \mathbf{u}_{0, \hat{E}}^T \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \mathbf{A}_0^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, \hat{E}} \right) \cdot dA + \delta \mathbf{u}_{0, \hat{E}}^T \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \hat{E}} \cdot dA + \\
 & + \int_L \delta \psi \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX_1 + \int_L \delta \psi \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \int_L \delta \psi \int_s \boldsymbol{\Omega}^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot ds dX_1 + \int_L \delta \psi \int_s \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds dX_1 + \\
 & + \delta \psi_{\hat{E}} \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, \hat{E}} \right) \cdot dA + \delta \psi_{\hat{E}} \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \hat{E}} \cdot dA + \\
 & + \int_L \psi \int_A \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX_1 + \int_L \psi \int_A \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_s \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot ds dX_1 + \int_L \psi \int_s \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds dX_1 + \\
 & + \psi_{\hat{E}} \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, \hat{E}} \right) \cdot dA + \psi_{\hat{E}} \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \hat{E}} \cdot d\Gamma = 0
 \end{aligned}$$

} Stab  
} Stab  
} QS  
[6-55]

• **Aufspaltung der virtuellen Gesamtarbeit in die Einzelteile:**  $\delta W_0$ ;  $\delta W_\psi$ ;  $\delta W_\Omega$

Auf Grund der absoluten Beliebigkeit der Gewichtungsfunktionen lassen sich die Einzelteile der virtuellen Gesamtarbeit ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch in separierter Form darstellen.

$$\begin{aligned}
 \delta W_0 = & \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dAdX_1 + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dAdX_1 + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_s \mathbf{A}_0^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot dsdX_1 + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_s \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot dsdX_1 + \\
 & + \delta \mathbf{U}_{0, A}^T \int_E \mathbf{A}_0^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, A} \right) \cdot dA + \delta \mathbf{U}_{0, A}^T \int_E \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, A} \cdot dA = 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\delta W_0} \right\} \text{Stab}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_\psi = & \int_L \delta \psi \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dAdX_1 + \int_L \delta \psi \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dAdX_1 + \\
 & + \int_L \delta \psi \int_s \boldsymbol{\Omega}^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot dsdX_1 + \int_L \delta \psi \int_s \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot dsdX_1 + \\
 & + \delta \psi \int_{\hat{E}} \int_{\hat{\Gamma}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, A} \right) \cdot dA + \delta \psi \int_{\hat{E}} \int_{\hat{\Gamma}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, A} \cdot dA = 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\delta W_\psi} \right\} \text{Stab}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_\Omega = & \int_L \psi \int_A \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dAdX_1 + \int_L \psi \int_A \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dAdX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_s \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot dsdX_1 + \int_L \psi \int_s \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot dsdX_1 + \\
 & + \psi \int_{\hat{E}} \int_{\hat{\Gamma}} \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, A} \right) \cdot dA + \psi \int_{\hat{E}} \int_{\hat{\Gamma}} \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, A} \cdot d\Gamma = 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\delta W_\Omega} \right\} \text{QS}$$

[6-56]

## 6.5.4 Aufbereitung der Querschnitt-Gleichgewichtsgleichung ( $\Omega$ -Problem)

### 6.5.4.1 Originale Integralform

Die aufbereiteten originalen Gleichgewichtsgleichungen in Integralform dienen einerseits als Grundlage für die analytische Lösung des Querschnittproblems, d. h. der Bestimmung der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder, andererseits dienen sie als Ausgangspunkt für die Ermittlung der umgewandelten Integralform der Querschnitts-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen.

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\Omega} = & \int_L \psi \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_s \delta \Omega^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot ds dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_s \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds dX_1 + \\
 & + \psi \int_E \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \Omega^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, \hat{E}} \right) \cdot dA + \\
 & + \psi \int_E \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \hat{E}} \cdot d\Gamma = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\Omega} = & \int_L \psi \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{G}_{\Omega, u} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{G}_{\Omega, q, \gamma} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_s \delta \Omega^T \cdot \mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma} \cdot ds dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_s \delta \Omega^T \cdot \mathbf{G}_{\Omega, q, \Gamma} \cdot ds dX_1 + \\
 & + \psi \int_E \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{G}_{\Omega, u, \hat{E}} \cdot dA + \\
 & + \psi \int_E \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{G}_{\Omega, q, \hat{E}} \cdot d\Gamma = 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{G}_{\Omega} = \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{G}_{\Omega, \Gamma} = \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{G}_{\Omega, \hat{E}} = \mathbf{0} \end{array} \quad [6-57.a]$$

$$\delta W_{\Omega} = \int_L \psi \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{G}_{\Omega} \cdot dA dX_1 + \int_L \psi \int_s \delta \Omega^T \cdot \mathbf{G}_{\Omega, \Gamma} \cdot ds dX_1 + \psi \int_E \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{G}_{\Omega, \hat{E}} \cdot dA = 0$$

Für die Gleichungsbestandteile für die Gleichgewichtsgleichungen sowie für die Randbedingungen an der Stabmantelfläche und den Stabendquerschnitten gelten die folgenden formalen Zusammenhänge.

- **Feldgrößen für das Gleichgewicht**

$$\mathbf{G}_{\Omega, u} = \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} = \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} + \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{s}_{3D} \quad [6-57.b]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, q, \gamma} = \mathbf{q}_{3D, \gamma} \quad [6-57.c]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma} = -\mathbf{s}_v = -N_\alpha \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \quad [6-57.d]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, q, \Gamma} = \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \quad [6-57.e]$$

- **Randgrößen am A- und E-Querschnitt**

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} = \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} = -N_1 \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} \quad [6-57.f]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, q, \frac{A}{E}} = \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \frac{A}{E}} \quad [6-57.g]$$

- **Grundanteile der Gleichgewichtsgleichungen und der Randbedingungen**

Die Gleichgewichtsgleichungen und die Randbedingungen lassen sich wie folgt in der nach den Systemanteilen und Lastanteilen separierten Darstellung beschreiben.

$$\mathbf{G}_\Omega = \mathbf{G}_{\Omega, u} + \mathbf{G}_{\Omega, q, \gamma} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \Omega} + \mathbf{G}_{\Omega, u, q} + \mathbf{G}_{\Omega, q, \gamma} \quad [6-58.a]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, \Gamma} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma} + \mathbf{G}_{\Omega, q, \Gamma} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma, \Omega} + \mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma, q} + \mathbf{G}_{\Omega, q, \Gamma} \quad [6-58.b]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, \frac{A}{E}} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} + \mathbf{G}_{\Omega, q, \frac{A}{E}} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, \Omega} + \mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} + \mathbf{G}_{\Omega, q, \frac{A}{E}} \quad [6-58.c]$$

**Anmerkung:** Die Aufbereitung der Terme ist unter Punkt B.2 von Glg. B-1 bis Glg. B-7.b detailliert erläutert. Auf eine detaillierte Aufbereitung an dieser Stelle wird der Übersicht halber bewusst verzichtet.

Dabei gelten für die Grundanteile die folgenden Beziehungen für den Systemanteil und den Lastanteil. Der Systemanteil bezeichnet dabei jene Anteile am Gleichungssystem, die eine direkte Abhängigkeit von den unbekanntem 3D-Verschiebungsfeldern  $\Omega$  aufweisen. Die Lastanteile stellen im Rahmen der Querschnittsgleichgewichtsgleichungen Lastterme für das Querschnittproblem mit einer Abhängigkeit von den Starrkörperfriheitsgraden der Querschnittskinetik dar.

$$\mathbf{G}_{\Omega, u} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \Omega} + \mathbf{G}_{\Omega, u, q} \quad [6-58.d]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma, \Omega} + \mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma, q} \quad [6-58.e]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, \Omega} + \mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} \quad [6-58.f]$$

- Resultierende Gleichgewichtsgleichungen und Randbedingungen

Im Querschnitt

$$\mathbf{G}_{\Omega} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \Omega} = -(\mathbf{G}_{\Omega, u, q} + \mathbf{G}_{\Omega, q, \boldsymbol{\nu}})$$

$$\left\{ \mathbf{K}_{\Omega, \psi} \cdot \psi + \mathbf{K}_{\Omega, \psi'} \cdot \psi' + \mathbf{K}_{\Omega, \psi''} \cdot \psi'' \right\} \cdot \Omega = -\mathbf{F}_{\Omega, e_0} \cdot \mathbf{e}_0 - \mathbf{F}_{\Omega, e_0'} \cdot \mathbf{e}_0' - \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\nu}} \cdot \psi_q$$

[6-59.a]

Auf der Mantelfläche

$$\mathbf{G}_{\Omega, \Gamma} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma, \Omega} = -(\mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma, q} + \mathbf{G}_{\Omega, q, \Gamma})$$

$$\left\{ \mathbf{K}_{\Omega, \psi, \Gamma} \cdot \psi + \mathbf{K}_{\Omega, \psi', \Gamma} \cdot \psi' \right\} \cdot \Omega = -\mathbf{F}_{\Omega, e_0, \Gamma} \cdot \mathbf{e}_0 - \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \psi_q$$

[6-59.b]

An den Stabenden

$$\mathbf{G}_{\Omega, \frac{A}{E}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, \Omega} = -\left( \mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} + \mathbf{G}_{\Omega, q, \frac{A}{E}} \right)$$

$$\left\{ \mathbf{K}_{\Omega, \psi, \frac{A}{E}} \cdot \psi_{\frac{A}{E}} + \mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}} \right\} \cdot \Omega_{\frac{A}{E}} = -\mathbf{F}_{\Omega, e_0, \frac{A}{E}} \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} - \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \psi_{q, \frac{A}{E}}$$

[6-59.c]

Für die einzelnen Formelbestandteile gelten die folgenden Beziehungen:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi} = \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \quad [6-59.d]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi'} = \mathbf{B}_{3D, 1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} + \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0} \quad [6-59.e]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi''} = \mathbf{B}_{3D, 1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0} \quad [6-59.f]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \Gamma} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \quad [6-59.g]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \Gamma} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0} \quad [6-59.h]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi, A_E} = -N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \quad [6-59.i]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', A_E} = -N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0} \quad [6-59.j]$$

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0} = \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [6-59.k]$$

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0'} = \mathbf{B}_{3D, 1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [6-59.l]$$

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0, \Gamma} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [6-59.m]$$

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0, A_E} = -N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [6-59.n]$$

Eine detaillierte Aufbereitung und Darstellung der Herleitung der einzelnen Gleichungsbestandteile ist unter Punkt B.2 dargestellt.

### 6.5.4.2 Umgewandelte Integralform unter Berücksichtigung der FE-Ansatzfunktionen

Im Sinne der Integralumwandlung wird die partielle Integration nach den beiden Querschnittskoordinaten durchgeführt. Die Ableitungen nach der Stablängskoordinate bleiben in originaler Form erhalten. Für die weitere Verwendung für die numerische Berechnung der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder ist die Implementierung der Ansatzfunktionen erforderlich, es gilt:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\Omega} = & \int_L \psi \int_A \delta \Omega^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} - \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \boldsymbol{\nu}} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_s \delta \Omega^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot ds dX_1 + \int_L \psi \int_s \delta \Omega^T \cdot \mathbf{s}_v \cdot ds dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \int_s \delta \Omega^T \cdot \mathbf{g}_{\Gamma, s} \cdot ds dX_1 + \\
 & + \psi_A \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \Omega^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, A} \right) \cdot dA + \\
 & + \psi_A \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, A} \cdot d\Gamma = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\Omega} = & \int_L \psi \cdot \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u} dX_1 + \\
 & + \int_L \psi \cdot \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \boldsymbol{\nu}} dX_1 + \\
 & + 0 + \\
 & + \int_L \psi \cdot \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma} dX_1 + \\
 & + \psi_A \cdot \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A} + \\
 & + \psi_A \cdot \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, A} = 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega} = \mathbf{0} \\ \\ \\ \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, A} = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\delta W_{\Omega} = \int_L \psi \cdot \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega} dX_1 + \psi_A \cdot \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, A} = 0 \tag{6-60.a}$$

$$\delta W_{\Omega} = \int_L \psi \cdot \delta \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega} dX_1 + \psi_A \cdot \delta \hat{\Omega}_A^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, A} = 0 \quad \dots \text{diskretisierte Form}$$

Für die Gleichungsbestandteile der Gleichgewichtsgleichungen sowie für die Randbedingungen an der Stabmantelfläche und den Stabendquerschnitten gelten die folgenden formalen Zusammenhänge.

- **Feldgrößen für das Gleichgewicht**

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u} = \int_A \delta \Omega^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} - \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA \quad [6-60.b]$$

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \boldsymbol{\nu}} = \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \boldsymbol{\nu}} \cdot dA \quad [6-60.c]$$

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma} = \int_s \delta \Omega^T \cdot \mathbf{g}_{\Gamma, s} \cdot ds \quad [6-60.d]$$

- **Randgrößen am A- und E-Querschnitt**

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} = \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} \right) \cdot dA = \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \left( -N_1 \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} \right) \cdot dA \quad [6-60.e]$$

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \frac{A}{E}} = \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \frac{A}{E}} \cdot d\Gamma \quad [6-60.f]$$

**Anmerkung:** Auf Grund der Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes verschwinden die Randbedingungen an der Stabmantelfläche.

**Anmerkung:** Die Aufbereitung der Terme ist in Punkt B.3 in Glg. B-8.a bis Glg. B-12.e detailliert erläutert.

- **Grundanteile der Gleichgewichtsgleichungen**

Die Gleichgewichtsgleichungen und die Randbedingungen lassen sich wie folgt in der nach Systemanteilen und Lastanteilen separierten Darstellung beschreiben:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\Omega} = \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u} + \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \boldsymbol{\nu}} + \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma} = \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} + \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} + \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \boldsymbol{\nu}} + \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma} \quad [6-61.a]$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, \frac{A}{E}} = \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} + \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \frac{A}{E}} = \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, \Omega} + \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} + \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \frac{A}{E}} = \mathbf{0} \quad [6-61.b]$$

Die Grundanteile spalten sich wie folgt in einen Systemanteil und einen Lastanteil auf.

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u} = \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} + \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} \quad [6-61.c]$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} = \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, \Omega} + \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} \quad [6-61.d]$$

- **Diskretisierte Form der Gleichgewichtsgleichungen**

Für die Diskretisierung der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder werden die Ansatzfunktionen für die realen und die virtuellen 3D-Verschiebungsfelder wie folgt definiert.

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{H}^T \cdot \hat{\mathbf{\Omega}} \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{\Omega} = \mathbf{H}^T \cdot \delta \hat{\mathbf{\Omega}} \quad [6-62]$$

Werden diese Beziehungen in die Gleichgewichtsgleichungen eingearbeitet, dann wird von der diskretisierten Form gesprochen, diese ist durch „ $\hat{\phantom{x}}$ “ gekennzeichnet. Die Einarbeitung der Ansatzfunktionen in die Gleichgewichtsgleichungen verändert die Struktur dieser nicht. Sämtliche Eigenschaften der nicht diskretisierten Form bleiben erhalten.

Die diskretisierten Gleichgewichtsgleichungen sowie die zugehörigen Randbedingungen lassen sich wie folgt darstellen.

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega} = \delta \hat{\mathbf{\Omega}}^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega} \quad [6-63.a]$$

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, \frac{A}{E}} = \delta \hat{\mathbf{\Omega}}_{\frac{A}{E}}^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, \frac{A}{E}} \quad [6-63.b]$$

Die Gleichgewichtsgleichungen und die Randbedingungen lassen sich wie folgt in der nach Systemanteilen und Lastanteilen separierten Darstellung beschreiben:

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \boldsymbol{\gamma}} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \boldsymbol{\gamma}} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma} \quad [6-63.c]$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, \frac{A}{E}} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \frac{A}{E}} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, \Omega} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \frac{A}{E}} = \mathbf{0} \quad [6-63.d]$$

Die Grundanteile spalten sich wie folgt in einen Systemanteil und einen Lastanteil auf.

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} \quad [6-63.e]$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, \Omega} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} \quad [6-63.f]$$

• Resultierende Gleichgewichtsgleichungen und Randbedingungen

Im Querschnitt

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \boldsymbol{\gamma}} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \boldsymbol{\gamma}} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma} = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} = -(\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \boldsymbol{\gamma}} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma})$$

$$\left\{ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi} \cdot \psi + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'} \cdot \psi' + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} \cdot \psi'' \right\} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} = -\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0} \cdot \mathbf{e}_0 - \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'} \cdot \mathbf{e}_{0'} - \int_A \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} dA \cdot \psi_q - \int_s \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} ds \cdot \psi_q$$

[6-64.a]

An den Stabenden

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, A} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, A} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, \Omega} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, q} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, A} = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, \Omega} = -\left( \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, q} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, A} \right)$$

$$\left\{ \pm \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, A} \cdot \psi_A \pm \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', A} \cdot \psi'_A \right\} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_A = -\left( \pm \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0, A} \cdot \mathbf{e}_{0, A} + \int_{\Gamma_A} \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} dA \right)$$

[6-64.b]

Für die einzelnen Formelbestandteile gelten die folgenden Beziehungen:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi} = -\int_A \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} \, dA \quad [6-64.c]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'} = \int_A (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} - \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T) \, dA \quad [6-64.d]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} = \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \quad [6-64.e]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, \frac{A}{E}} = \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} \, dA \quad [6-64.f]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} = \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} = \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \quad [6-64.g]$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0} = -\int_A \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [6-64.h]$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'} = \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [6-64.i]$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} = \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'} = \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [6-64.j]$$

Eine detaillierte Aufbereitung und Darstellung der Herleitung der einzelnen Gleichungsbestandteile ist unter Punkt B.3 dargestellt.

### 6.5.5 Aufbereitung der Stab-Gleichgewichtsgleichungen (0-Problem)

Diese Art der Darstellung liefert die bekannten Gleichgewichtsgleichungen für den klassischen 3D-Stab. Ausgehend von der originalen Form wird die umgewandelte Form des Gleichgewichts bestimmt.

#### 6.5.5.1 Originale Integralform

Diese Art der Darstellung des Gleichgewichts findet für die weitere Problembehandlung keine Anwendung und dient ausschließlich der Herleitung der umgewandelten Form der Integraldarstellung.

$$\begin{aligned}
 \delta W_0 = & \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} \cdot dA dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_s \mathbf{A}_0^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot ds dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_s \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds dX_1 & + \\
 & + \delta \mathbf{u}_{0, A_E}^T \int \mathbf{A}_0^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, A_E} \right) \cdot dA & + \\
 & + \delta \mathbf{u}_{0, A_E}^T \int \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, A_E} \cdot dA & = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_0 = & \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{G}_{0, u} \cdot dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{G}_{0, q, \boldsymbol{\gamma}} \cdot dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{G}_{0, u, \Gamma} \cdot dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{G}_{0, q, \Gamma} \cdot dX_1 & + \\
 & + \delta \mathbf{u}_{0, A_E}^T \cdot \mathbf{G}_{0, u, A_E} & + \\
 & + \delta \mathbf{u}_{0, A_E}^T \cdot \mathbf{G}_{0, q, A_E} & = 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{G}_0 = \mathbf{0} \\ \\ \\ \\ \mathbf{G}_{0, A_E} = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\delta W_0 = \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{G}_0 \cdot dX_1 + \delta \mathbf{u}_{0, A_E}^T \cdot \mathbf{G}_{0, A_E} = 0$$

[6-65.a]

Für die Gleichungsbestandteile der Gleichgewichtsgleichungen sowie für die Randbedingungen an der Stabmantelfläche und den Stabendquerschnitten gelten die folgenden formalen Zusammenhänge.

- **Feldgrößen für das Gleichgewicht**

$$\mathbf{G}_{0,u} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \left( \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D,\perp} + \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{s}_{3D} \right) \cdot dA \quad [6-65.b]$$

$$\mathbf{G}_{0,q,\boldsymbol{\gamma}} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\boldsymbol{\gamma}} \cdot dA \quad [6-65.c]$$

$$\mathbf{G}_{0,u,\Gamma} = \int_S \mathbf{A}_0^T \cdot (-\mathbf{s}_V) \cdot ds = \int_S \mathbf{A}_0^T \cdot (-N_\alpha \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D}) \cdot ds \quad [6-65.d]$$

$$\mathbf{G}_{0,q,\Gamma} = \int_S \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\Gamma} \cdot ds \quad [6-65.e]$$

- **Randgrößen am A- und E-Querschnitt**

$$\mathbf{G}_{0,u,A_E} = \int \mathbf{A}_0^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D,\perp,A_E} \right) \cdot dA = \int \mathbf{A}_0^T \cdot \left( -N_1 \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp,A_E} \right) \cdot dA \quad [6-65.f]$$

$$\mathbf{G}_{0,q,A_E} = \int \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\Gamma,A_E} \cdot dA \quad [6-65.g]$$

- **Aufbereitung**

**Anmerkung:** Diese Art der Problemdarstellung bleibt im Weiteren ohne weitere Verwendung, aus diesen Gründen wird keine Aufbereitung im Detail durchgeführt.

### 6.5.5.2 Umgewandelte Integralform

Diese Art der Darstellung gilt als grundlegende Form für die weitere Beschreibung für das Stabproblem. Sie liefert die sechs Gleichgewichtsgleichungen für den Starrkörperanteil der Querschnittskinematik des 3D-Stabes.

$$\begin{aligned}
 \delta W_0 = & \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} - \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dA dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_s \mathbf{A}_0^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot ds dX_1 + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_s \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_v \cdot ds dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \int_s \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds dX_1 & + \\
 & + \delta \mathbf{u}_{0, A, E}^T \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \mathbf{A}_0^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, A} \right) \cdot dA & + \\
 & + \delta \mathbf{u}_{0, A, E}^T \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, A} \cdot dA & = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_0 = & \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{0, u} \, dX_1 & + & \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{0, q, \gamma} \, dX_1 & + & \\
 & + 0 & + & \\
 & + \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{0, q, \Gamma} \, dX_1 & + & \\
 & + \delta \mathbf{u}_{0, A, E}^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{0, u, A} & + & \\
 & + \delta \mathbf{u}_{0, A, E}^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{0, q, A} & = 0 &
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{G}}_0 = \mathbf{0} \\ \\ \\ \tilde{\mathbf{G}}_{0, A} = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\delta W_0 = \int_L \delta \mathbf{u}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_0 \, dX_1 + \delta \mathbf{u}_{0, A, E}^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{0, A} = 0$$

[6-66.a]

Für die einzelnen Gleichungsbestandteile gelten die folgenden formalen Zusammenhänge:

- **Feldgrößen für das Gleichgewicht**

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,u} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D,\perp} - \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA \quad [6-66.b]$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,q,\boldsymbol{\nu}} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\boldsymbol{\nu}} \cdot dA \quad [6-66.c]$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,q,\Gamma} = \int_S \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\Gamma} \cdot ds \quad [6-66.d]$$

- **Randgrößen am A- und E-Querschnitt**

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,u,\hat{A}_E} = \int_{\Gamma_{\hat{A}_E}} \mathbf{A}_0^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D,\perp,\hat{A}_E} \right) \cdot dA = \int_{\Gamma_{\hat{A}_E}} \mathbf{A}_0^T \cdot \left( -N_1 \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp,\hat{A}_E} \right) \cdot dA \quad [6-66.e]$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,q,\hat{A}_E} = \int_{\Gamma_{\hat{A}_E}} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\Gamma,\hat{A}_E} \cdot dA \quad [6-66.f]$$

**Anmerkung:** Die Aufbereitung der Terme ist unter B.4 von Glg. B-13.a bis Glg. B-16.d detailliert erläutert.

- **Resultierende Gleichgewichtsgleichungen und Randbedingungen**

**Im Stabinneren**

$$\tilde{\mathbf{G}}_0 = \tilde{\mathbf{G}}_{0,u} + \tilde{\mathbf{G}}_{0,q} = \mathbf{0}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,u} = -\tilde{\mathbf{G}}_{0,q}$$

$$\left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_0 = -\tilde{\mathbf{q}}_0 \cdot \Psi_q$$

[6-67.a]

**An den Stabenden**

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,\frac{A}{E}} = \tilde{\mathbf{G}}_{0,\frac{A}{E},u} + \tilde{\mathbf{G}}_{0,\frac{A}{E},q} = \mathbf{0}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,\frac{A}{E},u} = -\tilde{\mathbf{G}}_{0,\frac{A}{E},q}$$

$$\pm \mathbf{n}_{0,\frac{A}{E}} = -\tilde{\mathbf{r}}_{0,\frac{A}{E}} \cdot \Psi_{q,\frac{A}{E}}$$

[6-67.b]

### 6.5.6 Aufbereitung der Stabgleichgewichtsgleichungen ( $\Psi$ -Problem)

Diese Art der Darstellung liefert die Stab-Gleichgewichtsgleichungen für die Bestimmung der Abklingzahlen der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder des 3D-Stabes.

#### 6.5.6.1 Originale Integralform

Diese Art der Darstellung des Gleichgewichts findet für die weitere Problembehandlung keine Anwendung und dient ausschließlich der Herleitung der umgewandelten Form der Integraldarstellung.

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\Psi} = & \int_L \delta \psi \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \psi \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dA dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \psi \int_s \Omega^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot ds dX_1 & + \\
 & + \int_L \delta \psi \int_s \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds dX_1 & + \\
 & + \delta \psi \int_{\Gamma} \int_{\hat{E}} \Omega^T \cdot \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, A, \hat{E}} \cdot dA & + \\
 & + \delta \psi \int_{\Gamma} \int_{\hat{E}} \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, A, \hat{E}} \cdot dA & = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\Psi} = & \int_L \delta \psi \cdot G_{\Psi, u} \, dX_1 & + & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} G_{\Psi} = 0 \\
 & + \int_L \delta \psi \cdot G_{\Psi, q, \gamma} \, dX_1 & + & \\
 & + \int_L \delta \psi \cdot G_{\Psi, u, \Gamma} \, dX_1 & + & \\
 & + \int_L \delta \psi \cdot G_{\Psi, q, \Gamma} \, dX_1 & + & \\
 & + \delta \psi \int_{\Gamma} \int_{\hat{E}} G_{\Psi, u, A, \hat{E}} & + & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} G_{\Psi, A, \hat{E}} = 0 \\
 & + \delta \psi \int_{\Gamma} \int_{\hat{E}} G_{\Psi, q, A, \hat{E}} & = 0 &
 \end{aligned}$$

[6-68.a]

$$\delta W_{\Psi} = \int_L \delta \psi \cdot G_{\Psi} \, dX_1 + \delta \psi \int_{\Gamma} \int_{\hat{E}} G_{\Psi, A, \hat{E}} = 0$$

Für die einzelnen Gleichungsbestandteile gelten die folgenden formalen Zusammenhänge:

- **Feldgrößen für das Gleichgewicht**

$$G_{\psi, u} = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \left( \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} + \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{s}_{3D} \right) \cdot dA \quad [6-68.b]$$

$$G_{\psi, q, \gamma} = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dA \quad [6-68.c]$$

$$G_{\psi, u, \Gamma} = \int_S \boldsymbol{\Omega}^T \cdot (-\mathbf{s}_V) \cdot ds = \int_S \boldsymbol{\Omega}^T \cdot (-N_\alpha \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D}) \cdot ds \quad [6-68.d]$$

$$G_{\psi, q, \Gamma} = \int_S \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds \quad [6-68.e]$$

- **Randgrößen am A- und E-Querschnitt**

$$G_{\psi, u, \frac{A}{E}} = \int \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} \right) \cdot dA = \int \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \left( -N_1 \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} \right) \cdot dA \quad [6-68.f]$$

$$G_{\psi, q, \frac{A}{E}} = \int \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \frac{A}{E}} \cdot dA \quad [6-68.g]$$

- **Aufbereitung**

**Anmerkung:** Diese Art der Problemdarstellung bleibt im Weiteren ohne Verwendung und wird aus diesem Grund nicht im Detail aufbereitet.

**6.5.6.2 Umgewandelte Integralform**

Diese Art der Darstellung gilt als grundlegende Form für die weitere Beschreibung des Stabproblems. Sie liefert die N Gleichgewichtsgleichungen für die relativen 3D-Einzerverschiebungsfelder der Querschnittskinetik des 3D-Stabes in Stablängsrichtung.

$$\begin{aligned}
 \delta W_\psi = & \int_L \delta\psi \int_A \Omega^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} - \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \int_L \delta\psi \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dA dX_1 + \\
 & + \left( \int_L \delta\psi \int_s \Omega^T \cdot (-\mathbf{s}_v) \cdot ds dX_1 + \int_L \delta\psi \int_s \Omega^T \cdot \mathbf{s}_v \cdot ds dX_1 \right) + \\
 & + \int_L \delta\psi \int_s \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds dX_1 + \\
 & + \delta\psi \int_{\hat{E}} \int_{\hat{\Gamma}} \Omega^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, A} \right) \cdot dA + \\
 & + \delta\psi \int_{\hat{E}} \int_{\hat{\Gamma}} \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, A} \cdot dA = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_\psi = & \int_L \delta\psi \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{\psi, u} dX_1 + \\
 & + \int_L \delta\psi \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{\psi, q, \gamma} dX_1 + \\
 & + 0 + \\
 & + \int_L \delta\psi \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{\psi, q, \Gamma} dX_1 + \\
 & + \delta\psi_{\hat{E}} \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{\psi, u, A} + \\
 & + \delta\psi_{\hat{E}} \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{\psi, q, A} = 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{G}}_\psi = 0 \\ \\ \\ \tilde{\mathbf{G}}_{\psi, A} = 0 \end{array}$$

[6-69.a]

$$\delta W_\psi = \int_L \delta\psi \cdot \tilde{\mathbf{G}}_\psi dX_1 + \delta\psi_{\hat{E}} \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{\psi, A} = 0$$

Für die einzelnen Gleichungsbestandteile gelten die folgenden formalen Zusammenhänge:

- **Feldgrößen für das Gleichgewicht**

$$\tilde{G}_{\psi, u} = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} - \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA \quad [6-69.b]$$

$$\tilde{G}_{\psi, q, \gamma} = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \cdot dA \quad [6-69.c]$$

$$\tilde{G}_{\psi, q, \Gamma} = \int_S \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds \quad [6-69.d]$$

- **Randgrößen am A- und E-Querschnitt**

$$\tilde{G}_{\psi, u, \frac{A}{E}} = \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \left( \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} \right) \cdot dA = \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \left( -N_1 \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} \right) \cdot dA \quad [6-69.e]$$

$$\tilde{G}_{\psi, q, \frac{A}{E}} = \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \frac{A}{E}} \cdot dA \quad [6-69.f]$$

**Anmerkung:** Die Aufbereitung der Terme ist unter B.5 von Glg. B-17.a bis Glg. B-20.d detailliert erläutert.

- Resultierende Gleichgewichtsgleichungen und Randbedingungen

## Im Stabinneren

$$\tilde{G}_{\psi} = \tilde{G}_{\psi, u} + \tilde{G}_{\psi, q} = 0$$

$$\tilde{G}_{\psi, u} = -\tilde{G}_{\psi, q}$$

$$\left( \mathbf{I}_{\psi, 1} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}_{\psi, 2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_{\psi} = -\tilde{\mathbf{q}}_{\psi} \cdot \psi_q$$

[6-70.a]

## An den Stabenden

$$\tilde{G}_{\psi, A} = \tilde{G}_{\psi, A, u} + \tilde{G}_{\psi, A, q} = 0$$

$$\tilde{G}_{\psi, A, u} = -\tilde{G}_{\psi, A, q}$$

$$\pm M_{\psi, A} = -\tilde{\mathbf{r}}_{\psi, A} \cdot \psi_{q, A}$$

[6-70.b]

## 6.6 Struktur des Differentialgleichungssystems

### 6.6.1 Allgemeiner Aufbau des Gleichungssystems

Wie unter 6.5.1.1 detailliert beschrieben, entstehen durch die Einarbeitung des strukturierten 3D-Verschiebungsansatzes in das Gleichgewicht in Integralform, unter der Beachtung der Produktregel der Differentialrechnung, die folgenden drei Gleichungsbestandteile der Gleichgewichtsgleichungen. Eine schematische Darstellung ist in Abb. 6.7 dargestellt.

- **Stabgleichgewichtsgleichungen (Zeilen 1-6) des klassischen 3D-Stabes.  $\delta \mathbf{u}_0$**

Diese Gleichungen repräsentieren den klassischen bekannten schubnachgiebigen 3D-Stab mit der kinematischen Restriktion des ebenen und unverformbaren Stabquerschnitts. Die Zeilen 1-6 des Gleichungssystems sind Grundlage für die Lösung des Stablängsproblems.

- **Stabgleichgewichtsgleichungen (Zeile 7) für die Erweiterung des klassischen Stabes:  $\delta \Psi$**

Dieser Anteil am Stabgleichgewichtsgleichungssystem repräsentiert die Erweiterung des klassischen Stabes um die allgemeine Verformbarkeit des Stabquerschnitts; dies betrifft sowohl die axialen Querschnittsverwölbungen als auch die echten Querschnittsverformungen. Die Zeile 7 des Gleichungssystems ist Grundlage für die Lösung des Stablängsproblems.

- **Querschnittsgleichgewichtsgleichungen (Zeile 8):  $\delta \Omega$**

Die Querschnittsgleichgewichtsgleichung wird für die Bestimmung von 3D-Einzelverschiebungsfeldern und der zugehörigen Abklingzahlen für das formulierte Stabproblem mit komplexem Querschnitt verwendet.

Es ist wesentlich, dass die beiden Anteile  $\delta \Psi$  und  $\delta \Omega$  immer wechselseitig erfüllt sind, d. h. wird eine Gleichung für die Ermittlung einer im Gleichgewicht stehenden Teillösung verwendet, dann ist die jeweils andere Gleichung ohne Ausnahme eindeutig erfüllt. Wird beispielsweise ein 3D-Einzelverschiebungsfeld (Abklinglösungsanteil) mit der zugehörigen Abklingzahl aus den Gleichungen  $\delta \Omega$  bestimmt, dann ist durch Einsetzen dieser Lösung in die Gleichungen von  $\delta \Psi$  das Gleichgewicht eindeutig erfüllt. Die zwei beschriebenen Gleichungsbestandteile  $\delta \Psi$  und  $\delta \Omega$  führen dabei nicht zu einer Gleichung, sondern stehen im Rahmen der gesamten Herleitung und Ausarbeitung der Grundgleichungen stellvertretend für ein ganzes Paket an 3D-Einzelverschiebungsfeldern mit einer dem Grundsatz nach unendlich möglichen Anzahl.

Für die Größe des zugehörigen beschreibenden Gleichgewichtssystems bedeutet dies, dass die sechs grundlegenden Stabgleichgewichtsgleichungen – diese stellen zwar den bedeutenderen mechanischen Anteil in Form des globalen 3D-Teilverschiebungsfeldes dar – je nach der gewählten Anzahl an 3D-Einzelverschiebungsfeldern des lokalen 3D-Teilverschiebungsfeldes den kleineren Anteil am Gesamtgleichungssystem einnehmen. Die Anzahl der 3D-Einzelverschiebungsfelder kann beliebig gewählt werden und im Grenzfall mit einer unendlichen Anzahl  $N$  verwendet werden. In Abb. 6.7 ist eine schematischer Überblick über alle auftretenden Anteile der Stab- und Querschnittsgleichgewichtsgleichungen dargelegt. Um die reale Ausdehnung des zu lösenden Gleichgewichtsgleichungssystems zu zeigen, sind in Abb. 6.8 die Stabgleichgewichtsgleichungen für eine beliebige Anzahl an 3D-Einzelverschiebungsfeldern des lokalen 3D-Teilverschiebungsfeldes gezeigt. Für die farbliche Darstellung der Gleichungsbestandteile gilt: Die Farben nehmen keinen Bezug auf die Anteile „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “:

**N-M Gleichungen;**
 **V-Gleichungen;**
  **$M_t$ -Gleichungen;**  
 **Querschnittsverformungen;**
 **Querschnittsverwölbungen**

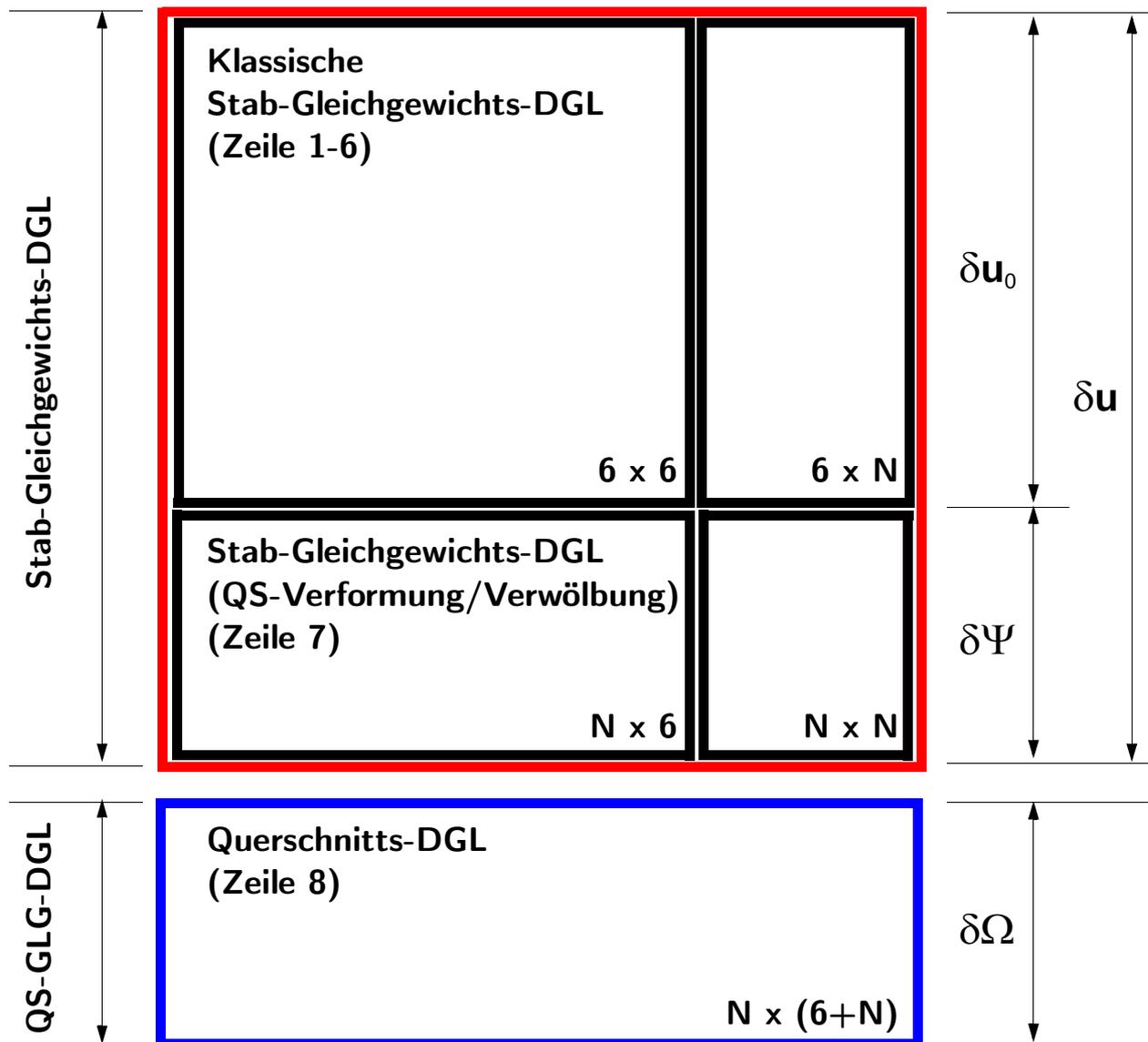
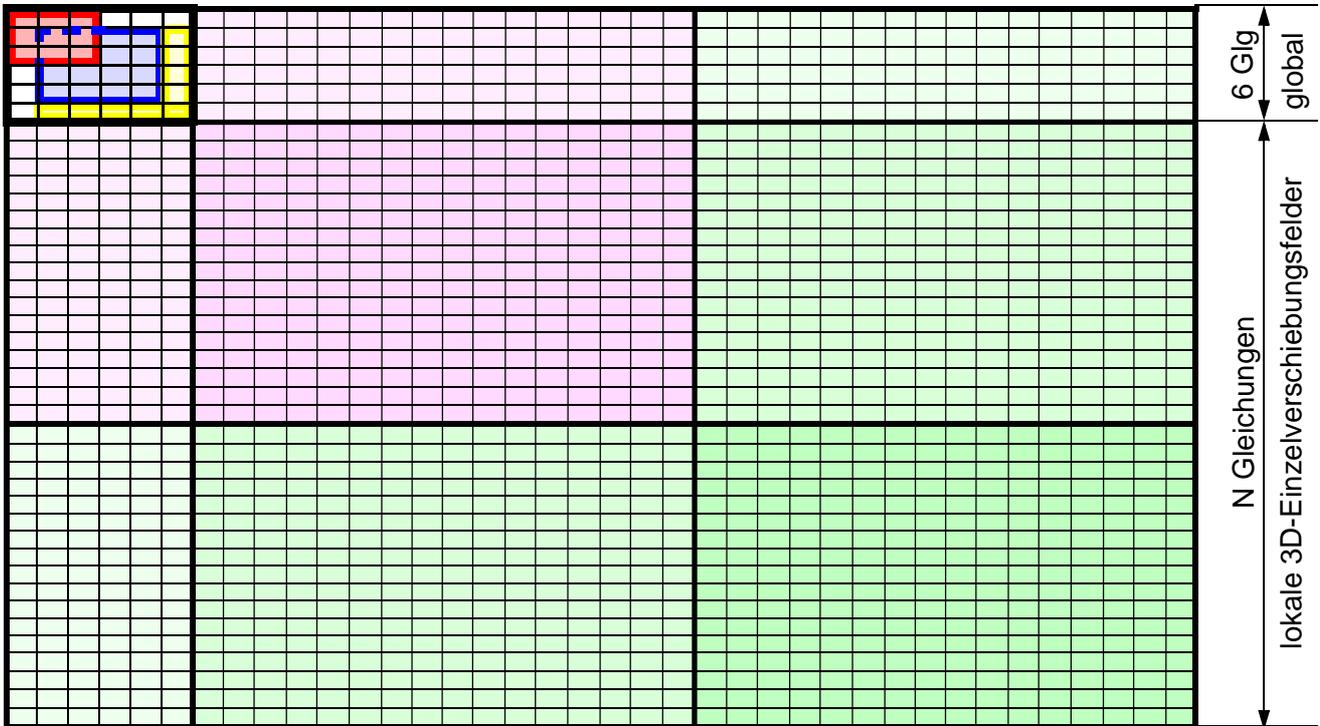


Abb. 6.7: Überblick über alle Anteile der Gleichgewichtsgleichungen in Integralform

(a)



(b)

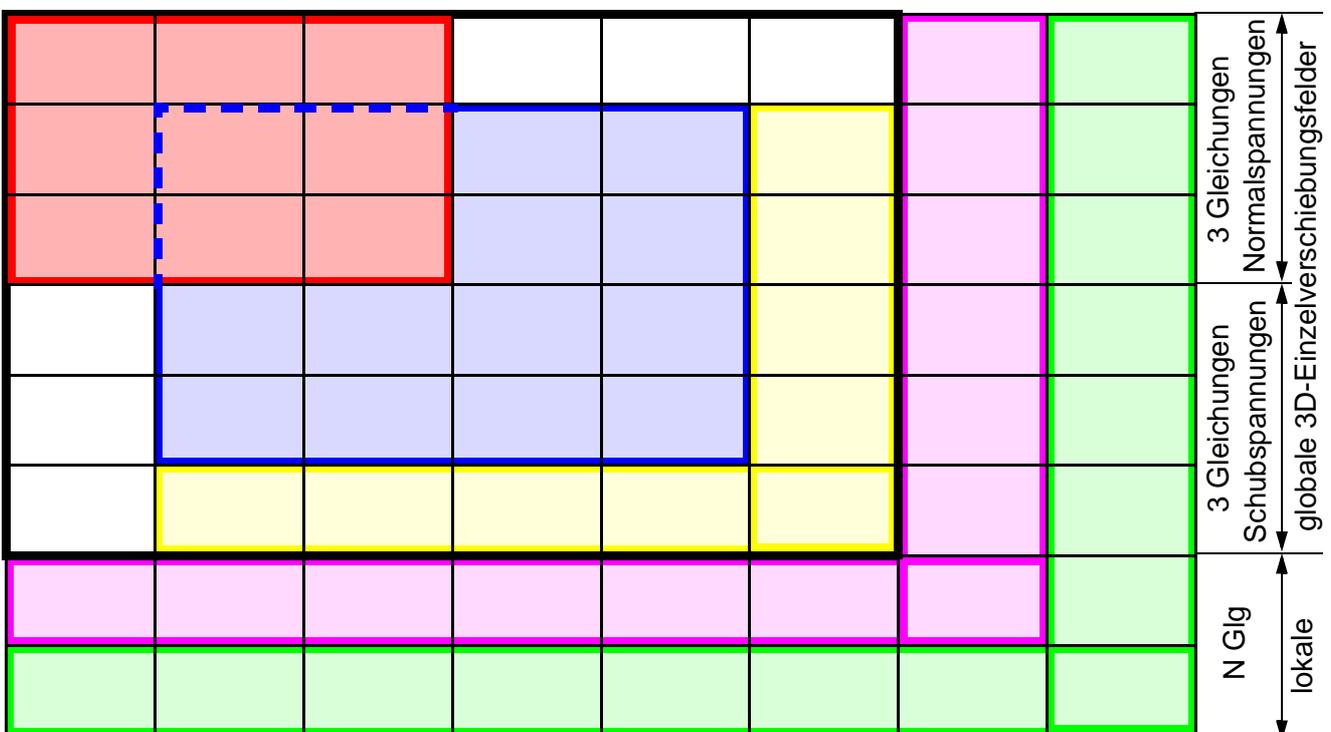


Abb. 6.8: Gleichgewichtsgleichungen in (a) realer und (b) kompakter schematischer Darstellungsform in Integralform

## 6.6.2 Darstellungsformen der Gleichungen in Abhängigkeit der Lösungsmethodik

Im Rahmen der Lösung des hergeleiteten Differentialgleichungssystems sind die folgenden Darstellungsformen der Gleichgewichtsgleichungen in integraler Form erforderlich.

### 6.6.2.1 Darstellung für eine analytische Lösung des Querschnittproblems

Diese Art der Darstellung gilt als Ausgangspunkt für die Lösung des Querschnittproblems in allgemeiner analytischer Form. Basierend auf den gewonnenen Lösungen für die 3D-Einzelverschiebungsfelder und den zugehörigen Abklingzahlen in Stablängsrichtung wird mit den zugehörigen Stabgleichgewichtsgleichungen das vollständige Stablängsrichtungsproblem gelöst. Es ist wesentlich festzuhalten, dass aus Gleichgewichtsgründen zwischen den 3D-Teilverschiebungsfeldern Interaktionen erforderlich sind. Beispielsweise treten gemeinsam mit einem 3D-Einzelverschiebungsfeld stets auch begleitende Starrkörperverformungen des Querschnitts auf, siehe Punkt 7.

Für die Art der Problemlösung sind die folgenden Darstellungsformen aller Gleichgewichtsgleichungen erforderlich.

- Eine Querschnittsdifferentialgleichung  $\delta\Omega$  inklusive der zugehörigen Randbedingungen in originaler Integralform (Zeile 8), siehe Punkt 6.5.4.
- Sieben Stabgleichgewichtsgleichungen  $\delta\mathbf{u}_0$  und  $\delta\Psi$  inklusive der zugehörigen Randbedingungen in umgewandelter Integralform, siehe Punkt 6.5.5 und Punkt 6.5.6.

Die analytische Lösbarkeit des Querschnittproblems basierend auf dieser originalen Darstellungsform stößt in der praktischen Anwendung gerade für komplexe Querschnittsaufbauten schnell an ihre Grenzen. Für eine praktische Umsetzung wird deshalb auf die umgewandelte diskretisierte Darstellung des Gleichgewichts übergegangen.

### 6.6.2.2 Darstellung für eine numerische Lösung des Querschnittproblems

Für die numerische Problemlösung des Querschnittproblems werden für die Gleichungen die folgenden Darstellungsformen aufbereitet.

- Eine Querschnittsdifferentialgleichung  $\delta\Omega$  inklusive der zugehörigen Randbedingungen in umgewandelter diskretisierter Integralform, siehe Punkt 6.5.4.
- Sieben Stabgleichgewichtsgleichungen  $\delta\mathbf{u}_0$  und  $\delta\Psi$  inklusive der zugehörigen Randbedingungen in umgewandelter diskretisierter Integralform, siehe Punkt 6.5.5 und Punkt 6.5.6.

Der generelle Aufbau der Gleichgewichtsgleichungen für ein System mit einer beliebigen Anzahl an 3D-Einzelverschiebungsfeldern bleibt – verglichen mit der originalen Darstellung – für die diskretisierte Darstellungsform unbeeinflusst.

Erst im Rahmen der Berechnung der Ergebnisse mittels numerischer Verfahren treten Abweichungen von der exakten analytischen Lösung, bedingt durch den gewählten Diskretisierungsgrad, auf.

In diesem Zusammenhang wird nur mehr von der exakten Lösung gesprochen. Bei entsprechender Feinheit der Querschnittsdiskretisierung stimmt die erzielbare Ergebnisgenauigkeit mit jener aus der analytischen Lösung überein.

## 6.7 Aufbereitung der Gleichungen für die analytische Lösung

Für die analytische Lösung der Stab- und der Querschnittsgleichgewichtsgleichungen werden die Bestandteile der Gleichgewichtsgleichungen in der folgenden Darstellungsform aufbereitet:

- **Stabgleichgewichtsgleichungen**

Die sieben Zeilen der Stabgleichgewichtsgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen liegen in umgewandelter Integralform vor. Diese dienen der analytischen Berechnung des Stablängsproblems im Falle des schubnachgiebigen 3D-Stabes mit sich frei einstellenden Querschnittsverschiebungszuständen.

- **Querschnitts-DGL**

Die Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen liegt in originaler Integralform vor. Diese dienen der Bestimmung der 3D-Einzerverchiebungsfelder der Freifeldlösungen des 3D-Stabes für die Belastungsfälle der in Stablängsrichtung konstanten Querkräfte und der konstanten Torsion.

### 6.7.1 GLG-DGL-System für orthotropes Material: Umgewandelte Integralform

Das Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem für den wölbschubnachgiebigen 3D-Stab ergibt sich aus der Erweiterung des klassischen schubnachgiebigen Stabes um die freie Verformbarkeit des Stabquerschnitts. Diese zusätzlichen Effekte lassen sich durch eine zusätzliche 7te Zeile im Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem unter Einführung der neuen Systemunbekannten  $\Psi$  realisieren.

#### 6.7.1.1 Gleichgewichtsgleichungen 1-6 und 7 für das 3D-Stabproblem

- **Gleichgewichtsgleichungen 1-6 für den klassischen 3D-Stab**

Die sechs Stab-Gleichgewichtsgleichungen des klassischen 3D-Stabes laut Glg. 6-67.a werden in weiterer Folge durch den stabachsenbezogenen Verzerrungsparameter und auf Basis eines orthotropen Materialverhaltens ausgedrückt.

$$\left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} + \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_0 = - \tilde{\mathbf{q}}_0 \cdot \Psi_q \quad [6-71.a]$$

Der Stabschnittgrößenvektor  $\mathbf{n}_0$  lässt sich nach Glg. 6-71.b separiert nach den 0- und  $\Omega$ -Anteilen – System- und Lastanteil – darstellen. Unter Systemanteil werden dabei jene Gleichungsbestandteile verstanden, die direkt mit dem unbekanntem 3D-Verschiebungsfeld  $\Omega$  zusammenhängen. Jene Gleichungsanteile, die in Abhängigkeit der bekannten Starrkörperfreiheitsgrade  $\mathbf{e}_0$  der Querschnittskinematik auftreten, werden in diesem Fall als Lastanteile bezeichnet, da diese im Rahmen der Lösung des Querschnittproblems als solche wirken.

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_{0,0} + \mathbf{n}_{0,\Omega} = \mathbf{K}_{0,0} \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{k}_{0,\Psi} \cdot \Psi + \mathbf{k}_{0,\Psi'} \cdot \Psi' \quad [6-71.b]$$

Die detaillierten Herleitungen für den Stabschnittgrößenvektor  $\mathbf{n}_0$  sind in Glg. C-5.a angeführt.

$$\mathbf{l}^*_{0,2+3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6-71.c]$$

- **Gleichgewichtsgleichung 7 für die Erweiterung um die Wölbnachgiebigkeit**

Die siebte Gleichungszeile ergibt sich aus Glg. 6-70.a und stellt eine zu den klassischen 3D-Stabgleichungen zusätzlich auftretende Gleichung für das Wölbmomentengleichgewicht dar, des gilt:

$$\left( \mathbf{l}_{\psi,1} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{l}_{\psi,2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_{\psi} = -\tilde{\mathbf{q}}_{\psi} \cdot \psi_{\mathbf{q}} \quad [6-72.a]$$

Die Wölbchnittgrößen  $\mathbf{n}_{\psi}$  werden unter Berücksichtigung von Glg. C-2.b, Glg. C-29.a und Glg. C-44.a auf Basis des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters dargestellt.

$$\mathbf{n}_{\psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\psi} \\ \mathbf{V}_{\psi} \end{bmatrix} \quad [6-72.b]$$

$$\mathbf{M}_{\psi} = \mathbf{M}_{\psi,0} + \mathbf{M}_{\psi,\Omega} = \mathbf{k}_{\psi,0} \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{K}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot \psi + \mathbf{K}_{\psi,\Omega,\psi'} \cdot \psi' \quad [6-72.c]$$

$$\mathbf{V}_{\psi} = \mathbf{V}_{\psi,0} + \mathbf{V}_{\psi,\Omega} = \mathbf{s}_{\psi,0} \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{S}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot \psi + \mathbf{S}_{\psi,\Omega,\psi'} \cdot \psi' \quad [6-72.d]$$

Die detaillierte Herleitung des Wölbchnittgrößenvektors ist in Glg. B-17.f angeführt. Für die Vorfaktormatrizen in Glg. 6-72.a gilt:

$$\mathbf{l}_{\psi,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [6-72.e]$$

$$\mathbf{l}_{\psi,2+3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [6-72.f]$$

- **Zusammenfassung Zeile 1 - 7**

Werden die ermittelten Anteile (Zeile 1-6 und 7) der Stabgleichgewichtsdifferentialgleichung zusammengefasst, so resultiert daraus, das, den 3D-Stab beschreibende, gesamte Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem für den inhomogenen Stabbelastungsfall. Das Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem ist in zusammengefasster Darstellung in Glg. 6-73.a angeführt. In Glg. 6-73.b ist die detaillierte Besetzung der Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems angegeben.

Das 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem hat allgemeine Gültigkeit für die materielle Orthotropie. Für den Fall der materiellen Isotropie mit und ohne Querkontraktionseffekte ergeben sich adaptierte vereinfachte Vorfaktoren in der Steifigkeitsmatrix nach Kapitel C.



Detaillierte Darstellung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems des 3D-Stabes: Mit dimensionsunreinem Stabverzerrungsparameter

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cc}
 K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 & K_{0,\psi,1} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 \hline
 K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & -S_{0,23} & -S_{0,33} & -S_{0,31} & K_{0,\psi,2} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{0,\psi,3} & K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{0,\psi',3} \\
 \hline
 K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,22} & S_{0,23} & S_{0,21} & K_{0,\psi,3} \frac{\partial}{\partial X_1} + S_{0,\psi,2} & K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} + S_{0,\psi',2} \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi,2} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi,3} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi,1} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 \hline
 K_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{\psi,\Omega,\psi} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{\psi,\Omega,\psi} & K_{\psi,\Omega,\psi'} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{\psi,\Omega,\psi'} \\
 -K_{0,\psi,1} & -K_{0,\psi,2} & -K_{0,\psi,3} & -S_{0,\psi,2} & -S_{0,\psi,3} & -S_{0,\psi,1} & & 
 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \psi \\ \psi' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_\psi \end{bmatrix} \cdot \psi_{\mathbf{q}} \quad [6-73.b]$$

Werden sämtliche Einträge des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters in dimensionsreiner Form dargestellt, siehe Glg. 6-74.b, dann sind alle Einträge des Stabverformungsparameters  $\mathbf{u}$  in die Dimensionen einer Verschiebung [m] überzuführen, siehe Glg. 6-74.a. Wird diese Strategie konsequent verfolgt, dann ist der Stabschnittgrößenvektor  $\mathbf{n}$  in den Dimensionen einer Kraft [N] darzustellen, siehe Glg. 6-78.c

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2^* \\ \beta_3^* \\ U_2 \\ U_3 \\ \beta_1^* \\ \psi^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2 \cdot L \\ \beta_3 \cdot L \\ U_2 \\ U_3 \\ \beta_1 \cdot L \\ \psi \cdot L \end{bmatrix} \quad [6-74.a]$$

In der dargestellten Form ist der stabachsenbezogene Verzerrungsparameter dimensionsrein.

$$\begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2^* \\ \kappa_3^* \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1^* \\ \kappa_\Omega^* \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2^* \\ \beta_3^* \\ U_2 \\ U_3 \\ \beta_1^* \\ \psi^* \end{bmatrix} \quad [6-74.b]$$

$$\begin{aligned} E_{11,0} &= U_1' \\ \kappa_2^* &= \beta_2'^* & \kappa_3^* &= \beta_3'^* \\ \gamma_{12,0} &= U_2' - \beta_3 & \gamma_{13,0} &= U_3' + \beta_2 \\ \kappa_1^* &= \beta_1'^* \\ \psi &= \psi^*/L \end{aligned} \quad [6-74.c]$$

Detaillierte Darstellung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems des 3D-Stabes: Mit dimensionsreinem Stabverzerrungsparameter: Matrixdimension: kN/m

$$\begin{bmatrix}
 \frac{K_{0,11}}{L} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{K_{0,12}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{K_{0,13}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{0,\psi,1}}{L} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{K_{0,\psi',1}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\
 \frac{K_{0,12}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{K_{0,22}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{K_{0,23}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & -\frac{S_{0,23}}{L} & -\frac{S_{0,33}}{L} & -\frac{S_{0,31}}{L^2} & \frac{K_{0,\psi,2}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{S_{0,\psi,3}}{L} & \frac{K_{0,\psi',2}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{S_{0,\psi',3}}{L^2} \\
 \frac{K_{0,13}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{K_{0,23}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{K_{0,33}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,22}}{L} & \frac{S_{0,23}}{L} & \frac{S_{0,21}}{L^2} & \frac{K_{0,\psi,3}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{S_{0,\psi,2}}{L} & \frac{K_{0,\psi',3}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{S_{0,\psi',2}}{L^2} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{S_{0,22}}{L} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,23}}{L} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,21}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,\psi,2}}{L} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,\psi',2}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{S_{0,23}}{L} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,33}}{L} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,31}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,\psi,3}}{L} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,\psi',3}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{S_{0,21}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,31}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,11}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,\psi,1}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,\psi',1}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\
 \frac{K_{0,\psi',1}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{K_{0,\psi',2}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{K_{0,\psi',3}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,\psi',2}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,\psi',3}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{S_{0,\psi',1}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{K_{\psi,\Omega,\psi}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{S_{\psi,\Omega,\psi}}{L} & \frac{K_{\psi,\Omega,\psi'}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{S_{\psi,\Omega,\psi'}}{L^2} \\
 \frac{-K_{0,\psi,1}}{L} & \frac{-K_{0,\psi,2}}{L^2} & \frac{-K_{0,\psi,3}}{L^2} & \frac{S_{0,\psi,2}}{L} & \frac{-S_{0,\psi,3}}{L} & \frac{-S_{0,\psi,1}}{L^2} & & 
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2^* \\ \kappa_3^* \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1^* \\ \psi \\ \psi^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_\psi \end{bmatrix} \cdot \psi_{\mathbf{q}} \quad [6-75]$$

### 6.7.1.2 Randbedingungen für die Stabgleichgewichtsgleichungen

Die Randbedingungen an den Stabendquerschnitten stellen die Kräfteäquivalenz zwischen den inneren Stabschnittgrößen und den äußeren Randfesthaltekräften dar. Die Bestimmung sämtlicher Stabschnittgrößen ist in Kapitel C angeführt.

#### • Gleichgewichtsgleichungen 1-6

Die den Stabgleichgewichtsdifferentialgleichungen zugehörigen Randbedingungen an den Stabendquerschnitten sind in Glg. 6-67.b definiert. Die Kräfte- und Momentenrandbedingungen an der Stabmantelfläche sind durch die Umwandlung des Gleichgewichts in die Integralform in die Stabgleichgewichtsgleichungen eingearbeitet worden.

$$\pm \mathbf{n}_{0, \hat{E}} = - \tilde{\mathbf{r}}_{0, \hat{E}} \cdot \boldsymbol{\psi}_{q, \hat{E}} \quad [6-76.a]$$

Die Ermittlung des Randschnittkräftevektors sowie des Randfesthaltekräftevektors ist in Glg. B-15.b und Glg. B-16.c gezeigt, die Vorzeichenkorrektur für den Anfangsquerschnitt ist vorgenommen worden.

$$\pm \begin{bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \end{bmatrix}_{0, \hat{E}, u} = - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_{\beta 2} \\ R_{\beta 3} \\ R_2 \\ R_3 \\ R_{\beta 1} \end{bmatrix}_{0, \hat{E}, q} \cdot \boldsymbol{\psi}_{q, \hat{E}} \quad [6-76.b]$$

#### • Gleichgewichtsgleichung 7

Die der Stabgleichgewichtsdifferentialgleichung für die Wölbmomente zugeordnete Randbedingung ist in Glg. 6-70.b angeführt.

$$\pm \mathbf{M}_{\psi, \hat{E}} = - \tilde{\mathbf{r}}_{\psi, \hat{E}} \cdot \boldsymbol{\psi}_{q, \hat{E}} \quad [6-77.a]$$

Werden die in Glg. B-19.b und Glg. B-20.b ermittelten Darstellungen des Wölbmoments sowie des Festhaltewölbmoments verwendet, gilt für die Randbedingung für Zeile 7:

$$\pm \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp, \hat{E}} \cdot dA = - \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot dA \cdot \boldsymbol{\psi}_{q, \hat{E}} \quad [6-77.b]$$

Die Auswertung der Ausdrücke unter Berücksichtigung von Glg. C-57 führt zu folgender Beziehung für die Randbedingungen für Zeile 7. Die Vorzeichenkorrektur für den Stabanfang ist bereits eingearbeitet, am Stabanfang sind auf Grund der negativen Definition der Schnittfläche die Vorzeichen zu vertauschen.

$$\pm \left( \mathbf{k}_{\psi,0} \cdot \mathbf{e}_{0,A,E} + \mathbf{K}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot \psi_{A,E} + \mathbf{K}_{\psi,\Omega,\psi'} \cdot \psi'_{A,E} \right) = - \int_{\Gamma_{\hat{e}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot dA \cdot \psi_{q,A,E} \quad [6-77.c]$$

• **Zusammenfassung der Randbedingungen für Zeile 1-7**

Die Randbedingungen für das Gesamtproblem lassen sich in zusammengefassten Form darstellen:

$$\pm \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0} \\ M_{3,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0} \\ M_{\psi} \end{bmatrix}_{A,u,E} = - \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ R_{\beta 2,0} \\ R_{\beta 3,0} \\ R_{2,0} \\ R_{3,0} \\ R_{\beta 1,0} \\ \tilde{r}_{\psi} \end{bmatrix}_{A,q,E} \cdot \psi_{q,A,E} \quad [6-78.a]$$

$$\pm \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0} \\ M_{3,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0} \\ \mathbf{k}_{\psi,0} \cdot \mathbf{e}_{0,A,E} + \mathbf{K}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot \psi_{A,E} + \mathbf{K}_{\psi,\Omega,\psi'} \cdot \psi'_{A,E} \end{bmatrix}_{A,u,E} = - \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ R_{\beta 2,0} \\ R_{\beta 3,0} \\ R_{2,0} \\ R_{3,0} \\ R_{\beta 1,0} \\ \tilde{r}_{\psi} \end{bmatrix}_{A,q,E} \cdot \psi_{q,A,E} \quad [6-78.b]$$

Werden die Schnittgrößen des Schnittkraftvektors in dimensionsreiner Darstellung beschrieben, gilt:

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0}^* \\ M_{3,0}^* \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0}^* \\ M_{\psi}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0}/L \\ M_{3,0}/L \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0}/L \\ M_{\psi}/L \end{bmatrix} \quad [6-78.c]$$

## 6.7.2 Querschnitt-GLG-DGL für den Stab mit Randbedingungen: Originale Integralform

Für die Ermittlung der 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösung in analytischer Weise ist die Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen in originaler Integralform erforderlich.

### 6.7.2.1 Zusammenfassung der Gleichungen

- **Querschnittsdifferentialgleichung**

Die Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichung ist in Glg. 6-59.a dargestellt, die Vorfaktoren der Steifigkeitsmatrix sind in Kapitel D definiert, es gilt:

$$\left\{ \mathbf{K}_{\Omega, \psi} \cdot \psi + \mathbf{K}_{\Omega, \psi'} \cdot \psi' + \mathbf{K}_{\Omega, \psi''} \cdot \psi'' \right\} \cdot \Omega = -\mathbf{F}_{\Omega, e0} \cdot \mathbf{e}_0 - \mathbf{F}_{\Omega, e0'} \cdot \mathbf{e}_0' - \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \gamma} \cdot \psi_q \quad [6-79.a]$$

- **Randbedingungen an der Stabmantelfläche**

Die zugehörigen Randbedingungen an der Stabmantelfläche ergeben sich nach Glg. 6-59.b wie folgt:

$$\left\{ \mathbf{K}_{\Omega, \psi, \Gamma} \cdot \psi + \mathbf{K}_{\Omega, \psi', \Gamma} \cdot \psi' \right\} \cdot \Omega = -\mathbf{F}_{\Omega, e0, \Gamma} \cdot \mathbf{e}_0 - \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \psi_q \quad [6-79.b]$$

- **Randbedingungen an den Stabendquerschnitten**

Die zugehörigen Randbedingungen an den Stabendquerschnitten ergeben sich nach Glg. 6-59.c wie folgt:

$$\left\{ \mathbf{K}_{\Omega, \psi, \frac{A}{E}} \cdot \psi_{\frac{A}{E}} + \mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}} \right\} \cdot \Omega_{\frac{A}{E}} = -\mathbf{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} - \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \psi_{q, \frac{A}{E}} \quad [6-79.c]$$

Im Folgenden werden die Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichungen in detaillierter Aufschlüsselung für die verschiedenen Materialgesetze dargestellt.

### 6.7.2.2 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Die Materialsteifigkeitsmatrix die den folgenden Berechnungen zugrunde liegt, ist unter Punkt 6.3.3 angeführt.

- **Querschnittsdifferentialgleichung**

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{\Omega,11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega,22} & K_{\Omega,23} \\ 0 & K_{\Omega,23} & K_{\Omega,33} \end{bmatrix} \cdot \Psi + \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12} & K_{\Omega,13} \\ K_{\Omega,12} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Psi' + \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & D_{45} \\ 0 & D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \cdot \Psi'' \right\} \cdot \Omega = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{16} & -D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{13} & -D_{16} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0 - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11}X_3 & -D_{11}X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & D_{45}X_2 - D_{44}X_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_{45} & D_{55} & D_{55}X_2 - D_{45}X_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0' - \tilde{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot \Psi_q \quad [6-80.a]$$

- **Randbedingungen an der Stabmantelfläche**

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{\Omega,11,\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega,22,\Gamma} & K_{\Omega,23,\Gamma} \\ 0 & K_{\Omega,23,\Gamma} & K_{\Omega,33,\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \Psi + \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12,\Gamma} & K_{\Omega,13,\Gamma} \\ K_{\Omega,21,\Gamma} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,31,\Gamma} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Psi' \right\} \cdot \Omega = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{\Omega,e0,14} & F_{\Omega,e0,15} & F_{\Omega,e0,16} \\ F_{\Omega,e0,21} & F_{\Omega,e0,22} & F_{\Omega,e0,23} & 0 & 0 & 0 \\ F_{\Omega,e0,31} & F_{\Omega,e0,32} & F_{\Omega,e0,33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0 - \tilde{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot \Psi_q \quad [6-80.b]$$

- **Randbedingungen an den Stabendquerschnitten**

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12,\hat{A}} & K_{\Omega,13,\hat{A}} \\ K_{\Omega,21,\hat{A}} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,31,\hat{A}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Psi_{\hat{A}} - N_1 \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & D_{45} \\ 0 & D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \cdot \Psi'_{\hat{A}} \right\} \cdot \Omega_{\hat{A}} = - \begin{bmatrix} F_{\Omega,e0,11} & F_{\Omega,e0,12} & F_{\Omega,e0,13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{\Omega,e0,24} & F_{\Omega,e0,25} & F_{\Omega,e0,26} \\ 0 & 0 & 0 & F_{\Omega,e0,34} & F_{\Omega,e0,35} & F_{\Omega,e0,36} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{0,\hat{A}} - \tilde{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot \Psi_{q,\hat{A}} \quad [6-80.c]$$

Für die Vorfaktoren gelten die Aufbereitungen nach Anhang D.

### 6.7.2.3 Isotropes 3D-Materialverhalten

Die Materialsteifigkeitsmatrix, die den folgenden Berechnungen zugrunde liegt, ist unter Punkt 6.3.4 angeführt.

- **Querschnittsdifferentialgleichung**

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{\Omega,11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega,22} & K_{\Omega,23} \\ 0 & K_{\Omega,23} & K_{\Omega,33} \end{bmatrix} \cdot \Psi + \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12} & K_{\Omega,13} \\ K_{\Omega,12} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Psi' + \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \cdot \Psi'' \right\} \cdot \Omega = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0 - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11}X_3 & -D_{11}X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & -D_{44}X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{44}X_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0' - \tilde{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot \Psi_q \quad [6-81.a]$$

- **Randbedingungen an der Stabmantelfläche**

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{\Omega,11,\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega,22,\Gamma} & K_{\Omega,23,\Gamma} \\ 0 & K_{\Omega,23,\Gamma} & K_{\Omega,33,\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \Psi + \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12,\Gamma} & K_{\Omega,13,\Gamma} \\ K_{\Omega,21,\Gamma} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,31,\Gamma} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Psi' \right\} \cdot \Omega = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -N_2 \cdot D_{44} & -N_3 \cdot D_{44} & D_{44} \cdot (X_3 \cdot N_2 - X_2 \cdot N_3) \\ -N_2 \cdot D_{12} & -X_3 \cdot N_2 \cdot D_{12} & X_2 \cdot N_2 \cdot D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -N_3 \cdot D_{12} & -X_3 \cdot N_3 \cdot D_{12} & X_2 \cdot N_3 \cdot D_{12} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0 - \tilde{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot \Psi_q \quad [6-81.b]$$

- **Randbedingungen an den Stabendquerschnitten**

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12,\hat{A}} & K_{\Omega,13,\hat{A}} \\ K_{\Omega,21,\hat{A}} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,31,\hat{A}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Psi_{\hat{A}} - N_1 \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \cdot \Psi'_{\hat{A}} \right\} \cdot \Omega_{\hat{A}} = -N_1 \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11} \cdot X_3 & -D_{11} \cdot X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & -D_{44} \cdot X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{44} \cdot X_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{0,\hat{A}} - \tilde{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot \Psi_{q,\hat{A}} \quad [6-81.c]$$

Für die Vorfaktoren gelten die Aufbereitungen nach Anhang D

### 6.7.2.4 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Die Materialsteifigkeitsmatrix, die den folgenden Berechnungen zugrunde liegt, ist unter Punkt 6.3.4 angeführt.

#### • Querschnittsdifferentialgleichung

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{\Omega,11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega,22} & K_{\Omega,23} \\ 0 & K_{\Omega,23} & K_{\Omega,33} \end{bmatrix} \cdot \Psi + \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12} & K_{\Omega,13} \\ K_{\Omega,12} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Psi' + \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \Psi'' \right\} \cdot \Omega = - \begin{bmatrix} E & E \cdot X_3 & -E \cdot X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & -G \cdot X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & G \cdot X_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0' - \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \Psi_q \quad [6-82.a]$$

#### • Randbedingungen an der Stabmantelfläche

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{\Omega,11,\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega,22,\Gamma} & K_{\Omega,23,\Gamma} \\ 0 & K_{\Omega,23,\Gamma} & K_{\Omega,33,\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \Psi + \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12,\Gamma} & K_{\Omega,13,\Gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Psi' \right\} \cdot \Omega = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -N_2 \cdot G & -N_3 \cdot G & G \cdot (X_3 \cdot N_2 - X_2 \cdot N_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0 - \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \Psi_q \quad [6-82.b]$$

#### • Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{\Omega,21,\hat{A}} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,31,\hat{A}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Psi_{\hat{A}} - N_1 \cdot \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \Psi'_{\hat{A}} \right\} \cdot \Omega_{\hat{A}} = -N_1 \cdot \begin{bmatrix} E & E \cdot X_3 & -E \cdot X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & -G \cdot X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & G \cdot X_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{0,\hat{A}} - \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \Psi_{q,\hat{A}} \quad [6-82.c]$$

Für die Vorfaktoren gelten die Aufbereitungen nach Anhang D.

### 6.7.2.5 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Die Materialsteifigkeitsmatrix, die den folgenden Berechnungen zugrunde liegt, ist unter Punkt 6.3.4 angeführt.

Es gilt: Alle externen Lasten sind identisch Null:  $\tilde{\mathbf{q}}_{3D}$

#### • Querschnittsdifferentialgleichung

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc} G \left( \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & E \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + G \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} & G \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} \\ 0 & G \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} & G \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + E \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \end{array} \right] \cdot \psi + \left[ \begin{array}{ccc} 0 & G \frac{\partial}{\partial X_2} & G \frac{\partial}{\partial X_3} \\ G \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ G \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \psi' + \left[ \begin{array}{ccc} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{array} \right] \cdot \psi'' \cdot \Omega = - \left[ \begin{array}{cccccc} E & E & X_3 & -E & X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 & -G X_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G & G X_2 & \end{array} \right] \cdot \mathbf{e}_0' \end{aligned} \right. \quad [6-83.a]$$

#### • Randbedingungen an der Stabmantelfläche

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc} K_{\Omega, 11, \Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega, 22, \Gamma} & K_{\Omega, 23, \Gamma} \\ 0 & K_{\Omega, 32, \Gamma} & K_{\Omega, 33, \Gamma} \end{array} \right] \cdot \psi + \left[ \begin{array}{ccc} 0 & K_{\Omega, 12, \Gamma} & K_{\Omega, 13, \Gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \psi' \cdot \Omega = - \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & -N_2 \cdot G & -N_3 \cdot G & G \cdot (X_3 \cdot N_2 - X_2 \cdot N_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \mathbf{e}_0 \end{aligned} \right. \quad [6-83.b]$$

#### • Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ K_{\Omega, 21, \hat{A}} & 0 & 0 \\ K_{\Omega, 31, \hat{A}} & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \psi_{\hat{A}} - N_1 \cdot \left[ \begin{array}{ccc} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{array} \right] \cdot \psi'_{\hat{A}} \cdot \Omega_{\hat{A}} = -N_1 \cdot \left[ \begin{array}{cccccc} E & E \cdot X_3 & -E \cdot X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & -G \cdot X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & G \cdot X_2 \end{array} \right] \cdot \mathbf{e}_{0, \hat{A}} \end{aligned} \right. \quad [6-83.c]$$

Für die Vorfaktoren gelten die Aufbereitungen nach Anhang D.

### **6.7.3 Zusammengefasstes Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem**

Der besseren Übersicht wegen wird im Anhang F eine Gesamtdarstellung des Gleichungssystems für die Ermittlung des Lösungsanteils I – Freifeldlösung – angeführt.

## 6.8 Aufbereitung der Gleichungen für die numerische Lösung

Für die numerische Lösung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems sind alle erforderlichen Gleichungsbestandteile in der diskretisierten Darstellungsform erforderlich, die ausgehend von der umgewandelten Integralform des Gleichgewichts bestimmt wird.

- **Stabgleichgewichtsgleichungen**

Die sieben Stabgleichgewichtsgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen liegen in umgewandelter diskretisierter Integralform vor. Diese Art der Darstellung wird für die Bestimmung der den 3D-Einzelverschiebungsfeldern zugehörigen Starrkörperverformungen in Stablängsrichtung benötigt.

- **Querschnitts-DGL**

Die Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen liegt in umgewandelter diskretisierter Integralform vor. Diese dienen der Bestimmung der 3D-Einzelverschiebungsfelder für das Querschnittproblem des prismatischen Stabes.

### 6.8.1 Gleichgewichts-DGL-System für den Stab, orthotropes Material

#### 6.8.1.1 Gleichgewichtsgleichungen 1-6

Die sechs Stab-Gleichgewichtsgleichungen laut Glg. 6-67.a werden in Folge durch den stabachsen-bezogenen Verzerrungsparameter und auf Basis eines orthotropen Materialverhaltens ausgedrückt.

$$\left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_0 = - \tilde{\mathbf{q}}_0 \cdot \psi_q \quad [6-84.a]$$

Für den Stabschnittgrößenvektor des Starrkörperanteils gilt wiederum die in Glg. 6-84.b dargestellte Aufteilung in einen Systemanteil und einen Lastanteil.

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_{0,0} + \mathbf{n}_{0,\Omega} = \mathbf{K}_{0,0} \cdot \mathbf{e}_0 + \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi + \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi' \quad [6-84.b]$$

Die Schnittgrößenanteile aus den relativen 3D-Teilverschiebungsfeldern  $\mathbf{n}_{0,\Omega}$  werden nach Glg. C-20 in diskretisierter Form dargestellt.

$$\mathbf{n}_{0,\Omega} = \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi + \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi' \quad [6-84.c]$$

Für die Bestimmung der Querkräfte gilt die Beziehung nach Glg. B-13.g.

$$\mathbf{I}^*_{0,2+3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6-84.d]$$

Werden die Schnittgrößen des Starrkörperanteils in separierter Form in die Gleichgewichtsdifferentialgleichungen implementiert, dann gilt:

$$\left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_0 = \left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot (\mathbf{n}_{0,0} + \mathbf{n}_{0,\Omega}) \quad [6-85.a]$$

$$\left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_{0,0} = \left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot \mathbf{K}_{0,0} \cdot \mathbf{e}_0 \quad [6-85.b]$$

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_{0,\Omega} &= \left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot (\hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} \cdot \psi + \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'} \cdot \psi') \cdot \hat{\Omega} \\ &= \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} \cdot \psi' + \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'} \cdot \psi'' - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} \cdot \psi - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'} \cdot \psi' \\ &= (\hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'}) \cdot \psi' + \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'} \cdot \psi'' - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} \cdot \psi \end{aligned} \quad [6-85.c]$$

Für die Gleichgewichtsdifferentialgleichungen in diskretisierter Form für die Zeile 1 bis 6 gilt:

$$\left[ \begin{array}{c} \left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot \mathbf{K}_{0,0} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]_{6;6} \cdot \left[ \begin{array}{c} -\mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} \cdot \psi + \\ + (\hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'}) \cdot \psi' + \\ + \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'} \cdot \psi'' \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]_{6;N} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = -[\tilde{\mathbf{q}}_0] \cdot \psi_q \quad [6-85.d]$$

### 6.8.1.2 Randbedingungen für die Stabgleichgewichtsgleichungen 1-6

Für die Randbedingungen gilt nach Glg. 6-67.b:

$$\pm \mathbf{n}_{0,E} = -\tilde{\mathbf{r}}_{0,E} \cdot \psi_{q,E} \quad [6-86.a]$$

mit Glg. B-15.b und Glg. B-16.c

$$\pm \begin{bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \end{bmatrix}_{0,E,u} = - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_{\beta 2} \\ R_{\beta 3} \\ R_2 \\ R_3 \\ R_{\beta 1} \end{bmatrix}_{0,E,q} \cdot \psi_{q,E} \quad [6-86.b]$$

### 6.8.1.3 Gleichgewichtsgleichungen 7

Die siebte Zeile des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems ist in Glg. 6-70.a definiert und wird in weiterer Folge durch den Stabverzerrungsparameter und auf Basis eines orthotropen Materialverhaltens ausgedrückt. Dafür wird die umgewandelte diskretisierte Darstellung der Integralform verwendet.

$$\left( \mathbf{I}_{\psi, 1} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}_{\psi, 2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_{\psi} = -\tilde{\mathbf{q}}_{\psi} \cdot \psi_{\mathbf{q}} \quad [6-87.a]$$

Werden die Beziehungen nach Glg. B-13.g eingearbeitet, dann gilt für die Gleichgewichtsgleichung:

$$\mathbf{M}_{\psi} \frac{\partial}{\partial X_1} - V_{\psi} = -\tilde{\mathbf{q}}_{\psi} \cdot \psi_{\mathbf{q}} \quad [6-87.b]$$

Für die diskretisierten Wölbabschnittgrößen gelten Glg. 6-88.a und Glg. 6-88.b, aufbereitet in Glg. C-39.a sowie Glg. C-53.a.

$$\mathbf{M}_{\psi} = \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\psi, 0} \cdot \mathbf{e}_0 + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi'} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi' \quad [6-88.a]$$

$$V_{\psi} = \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0} \cdot \mathbf{e}_0 + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi'} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi' \quad [6-88.b]$$

Werden die dargestellten Wölbabschnittgrößen in die Differentialgleichung eingesetzt, dann folgt das für die Berechnung der 3D-Teilverschiebungsfelder notwendige Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\psi} \frac{\partial}{\partial X_1} - V_{\psi} &= \hat{\Omega}^T \cdot \left( \hat{\mathbf{K}}_{\psi, 0} \frac{\partial}{\partial X_1} - \hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0} \right) \cdot \mathbf{e}_0 + \\ &+ \hat{\Omega}^T \cdot \left( \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi} \frac{\partial}{\partial X_1} - \hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi} \right) \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi + \hat{\Omega}^T \cdot \left( \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi'} \frac{\partial}{\partial X_1} - \hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi'} \right) \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi' \end{aligned} \quad [6-89.a]$$

In Matrixdarstellung gilt für die Gleichgewichtsdifferentialgleichung in diskretisierter Form:

$$\hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\psi, 0} \frac{\partial}{\partial X_1} - \hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0} & \begin{matrix} -\hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi} \cdot \psi + \\ + (\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi} - \hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi'}) \cdot \psi' + \\ + \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi'} \cdot \psi'' \end{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = -[\tilde{\mathbf{q}}_{\psi}] \cdot \psi_{\mathbf{q}} \quad [6-89.b]$$

### 6.8.1.4 Randbedingungen für die Stabgleichgewichtsgleichungen 7

Für die Randbedingungen gelten Glg. 6-70.b mit Glg. B-19.b und Glg. B-20.b

$$\pm \mathbf{M}_{\psi, \mathbf{A}} = -\tilde{\mathbf{r}}_{\psi, \mathbf{A}} \cdot \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{A}} \quad [6-90]$$

## 6.8.2 Querschnitt-GLG-DGL mit RB in umgewandelter diskretisierter Integralform

### 6.8.2.1 Zusammenfassung der Gleichungen

- **Querschnittsdifferentialgleichung**

Ausgehend von Glg. 6-64.a ergibt sich die Gleichgewichtsdifferentialgleichung in diskretisierter Form, wobei die Aufteilung in die Systemanteile und in die Lastanteile durchgeführt wurde.

$$\left\{ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi} \cdot \psi + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'} \cdot \psi' + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} \cdot \psi'' \right\} \cdot \hat{\Omega} = -\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0} \cdot \mathbf{e}_0 - \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'} \cdot \mathbf{e}_0' - \int_A \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \gamma} dA \cdot \psi_q - \int_s \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} ds \cdot \psi_q \quad [6-91.a]$$

- **Randbedingungen an den Stabendquerschnitten**

Ausgehend von Glg. 6-64.b ergibt sich die Gleichgewichtsdifferentialgleichung für die Randbedingungen in diskretisierter Form, wobei die Aufteilung in die Systemanteile und in die Lastanteile durchgeführt wurde.

$$\left\{ \pm \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, A} \cdot \psi_A \pm \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', A} \cdot \psi'_A \right\} \cdot \hat{\Omega}_A = - \left( \pm \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0, A} \cdot \mathbf{e}_{0, A} + \int_{\Gamma_A} \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} dA \right) \quad [6-91.b]$$

In den folgenden Glg. 6-92.a und Glg. 6-92.b werden die Gleichgewichtsdifferentialgleichungen in Matrixdarstellung für orthotropes Materialverhalten dargestellt, um die Besetzung der Matrizen zu zeigen. Auf die Darstellung der Gleichgewichtsdifferentialgleichung für materielle Isotropie wird verzichtet.

### 6.8.2.2 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Die Materialsteifigkeitsmatrix, die den folgenden Berechnungen zugrunde liegt, ist unter Punkt 6.3.3 angeführt.

- **Querschnittsdifferentialgleichung**

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{K}_{\Omega, \psi, 11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{K}_{\Omega, \psi, 22} & \hat{K}_{\Omega, \psi, 23} \\ 0 & \hat{K}_{\Omega, \psi, 32} & \hat{K}_{\Omega, \psi, 33} \end{bmatrix} \cdot \psi + \begin{bmatrix} 0 & \hat{K}_{\Omega, \psi', 12} & \hat{K}_{\Omega, \psi', 13} \\ \hat{K}_{\Omega, \psi', 21} & 0 & 0 \\ \hat{K}_{\Omega, \psi', 31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \psi' + \begin{bmatrix} \hat{K}_{\Omega, \psi'', 11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{K}_{\Omega, \psi'', 22} & \hat{K}_{\Omega, \psi'', 23} \\ 0 & \hat{K}_{\Omega, \psi'', 32} & \hat{K}_{\Omega, \psi'', 33} \end{bmatrix} \cdot \psi'' \end{aligned} \right\} \cdot \hat{\Omega} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \hat{F}_{\Omega, e0, 14} & \hat{F}_{\Omega, e0, 15} & \hat{F}_{\Omega, e0, 16} \\ \hat{F}_{\Omega, e0, 21} & \hat{F}_{\Omega, e0, 22} & \hat{F}_{\Omega, e0, 23} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{F}_{\Omega, e0, 31} & \hat{F}_{\Omega, e0, 32} & \hat{F}_{\Omega, e0, 33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0 - \\ & - \begin{bmatrix} \hat{F}_{\Omega, e0, 11} & \hat{F}_{\Omega, e0, 12} & \hat{F}_{\Omega, e0, 13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{F}_{\Omega, e0, 24} & \hat{F}_{\Omega, e0, 25} & \hat{F}_{\Omega, e0, 26} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{F}_{\Omega, e0, 34} & \hat{F}_{\Omega, e0, 35} & \hat{F}_{\Omega, e0, 36} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0' - \\ & - \int_A \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \gamma} dA \cdot \psi_q - \int_s \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} ds \cdot \psi_q
 \end{aligned}$$

[6-92.a]

- **Randbedingungen an den Stabendquerschnitten**

$$\left\{ \pm \begin{bmatrix} 0 & \hat{K}_{\Omega, 12, \hat{E}} & \hat{K}_{\Omega, 13, \hat{E}} \\ \hat{K}_{\Omega, 21, \hat{E}} & 0 & 0 \\ \hat{K}_{\Omega, 31, \hat{E}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \psi_{\hat{E}} \pm \begin{bmatrix} \hat{K}_{\Omega, \psi', 11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{K}_{\Omega, \psi', 22} & \hat{K}_{\Omega, \psi', 23} \\ 0 & \hat{K}_{\Omega, \psi', 32} & \hat{K}_{\Omega, \psi', 33} \end{bmatrix} \cdot \psi'_{\hat{E}} \right\} \cdot \hat{\Omega}_{\hat{E}} = - \left( \pm \begin{bmatrix} F_{\Omega, e0, 11} & F_{\Omega, e0, 12} & F_{\Omega, e0, 13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{\Omega, e0, 24} & F_{\Omega, e0, 25} & F_{\Omega, e0, 26} \\ 0 & 0 & 0 & F_{\Omega, e0, 34} & F_{\Omega, e0, 35} & F_{\Omega, e0, 36} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0_{\hat{E}} + \int_{\hat{E}} \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} dA \right)$$

[6-92.b]

Für die Vorfaktoren gelten die Aufbereitungen nach Anhang E.

### 6.8.2.3 Zusammenfassung des gesamten DGL-Systems ohne Randbedingungen

$$\left[ \begin{array}{c|c} \left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot \mathbf{K}_{0,0} & \begin{aligned} & -\mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} \cdot \psi + \\ & + (\hat{\mathbf{K}}_{0,\psi} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'}) \cdot \psi' + \\ & + \hat{\mathbf{K}}_{0,\psi'} \cdot \psi'' \end{aligned} \\ \hline \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0} + \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} & \begin{aligned} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi} \cdot \psi + \\ & + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'} \cdot \psi' + \\ & + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} \cdot \psi'' \end{aligned} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = -[\tilde{\mathbf{q}}_0] \cdot \psi_q$$

[6-93.a]

Zusätzlich zu den Gleichgewichtsdifferentialgleichungen sind auch die Randbedingungen zu erfüllen.

### 6.8.3 Zusammengefasstes Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem (diskretisiert)

Der besseren Übersicht wegen wird im Anhang F eine Gesamtdarstellung des Gleichungssystems für die Ermittlung des Lösungsanteils I – Freifeldlösung – angeführt.



# 7

**Strukturierte  
Lösung der  
Grundgleichungen  
für lineare Isotropie**

## 7.1 Einleitung

Die 3D-Gleichgewichtsgleichungen wurden in Kapitel 6 ausgehend vom orthotropen Materialverhalten für den Sonderfall der allgemeinen Isotropie und auch für den Sonderfall der Isotropie mit ausgeschlossenen Querkontraktionseffekten ( $\nu=0$ ) dargestellt.

Die Lösung der Gleichungen kann grundsätzlich in analytischer oder numerischer Form in Abhängigkeit der gewählten Gleichungsdarstellung erfolgen. Diese gilt nur für das eigentliche Querschnittproblem, die Stablängsrichtung wird stets in analytischer Form basierend auf exponentiellen Lösungsverläufen gelöst.

Für den Sonderfall der Isotropie mit eliminierten Querkontraktionseffekten wird in diesem Kapitel die semi-analytische Lösung für das 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem gezeigt.

Durch die materiellen Restriktionen beschränkt sich die gezeigte Lösung ausschließlich auf das axiale Querschnittsverwölbungsproblem. Die echten Querschnittsverformungen werden zwangungsfrei durch die Annahme  $\nu=0$  unterdrückt. Die Koppelungsterme in der Materialsteifigkeitsmatrix verschwinden dadurch vollständig, siehe Glg. 7-18.a.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich die Lösung des homogenen Stabbelastungsfalles gezeigt, das heißt, es greifen keinerlei Belastungen im Inneren des gesamten Stabkörpers an.

### 7.1.1 Grundlagen zur Lösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems

Das in Abb. 6.8 schematisch und in den Punkten 6.7.3 und 6.8.3 in analytischer Form dargestellte 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem bildet den Ausgangspunkt für die Bestimmung der Gesamtlösung des prismatischen Stabes.

Das vorliegende 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem ist aus mathematischer Sicht als lineares 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten zu bezeichnen, für das die Lösungen mit dem Exponentialansatz für die Lösungsfunktionen bestimmt werden. Die allgemeine mathematische Lösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems ergibt sich mit den Eigenwerten und den zugehörigen Eigenvektoren aus dem definierten Eigenwertproblem. Die Eigenwerte ergeben sich dabei als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, diese treten auf Grund der physikalischen Problemdefinition und der symmetrischen Eigenschaften des Stabproblems stets paarweise mit verschiedenen Vorzeichen auf.

Für das vorliegende 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem mit den  $6+N$  definierten Systemunbekannten der Querschnittskinematik ergeben sich  $2*(6+N)=12+2*N$  Nullstellen für das charakteristische Polynom mit den zugehörigen Eigenvektoren. Auf Grund der Problembeschaffenheit des erweiterten klassischen Stabes ergeben sich 12 Nullstellen mit  $\lambda_{1-12} = 0$  sowie  $N$  Nullstellen mit  $\pm\lambda_i$ .

Die Lösung des Stabes setzt sich wie unter 2.1.3 beschrieben aus folgenden Lösungsanteilen zusammen:

- Lösungsanteil 1: Lösung des inhomogenen Querschnittproblems für konstante Querschub- und Torsionsbeanspruchung entlang der Stabachse zur Ermittlung der sogenannten ungestörten „Freifeldlösungen (FF)“ für alle Einheitszustände (Schub und Torsion). Diese Lösung ergibt sich für die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\lambda_{1-12} = 0$ .
- Lösungsanteil 2: Lösung des homogenen Querschnittproblems zur Beschreibung des abklingenden Randstörproblems entlang der Stabachse, auch bezeichnet als „Abklingproblem“ in Stablängsrichtung. Das Abklingverhalten folgt dabei einem exponentiellen Verlauf in Längsrichtung des Stabes und ergibt sich aus den  $N$  Nullstellen des charakteristischen Polynoms mit  $\pm\lambda_i$ .

Den Eigenwerten aus der Lösung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems in Stablängsrichtung lassen sich die folgenden Lösungsfunktionen für die Freifeldlösung und das Abklingproblem zuordnen:

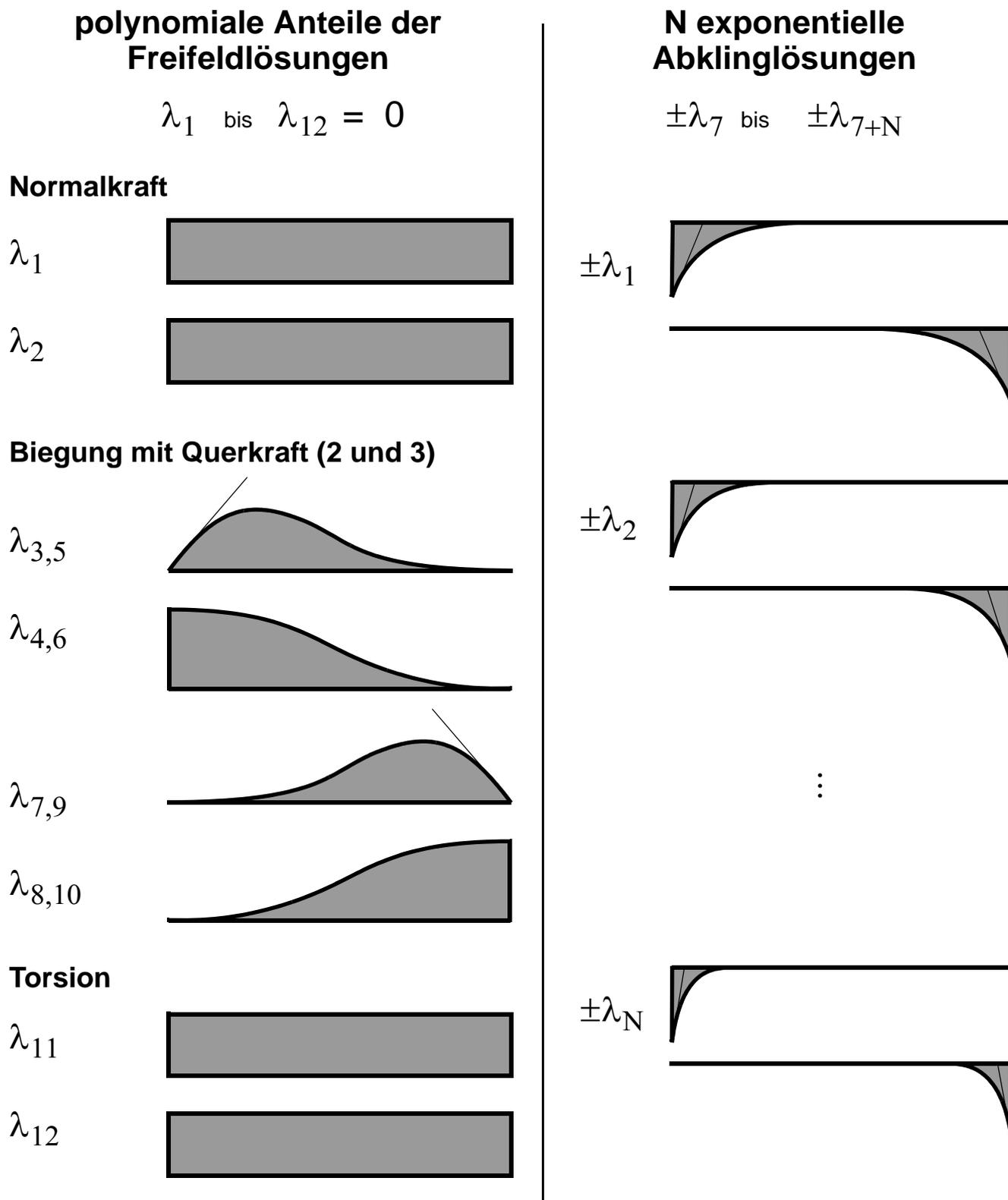


Abb. 7.1: Lösungsfunktionen zugeordnet zu den Eigenwerten für die Stablängsrichtung für das Differentialgleichungssystem

- **Lösungsanteil I:**  $\lambda_{1-12} = 0$

Die 12 Nullstellen identisch Null liefern die bekannten Lösungen des klassischen schubnachgiebigen Stabes, der ein konstantes Verhalten aller Eigenschaften in seiner Stablängsrichtung aufweist. Dies folgt aus dem Verschwinden des Abklingverhaltens für die Abklingzahlen identisch Null mit  $e^0 = 1$ . Auf Grund der Konstanz in Stablängsrichtung wird dieser Lösungsanteil als Freifeldlösung (oder: ungestörte Lösung, FreeFarSolution) bezeichnet. Diese 12 Nullstellen lassen sich eindeutig den folgenden globalen Schnittgrößen zuordnen:

- 2 Nullstellen definieren den Stab unter Normkraftbeanspruchung
- 4 Nullstellen definieren den Stab unter transversaler Querkraftbeanspruchung in  $X_2$ -Richtung
- 4 Nullstellen definieren den Stab unter transversaler Querkraftbeanspruchung in  $X_3$ -Richtung
- 2 Nullstellen definieren den Stab unter Torsionsmomentenbeanspruchung

- **Lösungsanteil II:**  $\pm\lambda_i$

Die  $N$  Nullstellen  $\pm\lambda_i$  ergeben in Abhängigkeit des Exponentialansatzes in Stablängsrichtung abklingende Lösungsanteile. Diese Lösungen für die Nullstellen  $|\lambda| > 0$  werden auf Grund dieses Verhaltens auch als Abklinglösungen und die zugehörigen Eigenwerte als Abklingzahlen des Stablängsproblems bezeichnet. Zugehörig zu den Eigenwerten  $\pm\lambda_i$  treten in Form der Eigenvektoren eindeutig definierte Ganzquerschnittsverschiebungsfelder, siehe 7.1.3, auf, die die unter 5.4 definierten Eigenschaften der Orthogonalität vollständig erfüllen. Im Rahmen der Lösung des Eigenwertproblems gehen im Falle der diskretisierten Querschnittsgeometrie die gewählten Ansatzfunktionen in die sogenannten Ganzquerschnittsverschiebungsfelder über und es entstehen die jeweiligen zugehörigen Systemunbekannten für die Stablängsrichtung.

## 7.1.2 Gedanken zur Querschnittsdiskretisierung

Wie bereits oben erwähnt, lassen sich die Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichungen für komplexe Querschnittsformen nur mit großem Aufwand in vollständig analytischer Form bestimmen. Aus diesem Grund werden für die Lösung der Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichungen numerische Verfahren (FEM) verwendet. Dafür liegen die erforderlichen Gleichungsbestandteile für die Lösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems in einer diskretisierten umgewandelten Integralform vor. Für den Zusammenhang der echten 3D-Verformungen des Querschnitts mit den Ansatzfunktionen des Diskretisierungsschemas gelten die folgenden Grundlagen:

Grundsätzlich lässt sich die strukturierte Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes auf die Darstellung der Querschnittsdiskretisierung basierend auf Ansatzfunktionen übertragen. Das bedeutet, dass auch die Ansatzfunktionen in einen globalen und einen lokalen Diskretisierungsanteil zerlegt werden können. Den 3D-Verschiebungsfeldern entsprechend, gelten für die Ansatzfunktionen ebenfalls die Orthogonalitätsbedingungen zwischen den einzelnen Ansatzfunktionen. Die beiden Anteile der Ansatzfunktionen lassen sich detailliert definieren:

- Die globalen Ansatzfunktionen, diese repräsentieren den Starrkörperanteil der Querschnittskinetik, werden dabei als die Basisdarstellung der Querschnittsverwölbungen bezeichnet. Die Basisdarstellung ist durch ausschließlich lineare Ansatzfunktionen zwischen den Rändern eines Einzelquerschnittsteils beschrieben.
- Die relativen Ansatzfunktionen können als die verfeinerte Darstellung der Verwölbungen verstanden werden. Die Darstellung der relativen Ansatzfunktionen sind durch Polynome beliebiger Ordnung oder durch beliebige gegliederte Polygonzüge zwischen den Rändern der Einzelquerschnittsteile definiert.

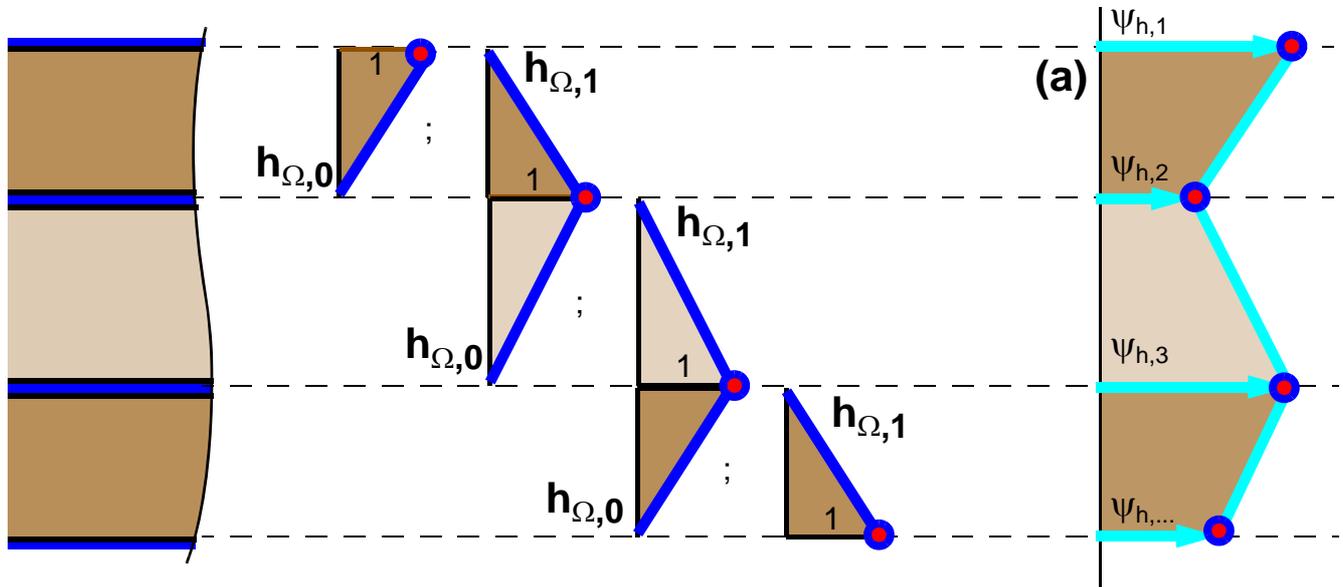
### 7.1.2.1 Globale Ansatzfunktionen

Die globalen Ansatzfunktionen der Querschnittsdiskretisierung werden entsprechend den Starrkörperanteilen der Querschnittskinematik des Querschnitts ausschließlich aus mathematisch linear beschriebenen Verformungsfunktionen, dies gilt für den 1D- und den 2D-Fall, gebildet. Die geometrische Darstellung führt zu über den Querschnitt segmentartigen linearen Querschnittsverformungszuständen. Für den Sonderfall des ebenen geschichteten Rechteckquerschnitts ergibt sich dadurch der charakteristische Zick-Zack-Verlauf über den Querschnitt mit eindeutigen Knickpunkten in den Schichtgrenzen zwischen benachbarten Querschnittsteilen des inhomogenen Querschnitts, wo auch die Stützstellen der Ansatzfunktionen definiert sind. Die globalen Ansatzfunktionen über den Querschnitt erfüllen bereits sämtliche Kompatibilitäten der Verwölbungen an den Rändern der einzelnen Querschnittsteile.

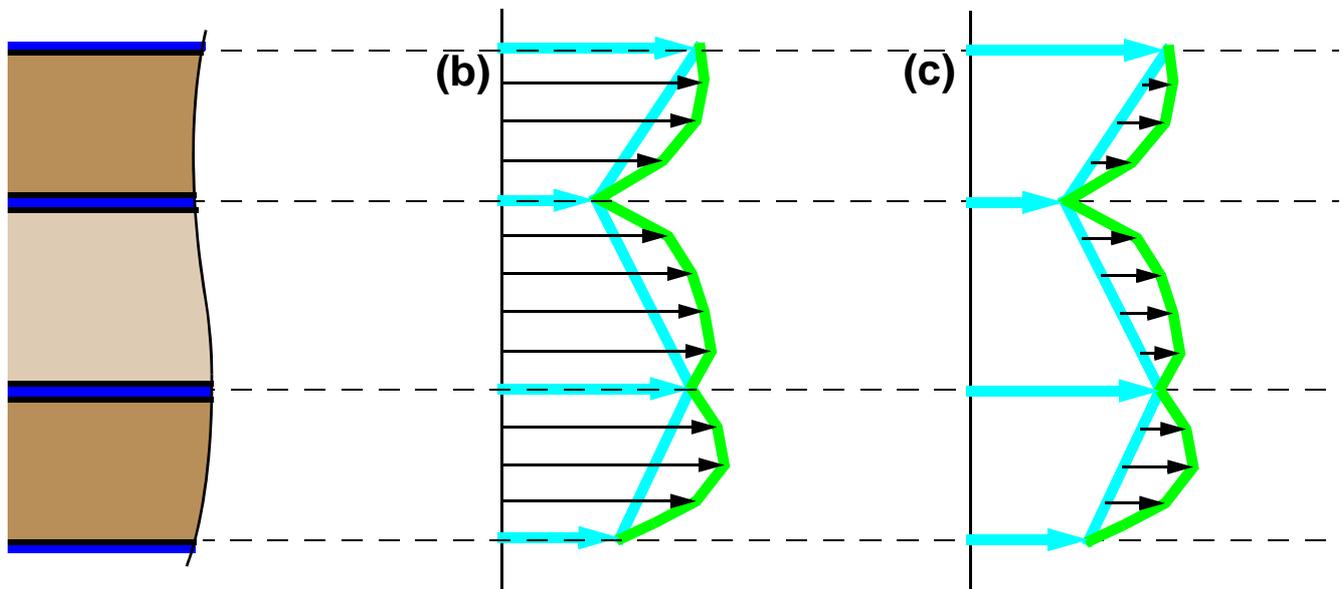
Durch die sogenannte  $h$ -Verfeinerung, d. h. die gezielte Unterteilung des Querschnitts in weitere Subgebiete, kann auch mit den linearen globalen Ansatzfunktionen eine Verbesserung der Ergebnisqualität erzielt werden (vgl. Bathe, 2002, S. 292).

Im Falle der Anwendung der  $h$ -Verfeinerung wird auch von der verfeinerten Basisdarstellung gesprochen, die Ansatzordnung der Ansatzfunktionen bleibt per Definition unverändert. Dadurch ergeben sich verbesserte Darstellungen der 3D-Verschiebungsfelder mit der linearen segmentartigen Darstellung. Grundsätzlich ist für dieses Diskretisierungsschema auch eine additive Verfeinerung der relativen Ansatzfunktionen, wie in Abb. 7.2 gezeigt, möglich.

**(a) Basisdarstellung der QS-Verwölbung (Zick-Zack Form)**



**Verfeinerte Basisdarstellung der Verwölbungen**



*Abb. 7.2: (a) Basisdarstellung der Querschnittsdiskretisierung, Verfeinerte Basisdarstellung: (b) h-Verfeinerung (c) additive hierarchische Verfeinerung*

### 7.1.2.2 Lokale Ansatzfunktionen

Die lokalen Ansatzfunktionen dienen der verfeinerten exakten Darstellung der 3D-Einzelverschiebungsfelder. Dies ist vor allem im Hinblick auf die daraus resultierende exakte Erfüllung der Schubrandbedingungen und der Übergangsbedingungen an den Grenzen der Querschnittsteile erforderlich. Die lokalen Ansatzfunktionen sind stets ausgehend von den globalen Ansatzfunktionen als zusätzliche Verformungsfelder definiert. Aus diesem Grund werden die lokalen Ansatzfunktionen auch als relative Ansatzfunktionen bezeichnet.

Als zwingend ist die Erfüllung der Orthogonalitätsbedingungen zwischen allen (globalen und lokalen) Ansatzfunktionen zu betrachten, um die Eindeutigkeit der Darstellung der 3D-Einzelverschiebungsfelder zu gewährleisten. Die Basisdarstellung der Ansatzfunktionen für die Querschnittsdiskretisierung dient als Ausgangsbasis für die Definition der lokalen Ansatzfunktionen und bleibt durch diese unbeeinflusst. Die lokalen Ansatzfunktionen sind stets als additiver Anteil zu den globalen Ansatzfunktionen zu sehen und weisen an den Grenzen der Querschnittsteile stets den Amplitudenwert Null auf, wie dies in Abb. 7.3 dargestellt ist. Diese Bedingung resultiert aus der Definition der Basisdarstellung mit bereits erfüllten Kompatibilitäten der Verwölbungen an den Rändern der einzelnen Querschnittsteile.

Für die lokalen Ansatzfunktionen kann die Verbesserung der Darstellung der Ergebnisqualität durch die bekannte  $p$ -Verfeinerung erreicht werden (vgl. Bathe, 2002, S. 292). Dabei werden für die Verbesserung der Darstellung der 3D-Verschiebungsfelder Ansatzfunktionen mit gesteigerten Polynomgraden verwendet. Der Grad der erforderlichen Polynomordnung richtet sich dabei nach der erforderlichen Genauigkeit der Ergebnisse. Für die Darstellung der quadratischen Schubspannungsverteilungen über den Rechteckquerschnitt werden für die Ansatzfunktionen Polynome mit kubischem Polynomgrad benötigt. Da die Polynomgrade mit dem Grad null und eins bereits für den globalen Anteil verwendet sind, werden aus Gründen der Orthogonalität der Ansatzfunktionen für die  $p$ -Verfeinerung stets Polynomgrade  $N > 1$  verwendet. Die lokalen Ansatzfunktionen werden zu den globalen Ansatzfunktionen additiv hinzugefügt. Für die Darstellung der lokalen Ansatzfunktionen werden zwei mögliche Varianten angegeben:

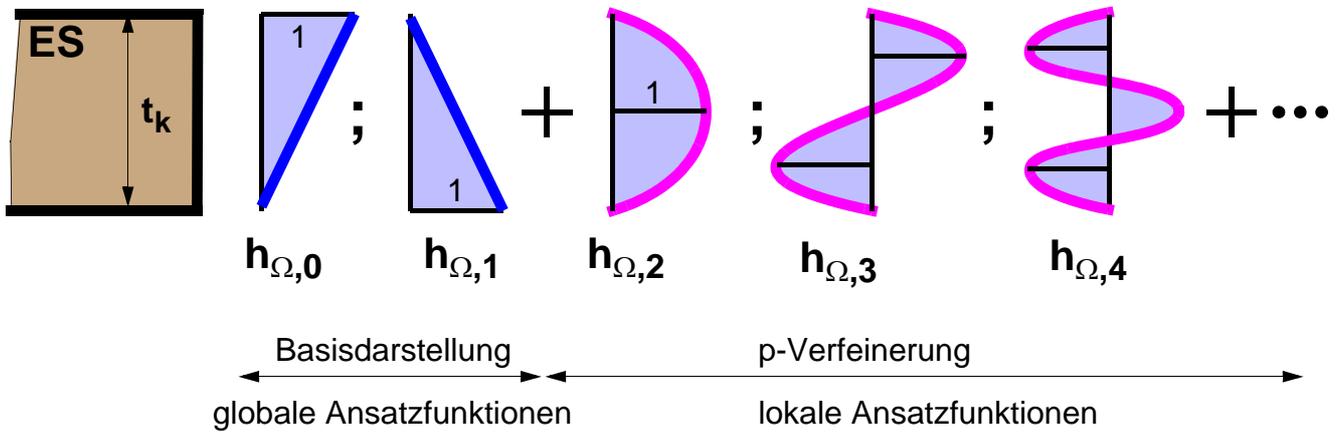
- **Antimetrische additive Polynomfolgen**

Für diesen Fall lässt sich additiv eine höhere Polynomfolge erzeugen, wobei die bereits bestehenden Polynome unverändert bleiben. Für die Bestimmung der Polynome gelten die folgenden Randbedingungen: Als die Fixpunkte werden die jeweiligen Nullstellen des Polynoms  $N$ -ter Ordnung gewählt, wobei eine Skalierung auf den Wert 1 im Halbierungspunkt der ersten beiden Nullstellen durchgeführt wird. Für diesen Fall der Darstellung ist der Maximalwert des Polynoms  $> 1,0$ . Diese Vorgehensweise macht Sinn, da die Stellen der Maximalwerte der Polynome in Abhängigkeit der Polynomordnung verschieden sind und somit nicht explizit bestimmt werden müssen.

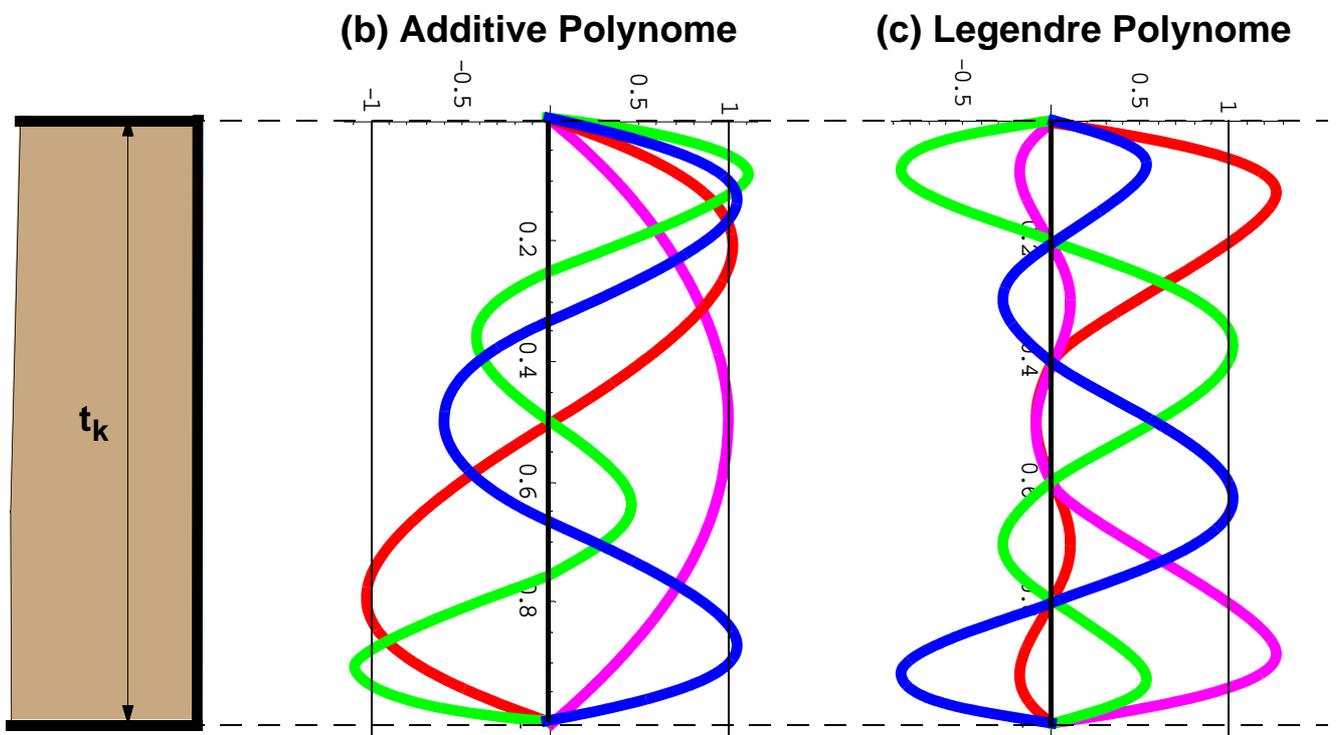
- **Gauss-Legendre-Polynome**

Im Falle der Gauss-Legendre Polynome wird auf Bathe (2002, S. 541) verwiesen. Dabei handelt es sich um Polynome beliebiger Ordnung, die durch optimierte Wahl der Stützstellen mit den zugehörigen Gewichtungsfaktoren für die Integration bestimmt werden. Im Falle der Gauss-Legendre-Polynome ist eine erneute Berechnung sämtlicher Ansatzpolynome bei Erhöhung der Polynomordnung erforderlich. Ein Gauss-Legendre-Polynom benötigt stets  $N+1$  Stützstellen. Durch Auslenkung jeweils einer Stützstelle um den Werte 1, bei gleichzeitiger Fixierung der restlichen Stützstellen, ergeben sich insgesamt  $N-1$  Gauss-Legendre-Polynome. Wie beim additiven Erzeugen ergeben sich auch für die Gauss-Legendre-Polynome Funktionen, deren maximaler Funktionswert größer eins ist. Für hohe Polynomordnungen ergibt sich bei der Berechnungen der Einzelpolynome unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften eine Verringerung des Rechenaufwandes.

**(a) Gesamtdarstellung der Querschnittsdiskretisierung**



**Lokale Ansatzfunktionen:**



**Abb. 7.3:** (a) Gesamtdarstellung der Querschnittsdiskretisierung; (b) Additive Polynome 5ter Ordnung und (c) Gauss-Legendre-Polynome 5ter Ordnung

### 7.1.2.3 Darstellung des diskretisierten lokalen 3D-Teilverschiebungsfeldes

Im Rahmen der Diskretisierung der Gleichgewichtsgleichungen werden die 3D-Einzelverschiebungsfelder in der folgenden Formulierung dargestellt. Die Vektoren  $\mathbf{h}$  stellen dabei die Ansatzfunktionen dar. Diese sind über den gesamten Stabquerschnitt im  $X_2$ - $X_3$ -Koordinatensystem definiert. Die Vektoren  $\delta\hat{\Omega}_i$  stellen die zugehörigen unbekannt Amplitudenwerte und somit die neuen Systemunbekannten dar. Für den Fall der diskretisierten Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen wird am Stabkörper ausschließlich über den Stabquerschnitt diskretisiert. Die Ansatzfunktionen erfüllen die oben erwähnten Anforderungen an die Randbedingungen und die Orthogonalität. In der Längsrichtung des Stabes bleibt die Differentialgleichung in vollem Umfang erhalten. Durch Multiplikation der Ansatzfunktionen mit den diskreten Amplitudenwerten lassen sich die 3D-Teilverschiebungsfelder in Matrixdarstellung wie folgt definieren. Die allgemeine Darstellung der Diskretisierung gilt sowohl für die realen als auch die virtuellen 3D-Einzelverschiebungsfelder in gleicher Weise.

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \mathbf{h}^T \cdot \hat{\Omega}_1 & \delta\Omega_1 &= \mathbf{h}^T \cdot \delta\hat{\Omega}_1 \\ \Omega_2 &= \mathbf{h}^T \cdot \hat{\Omega}_2 & \text{und } \delta\Omega_2 &= \mathbf{h}^T \cdot \delta\hat{\Omega}_2 \\ \Omega_3 &= \mathbf{h}^T \cdot \hat{\Omega}_3 & \delta\Omega_3 &= \mathbf{h}^T \cdot \delta\hat{\Omega}_3\end{aligned}\quad [7-1.a]$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h}^T & & \\ & \mathbf{h}^T & \\ & & \mathbf{h}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}^T} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_1 \\ \hat{\Omega}_2 \\ \hat{\Omega}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T \cdot \hat{\Omega}\quad [7-1.b]$$

- **Transformierte diskretisierte Wölb- und Querschnittverschiebungsfelder**

Die diskretisierte Darstellung der 3D-Teilverschiebungsfelder wird im Rahmen der Herleitung auch in ihrer transformierten Form benötigt, diese lautet:

$$\mathbf{\Omega}^T = \hat{\Omega}^T \cdot \mathbf{H}\quad [7-2]$$

- **Ableitung der diskretisierten Wölb- und Querschnittverschiebungsfelder**

Im Rahmen der Herleitungen sind die partiellen Ableitungen über den Querschnitt erforderlich. Wie oben definiert, hängen nur die Ansatzfunktionen von den Querschnittskordinaten ab. Die Ableitung der Ansatzfunktionen nach der  $i$ -Koordinate lässt sich wie folgt ausführen:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h}^T & & \\ & \mathbf{h}^T & \\ & & \mathbf{h}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_i^T} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_1 \\ \hat{\Omega}_2 \\ \hat{\Omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_i^T & & \\ & \mathbf{h}_i^T & \\ & & \mathbf{h}_i^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_1 \\ \hat{\Omega}_2 \\ \hat{\Omega}_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial X_i} \cdot \hat{\Omega} = \mathbf{H}_i^T \cdot \hat{\Omega}\quad [7-3.a]$$

$\mathbf{H}_i^T$  bezeichnet dabei die nach der Koordinate  $i$  abgeleitete Matrix der Ansatzfunktionen.

Für die Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen in umgewandelter diskretisierter Darstellung, siehe 6.5.6.2, wird der folgende Ausdruck benötigt. Die Darstellung in der diskretisierten Form bei Verwendung von Glg. 7-2 lautet:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \hat{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T &= \hat{\Omega}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T = \hat{\Omega}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2, 0}^T + \delta \hat{\Omega}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 3, 0}^T \\
 &= \hat{\Omega}^T \cdot \left( \frac{\partial}{\partial X_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2, 0}^T + \frac{\partial}{\partial X_3} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 3, 0}^T \right) \\
 &= \hat{\Omega}^T \cdot \left( \underbrace{\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{B}_{3D, 2, 0}^T}_{\mathbf{B}_{3D, H, 2}^T} + \underbrace{\mathbf{H}_3 \cdot \mathbf{B}_{3D, 3, 0}^T}_{\mathbf{B}_{3D, H, 3}^T} \right)
 \end{aligned} \tag{7-3.b}$$

Für die Ableitung nach den Querschnittskordinaten gilt:  $\alpha = 2, 3$

Für die kompakte Darstellung der partiell abgeleiteten Ansatzfunktionen werden die konstanten Ableitungsmatrizen nach 4.2.3.2 verwendet.

$$\mathbf{B}_{3D, H, 2}^T = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{B}_{3D, 2, 0}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_2 & & & & & \\ & \mathbf{h}_2 & & & & \\ & & \mathbf{h}_2 & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{h}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \tag{7-3.c}$$

$$\mathbf{B}_{3D, H, 3}^T = \mathbf{H}_3 \cdot \mathbf{B}_{3D, 3, 0}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_3 & & & & & \\ & \mathbf{h}_3 & & & & \\ & & \mathbf{h}_3 & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{h}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{7-3.d}$$

In zusammengefasster Darstellung gilt für die Ableitung der Ansatzfunktionen nach den beiden Querschnittskordinaten:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \hat{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T &= \hat{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T = \hat{\Omega}^T \cdot (\mathbf{B}_{3D, H, 2}^T + \mathbf{B}_{3D, H, 3}^T) \\
 &= \hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_2 & 0 & \mathbf{h}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_3 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \hat{\Omega}^T \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \mathbf{H}^T)^T
 \end{aligned} \tag{7-3.e}$$

$3^*N;6$

Die Differentialoperatormatrix  $\mathbf{B}_{3D, 2+3}$  für die Ableitung nach den Querschnittskordinaten ist in Glg. 4-7.b definiert.

### 7.1.3 Ansatzfunktionen versus Gesamtquerschnittverschiebungsfelder

Wesentlich erscheint, dass in Abhängigkeit der gewählten Art und Anzahl der Ansatzfunktionen die zugehörigen Amplitudenfunktionen in den Stützstellen der Polynomfunktionen als Systemunbekannte für das Gesamtproblem in Erscheinung treten. Die Anzahl der Systemunbekannten richtet sich somit nach der Anzahl der Stützstellen der für die Diskretisierung verwendeten Ansatzfunktionen. Zur lückenlosen Darstellung der 3D-Verschiebungsfelder ist stets das gesamte Paket der Ansatzfunktionen mit den zugehörigen Systemunbekannten erforderlich, es darf keine einzige Stützstelle im Rahmen der Berechnung vernachlässigt werden.

Die oben erwähnten Lösungen des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems sind durch die 3D-Einzelverschiebungsfelder in Form der Eigenvektoren aus dem Eigenwertproblem gegeben. Diese 3D-Einzelverschiebungsfelder stellen entgegen den Ansatzfunktionen keine lokal im Querschnitt definierten Verschiebungsfelder dar. Sie sind als sogenannte Gesamtquerschnittverschiebungsfelder stets über den gesamten Stabquerschnitt definiert.

Jedes der normierten 3D-Einzelverschiebungsfelder besitzt eine, für die Skalierung im Rahmen der additiven linearen Kombination verschiedener 3D-Einzelverschiebungsfelder zum 3D-Gesamtverschiebungsfeld, zugeordnete Systemunbekannte in Form der Amplitudenfunktionen. Diese den 3D-Einzelverschiebungsfeldern zugeordneten Amplitudenfunktionen stellen die neuen Systemunbekannten des Stabproblems in Stablängsrichtung dar.

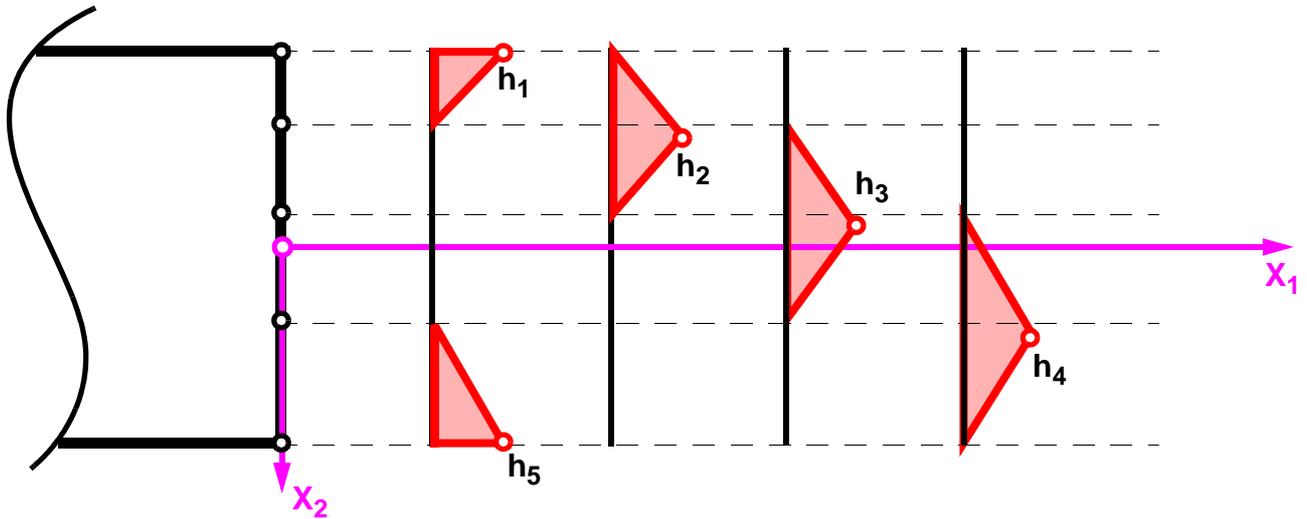
Die Systemunbekannten der Ansatzfunktionen stehen mit den neuen Systemunbekannten der 3D-Einzelverschiebungsfelder in keinem direkten Zusammenhang.

Die Anzahl der 3D-Einzelverschiebungsfelder steht dabei in direktem Zusammenhang mit der Anzahl der Ansatzfunktionen. Grundsätzlich stimmt die Anzahl beider direkt überein. Werden jedoch im Rahmen der Orthogonalisierung der 3D-Einzelverschiebungsfelder Zwangsgleichungen verwendet, dann reduziert sich die Anzahl der 3D-Einzelverschiebungsfelder und der neuen Systemunbekannten exakt um die in das Eigenwertproblem eingeschleuste Anzahl an Zwangsgleichungen.

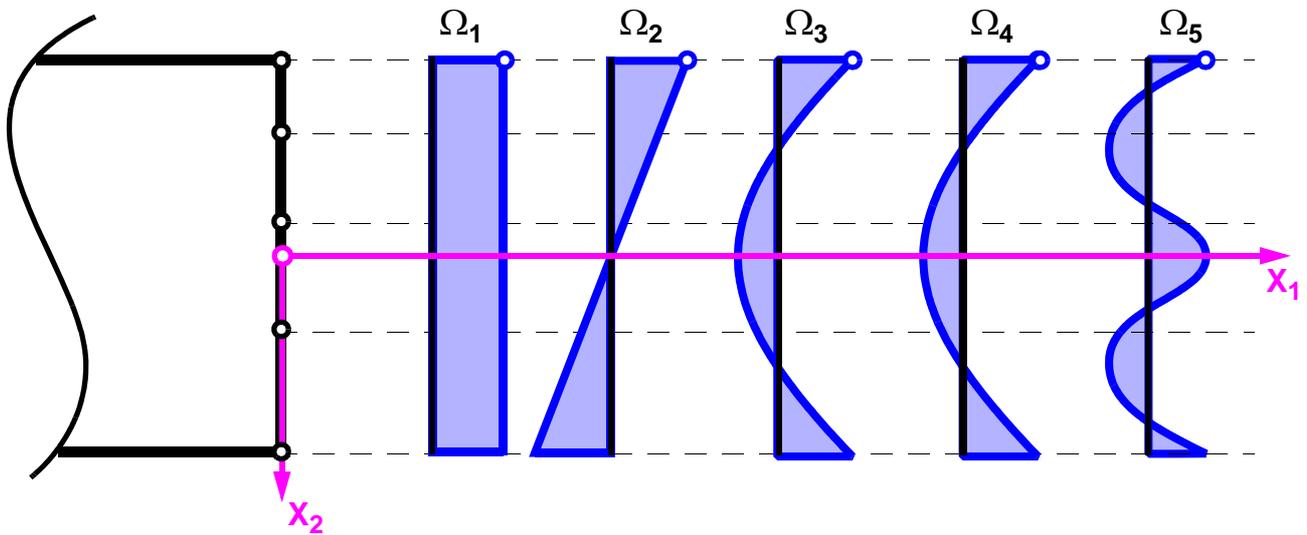
Da sich die 3D-Einzelverschiebungsfelder per Definition über den Gesamtquerschnitt erstrecken, ist eine lückenlose Darstellung des Querschnittsverhaltens mit einer beliebigen Anzahl an 3D-Einzelverschiebungsfelder durch eine lineare Kombination möglich. Eine beliebige Anzahl ermöglicht auch die Verwendung eines einzigen 3D-Einzelverschiebungsfeldes. Durch die Verwendung einer größeren Anzahl an 3D-Einzelverschiebungsfelder wird eine Verbesserung der Ergebnisqualität erreicht.

Der große Vorteil der Gesamtquerschnittverschiebungsfelder liegt in der unabhängigen, einzelnen und gruppierten Verwendbarkeit dieser, da – entgegen den Möglichkeiten mit den Ansatzfunktionen – stets 3D-Verschiebungsfelder über den gesamten Querschnitt abgebildet werden können.

**(a) Ansatzfunktionen über Teilbereiche des Querschnitts**



**(b) 3D-Gesamtquerschnittsverschiebungsfelder**



*Abb. 7.4: Schematische Darstellung der (a) Ansatzfunktionen und der (b) Gesamtquerschnittsverschiebungsfelder*

### 7.1.4 Eigenschaften der 3D-Einzelverschiebungsfelder

Die aus der Lösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems resultierenden 3D-Einzelverschiebungsfelder weisen die folgenden Eigenschaften auf:

- Die 3D-Einzelverschiebungsfelder stellen im mechanischen Sinne orthogonale Lösungsfunktionen dar. Diese resultieren aus den Eigenschaften des erweiterten Eigenwertproblems, das durch die Einbringung der Zwangsgleichungen für die Abspaltung der Starrkörperanteile der Querschnittskinematik aus den relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern entsteht.
- Die 3D-Einzelverschiebungsfelder resultieren aus den Eigenvektoren und stellen über den gesamten Querschnitt definierte normierte 3D-Verschiebungsfelder dar, deren Skalierung über die Systemfreiheitsgrade der Wölbamplituden erfolgt.
- Die 3D-Einzelverschiebungsfelder weisen bezüglich der normierten Schnittgrößen absolute Resistenz auf, die nicht in die Orthogonalisierung mit aufgenommenen restlichen Schnittgrößen weisen Anteile aus den 3D-Einzelverschiebungsfeldern auf, die wie in Punkt 7.5.7.5 zu korrigieren sind.
- Die 3D-Einzelverschiebungsfelder stellen additive 3D-Verschiebungsfelder dar, die durch lineare Kombination für die Systemberechnungen ins Spiel gebracht werden.
- Die 3D-Einzelverschiebungsfelder werden entsprechend ihrer aufsteigend sortierten Wölbsteifigkeit in der Steifigkeitsmatrix angeordnet. Diese Anordnung spiegelt die Wichtigkeit der 3D-Einzelverformungsfelder mit geringer Steifigkeit (niedrige Abklingzahl) wider. 3D-Verschiebungsfelder mit geringer Steifigkeit bilden sich wesentlich leichter aus als 3D-Verschiebungsfelder mit hoher Steifigkeit und sind deshalb für die Stabberechnung von größerer Bedeutung.
- Die Anzahl der 3D-Einzelverschiebungsfelder stimmt mit der Anzahl der Stützstellen der Ansatzfunktionen der Systemdiskretisierung überein, jede eingearbeitete Zwangsgleichung zur Erfüllung der Orthogonalität verringert die Anzahl jeweils um eins.
- Jedes der 3D-Einzelverschiebungsfelder erfüllt im Zusammenhang mit den begleitend auftretenden Starrkörperverschiebungsanteilen sämtliche Oberflächenrandbedingungen.

### 7.1.5 Zuordnung der globalen Schnittgrößen zu den Lösungsanteilen I und II

Es scheint als wesentlich, dass sämtliche global auftretenden Stabschnittgrößen ausschließlich mit den sechs globalen Bewegungsfreiheitsgraden der Starrkörperkinematik (Lösungsanteil I) zusammenspielen. Auf Grund dieser Tatsache ergibt sich zwingend, dass alle auftretenden 3D-Einzelverschiebungsfelder frei von jeglichen globalen resultierenden Stabschnittgrößen sein müssen.

Auf Grund der Orthogonalisierung der Normalkraft und der Momenteneigenschaften für alle 3D-Einzelverschiebungsfelder beinhalten diese keinerlei globale Normalkräfte und Biegemomente.

Da systembedingt nur eine Orthogonalisierung bezüglich der Normalspannungsanteile oder der Schubspannungsanteile möglich ist, beinhalten die 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösungen resultierende globale Querkräfte und Torsionsmomente. Da die globalen Stabschnittgrößen über den Lösungsanteil I bereits vollständig abgedeckt sind, müssen diese zusätzlich aus den Abklinglösungen resultierenden Querkräfte und Torsionsmomente über begleitende Starrkörperverformungen, Abscherung und Verdrillung des Stabquerschnitts, zu Null kompensiert werden. Diese die Abklinglösungen begleitenden Starrkörperverformungen der Querschnittskinematik lassen sich eindeutig aus dem 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem im Rahmen der Lösung des Eigenwertproblems beziehungsweise nachträglich aus den 3D-Gleichgewichtsgleichungen bestimmen.

## 7.1.6 Lösungsstrategien für das 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem

Für die Lösung des gezeigten 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems, d. h. für die Bestimmung der Eigenwerte und der Eigenvektoren des Eigenwertproblems, stehen grundsätzlich zwei wesentlich unterschiedliche Lösungsstrategien zur Verfügung:

- Unstrukturierte anonyme Lösung des gesamten 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems
- Strukturierte, „gesplittete“ Lösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems in Teilsystemen

Diese beiden Lösungsvarianten zur vollständigen Lösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems werden im Folgenden im Detail erläutert. Sie liefern im Endergebnis zwei absolut äquivalente Stablösungen.

### 7.1.6.1 Unstrukturierte anonyme Lösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems

Das angegebene 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem wird, ungeachtet der Kenntnis über die Art der Beschaffenheit des mechanischen physikalischen Problems des erweiterten klassischen Stabes, einer rein mathematisch orientierten Lösungsprozedur zugeführt. Aus dem beschreibenden 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem werden die Lösungen in Form der Eigenwerte und der Eigenvektoren aus einem Eigenwertproblem direkt bestimmt. Im zugrunde gelegten 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem sollte der Anteil des klassischen Stabes (6x6) in orthogonaler Darstellung vorliegen. Aufgrund der Beschaffenheit der Eigenwertprozedur treten die Ergebnisse in Form der Eigenwerte mit den zugehörigen orthogonalen Eigenvektoren ohne Zusatzaufwand direkt auf. Im Rahmen der Lösung des Eigenwertproblems treten per Definition zueinander orthogonale Eigenvektoren auf.

Zudem werden die gegenseitigen Beeinflussungen der Teillösungen (Freifeldlösung und Abklinglösung) durch die jeweils begleitend auftretenden Verformungsbeiträge der Systemfreiheitsgrade explizit direkt mitbestimmt.

Eine systematische strukturierte Systemlösung kann auf Basis dieser Vorgehensweise nicht gezeigt werden, der Terminus der Freifeldlösung erscheint bei dieser Art der Lösung nicht direkt.

### 7.1.6.2 Strukturierte „gesplittete“ Lösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems

Diese Art der Lösung des Gleichgewichtsgleichungssystems stellt die dieser Arbeit zugrunde gelegte Lösungsmethodik dar.

Wie bereits oben erwähnt, treten bei der Lösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems  $12+2*N$  Eigenwerte mit definiertem Verhalten auf:

- 12 Eigenwerte beschreiben den bekannten konstanten wölbschubnachgiebigen 3D-Stab.
- $2*N$  Eigenwerte beschreiben die Abklinglösungen des wölbschubnachgiebigen 3D-Stabes mit der zugrunde gelegten verallgemeinerten Querschnittskinematik.

Entgegen der anonymen Gesamtlösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems werden bei der strukturierten Lösungsweise des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems die bekannten mechanischen Eigenschaften gezielt ausgenutzt und diskutiert. Dazu wird eine dreistufige Lösungsmethodik verwendet, die folgende drei Schritte zur Bestimmung der Gesamtlösung verfolgt. Auf Grund der getrennten Lösung der beiden Lösungsanteile I und II sind entsprechende gegenseitige unerwünschte Interaktionen durch Orthogonalisierungsbedingungen (Abspaltung der Starrkörperanteile der Querschnittskinematik im mechanischen Sinne) auszuschließen. Werden diese Zusatzgleichungen in das Eigenwertproblem implementiert, dann entwickelt sich dieses zu einem erweiterten Eigenwertproblem, das durch bekannte Vorgehensweisen lösbar ist.

- **Schritt 1: Lösungsanteil I – Bestimmung der Freifeldlösung**

In einem ersten Schritt werden unter Formulierung des entsprechenden 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems die Freifeldlösungen bestimmt. Per Definition wird im Rahmen der Freifeldlösung von einer in Stablängsrichtung konstanten ungestörten Stablösung, bei konstanten Querkräften und konstantem Torsionsverlauf, gesprochen. Die zugehörigen Lösungsfunktionen haben aus diesem Grunde konstante Verläufe in Stablängsrichtung aufzuweisen. Für die Bestimmung der Freifeldlösung wird die originale bzw. die umgewandelte diskretisierte Integraldarstellung des Gleichgewichts des Querschnittproblems für die Zeile 8 des GLG-Systems verwendet. Die Zeilen 1-6 stellen dabei Belastungsterme für die Systemlösung dar, siehe Abb. 7.5 (a). In Abb. 7.6 (a) ist eine simplifizierte Darstellung der Freifeldlösung für den transversalen Querkraftschub dargestellt.

Eine Freifeldlösung stellt dabei ein sich ohne jegliche Normalspannungsumlagerungen der primären Biegenormalspannungen einstellendes relatives 3D-Verschiebungsfeld dar, es gilt:

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{0, \gamma 12} & \Omega_{0, \gamma 13} & \Omega_{0, \kappa 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{12, 0} \\ \gamma_{13, 0} \\ \kappa_1^* \end{bmatrix} \quad [7-4.a]$$

- **Schritt 2: Lösungsanteil II – Bestimmung der Abklinglösungen**

Für die Bestimmung der Abklinglösungen mit den reellen Eigenwerten  $\pm\lambda_i$  wird ebenfalls die Integraldarstellung des Querschnittproblems (Zeile 8) verwendet. Die Eigenwerte (Abklingzahlen) mit den zugehörigen Eigenvektoren (3D-Einzelverschiebungsfelder) resultieren dabei aus dem, dem 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem entstammenden Eigenwertproblem.

Die begleitenden Anteile der Starrkörperfreiheitsgrade zur Erfüllung der Schnittkrastrandbedingungen werden durch das Einsetzen der Abklinglösungen in die Zeilen 1-6 des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems bestimmt.

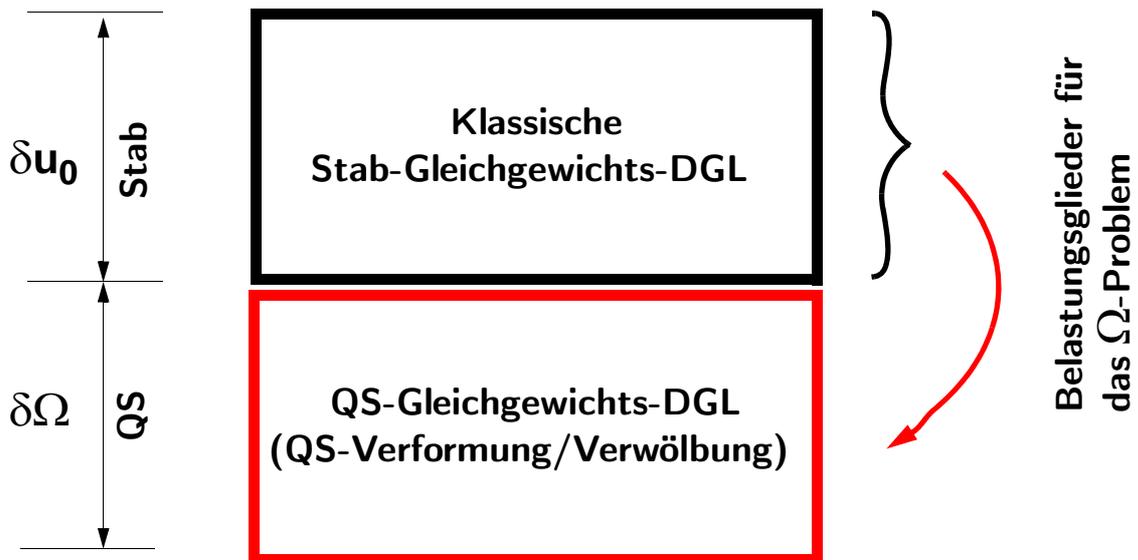
Abb. 7.6 (b) zeigt eine simplifizierte Darstellung der Abklinglösung in Stablängsrichtung für den transversalen Querkraftschub.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \dots \end{bmatrix} \quad [7-4.b]$$

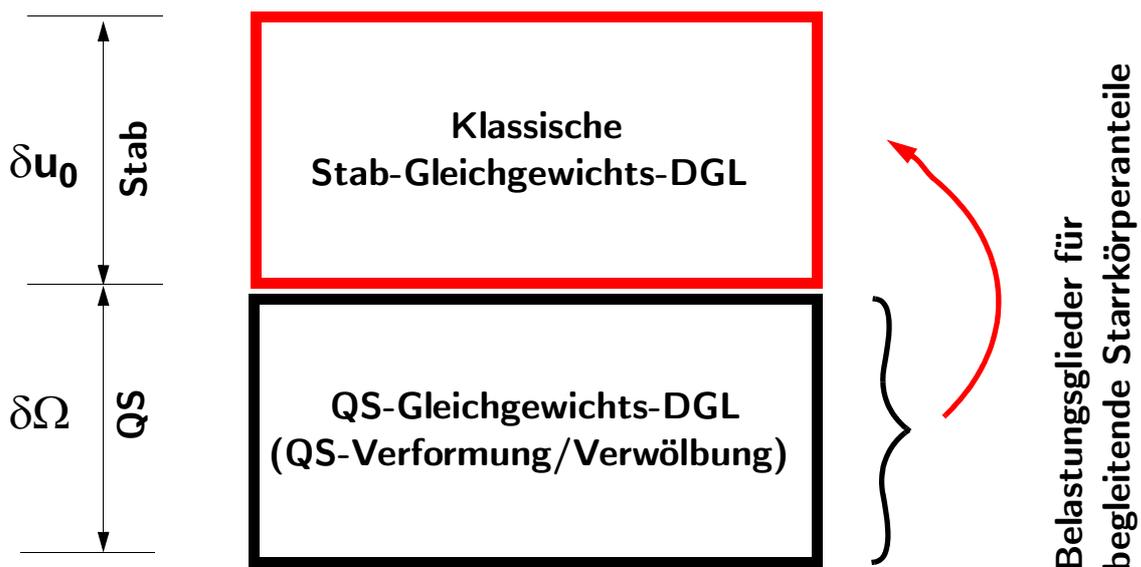
- **Schritt 3: Bestimmung der Gesamtlösung durch Kombination der beiden Teillösungen**

Die Gesamtlösung des 3D-Gleichgewichtsgleichungssystems ergibt sich abschließend durch geeignete Kombination der beiden Teillösungen. Werden diese Teillösungen durch korrekte Addition zusammengeführt, dann resultiert daraus die Gesamtlösung des Stabes. Darauf aufbauend lässt sich die Stabsteifigkeitsmatrix für den homogen belasteten 3D-Stab mit verallgemeinerter Querschnittskinematik in vollem Umfang beschreiben. Das dadurch etablierte und beschriebene Stabmodell unterliegt keinerlei Restriktionen in der Querschnittskinematik.

**(a) Belastungsglieder für die Bestimmung der Freifeldlösung**

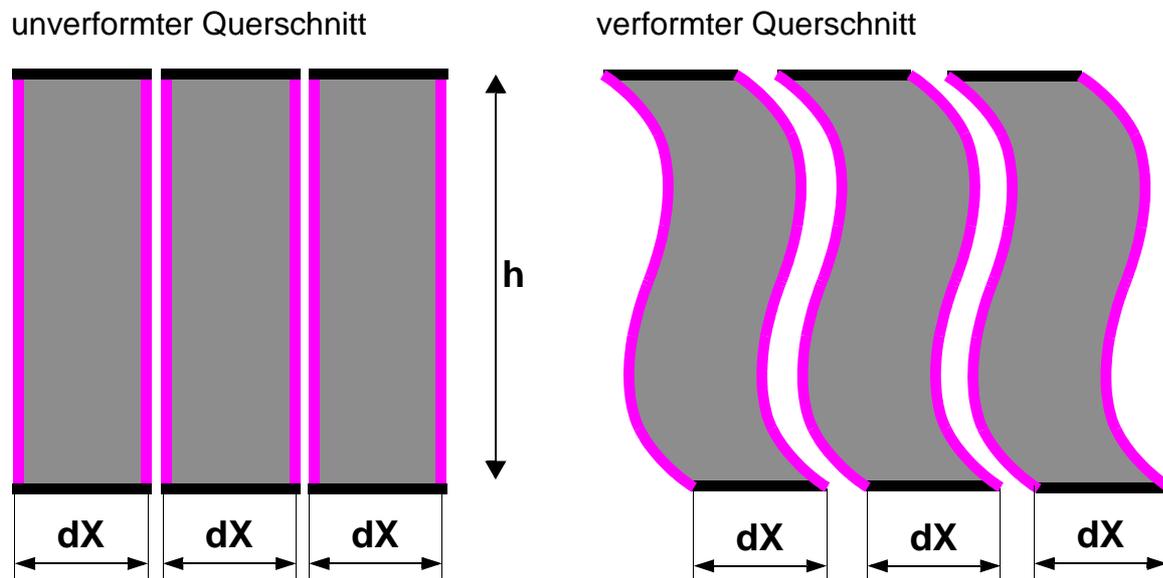


**(b) Belastungsglieder für die Bestimmung der Abklinglösungen**



*Abb. 7.5: Grafische Darstellung der Lösungsstrategie für die Freifeldlösung und die Abklinglösungen*

### (a) Freifeldlösung in Stablängsrichtung



### (b) Abklinglösung in Stablängsrichtung

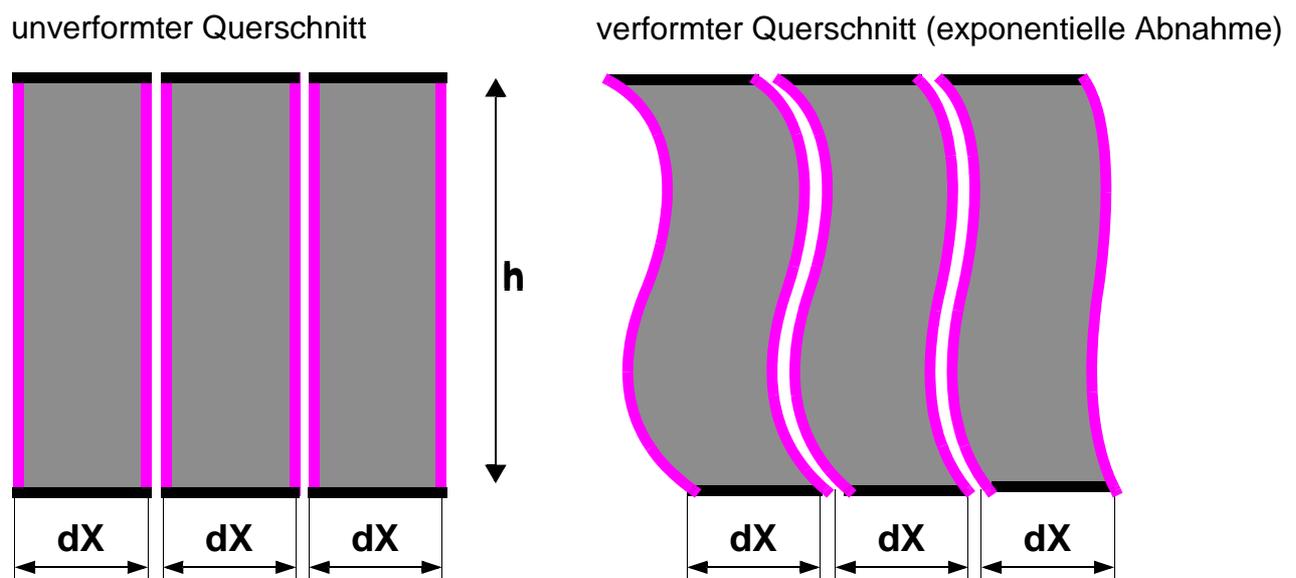


Abb. 7.6: (a) *Simplifizierte Darstellung der Freifeldlösung,*  
 (b) *Simplifizierte Darstellung der Abklinglösung*

### 7.1.7 Matrixorientierte Lösungsmethodik zur Ermittlung der Stabsteifigkeitsmatrix

Für die Bestimmung der Stabsteifigkeitsmatrix wird eine universelle matrixorientierte Lösungsmethodik verwendet, die im Rahmen vieler baustatischer Problemstellungen anwendbar ist, die sich durch lineare Differentialgleichungssysteme ausdrücken lassen (vgl. Guggenberger, 2007, S. 38).

Dieser Arbeit liegt eine modifizierte erweiterte Vorgehensweise der universellen matrixorientierten Lösungsmethodik zugrunde, da das Gesamtproblem aus den beiden Lösungsanteilen des Freifeld- und des Abklingproblems in richtiger Weise als Kombination zu bilden ist. Für die Bestimmung der Stabstabsteifigkeitsmatrix sind mehrere systematische Schritte erforderlich, wobei die folgenden grundlegenden Beziehungen als Vorbereitung zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrix herzuleiten sind.

Für die Bezeichnung der einzelnen Spannungs- und Verformungsanteile werden die Indizes 0 und  $\Omega$  als Doppelindex verwendet. Der erste Index bezeichnet dabei die Auswirkung, der zweite vermittelt die Ursache. Demzufolge stellt beispielsweise  $\mathbf{u}_{0,\Omega}^*$  eine 0-Verschiebung aus dem  $\Omega$ -Problem dar, umgekehrt stellt  $\mathbf{u}_{\Omega,0}^*$  eine  $\Omega$ -Verschiebung aus dem 0-Problem dar.

- Bestimmung der Stabendverformungen (Stabanfangsquerschnitt und Stabendquerschnitt) in Abhängigkeit der Integrationskonstanten für den Lösungsanteil I:  $\mathbf{u}_{0,0}^*$  und  $\mathbf{u}_{\Omega,0}^*$
- Bestimmung der Stabendschnittgrößen (Stabanfangsquerschnitt und Stabendquerschnitt) in Abhängigkeit der Integrationskonstanten für den Lösungsanteil I:  $\mathbf{n}_{0,0}^*$
- Bestimmung der Stabendverformungen (Stabanfangsquerschnitt und Stabendquerschnitt) in Abhängigkeit der Integrationskonstanten für den Lösungsanteil II:  $\mathbf{u}_{0,\Omega}^*$  und  $\mathbf{u}_{\Omega,\Omega}^*$
- Bestimmung der Stabendschnittgrößen (Stabanfangsquerschnitt und Stabendquerschnitt) in Abhängigkeit der Integrationskonstanten für den Lösungsanteil II:  $\mathbf{M}_{\psi}^*$

Werden die beiden Anteile der beiden Teillösungen zusammengeführt, lassen sich die folgenden formalen Beziehungen für die Integrationskonstanten mit den Stabverformungen und den Stabschnittgrößen bestimmen.

**Der Zusammenhang für die Stabverformungen mit den Integrationskonstanten lautet:**

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0,0}^* & \mathbf{U}_{0,\Omega}^* \\ \mathbf{U}_{\Omega,0}^* \cdot [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] & \mathbf{U}_{\Omega,\Omega}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \times 12 & 6 \times 2N \\ 3 \times 12 & N \times 2N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [7-5.a]$$

Die Grundanteile für die beiden Lösungsanteile I und II werden in separierter Form in 7.4 und 7.5 bestimmt.

**Der Zusammenhang für die Stabschnittgrößen mit den Integrationskonstanten lautet:**

$$\mathbf{n}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_0^* \\ \mathbf{M}_{\psi}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{0,0,1-6} \cdot [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\psi,\psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [7-5.b]$$

Die Grundanteile für die beiden Lösungsanteile I und II werden in separierter Form in 7.4 und 7.5 bestimmt.

Basierend auf diesen einzelnen Anteilen ist die Stabsteifigkeitsmatrix für das Gesamtproblem zu bestimmen. Im Rahmen der korrekten Kombination der beiden Anteile sind die Freifeldlösungen für die

drei Verformungszustände durch die relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösungen auszudrücken. Grundsätzlich kann eine beliebige Anzahl an relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern (Abklinglösungen) ins Spiel gebracht werden, d. h. auch eine einzige Abklinglösung kann verwendet werden. Es gilt: Mit steigender Anzahl an verwendeten Abklinglösungen kann eine verbesserte Darstellungsqualität der Freifeldlösung erreicht werden.

Für die Bestimmung der Stabsteifigkeitsmatrix sind die folgenden Schritte basierend auf den oben erwähnten Beziehungen für die Schnittgrößen und Verformungen erforderlich:

- Bestimmung der homogenen Verformungsmatrix  $\mathbf{U}_{\text{hom}}$  aus den Einheitsrandverformungen mit anschließender Bestimmung der Integrationskonstanten durch Bildung der Inversen der homogenen Verformungsmatrix. Daraus resultieren die Integrationskonstanten in Abhängigkeit der Stabendverformungen.
- Bestimmung der homogenen Spannungsmatrix  $\mathbf{S}_{\text{hom}}$  aus den Randfesthaltekräften in Abhängigkeit der Integrationskonstanten.

Die Stabsteifigkeitsmatrix ergibt sich abschließend durch die Multiplikation der homogenen Spannungsmatrix mit der Inversen der homogenen Verformungsmatrix. Als Ergebnis resultiert daraus der globale Zusammenhang zwischen den Stabendverformungen und den Randfesthaltekräften.

Alternativ dazu wird auch die Darstellung der in Stablängsrichtung durch partielle Integration nach der Stablängskoordinate ermittelten Steifigkeitsmatrix für die FE-Methode aufbereitet.

## 7.2 Freifeldlösung ausgedrückt in den relativen Einzelverschiebungsfeldern

Wie unter Punkt 7.7 erwähnt, ist es zur Generierung der homogenen Verformungsmatrix erforderlich, die 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen (Lösungsanteil 1) durch die relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösung auszudrücken. Jedes der drei 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösung ist für sich getrennt darzustellen. Nach Glg. 7-23 sind die drei 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösung für die zwei Querkraftschubzustände sowie für den Torsionszustand wie folgt definiert.

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{0,\gamma 12} & \Omega_{0,\gamma 13} & \Omega_{0,\kappa 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1^* \end{bmatrix} \quad [7-6.a]$$

Gesucht ist die bestmögliche Darstellung der 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen  $\Omega_{0,\gamma 12}$ ,  $\Omega_{0,\gamma 13}$  und  $\Omega_{0,\kappa 1}$  in Abhängigkeit der relativen 3D-Verschiebungsfelder der Abklinglösungen, beziehungsweise in Abhängigkeit einer beliebigen Anzahl an relativen 3D-Verschiebungsfeldern. Aus dem Lösungsanteil II ergeben sich für isotropes Materialverhalten die relativen 3D-Verschiebungsfelder für die axialen Querschnittsverwölbungen.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} & \Omega_{1,3} & \dots \end{bmatrix} \quad [7-6.b]$$

Die Freifeldlösungen sollen als lineare Kombination der relativen 3D-Verschiebungsfelder  $\Omega_i$  mit vorläufig unbekanntem Anteilsfaktoren  $\mathbf{a}$  beschrieben werden. Für jedes zusätzlich ins Spiel gebrachte relative 3D-Verschiebungsfeld ist der zugehörige Anteilsfaktor für die Bildung der Linearkombination zu bestimmen. Der Vektor der Anteilsfaktoren ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \end{bmatrix} \quad [7-6.c]$$

Ziel ist es, die 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen mit höchster möglicher Approximationsgenauigkeit in Abhängigkeit aller bzw. ausgewählter relativer 3D-Verschiebungsfelder darzustellen. Dazu wird im Sinne der Ausgleichsrechnung die Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet. Für ein beliebiges 3D-Verschiebungsfeld  $\Omega_0$  gilt für die Formulierung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate folgender Zusammenhang:

$$F = \int_A \left( \Omega_0 - \sum_{i=1}^n (a_i \cdot \Omega_i) \right)^2 dA \stackrel{!}{=} \text{Min} \quad [7-7.a]$$

Das algebraische lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der  $N$  Anteilsfaktoren ergibt sich durch Ableitung der Definitionsgleichung nach den unbekanntem Anteilsfaktoren. In allgemeiner Form gilt für die Formulierung der „Methode der kleinsten Fehlerquadrate“ folgende Definitionsgleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = -2 \cdot \int_A \left( \Omega_0 - \sum_{i=1}^n (a_i \cdot \Omega_i) \right) \cdot \Omega_j dA = -2 \cdot \int_A \Omega_0 \cdot \Omega_j - \Omega_j \cdot \sum_{i=1}^n (a_i \cdot \Omega_i) dA = 0 \quad [7-7.b]$$

Für die Ableitung nach den Anteilsfaktoren  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  usw. entsteht jeweils eine Gleichung in folgender Form:

$$\begin{aligned}\int_A \Omega_0 \cdot \Omega_1 \, dA &= \int_A \Omega_1 \cdot \sum_{i=1}^n (\Omega_i \cdot \mathbf{a}_i) \, dA \\ \int_A \Omega_0 \cdot \Omega_2 \, dA &= \int_A \Omega_2 \cdot \sum_{i=1}^n (\Omega_i \cdot \mathbf{a}_i) \, dA \\ \int_A \Omega_0 \cdot \Omega_3 \, dA &= \int_A \Omega_3 \cdot \sum_{i=1}^n (\Omega_i \cdot \mathbf{a}_i) \, dA\end{aligned}\quad [7-7.c]$$

Das lineare Gleichungssystem für die Bestimmung der Anteilsfaktoren lässt sich in Matrixschreibweise wie folgt darstellen:

$$\int_A \Omega^T \cdot \Omega_0 \, dA = \int_A \Omega^T \cdot \Omega \cdot \mathbf{a} \, dA \quad [7-7.d]$$

Die Anteilsfaktoren für die approximierte Darstellung des 3D-Verschiebungsfeldes  $\Omega_0$  werden durch die folgende Gleichungsumformung eindeutig gewonnen:

$$\mathbf{a}_{\Omega_0} = \left( \int_A \Omega^T \cdot \Omega \, dA \right)^{-1} \cdot \int_A \Omega^T \cdot \Omega_0 \, dA \quad [7-7.e]$$

Im Weiteren lässt sich die Wölbfunktion als Linearkombination der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder darstellen.

$$\Omega_0 \cong \Omega \cdot \mathbf{a}_{\Omega_0} \quad [7-7.f]$$

Für die drei 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen gilt in getrennter Darstellung:

#### Freifeldlösungen der Querkraftabscherung $\gamma_{12,0}$

$$\mathbf{a}_{\Omega_{0,\gamma_{12}}} = \left( \int_A \Omega^T \cdot \Omega \, dA \right)^{-1} \cdot \int_A \Omega^T \cdot \Omega_{0,\gamma_{12}} \, dA \quad [7-8.a]$$

$$\Omega_{0,\gamma_{12}} \cong \Omega \cdot \mathbf{a}_{\Omega_{0,\gamma_{12}}} \quad [7-8.b]$$

#### Freifeldlösungen der Querkraftabscherung $\gamma_{13,0}$

$$\mathbf{a}_{\Omega_{0,\gamma_{13}}} = \left( \int_A \Omega^T \cdot \Omega \, dA \right)^{-1} \cdot \int_A \Omega^T \cdot \Omega_{0,\gamma_{13}} \, dA \quad [7-9.a]$$

$$\Omega_{0,\gamma_{13}} \cong \Omega \cdot \mathbf{a}_{\Omega_{0,\gamma_{13}}} \quad [7-9.b]$$

**Freifeldlösungen der Torsionsverdrehung  $\kappa_1^*$**

$$\mathbf{a}_{\Omega_0, \kappa_1} = \left( \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \boldsymbol{\Omega} \, dA \right)^{-1} \cdot \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_{0, \kappa_1} \, dA \quad [7-10.a]$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{0, \kappa_1} \cong \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}_{\Omega_0, \kappa_1} \quad [7-10.b]$$

Bei gemeinsamer Darstellung gilt für die Bestimmung der Matrix der Anteilsfaktoren:

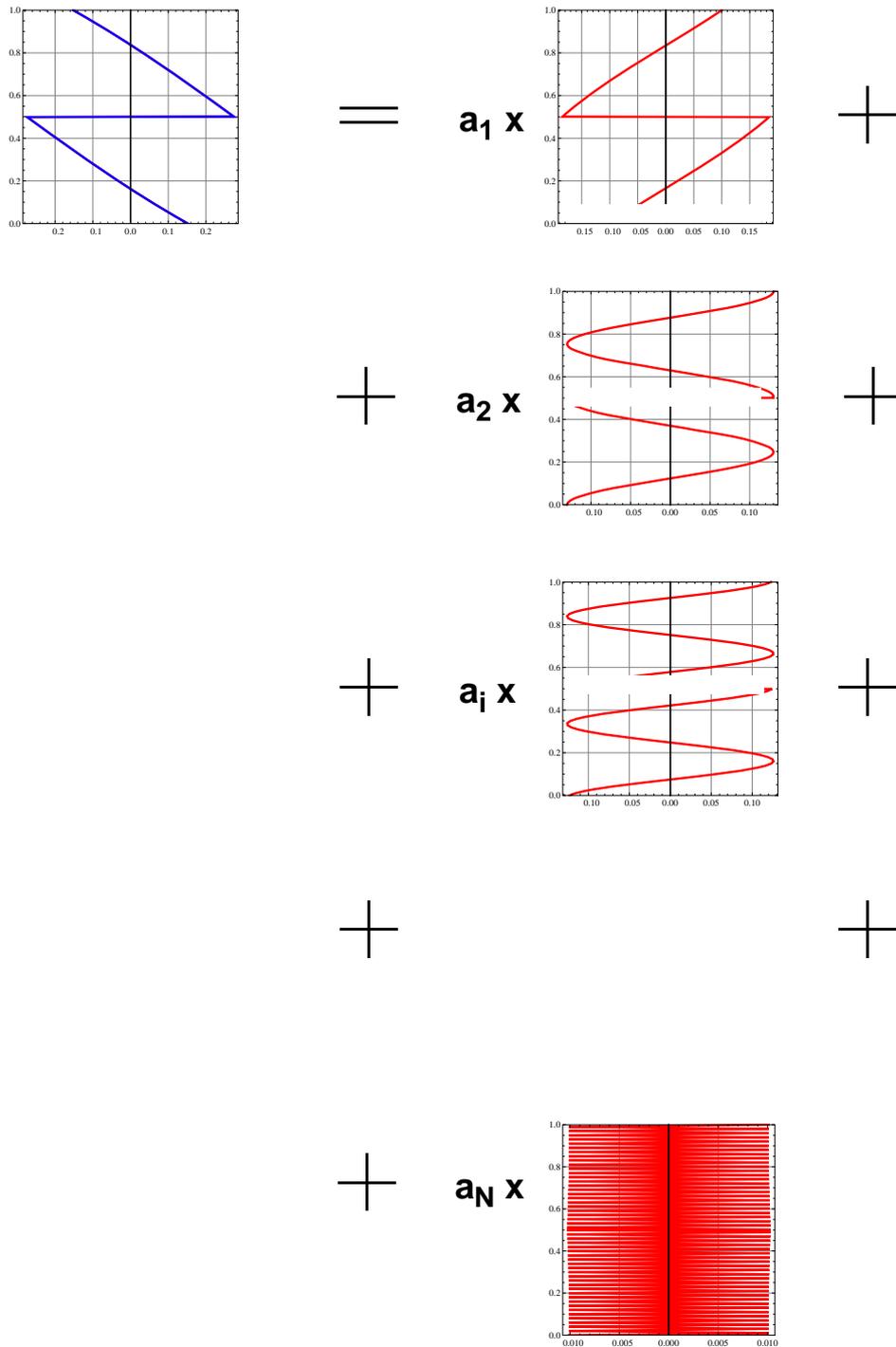
$$\mathbf{A}_{\Omega, FF} = \left( \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \boldsymbol{\Omega} \, dA \right)^{-1} \cdot \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_{0, FF} \, dA \quad [7-11.a]$$

$$\left[ \boldsymbol{\Omega}_{0, \gamma 12} \quad \boldsymbol{\Omega}_{0, \gamma 13} \quad \boldsymbol{\Omega}_{0, \kappa 1} \right] = \boldsymbol{\Omega} \cdot \left[ \mathbf{a}_{\Omega_0, \gamma 12} \quad \mathbf{a}_{\Omega_0, \gamma 13} \quad \mathbf{a}_{\Omega_0, \kappa 1} \right] = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}_{\Omega, FF} \quad [7-11.b]$$

Abb. 7.7 zeigt in schematischer Form die approximierte Darstellung der 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen durch die lineare Kombination relativer 3D-Einzelverschiebungsfelder. Werden die relativen 3D-Verschiebungsfelder im Detail betrachtet, so ist ersichtlich, dass beispielsweise für den Fall des zweischichtigen Querschnitts mit nachgiebiger Verbundfuge bereits wenige relative 3D-Verschiebungsfelder für eine Darstellung der 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen ausreichend sind.

Für den in Abb. 7.7 gezeigten Fall ist bereits für das erste relative 3D-Einzelverschiebungsfeld eine gute Übereinstimmung erkennbar.

$$\Omega_{FF, app} \cong \mathbf{a}_i \cdot \Omega = \sum_n \Omega_i \cdot a_i$$



**Abb. 7.7:** *Linearkombination relativer 3D-Verschiebungsfelder zur Darstellung der 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen (2S-QS mit nachgiebiger Verbundfuge)*

### 7.3 Orthogonalisierung der relativen 3D-Verschiebungsfelder

Die lokalen 3D-Einzelverschiebungsfelder  $\Omega_i(X_2, X_3)$  des Stabquerschnitts sind zu den 3D-Verschiebungsfeldern der Starrkörperbewegung des Stabquerschnitts orthogonal, d. h. es gelten die folgenden Orthogonalitätsbedingungen:

$$\int_A W_i \cdot \mathbf{A}_{0,\perp}^T \cdot \Omega_i \cdot dA = \mathbf{0} \quad [7-12.a]$$

bzw.

$$\int_A \begin{bmatrix} W_1 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_1 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,1} \\ -W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_2 \cdot \Omega_{i,2} \\ W_3 \cdot \Omega_{i,3} \\ -W_2 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,2} + W_3 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,3} \end{bmatrix} \cdot dA = \mathbf{0} \quad [7-12.b]$$

Die Gewichtsfunktionen  $W_i(X_2, X_3)$  über den Stabquerschnitt werden aus Gründen der Allgemeinheit und Flexibilität eingeführt. Wird ein orthotrop-elastisches Materialverhalten zugrunde gelegt, wobei die  $X_1$ -Achse eine der drei Materialhauptachsen darstellt, gilt:

$$W_1(X_2, X_3) = E(X_2, X_3) \quad ; \quad W_2(X_2, X_3) = W_3(X_2, X_3) = 1 \quad [7-13]$$

Die Orthogonalisierungsbedingungen können in der angeführten Form für den Fall der Querschnittsverformung  $\Omega_1$  als Schnittkraftbedingungen für die Normalkraft bzw. für die zwei Biegemomente sowie für den Fall der Querschnittsverformungsfelder  $\Omega_2$  und  $\Omega_3$  als geometrische Verschiebungs- bzw. Verdrehungsbeziehungen gedeutet werden.

Bei einem solchen Materialverhalten kommt es zu einer perfekten Entkoppelung der QS-Verschiebungsfelder „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ zum Stabquerschnitt, d. h.  $\Omega_{i,1}$ ,  $\Omega_{i,2}$  und  $\Omega_{i,3}$ , wie später klar werden wird.

Die Normierungsbedingungen für den Fall der materiellen Isotropie mit  $\nu = 0$  lauten wie folgt:

- **Normalkraft**

Die Normierungsbedingung zur Abspaltung sämtlicher Normalkraftanteile aus den 3D-Einzelverschiebungsfeldern lautet:

$$\mathbf{k}_\Omega^T \cdot \Psi = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_\Omega = \int_A \mathbf{E} \cdot \Omega \cdot dA \quad [7-14.a]$$

Nach Glg. C-28.a gilt für die diskretisierte Darstellung:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 11} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 11} = \int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [7-14.b]$$

- **Moment um die  $X_3$ -Achse**

Die Normierungsbedingung zur Abspaltung sämtlicher Momentenanteile  $M_3$  aus den 3D-Einzelverschiebungsfeldern lautet:

$$\mathbf{k}_{X_2\Omega}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_{X_2\Omega}^T = \int_A \mathbf{E} \cdot X_2 \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot dA \quad [7-15.a]$$

Nach Glg. C-28.c gilt für die diskretisierte Darstellung:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 31} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 31} = \int_A -\mathbf{E} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [7-15.b]$$

- **Moment um die  $X_2$ -Achse**

Die Normierungsbedingung zur Abspaltung sämtlicher Momentenanteile  $M_2$  aus den 3D-Einzelverschiebungsfeldern lautet:

$$\mathbf{k}_{X_3\Omega}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_{X_3\Omega}^T = \int_A \mathbf{E} \cdot X_3 \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot dA \quad [7-16.a]$$

Nach Glg. C-28.b gilt für die diskretisierte Darstellung:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 21} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 21} = \int_A \mathbf{E} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [7-16.b]$$

Die Anzahl der Zwangsgleichungen ist im Rahmen der weiteren Herleitungen mit  $N_Z$  bezeichnet.

## 7.4 Lösungsanteil 1: Bestimmung der Freifeldlösung

Das gesamte beschreibende 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem ist durch die Bestandteile der Gleichungen in Form der 3D-Stabgleichgewichtsdifferentialgleichungen und der Querschnittsdifferentialgleichgewichtsgleichungen eindeutig definiert. Diese Grundgleichungen werden als Ausgangsbasis für die Bestimmung der Freifeldlösung verwendet.

Ziel des Lösungsanteils I ist es, den im Stabinneren völlig ungestörten Stab, belastet durch konstante Querkräfte und konstante Torsionsmomente, abzubilden. Die aus den Querschnittsdifferentialgleichgewichtsgleichungen resultierenden 3D-Verschiebungsfelder werden für die kompakte Darstellung vollständig in die sechs klassischen Stabgleichgewichtsgleichungen eingearbeitet.

Für die Bestimmung des Lösungsanteils I werden die folgenden Darstellungen des Gleichgewichtsgleichungssystems verwendet.

- **Stabgleichgewichtsgleichungen (Zeile 1-7)**

Die sieben Zeilen der Stabgleichgewichtsgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen liegen in umgewandelter Integralform vor.

- **Querschnitts-DGL (Zeile 8)**

Die Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen liegt in originaler Integralform vor, diese dienen der Bestimmung der Freifeldlösungen in analytischer Form für die konstanten Belastungsfälle der Querkräfte und des Torsionsmoments.

Für die praktische Lösung der Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichung im Rahmen einer numerischen Berechnung wird die umgewandelte Darstellung des Integralgleichgewichts in diskretisierter Form verwendet.

### **Die Lösung erfolgt für isotropes Materialverhalten ohne Querkontraktionseffekte.**

Die Materialsteifigkeitsmatrix für die materielle Isotropie mit zwangsfreier Unterbindung der Querkontraktionseffekte, die den folgenden Berechnungen des Lösungsanteils I zugrunde liegt, ist unter Punkt 6.3.4 angeführt.

Ausgangspunkt für die Lösung des System stellt das Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem nach Glg. 6-73.a aus Kapitel 6 dar. Für den Fall der materiellen Isotropie mit  $\nu = 0$  gelten für das Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem die Vorfaktoren nach Anhang D.

### 7.4.1 Grundlagen der Freifeldlösung

Wie oben erwähnt, sind die Eigenwerte (Abklingzahlen), die die Freifeldlösung beschreiben, identisch Null. Dies führt für die globalen und lokalen 3D-Einzelverschiebungsfelder, die in direktem Zusammenhang mit den Schubspannungen stehen, zu konstanten Verhältnissen in Stablängsrichtung.

Um die oben erwähnten Eigenschaften der Freifeldlösung zu erfüllen sind die Polynomordnungen für den Verlauf des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters in Stablängsrichtung für den Lösungsanteil I wie folgt zu definieren.

#### 7.4.1.1 Polynomordnung des Stabverzerrungsparameters für die Freifeldlösung

Ausgehend von den konstanten Stabbelastungsfällen, der Querkraft und der Torsion, lassen sich unter Berücksichtigung der materiellen Beziehungen die Polynomordnungen aller Bestandteile des

stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters in Stablängsrichtung bestimmen. Entsprechend der konstanten Verläufe der Querkräfte und des Torsionsmoments definieren sich die Schubverzerrungen sowie die Torsionsverdrillung als in Stablängsrichtung konstante Größen.

Aus den 3D-Gleichgewichtsgleichungen ergeben sich die Polynomordnungen für die Normalverzerrung sowie für die Biegekrümmungen mit linearem Verlauf. Basierend auf den für die Freifeldlösungen definierten Polynomordnungen des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters in Stablängsrichtung lassen sich die zugehörigen Polynomordnungen des gesamten stabachsenbezogenen Verformungsparameters bestimmen.

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \psi \\ \kappa_\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \\ U_2' - \beta_3 \\ U_3' + \beta_2 \\ \beta_1' \\ \psi \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{lin} \\ \text{lin} \\ \text{lin} \\ \text{konst} \\ \text{konst} \\ \text{konst} \\ \text{konst} \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ U_2 \\ U_3 \\ \beta_1 \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{quad} \\ \text{quad} \\ \text{quad} \\ \text{kub} \\ \text{kub} \\ \text{lin} \\ \text{konst} \end{bmatrix} \quad [7-17.a]$$

Für die Ableitung des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters in Stablängsrichtung nach der Stablängsrichtungskoordinate lassen sich die zugehörigen Polynomordnungen wie folgt bestimmen. Die konstanten Anteile des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters in Stablängsrichtung verschwinden. Die den Normalspannungen zugeordneten Anteile der Stablängung sowie der Biegekrümmungen verringern ihre Polynomordnung um eins auf ein konstantes Stablängsverhalten.

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial X_1} = \begin{bmatrix} E_{11,0}' \\ \kappa_2' \\ \kappa_3' \\ \gamma_{12,0}' \\ \gamma_{13,0}' \\ \kappa_1' \\ \psi' \\ \psi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{konst} \\ \text{konst} \\ \text{konst} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11,0}' \\ \kappa_2' \\ \kappa_3' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [7-17.b]$$

Werden diese Lösungsfunktionen in die Zeile 7 (Stabgleichgewichtsgleichung  $\Psi$ ) eingesetzt, so folgt ein konstanter Verlauf der relativen 3D-Teilverschiebungsfelder in axialer Richtung. Dies gilt für die konstante Querkraft- und die Torsionsmomentenbeanspruchung in gleichem Sinne.

## Herleitung der Polynomordnungen der einzelnen Verzerrungsmaße aus den 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen

	GLG	Stabverzerrungen	Systemfreiheitsgrade
$\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial N}{\partial \xi} = 0$	$\rightarrow N = N_0 = \text{konst}$	$E_{11,0} = \text{konst}$	$\rightarrow U_1 = \text{lin}$
$\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} M_2^* - \frac{V_3}{L} = 0$	$\rightarrow M_2^* = \frac{V_3}{L} \rightarrow K_{33} \cdot \kappa_2'^* = K_{33} \cdot \beta_2''^* = \frac{V_3}{L} = \text{konst}$	$\rightarrow \kappa_2^* = \beta_2'^* = \text{linear}$	$\rightarrow \beta_2^* = \text{quad}$
$\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} M_3^* + \frac{V_2}{L} = 0$	$\rightarrow M_3^* = \frac{-V_2}{L} \rightarrow K_{22} \cdot \kappa_3'^* = K_{22} \cdot \beta_3''^* = \frac{-V_2}{L} = \text{konst}$	$\rightarrow \kappa_3^* = \beta_3'^* = \text{linear}$	$\rightarrow \beta_3^* = \text{quad}$
$\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial \xi} = 0$	$\rightarrow V_2 = V_{20} = \text{konst}$	$\gamma_{12,0} = U_2' - \beta_3 = \text{konst}$	$\rightarrow U_2 = \text{kub}$
$\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial \xi} = 0$	$\rightarrow V_3 = V_{30} = \text{konst}$	$\gamma_{13,0} = U_3' + \beta_2 = \text{konst}$	$\rightarrow U_3 = \text{kub}$
$\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} M_1^* = 0$	$\rightarrow M_1^* = M_{10} = \text{konst}$	$\beta_1'^* = \theta^* = \text{konst}$	$\rightarrow \beta_1^* = \text{lin}$
$\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} M_\Omega^* - \frac{V_\Omega}{L} = 0$			

## 7.4.2 Lösung der Gleichgewichtsdifferentialgleichungen

Für die Bestimmung der 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen für die Querkräfte sowie für das Torsionsmoment wird Glg. 6-83.a verwendet, siehe Punkt 6.7.2.5. Es handelt sich dabei um die originale Darstellungsform des Gleichgewichts in Integralform für den materiell isotropen Fall.

### 7.4.2.1 Darstellung der erforderlichen Gleichungen

#### Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichung

Im isotropen Fall liegen zwischen den axialen Querschnittsverwölbungen und den echten Querschnittsverformungen keinerlei Koppelungen vor. Dieses Verhalten ist in Glg. 7-18.a durch die blockartige Besetzung des Differentialgleichungssystems ersichtlich. Aus den sechs Stabgleichgewichtsgleichungen zugeordneten Verzerrungsparametern treten bei der Lösung der Querschnittsverwölbungen Belastungen in konstanter und linearer Form über der Querschnittsfläche auf. Aus diesem Grund wird von einem inhomogenen Querschnitts-Differentialgleichungssystem des homogen belasteten Stabes gesprochen. Nach Glg. 6-83.a gilt die folgende Beziehung:

$$\begin{bmatrix} G\left(\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & E\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + G\frac{\partial^2}{\partial X_3^2} & G\frac{\partial^2}{\partial X_2\partial X_3} \\ 0 & G\frac{\partial^2}{\partial X_2\partial X_3} & G\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + E\frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \end{bmatrix} \cdot \psi \cdot \Omega = - \begin{bmatrix} E E X_3 & -E X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & -G X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & G X_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11,0}' \\ \kappa_2' \\ \kappa_3' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [7-18.a]$$

$$\begin{bmatrix} G\left(\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & E\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + G\frac{\partial^2}{\partial X_3^2} & G\frac{\partial^2}{\partial X_2\partial X_3} \\ 0 & G\frac{\partial^2}{\partial X_2\partial X_3} & G\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + E\frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \end{bmatrix} \cdot \psi \cdot \Omega = - \begin{bmatrix} E \cdot E_{11,0}' + E X_3 \cdot \kappa_2' - E X_2 \cdot \kappa_3' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [7-18.b]$$

#### Randbedingungen auf der Stabmantelfläche

Für die Randbedingungen gelten die Zusammenhänge nach Glg. 6-83.b, siehe Punkt 6.7.2.5. Gleich den 3D-Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichungen gelten die folgenden formalen Zusammenhänge:

$$\begin{bmatrix} K_{\Omega, 11, \Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega, 22, \Gamma} & K_{\Omega, 23, \Gamma} \\ 0 & K_{\Omega, 32, \Gamma} & K_{\Omega, 33, \Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi \cdot \Omega = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -N_2 \cdot G & -(N_3 \cdot G) & G \cdot (X_3 \cdot N_2 - X_2 \cdot N_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \psi \\ \kappa_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [7-19.a]$$

$$\begin{bmatrix} K_{\Omega, 11, \Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega, 22, \Gamma} & K_{\Omega, 23, \Gamma} \\ 0 & K_{\Omega, 32, \Gamma} & K_{\Omega, 33, \Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi \cdot \Omega = - \begin{bmatrix} -N_2 \cdot G \cdot \gamma_{12,0} - N_3 \cdot G \cdot \gamma_{13,0} + G \cdot (X_3 \cdot N_2 - X_2 \cdot N_3) \cdot \kappa_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [7-19.b]$$

Die Vorfaktoren für die Gleichungen der Randbedingungen an der Stabmantelfläche lauten nach Glg. D-12.a bis Glg. D-12.e:

$$K_{\Omega, 11, \Gamma} = -G \cdot \left( N_2 \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} + N_3 \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \right) \quad [7-19.c]$$

$$K_{\Omega, 22, \Gamma} = -N_2 \cdot E \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} - N_3 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [7-19.d]$$

$$K_{\Omega, 33, \Gamma} = -N_2 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} - N_3 \cdot E \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [7-19.e]$$

$$K_{\Omega, 23, \Gamma} = -N_3 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} \quad [7-19.f]$$

$$K_{\Omega, 32, \Gamma} = -N_2 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [7-19.g]$$

- **Randbedingungen an den Stabendquerschnitten**

Für die Randbedingungen gelten die Zusammenhänge nach Glg. 6-83.c, siehe Punkt 6.7.2.5. Gleich der Querschnittsdifferentialgleichgewichtsgleichung gelten die folgenden formalen Zusammenhänge:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -N_1 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ -N_1 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \psi \cdot \Omega = -N_1 \cdot \begin{bmatrix} E \cdot E_{11,0} + E \cdot X_3 \cdot \kappa_2 - E \cdot X_2 \cdot \kappa_3 \\ G \cdot \gamma_{12,0} - G \cdot X_3 \cdot \kappa_1 \\ G \cdot \gamma_{13,0} + G \cdot X_2 \cdot \kappa_1 \end{bmatrix} \quad [7-20]$$

### 7.4.2.2 Bestimmung der echten Querschnittsverformungen

Auf Grund der Problemstruktur für den isotropen Fall ergeben sich die Querschnittsverformungen basierend auf der Annahme  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  da keine Belastungsglieder vorliegen identisch zu Null, es gilt:

$$\Omega_2 = \Omega_3 = 0 \quad [7-21]$$

### 7.4.2.3 Bestimmung der Verwölbungen (Freifeldlösungen) in analytischer Form

Aus den folgenden Einheitsbelastungslastfällen des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters werden die zugehörigen Querschnittsverwölbungen aus der Lösung des Querschnittproblems nach Glg. 7-18.a in analytischer Form bestimmt. Diese Lösungen stellen die relativen 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösung für den im Stabinneren ungestörten Stab für die Einheitsverzerrungen dar.

$$\begin{aligned} \gamma_{12,0} = 1 & \longrightarrow \Omega_{0,\gamma_{12}} \\ \gamma_{13,0} = 1 & \longrightarrow \Omega_{0,\gamma_{13}} \\ \kappa_1 = 1 & \longrightarrow \Omega_{0,\kappa_1} \end{aligned} \quad [7-22.a]$$

Für die Bestimmung der relativen Verschiebungsfelder der Freilösungen sind die notwendigen Zwangsgleichungen nach 7.3 zwingend zu berücksichtigen.

Durch die lineare Superposition der einzelnen 3D-Verschiebungsfelder der einzelnen Belastungszustände ergibt sich die resultierende Gesamt-Querschnittsverwölbung, diese lautet in allgemeiner Darstellung:

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{0,\gamma_{12}} & \Omega_{0,\gamma_{13}} & \Omega_{0,\kappa_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \end{bmatrix} \quad [7-22.b]$$

### 7.4.2.4 Bestimmung der Freifeldlösung aus Zeile 8 in dimensionsreiner Form

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{0,\gamma_{12}} & \Omega_{0,\gamma_{13}} & \Omega_{0,\kappa_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1^* \end{bmatrix} \quad [7-23]$$

## 7.4.3 Reduktionen für die Gleichgewichtsgleichungen 1-7

In den Gleichungen Glg. 7-24.a bis Glg. 7-24.g wird die sukzessive Vereinfachung des gegebenen Gleichgewichtsgleichungssystems zur Ermittlung der Freifeldlösung für das isotrope Materialverhalten ohne Querkontraktionsanteile gezeigt.

Die Gleichungen sind für nur „ein“ relatives 3D-Verschiebungsfeld dargestellt; werden mehrere relative 3D-Verschiebungsfelder verwendet, dann sind die Zeile 7 sowie die Spalten 7 und 8 mit entsprechenden Vektor- und Matrixeinträgen zu versehen. Die Matrixbesetzung bleibt davon unbeeinflusst.

- Originale Darstellung unter Berücksichtigung der Vorfaktoren für isotropes Materialverhalten  $\nu = 0$

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccc}
 K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & -S_{0,33} & -S_{0,31} & -S_{0,\psi,3} & K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{0,\psi',3} \\
 K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,22} & 0 & S_{0,21} & + S_{0,\psi,2} & K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} + S_{0,\psi',2} \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi,2} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi,3} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi,1} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 K_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{\psi,\Omega,\psi} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{\psi,\Omega,\psi} & K_{\psi,\Omega,\psi'} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{\psi,\Omega,\psi'} \\
 0 & 0 & 0 & -S_{0,\psi,2} & -S_{0,\psi,3} & -S_{0,\psi,1} & 0 & 0
 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \psi \\ \psi' \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

[7-24.a]

Für die Koeffizienten gelten die Beziehungen nach Glg. C-10.a, Glg. C-17.a, Glg. C-18.a, Glg. C-35.c, Glg. C-35.d, Glg. C-49.c und Glg. C-49.d.

- Integration der Zeilen 4-6 zur Erlangung der konstanten Belastungsterme

$$\begin{bmatrix}
 K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & -S_{0,22} & -S_{0,31} & -S_{0,\psi,3} & K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{0,\psi',3} \\
 K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,22} & 0 & S_{0,21} & + S_{0,\psi,2} & K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} + S_{0,\psi',2} \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,22} & 0 & S_{0,21} & S_{0,\psi,2} & S_{0,\psi',2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & S_{0,33} & S_{0,31} & S_{0,\psi,3} & S_{0,\psi',3} \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,21} & S_{0,31} & S_{0,11} & S_{0,\psi,1} & S_{0,\psi',1} \\
 K_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{\psi,\Omega,\psi} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{\psi,\Omega,\psi} & K_{\psi,\Omega,\psi'} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{\psi,\Omega,\psi'} \\
 & & & -S_{0,\psi,2} & -S_{0,\psi,3} & -S_{0,\psi,1} & & 
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \psi \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[7-24.b]

Für die Koeffizienten gelten die Beziehungen nach Glg. C-10.a, Glg. C-17.a und Glg. C-18.a

• **Übergang auf die Ableitungen des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters für Zeilen 1-3**

$K_{0,11}$	$K_{0,12}$	$K_{0,13}$	0	0	0	0	$K_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\begin{bmatrix} E_{11,0'} \\ \kappa_{2'} \\ \kappa_{3'} \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \psi \\ \psi' \end{bmatrix} = V_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_3 \\ M_1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$K_{0,12}$	$K_{0,22}$	$K_{0,23}$	0	$-S_{0,33}$	$-S_{0,31}$	$-S_{0,\psi,3}$	$K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{0,\psi',3}$	
$K_{0,13}$	$K_{0,23}$	$K_{0,33}$	$S_{0,22}$	0	$S_{0,21}$	$+S_{0,\psi,2}$	$K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} + S_{0,\psi',2}$	
0	0	0	$S_{0,22}$	0	$S_{0,21}$	$S_{0,\psi,2}$	$S_{0,\psi',2}$	
0	0	0	0	$S_{0,33}$	$S_{0,31}$	$S_{0,\psi,3}$	$S_{0,\psi',3}$	
0	0	0	$S_{0,21}$	$S_{0,31}$	$S_{0,11}$	$S_{0,\psi,1}$	$S_{0,\psi',1}$	
$K_{0,\psi',1}$	$K_{0,\psi',2}$	$K_{0,\psi',3}$	$S_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{\psi,\Omega,\psi} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{\psi,\Omega,\psi}$	$K_{\psi,\Omega,\psi'} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{\psi,\Omega,\psi'}$	
			$-S_{0,\psi,2}$	$-S_{0,\psi,3}$	$-S_{0,\psi,1}$			

Für die Koeffizienten gelten die Beziehungen nach Glg. C-10.a, Glg. C-17.a und Glg. C-18.a

- Unter Berücksichtigung von  $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$  lassen sich die betroffenen Steifigkeitsterme eliminieren

$$\begin{bmatrix}
 K_{0,11} & K_{0,12} & K_{0,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 K_{0,12} & K_{0,22} & K_{0,23} & 0 & -S_{0,33} & -S_{0,31} & -S_{0,\psi,3} & K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 K_{0,13} & K_{0,23} & K_{0,33} & S_{0,22} & 0 & S_{0,21} & +S_{0,\psi,2} & K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,22} & 0 & S_{0,21} & S_{0,\psi,2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & S_{0,33} & S_{0,31} & S_{0,\psi,3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,21} & S_{0,31} & S_{0,11} & S_{0,\psi,1} & 0 \\
 K_{0,\psi',1} & K_{0,\psi',2} & K_{0,\psi',3} & -S_{0,\psi,2} & -S_{0,\psi,3} & -S_{0,\psi,1} & -S_{\psi,\Omega,\psi} & K_{\psi,\Omega,\psi'} \frac{\partial}{\partial X_1}
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 E_{11,0'} \\
 \kappa_2' \\
 \kappa_3' \\
 \gamma_{12,0} \\
 \gamma_{13,0} \\
 \kappa_1 \\
 \psi \\
 \psi'
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 M_1 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

[7-24.d]

Für die Koeffizienten gelten die Beziehungen nach Glg. C-10.a, Glg. C-17.a und Glg. C-18.a

- Berücksichtigung der Ansatzordnung der Stabverzerrungen:  $\psi' = 0$

$$\begin{bmatrix}
 K_{0,11} & K_{0,12} & K_{0,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{0,12} & K_{0,22} & K_{0,23} & 0 & -S_{0,33} & -S_{0,31} & -S_{0,\psi,3} & 0 \\
 K_{0,13} & K_{0,23} & K_{0,33} & S_{0,22} & 0 & S_{0,21} & +S_{0,\psi,2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,22} & 0 & S_{0,21} & S_{0,\psi,2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & S_{0,33} & S_{0,31} & S_{0,\psi,3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,21} & S_{0,31} & S_{0,11} & S_{0,\psi,1} & 0 \\
 K_{0,\psi',1} & K_{0,\psi',2} & K_{0,\psi',3} & -S_{0,\psi,2} & -S_{0,\psi,3} & -S_{0,\psi,1} & -S_{\psi,\Omega,\psi} & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 E_{11,0'} \\
 \kappa_2' \\
 \kappa_3' \\
 \gamma_{12,0} \\
 \gamma_{13,0} \\
 \kappa_1 \\
 \psi \\
 \psi'
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 M_1 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

[7-24.e]

Für die Koeffizienten gelten die Beziehungen nach Glg. C-10.a, Glg. C-17.a und Glg. C-18.a

- Berücksichtigung der Normierungsbedingungen für die normalspannungsbehafteten Wölbsteifigkeitsanteile

$$\begin{bmatrix}
 K_{0,11} & K_{0,12} & K_{0,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{0,12} & K_{0,22} & K_{0,23} & 0 & -S_{0,33} & -S_{0,31} & -S_{0,\psi,3} & 0 \\
 K_{0,13} & K_{0,23} & K_{0,33} & S_{0,22} & 0 & S_{0,21} & +S_{0,\psi,2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,22} & 0 & S_{0,21} & S_{0,\psi,2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & S_{0,33} & S_{0,31} & S_{0,\psi,3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,21} & S_{0,31} & S_{0,11} & S_{0,\psi,1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -S_{0,\psi,2} & -S_{0,\psi,3} & -S_{0,\psi,1} & -S_{\psi,\Omega,\psi} & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 E_{11,0'} \\
 \kappa_2' \\
 \kappa_3' \\
 \gamma_{12,0} \\
 \gamma_{13,0} \\
 \kappa_1 \\
 \psi \\
 \psi'
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 M_1 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

[7-24.f]

Für die Koeffizienten gelten die Beziehungen nach Glg. C-10.a, Glg. C-17.a

• Darstellung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems in dimensionsreiner Form

$$\begin{bmatrix}
 K_{0,11} & \frac{K_{0,12}}{L} & \frac{K_{0,13}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{K_{0,12}}{L} & \frac{K_{0,22}}{L^2} & \frac{K_{0,23}}{L^2} & 0 & \frac{-S_{0,33}}{L} & \frac{-S_{0,31}}{L^2} & \frac{-S_{0,\psi,3}}{L} & 0 \\
 \frac{K_{0,13}}{L} & \frac{K_{0,23}}{L^2} & \frac{K_{0,33}}{L^2} & \frac{S_{0,22}}{L} & 0 & \frac{S_{0,21}}{L^2} & \frac{S_{0,\psi,2}}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,22} & 0 & \frac{S_{0,21}}{L} & S_{0,\psi,2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & S_{0,33} & \frac{S_{0,31}}{L} & S_{0,\psi,3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{S_{0,21}}{L} & \frac{S_{0,31}}{L} & \frac{S_{0,11}}{L^2} & \frac{S_{0,\psi,1}}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{-S_{0,\psi,2}}{L} & \frac{-S_{0,\psi,3}}{L} & \frac{-S_{0,\psi,1}}{L^2} & \frac{-S_{\psi,\Omega,\psi}}{L} & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 E_{11,0}' \\
 \kappa_2^* \\
 \kappa_3^* \\
 \gamma_{12,0} \\
 \gamma_{13,0} \\
 \kappa_1^* \\
 \psi \\
 \psi^*
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 M_1^* \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Für die Koeffizienten gelten die Beziehungen nach Glg. C-10.a, Glg. C-17.a

#### 7.4.4 Darstellung der Wölbsteifigkeitsterme in Abhängigkeit der Stabverzerrungen

Die Einflüsse der in analytischer Form ermittelten 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen werden im Weiteren in die Zeilen 1-6 der klassischen Stabgleichungen eingebaut. Dadurch entsteht die gesuchte Querschnittssteifigkeitsmatrix des schubnachgiebigen, ungehindert wölbverformbaren Querschnitts.

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{0,\gamma 12} & \Omega_{0,\gamma 13} & \Omega_{0,\kappa 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \end{bmatrix} \quad [7-25.a]$$

Ausgehend von den Einheitswölbzuständen der Freifeldlösungen für die Schubverzerrungen und die Verdrillung ergeben sich die in separierter Form dargestellten zusätzlichen Wölbsteifigkeitsterme, basierend auf den analytisch ermittelten Freifeldlösungen.

$$\begin{bmatrix} S_{0,\psi,2} \\ S_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,1} \\ -S_{\psi,\Omega,\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{0,\psi,2,\gamma 12} & S_{0,\psi,2,\gamma 13} & S_{0,\psi,2,\kappa 1} \\ S_{0,\psi,3,\gamma 12} & S_{0,\psi,3,\gamma 13} & S_{0,\psi,3,\kappa 1} \\ S_{0,\psi,1,\gamma 12} & S_{0,\psi,1,\gamma 13} & S_{0,\psi,1,\kappa 1} \\ -S_{\psi,\Omega,\psi,\gamma 12} & -S_{\psi,\Omega,\psi,\gamma 13} & -S_{\psi,\Omega,\psi,\kappa 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \end{bmatrix} \quad [7-25.b]$$

#### 7.4.5 Separiert dargestellte Wölbsteifigkeitsterme – dimensionsreine Darstellung

Aus den Einheitswölbzuständen für die Schubverzerrungen und die Verdrillung ergeben sich die folgenden Wölbsteifigkeitsterme in dimensionsreiner Darstellung:

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{0,\gamma 12} & \Omega_{0,\gamma 13} & \Omega_{0,\kappa 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1^* \end{bmatrix} \quad [7-26.a]$$

$$\begin{bmatrix} S_{0,\psi,2} \\ S_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,1/L} \\ -S_{\psi,\Omega,\psi/L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{0,\psi,2,\gamma 12} & S_{0,\psi,2,\gamma 13} & S_{0,\psi,2,\kappa 1/L} \\ S_{0,\psi,3,\gamma 12} & S_{0,\psi,3,\gamma 13} & S_{0,\psi,3,\kappa 1/L} \\ S_{0,\psi,1,\gamma 12} & S_{0,\psi,1,\gamma 13} & S_{0,\psi,1,\kappa 1/L} \\ -S_{\psi,\Omega,\psi,\gamma 12/L} & -S_{\psi,\Omega,\psi,\gamma 13/L} & -S_{\psi,\Omega,\psi,\kappa 1/L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1^* \end{bmatrix} \quad [7-26.b]$$

Diese dargestellten zusätzlichen Wölbsteifigkeitsterme werden entsprechend der Zugehörigkeit zu den stabachsenbezogenen Schubverzerrungen und Torsionsverdrillungen in die Systemsteifigkeitsmatrix eingebaut. Dadurch entstehen die reduzierten schubspannungsinduzierten Steifigkeitsterme des wölbnachgiebigen ungestörten Stabes.

- Ermittlung der reduzierten Querschnittssteifigkeitsmatrix durch den Einbau der Wölbsteifigkeiten in die Steifigkeitsmatrix des klassischen Stabes

$$\begin{bmatrix}
 K_{0,11} & K_{0,12} & K_{0,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{0,12} & K_{0,22} & K_{0,23} & 0^- & -S_{0,33}^- & -S_{0,31}^- & 0 & 0 \\
 K_{0,13} & K_{0,23} & K_{0,33} & S_{0,\psi,3,\gamma12} & S_{0,\psi,3,\gamma13} & S_{0,\psi,3,\kappa1} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,22}^+ & 0^+ & S_{0,21}^+ & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,\psi,2,\gamma12} & S_{0,\psi,2,\gamma13} & S_{0,\psi,2,\kappa1} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0^+ & S_{0,33}^+ & S_{0,31}^+ & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & S_{0,21}^+ & S_{0,31}^+ & S_{0,11}^+ & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -S_{0,\psi,2}^- & -S_{0,\psi,3}^- & -S_{0,\psi,1}^- & 0 & 0 \\
 & & & S_{\psi,\Omega,\psi,\gamma12} & S_{\psi,\Omega,\psi,\gamma13} & S_{\psi,\Omega,\psi,\kappa1} & & 
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11,0}' \\ \kappa_2' \\ \kappa_3' \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \psi \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[7-27.a]

Für die Koeffizienten gelten die Beziehungen nach Glg. C-10.a, Glg. C-17.a und Glg. C-18.a

- Reduzierte Schubsteifigkeiten  $S_{0,0}$  für die Freifeldlösung

$$\begin{bmatrix}
 K_{0,11} & K_{0,12} & K_{0,13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{0,12} & K_{0,22} & K_{0,23} & -\widehat{S}_{0,23} & -\widehat{S}_{0,33} & -\widehat{S}_{0,31} & 0 & 0 \\
 K_{0,13} & K_{0,23} & K_{0,33} & \widehat{S}_{0,22} & \widehat{S}_{0,23} & \widehat{S}_{0,21} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \widehat{S}_{0,22} & \widehat{S}_{0,23} & \widehat{S}_{0,21} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \widehat{S}_{0,23} & \widehat{S}_{0,33} & \widehat{S}_{0,31} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \widehat{S}_{0,21} & \widehat{S}_{0,31} & \widehat{S}_{0,11} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\widehat{S}_{0,\psi,2} & -\widehat{S}_{0,\psi,3} & -\widehat{S}_{0,\psi,1} & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 E_{11,0'} \\
 \kappa_2' \\
 \kappa_3' \\
 \gamma_{12,0} \\
 \gamma_{13,0} \\
 \kappa_1 \\
 \psi \\
 \psi'
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 M_1 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

- Reduzierte Schubsteifigkeiten  $S_{0,0}$  für die Freifeldlösung in dimensionsreiner Form

$$\begin{bmatrix}
 K_{0,11} & \frac{K_{0,12}}{L} & \frac{K_{0,13}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{K_{0,12}}{L} & \frac{K_{0,22}}{L^2} & \frac{K_{0,23}}{L^2} & -\frac{\widehat{S}_{0,23}}{L} & -\frac{\widehat{S}_{0,33}}{L} & -\frac{\widehat{S}_{0,31}}{L^2} & 0 & 0 \\
 \frac{K_{0,13}}{L} & \frac{K_{0,23}}{L^2} & \frac{K_{0,33}}{L^2} & \frac{\widehat{S}_{0,22}}{L} & \frac{\widehat{S}_{0,23}}{L} & \frac{\widehat{S}_{0,21}}{L^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \widehat{S}_{0,22} & \widehat{S}_{0,23} & \frac{\widehat{S}_{0,21}}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \widehat{S}_{0,23} & \widehat{S}_{0,33} & \frac{\widehat{S}_{0,31}}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\widehat{S}_{0,21}}{L} & \frac{\widehat{S}_{0,31}}{L} & \frac{\widehat{S}_{0,11}}{L^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{\widehat{S}_{0,\psi,2}}{L} & -\frac{\widehat{S}_{0,\psi,3}}{L} & -\frac{\widehat{S}_{0,\psi,1}}{L^2} & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 E_{11,0}' \\
 \kappa_2^* \\
 \kappa_3^* \\
 \gamma_{12,0} \\
 \gamma_{13,0} \\
 \kappa_1^* \\
 \psi \\
 \psi^*
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 M_1^* \\
 0
 \end{bmatrix}$$

### 7.4.6 Schubkorrekturfaktoren

In der Literatur wird der Quotient aus der wölb- nachgiebigen und wölb- starren (polaren) Schubsteifigkeit des Biegestabes als „Schubkorrekturfaktor“ bezeichnet. Grundsätzlich liegen in der Literatur verschiedene Definitionen für den Schubkorrekturfaktor vor, die erwähnte Darstellung wird aber als Standarddefinition verwendet. In dieser Arbeit ist der Schubkorrekturfaktor für die Systemberechnung nicht erforderlich, da stets die exakte Schubsteifigkeitsmatrix des schub- nachgiebigen Stabes basierend auf den relativen 3D-Verschiebungsfeldern der Freifeldlösungen verwendet wird. Eine sogenannte nachträgliche Korrektur der polaren bzw. der wölb- starren Schubsteifigkeitsmatrix, zur scheinbaren Erfüllung aller Spannungsrandbedingungen an den Staboberflächen, ist entgegen der üblichen Vorgangsweise dadurch nicht erforderlich.

Für den Vergleich und für die Bestätigung der Übereinstimmung der zahlenmäßigen Richtigkeit, der in der Literatur angegeben Schubkorrekturfaktoren, werden im Folgenden die formalen Beziehungen der Vollständigkeit halber angeführt. Zahlenwerte für die Schubkorrekturfaktoren werden im Kapitel 8 für verschiedene Querschnittsgeometrien angeführt.

- **Reduzierte Schubsteifigkeitsmatrix**

In Glg. 7-27.c ist die Darstellung der reduzierten Schubsteifigkeit durch Einarbeitung der Wölb- nachgiebigkeit aus der Verwölbbarkeit des Stabquerschnitts gezeigt. Für die Anteile der Querkraft- und Torsionsgleichungen (Zeile 4-6) gilt in zusammengefasster Form:

$$\widehat{\mathbf{S}}_0 = \begin{bmatrix} \widehat{S}_{0,22} & \widehat{S}_{0,23} & \widehat{S}_{0,21} \\ \widehat{S}_{0,23} & \widehat{S}_{0,33} & \widehat{S}_{0,31} \\ \widehat{S}_{0,21} & \widehat{S}_{0,31} & \widehat{S}_{0,11} \end{bmatrix} \quad [7-28.a]$$

- **Polare(Wölbstarre) Schubsteifigkeitsmatrix**

Die Steifigkeitsmatrix der Querkraft- und Torsionsanteile für den klassischen polaren(wölb- starren) 3D- Stab mit dickwandiger Querschnittsgeometrie ist in Glg. 7-24.g detailliert angeführt. Für die dickwandige Querschnittsformulierung liegen keine Koppelungen zwischen den beiden Querkraftrichtungen vor.

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} S_{0,22} & 0 & S_{0,21} \\ 0 & S_{0,33} & S_{0,31} \\ S_{0,21} & S_{0,31} & S_{0,11} \end{bmatrix} \quad [7-28.b]$$

- **Bezugsschubsteifigkeit für die Bestimmung des Schubkorrekturfaktors**

Wie oben erwähnt, gilt es das Verhältnis zwischen der wölb- nachgiebigen und der wölb- starren Schubsteifigkeitsmatrix zu bestimmen. Per Definition wird, auf Grund der vorhandenen Null-Einträge in den Nebendiagonalen der wölb- starren Schubsteifigkeitsmatrix, die Bezugsschubsteifigkeitsmatrix wie folgt definiert:

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} S_{0,22} & S_{0,22} & S_{0,21} \\ S_{0,22} & S_{0,22} & S_{0,31} \\ S_{0,21} & S_{0,31} & S_{0,11} \end{bmatrix} \quad [7-28.c]$$

- **Verhältnis zwischen der reduzierten und der polaren Schubsteifigkeit (Schubkorrekturfaktoren)**

Die Bestimmung der Schubkorrekturfaktoren für alle Steifigkeitszahlen erfolgt durch die elementweise Division aller Matrixeinträge. Werden alle Matrixeinträge der wölb-nachgiebigen Steifigkeitsmatrix verwendet, dann resultieren die folgenden Definitionen aller neun Schubkorrekturfaktoren. Die Darstellung der separierten Wölbschubsteifigkeiten für die drei Freifeldlösungen sind in Glg. 7-26.b im Detail angeführt.

$$\kappa = \begin{bmatrix} \frac{\widehat{S}_{0,22}}{S_{0,22}} & \frac{\widehat{S}_{0,23}}{S_{0,22}} & \frac{\widehat{S}_{0,21}}{S_{0,21}} \\ \frac{\widehat{S}_{0,23}}{S_{0,22}} & \frac{\widehat{S}_{0,33}}{S_{0,22}} & \frac{\widehat{S}_{0,31}}{S_{0,31}} \\ \frac{\widehat{S}_{0,21}}{S_{0,21}} & \frac{\widehat{S}_{0,31}}{S_{0,31}} & \frac{\widehat{S}_{0,11}}{S_{0,11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{S_{0,\psi,2,\gamma12}}{S_{0,22}} & \frac{S_{0,\psi,2,\gamma13}}{S_{0,22}} & 1 + \frac{S_{0,\psi,2,\kappa1}}{S_{0,21}} \\ \frac{S_{0,\psi,3,\gamma12}}{S_{0,22}} & 1 + \frac{S_{0,\psi,3,\gamma13}}{S_{0,22}} & 1 + \frac{S_{0,\psi,3,\kappa1}}{S_{0,31}} \\ 1 + \frac{S_{0,\psi,1,\gamma12}}{S_{0,21}} & 1 + \frac{S_{0,\psi,1,\gamma13}}{S_{0,31}} & 1 + \frac{S_{0,\psi,1,\kappa1}}{S_{0,11}} \end{bmatrix} \quad [7-28.d]$$

Entsprechend der 3x3-Schubsteifigkeitsmatrix entstehen in Summe neun verschiedene vom Querschnitt und vom Materialverhalten abhängige Schubkorrekturfaktoren.

$$\mathbf{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_{22} & \kappa_{23} & \kappa_{21} \\ \kappa_{23} & \kappa_{33} & \kappa_{31} \\ \kappa_{21} & \kappa_{31} & \kappa_{11} \end{bmatrix} \quad [7-28.e]$$

Bekannt und in der Literatur oft verwendet sind die Schubkorrekturfaktoren  $\kappa_{22}$  und  $\kappa_{33}$ , diese gelten für Stabmodelle mit der zugehörigen ebenen Querschnittskinematik. Die Torsionssteifigkeitskorrektur  $\kappa_{11}$  stellt den Zusammenhang zwischen der polaren und der St. Venant'schen Torsion her. Die Korrekturfaktoren für die Nebendiagonalglieder (Koppelsteifigkeiten) werden in der Literatur nur selten beschrieben und deklariert.

### 7.4.7 Diskretisierte Darstellung der Freifeldlösung (Zeile 7)

Unter Berücksichtigung der Normierungsbedingungen für die Normalkraft und für die Biegemomente lassen sich die 3D-Verschiebungsfelder der drei Freifeldlösungen für den 3D-Stab in diskretisierter Form aus Zeile 7 des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems berechnen. Für die drei Freifeldlösungen  $\hat{\Omega}_0$ , ausgedrückt in den Stabverzerrungen  $e_0$  aus Zeile 7 nach Glg. 6-89.b für isotropes Materialverhalten in diskretisierter Darstellung, gilt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{f}_{\Omega, e0, 14} & \hat{f}_{\Omega, e0, 15} & \hat{f}_{\Omega, e0, 15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11,0}' \\ \kappa_2' \\ \kappa_3' \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 11} \cdot \hat{\Omega}_0 = 0 \quad [7-29.a]$$

Für die einzelnen Koeffizienten der obigen Gleichungen in diskretisierter Darstellung gelten die Beziehungen nach Glg. E-26.a bis Glg. E-26.c und Glg. E-6.a.

Durch die inverse Darstellung der obigen Beziehung ergibt sich die diskretisierte Darstellung der drei Freifeldlösungen, wobei eine Berechnung äquivalent der analytischen Lösung für die drei Einheitszustände der beiden stabachsenbezogenen Schubverzerrungsparameter und des Verdrillungsparameters durchzuführen ist.

$$\hat{\Omega}_0 = -\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 11}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{f}_{\Omega, e0, 14} & \hat{f}_{\Omega, e0, 15} & \hat{f}_{\Omega, e0, 15} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0' \quad [7-29.b]$$

Auf Grund der vorliegenden Besetzung der Matrix der Anteilsfaktoren lässt sich  $\hat{\Omega}_0$  in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters anschreiben. Die in Glg. 7-29.a angeführten Ableitungen im Vektor des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters sind auf Grund der Nullen in der Matrix der Anteilsfaktoren unproblematisch.

Für die Berechnung der 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen sind die Normierungsbedingungen zwingenderweise zu verwenden. Die um die Zwangsgleichungen erweiterten Vorfaktormatrizen werden mit einem + gekennzeichnet:

$$\hat{\Omega}_0 = -\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 11}^{-1+} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{f}_{\Omega, e0, 14}^+ & \hat{f}_{\Omega, e0, 15}^+ & \hat{f}_{\Omega, e0, 15}^+ \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0 \quad [7-29.c]$$

### 7.4.8 Lösung des DGL-Systems in $X_1$ -Richtung für die Freifeldlösung

In Glg. 7-27.c ist das 3D-Gleichgewichtsgleichungssystem für den wölbachgiebigen 3D-Stab definiert. Im Rahmen der vorangegangenen Berechnungsschritte wurde das Querschnittproblem für die Freifeldlösung vollständig gelöst, die 3D-Verschiebungsfelder für die drei Freifeldlösungen liegen daher eindeutig vor.

Für die weiteren Lösungsschritte wird die Einheit [m] für die Verschiebungen und für die Verdrehungen verwendet. Als Standardeinheit für die Kraftgrößen, in Form der Kräfte und der Momente, wird die Einheit [N] definiert.

Der stabachsenbezogene Verformungsparameter sowie der stabachsenbezogene Verzerrungsparameter nehmen dadurch folgende dimensionsreine Gestalt an.

$$\mathbf{u}_0^* = \begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2 \cdot L \\ \beta_3 \cdot L \\ U_2 \\ U_3 \\ \beta_1 \cdot L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \beta_2^* \\ \beta_3^* \\ U_2 \\ U_3 \\ \beta_1^* \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_0^* = \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2^* \\ \kappa_3^* \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1^* \end{bmatrix} \quad [7-30.a]$$

Der Vektor der sechs klassischen Stabschnittgrößen  $\mathbf{n}_0^*$  ist in dimensionsreiner Einheitendarstellung wie folgt definiert, die Trennungen in die beiden „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ wird in konsequenter Weise beibehalten.

$$\mathbf{n}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{0,\perp}^* \\ \mathbf{n}_{0,\parallel}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M_2 \cdot L \\ M_3 \cdot L \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \cdot L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M_2^* \\ M_3^* \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1^* \end{bmatrix} \quad [7-30.b]$$

Wie unter Punkt 7.1.7 angegeben, erfolgt nun die Darstellung des stabachsenbezogenen Verformungsparameters sowie der Stabschnittgrößen in Abhängigkeit der Integrationskonstanten.

### 7.4.8.1 Bestimmung der Schnittgrößen in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Für das klassische 3D-Stabproblem mit seinen jeweils sechs globalen Freiheitsgraden am Stabanfang sowie am Stabende liegen in Summe genau zwölf Integrationskonstanten vor; diese sind im Konstantenvektor  $\mathbf{c}$  wie folgt zusammengefasst:

$$\mathbf{c}_{1-12} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-6} \\ \mathbf{c}_{7-12} \end{bmatrix} \quad [7-31]$$

Aus der direkten Integration der sechs 3D-Stab-Gleichgewichtsgleichungen für die sechs Stabschnittgrößen für den homogenen Belastungsfall lassen sich die ersten sechs Integrationskonstanten  $\mathbf{C}_{1-6}$  bestimmen. Basierend auf dem homogenen Belastungsfall ergeben sich nach Glg. 6-71.a die 3D-Stabgleichgewichtsgleichungen wie folgt:

$$\begin{array}{ll} N' = 0 & N = C_1 \\ L \cdot M_2^{*'} - V_3 = 0 & M_2^* = C_5 \cdot \xi + C_2 \\ L \cdot M_3^{*'} + V_2 = 0 & M_3^* = -C_4 \cdot \xi + C_3 \\ V_2' = 0 & V_2 = C_4 \\ V_3' = 0 & V_3 = C_5 \\ M_1^{*'} = 0 & M_1^* = C_6 \end{array} \quad [7-32.a]$$

Wird der Vektor der Schnittgrößen in der obigen Form in matrixorientierter Schreibweise dargestellt, dann gilt für die Abhängigkeit der Schnittgrößen von den Integrationskonstanten  $\mathbf{c}_{1-6}$  der folgende Zusammenhang:

$$\mathbf{n}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{0,\perp}^* \\ \mathbf{n}_{0,\parallel}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M_2^* \\ M_3^* \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_{0,0,1-6}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_{1-6}} = \mathbf{S}_{0,0,1-6} \cdot \mathbf{c}_{1-6} \quad [7-32.b]$$

Die sechs Integrationskonstanten  $\mathbf{c}_{1-6}$  stellen dabei im mechanischen Sinne die Schnittgrößen am Stabanfang für  $\xi=0$  dar. Die aus den Gleichgewichtsgleichungen ersichtlichen konstanten sowie linearen Verläufe der Stabschnittgrößen sind aus Glg. 7-32.b eindeutig ersichtlich.

### 7.4.8.2 Bestimmung der Stabendverformungen in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Der stabachsenbezogene Verformungsparameter ergibt sich aus der Integration des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters; dieser lässt sich in Abhängigkeit der oben ermittelten Schnittkräfte definieren. Die Schubsteifigkeiten sowie die Torsionssteifigkeit liegen in der verwendeten Materialsteifigkeitsmatrix, siehe Glg. C-10.a, in der oben ermittelten reduzierten Darstellungsform nach Glg. 7-27.c vor; es gilt:

$$\mathbf{n}_0^* = \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{e}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{S}}_0^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0^* \quad [7-33.a]$$

Die Materialsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_0^*$  ist zugehörig zu den oben erwähnten Einheiten der Schnittkräfte und Verformungen wie folgt zu adaptieren, um die dimensionsreine Darstellungsform zu erhalten. Die Material-Normalsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_0^*$  weist dabei die Einheit N auf.

$$\mathbf{K}_0^* = \begin{bmatrix} K_{0,11} & K_{0,12}/L & K_{0,13}/L \\ K_{0,12} & K_{0,22}/L^2 & K_{0,23}/L^2 \\ K_{0,13}/L & K_{0,23}/L^2 & K_{0,33}/L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{0,11}^* & K_{0,12}^* & K_{0,13}^* \\ K_{0,12}^* & K_{0,22}^* & K_{0,23}^* \\ K_{0,13}^* & K_{0,23}^* & K_{0,33}^* \end{bmatrix} \quad [7-33.b]$$

Für die reduzierte Material-Schubsteifigkeitsmatrix  $\widehat{\mathbf{S}}_0^*$  gelten die Überlegungen wie für Glg. 7-33.b. Die Schubsteifigkeiten liegen auf Grund der Einarbeitung der Spalte 7 und 8 bereits in reduzierter Form vor; es gilt:

$$\widehat{\mathbf{S}}_0^* = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{S}}_{0,22} & \widehat{\mathbf{S}}_{0,23} & \widehat{\mathbf{S}}_{0,21}/L \\ \widehat{\mathbf{S}}_{0,23} & \widehat{\mathbf{S}}_{0,33} & \widehat{\mathbf{S}}_{0,31}/L \\ \widehat{\mathbf{S}}_{0,21}/L & \widehat{\mathbf{S}}_{0,31}/L & \widehat{\mathbf{S}}_{0,11}/L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{S}}_{0,22}^* & \widehat{\mathbf{S}}_{0,23}^* & \widehat{\mathbf{S}}_{0,21}^* \\ \widehat{\mathbf{S}}_{0,23}^* & \widehat{\mathbf{S}}_{0,33}^* & \widehat{\mathbf{S}}_{0,31}^* \\ \widehat{\mathbf{S}}_{0,21}^* & \widehat{\mathbf{S}}_{0,31}^* & \widehat{\mathbf{S}}_{0,11}^* \end{bmatrix} \quad [7-33.c]$$

- **Stabverzerrungen in Abhängigkeit der Schnittgrößen gilt**

Durch das Bilden der inversen Beziehung für Glg. 7-33.a wird der stabachsenbezogene Verzerrungsparameter direkt in Abhängigkeit der Stabschnittgrößen bestimmt. Dabei entsteht die bekannte Materialnachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{C}^*$ .

$$\mathbf{e}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{0,\perp}^* \\ \mathbf{e}_{0,\parallel}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{*-1} \cdot \mathbf{n}_0^* = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{n}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^{*-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{S}}_0^{*-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{0,\perp}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{0,\parallel}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{0,\perp}^* \\ \mathbf{n}_{0,\parallel}^* \end{bmatrix} \quad [7-34.a]$$

Auf Grund der separierten Darstellung des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters entsteht auch für diese Form der Darstellung die völlig entkoppelte Form der beiden Zustände „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “. Die Matrixbelegung wird durch das Invertieren nicht beeinflusst. Für die stabachsenbezogenen Verzerrungsparameter für die beiden Stabanteile „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ gilt;

$$\mathbf{e}_{0,\perp}^* = \mathbf{C}_{0,\perp}^* \cdot \mathbf{n}_{0,\perp}^* \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{0,\parallel}^* = \mathbf{C}_{0,\parallel}^* \cdot \mathbf{n}_{0,\parallel}^* \quad [7-34.b]$$

Für die einzelnen Anteile des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters sowie für die stabachsenbezogenen Stabschnittgrößen gelten die folgenden Beziehungen für die dimensionsreine Darstellungsform:

$$\mathbf{e}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{0,\perp}^* \\ \mathbf{e}_{0,\parallel}^* \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_{0,\perp}^* = \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2^* \\ \kappa_3^* \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{0,\parallel}^* = \begin{bmatrix} \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1^* \end{bmatrix} \quad [7-34.c]$$

$$\mathbf{n}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{0,\perp}^* \\ \mathbf{n}_{0,\parallel}^* \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_{0,\perp}^* = \begin{bmatrix} N \\ M_2^* \\ M_3^* \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_{0,\parallel}^* = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ M_1^* \end{bmatrix} \quad [7-34.d]$$

Die einzelnen Glieder der Materialnachgiebigkeitsmatrix ergeben sich, wie oben beschrieben, aus der Bildung der Inversen der Materialsteifigkeitsmatrix. Die einzelnen Einträge in der Materialnachgiebigkeitsmatrix werden nicht im Detail angeführt. Für die beiden separierten Anteile der Materialnachgiebigkeitsmatrix gilt für die dimensionslose Darstellung:

$$\mathbf{C}_{0,\perp}^* = \mathbf{K}_0^{*-1} = \begin{bmatrix} C_{0,11} & C_{0,12} \cdot L & C_{0,13} \cdot L \\ C_{0,12} & C_{0,22} \cdot L^2 & C_{0,23} \cdot L^2 \\ C_{0,13} \cdot L & C_{0,23} \cdot L^2 & C_{0,33} \cdot L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0,11}^* & C_{0,12}^* & C_{0,13}^* \\ C_{0,12}^* & C_{0,22}^* & C_{0,23}^* \\ C_{0,13}^* & C_{0,23}^* & C_{0,33}^* \end{bmatrix} \quad [7-35.a]$$

$$\mathbf{C}_{0,\parallel}^* = \widehat{\mathbf{S}}_0^{*-1} = \begin{bmatrix} C_{0,44} & C_{0,45} & C_{0,46} \cdot L \\ C_{0,45} & C_{0,55} & C_{0,56} \cdot L \\ C_{0,46} \cdot L & C_{0,56} \cdot L & C_{0,66} \cdot L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{0,44}^* & C_{0,45}^* & C_{0,46}^* \\ C_{0,45}^* & C_{0,55}^* & C_{0,56}^* \\ C_{0,46}^* & C_{0,56}^* & C_{0,66}^* \end{bmatrix} \quad [7-35.b]$$

- **Stabverformungen  $\mathbf{u}_{0,\perp}^*$  in Abhängigkeit der Integrationskonstanten**

Der stabachsenbezogene Verzerrungsparameter für den Starrkörperanteil der Querschnittskinetik ergibt sich durch die Anwendung der in Glg. 6-8.h dargestellten Ableitungsvorschrift auf den Verformungsparameter. In umgekehrter Weise lässt sich der stabachsenbezogene Verformungsparameter für den Anteil „ $\perp$ “ durch die Integration der stabachsenbezogenen Verzerrungen gewinnen. Bei Einarbeitung von Glg. 7-34.a lässt sich der stabachsenbezogene Verformungsparameter in Abhängigkeit der Integrationskonstanten darstellen.

$$\mathbf{u}_{0,\perp}^*(\xi) = \mathbf{L} \cdot \int \mathbf{e}_{0,\perp}^* d\xi + \mathbf{c}_{\perp} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_{0,\perp}^* \cdot \int \mathbf{n}_{0,\perp}^* d\xi + \mathbf{c}_{7-9} \quad [7-36.a]$$

Werden die Schnittkräfte nach Glg. 7-32.b eingesetzt, dann gilt für den Verformungsparameter für den „ $\perp$ “-Anteil:

$$\mathbf{u}_{0,\perp}^*(\xi) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_{0,\perp}^* \cdot \int \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi \cdot \mathbf{c}_{1-6} + \mathbf{c}_{7-9} \quad [7-36.b]$$

Die Konstanten  $\mathbf{C}_7$  bis  $\mathbf{C}_9$  stellen dabei die stabachsenbezogenen Verformungen für den Stabanfang für  $\xi=0$  dar. In Matrixschreibweise gilt für den Konstantenvektor  $\mathbf{c}_{7-9}$  :

$$\mathbf{c}_{7-9} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_7 \\ \mathbf{C}_8 \\ \mathbf{C}_9 \end{bmatrix} \quad [7-36.c]$$

Wird die Integration durchgeführt und werden die Koeffizienten der Materialnachgiebigkeitsmatrix eingebaut, dann ergibt sich die, nach den Integrationskonstanten mit den zugehörigen Stablängsverläufen separierte, Darstellungsform des „ $\perp$ “-Anteils des stabachsenbezogenen Verformungsparameters in dimensionsreiner Form.

$$\mathbf{u}_{0,\perp}^*(\xi) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_{0,\perp}^* \cdot \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 & \frac{\xi^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -\frac{\xi^2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{1-6} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{7-12} \quad [7-36.d]$$

$$\mathbf{u}_{0,\perp}^*(\xi) = \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{0,11}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,12}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,13}^* \cdot \xi & -\mathbf{C}_{0,13}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & \mathbf{C}_{0,12}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & 0 \\ \mathbf{C}_{0,12}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,22}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \xi & -\mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & \mathbf{C}_{0,22}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & 0 \\ \mathbf{C}_{0,13}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,33}^* \cdot \xi & -\mathbf{C}_{0,33}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{1-6} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{7-12} \quad [7-36.e]$$

- **Stabverformungen  $\mathbf{u}_{0,\parallel}^*$  in Abhängigkeit der Integrationskonstanten**

Für die Bestimmung des stabachsenbezogenen Verformungsparameters für den QS-Verformungszustand gelten die analogen Schritte, wobei unter Berücksichtigung von Glg. 6-8.h für den stabachsenbezogenen Verformungsparameter des „ $\parallel$ “-Anteils die Glg. 7-37.a entsteht. Entgegen der Bestimmung des „ $\perp$ “-Anteils kann der „ $\parallel$ “-Anteil nicht allein durch Integration des Verzerrungsparameters ermittelt werden. Für die beiden transversalen Verschiebungen sind die Verdrehungsanteile aus dem stabachsenbezogenen Verformungsparameter des „ $\perp$ “-Anteils auf Grund der Definition  $\gamma = \beta + \mathbf{U}'$  zu addieren.

$$\mathbf{u}_{0,\parallel}^*(\xi) = \mathbf{L} \cdot \int \left( \mathbf{e}_{0,\parallel}^* - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\mathbf{u}_{0,\perp}^*}{L} \right) d\xi + \mathbf{c}_{10-12} \quad [7-37.a]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\mathbf{u}_{0,\perp}^*}{L} = \begin{bmatrix} -\beta_3^*/L \\ \beta_2^*/L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_3 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [7-37.b]$$

Die durch die Extraktionsmatrix aus dem „ $\perp$ “-Anteil herausgefilterten Stabverdrehungen werden direkt zu den Verzerrungen des „ $\parallel$ “-Anteils vor der Integration addiert.

Im Rahmen der Integration entstehen drei weitere Integrationskonstanten  $\mathbf{C}_{10}$  bis  $\mathbf{C}_{12}$ , diese stellen die Verformungen am Stabanfang für  $\xi=0$  dar.

$$\mathbf{c}_{10-12} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{10} \\ \mathbf{C}_{11} \\ \mathbf{C}_{12} \end{bmatrix} \quad [7-37.c]$$

In umgeformter Darstellung gilt für den stabachsenbezogenen Verformungsparameter des „||“-Anteils:

$$\mathbf{u}_{0,||}^*(\xi) = \mathbf{L} \cdot \int \mathbf{e}_{0,||}^* d\xi - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \int \mathbf{u}_{0,\perp}^* d\xi + \mathbf{c}_{10-12} \quad [7-37.d]$$

Werden die Beziehungen des stabachsenbezogenen Verzerrungs- und Verformungsparameters für beide Anteile nach Glg. 7-34.b und Glg. 7-36.a eingearbeitet, dann gilt:

$$\mathbf{u}_{0,||}^*(\xi) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_{0,||}^* \cdot \int \mathbf{n}_{0,||}^* d\xi - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \int (\mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_{0,\perp}^* \cdot \int \mathbf{n}_{0,\perp}^* d\xi + \mathbf{c}_{7-9}) d\xi + \mathbf{c}_{10-12} \quad [7-37.e]$$

$$\mathbf{u}_{0,||}^* = \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_{0,||}^* \cdot \int d\xi - \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}_{0,\perp}^* \cdot \iint \mathbf{n}_{0,\perp}^* d\xi d\xi - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \int \mathbf{c}_{7-9} d\xi + \mathbf{c}_{10-12} \quad [7-37.f]$$

In weiterer Folge sind die Schnittgrößen  $\mathbf{n}_{0,||}^*$  und  $\mathbf{n}_{0,\perp}^*$  in Abhängigkeit der Integrationskonstanten nach Glg. 7-32.b in Glg. 7-37.f einzuarbeiten. Die folgende Darstellung beschreibt den Zusammenhang des stabachsenbezogenen Verformungsparameters mit den zwölf Integrationskonstanten. Die Konstanten stellen dabei die Schnittkräfte und Verformungen am Stabanfang dar.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0,||}^*(\xi) = & \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_{0,||}^* \cdot \int \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} d\xi \cdot \mathbf{c}_{1-6} + \\ & -\mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}_{0,\perp}^* \cdot \iint \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi \cdot \mathbf{c}_{1-6} d\xi - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \int \mathbf{c}_{7-9} d\xi + \mathbf{c}_{10-12} \end{aligned} \quad [7-37.g]$$

Nach der Durchführung der Integration nach der Stablängskoordinate  $\xi$  gilt die folgende Beziehung für den stabachsenbezogenen Verformungsparameter des „||“-Anteils. Ident dem „⊥“-Anteil wird auch für den „||“-Anteil eine nach den Konstanten und den Polynomordnungen des Verformungsverlaufes in Stablängsrichtung separierte Darstellung angeführt.

$$\mathbf{u}_{0,\parallel}^*(\xi) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_{0,\parallel}^* \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{1-6} - \left( \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}_{0,\perp}^* \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{r}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{r}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{r}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{r}}{2} & -\frac{\sqrt{r}}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{1-6} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{7-9} \cdot \xi + \mathbf{c}_{10-12} \right) \quad [7-37.h]$$

In zusammengefasster Matrixnotation gilt für den Zusammenhang zwischen dem stabachsenbezogenen Verformungsparameter und den zwölf Integrationskonstanten die folgende Darstellung. Die Materialnachgiebigkeitsziffern sind dabei eingearbeitet.

$$\mathbf{u}_{0,\parallel}^*(\xi) = \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{0,44}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,45}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,46}^* \cdot \xi \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{0,45}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,55}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,56}^* \cdot \xi \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{0,46}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,56}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,66}^* \cdot \xi \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{1-6} + \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{0,13}^* \cdot \frac{\sqrt{r}}{2} & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\sqrt{r}}{2} & \mathbf{C}_{0,33}^* \cdot \frac{\sqrt{r}}{2} & -\mathbf{C}_{0,33}^* \cdot \frac{\sqrt{r}}{6} & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\sqrt{r}}{6} & 0 \\ -\mathbf{C}_{0,12}^* \cdot \frac{\sqrt{r}}{2} & -\mathbf{C}_{0,22}^* \cdot \frac{\sqrt{r}}{2} & -\mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\sqrt{r}}{2} & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\sqrt{r}}{6} & -\mathbf{C}_{0,22}^* \cdot \frac{\sqrt{r}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{1-6} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{7-12} \quad [7-37.i]$$

• **Zusammenfassung der beiden Anteile  $\mathbf{u}_{0,\perp}^*$  und  $\mathbf{u}_{0,\parallel}^*$**

Für die beiden stabachsenbezogenen Verformungsparameter für den „ $\perp$ “- und „ $\parallel$ “-Anteil lassen sich die Abhängigkeiten von den zwölf Integrationskonstanten wie folgt darstellen:

$$\mathbf{u}_{0,\perp}^* = \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{0,11}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,12}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,13}^* \cdot \xi & -\mathbf{C}_{0,13}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & \mathbf{C}_{0,12}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & 0 \\ \mathbf{C}_{0,12}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,22}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \xi & -\mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & \mathbf{C}_{0,22}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & 0 \\ \mathbf{C}_{0,13}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,33}^* \cdot \xi & -\mathbf{C}_{0,33}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{1-6} +$$

$$+ \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{7-12} \quad [7-37.j]$$

$$\mathbf{u}_{0,\parallel}^* = \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{0,44}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,45}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,46}^* \cdot \xi \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{0,45}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,55}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,56}^* \cdot \xi \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{0,46}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,56}^* \cdot \xi & \mathbf{C}_{0,66}^* \cdot \xi \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{1-6} +$$

$$+ \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{0,13}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & \mathbf{C}_{0,33}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & -\mathbf{C}_{0,33}^* \cdot \frac{\xi^3}{6} & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^3}{6} & 0 \\ -\mathbf{C}_{0,12}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & -\mathbf{C}_{0,22}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & -\mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & \mathbf{C}_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^3}{6} & -\mathbf{C}_{0,22}^* \cdot \frac{\xi^3}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{1-6} +$$

$$+ \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\xi}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\xi}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}_{7-12} \quad [7-37.k]$$

Für die zusammengefasste Darstellung unter Einführung des gesamten Konstantenvektors  $\mathbf{C}$  gilt:

Stabachsenbezogener Verformungsparameter für den 0-Anteil des 3D-Stabes in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

$$\mathbf{u}_{0,0}^* = \mathbf{L} \cdot \left[ \begin{array}{cccccc|cccccc}
 C_{0,11}^* \cdot \xi & C_{0,12}^* \cdot \xi & C_{0,13}^* \cdot \xi & -C_{0,13}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & C_{0,12}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 C_{0,12}^* \cdot \xi & C_{0,22}^* \cdot \xi & C_{0,23}^* \cdot \xi & -C_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & C_{0,22}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 C_{0,13}^* \cdot \xi & C_{0,23}^* \cdot \xi & C_{0,33}^* \cdot \xi & -C_{0,33}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & C_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 C_{0,13}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & C_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & C_{0,33}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & -C_{0,33}^* \cdot \frac{\xi^3}{6} & C_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^3}{6} & C_{0,46}^* \cdot \xi & 0 & 0 & \frac{\xi}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\
 & & & + C_{0,44}^* \cdot \xi & + C_{0,45}^* \cdot \xi & & & & & & & \\
 -C_{0,12}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & -C_{0,22}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & -C_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^2}{2} & C_{0,23}^* \cdot \frac{\xi^3}{6} & -C_{0,22}^* \cdot \frac{\xi^3}{6} & C_{0,56}^* \cdot \xi & 0 & -\frac{\xi}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\
 & & & + C_{0,45}^* \cdot \xi & + C_{0,55}^* \cdot \xi & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & C_{0,46}^* \cdot \xi & C_{0,56}^* \cdot \xi & C_{0,66}^* \cdot \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L}
 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-6} \\ \mathbf{c}_{7-12} \end{bmatrix} \quad [7-37.1]$$

$$\mathbf{u}_{0,0}^* = \mathbf{U}_{0,0}^*(\xi) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-6} \\ \mathbf{c}_{7-12} \end{bmatrix}$$

[7-37.m]

### 7.4.8.3 Freifeldlösung, ausgedrückt in Stabverzerrungen $\mathbf{e}_0$ aus Zeile 7

Wie oben erwähnt, wird für die praktische numerische Bestimmung der 3D-Verschiebungsfelder der drei Freilösungen die umgewandelte Integralform des Gleichgewichts in diskretisierter Darstellung verwendet. In dimensionsreiner Darstellung gilt der in Glg. 7-38.a dargestellte Zusammenhang zwischen den 3D-Verschiebungsfeldern der drei Freilösungen und dem stabachsenbezogenen Verzerrungsparameter. Die Bestimmung hat stets unter Berücksichtigung der Normierungsbedingungen für die Abspaltung der globalen Stabschnittgrößen der Normalkraft und der Biegemomente nach 7.3 zu erfolgen.

$$\left[ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \frac{-\hat{\mathbf{s}}_{0,\psi,2}}{L} \ \frac{-\hat{\mathbf{s}}_{0,\psi,3}}{L} \ \frac{-\hat{\mathbf{s}}_{0,\psi,1}}{L^2} \right] \cdot \mathbf{e}_0^* - \frac{\hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi}}{L^2} \cdot \hat{\Omega}_0 = 0 \quad [7-38.a]$$

$$\hat{\Omega}_0^* = \hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi}^{-1} \cdot \left[ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ -\hat{\mathbf{s}}_{0,\psi,2} \cdot L \ -\hat{\mathbf{s}}_{0,\psi,3} \cdot L \ -\hat{\mathbf{s}}_{0,\psi,1} \right] \cdot \mathbf{e}_0^* \quad [7-38.b]$$

Wie unter Punkt 7.2 gezeigt, sind die Freifeldlösungen in Abhängigkeit der relativen 3D-Verschiebungsfelder unter Verwendung von Glg. 7-11.b darzustellen. Dabei sind als Vorgriff die relativen 3D-Verschiebungsfelder für die Abklinglösungen nach Glg. 7-47.b einzuführen.

$$\hat{\Omega}_{\Omega,0}^* = \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \left[ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{a}_{\Omega_0,\gamma_{12}} \ \mathbf{a}_{\Omega_0,\gamma_{13}} \ \mathbf{a}_{\Omega_0,\kappa_1} \right] \cdot \mathbf{e}_0^* \quad [7-38.c]$$

$$\hat{\Omega}_{\Omega,0}^* = \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \underbrace{\left[ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{a}_{\Omega_0,\gamma_{12}} \ \mathbf{a}_{\Omega_0,\gamma_{13}} \ \mathbf{a}_{\Omega_0,\kappa_1} \right]}_{\mathbf{U}_{\Omega,0}^*} \cdot \mathbf{K}^{*-1} \cdot \mathbf{S}_{0,0,1-6} \cdot \mathbf{c}_{1-6} = \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \mathbf{U}_{\Omega,0}^* \cdot \mathbf{c}_{1-6} \quad [7-38.d]$$

$$\hat{\Omega}_{\Omega,0}^* = \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \mathbf{U}_{\Omega,0}^* \cdot \mathbf{c}_{1-6} \quad [7-38.e]$$

Für den stabachsenbezogenen Verzerrungsparameter gilt:

$$\mathbf{e}_0^* = \mathbf{K}^{*-1} \cdot \mathbf{S}_{0,0,1-6} \cdot \mathbf{c}_{1-6} \quad [7-38.f]$$

#### 7.4.8.4 Kompakte Zusammenfassung für den Lösungsanteil 1: Freifeldlösung

Im Folgenden werden alle erforderlichen Beziehungen zwischen den Konstanten und den Schnittgrößen und zwischen den Konstanten und den Stabverformungen kompakt dargestellt. Die die Abhängigkeiten von den Integrationskonstanten darstellenden Matrizenbeziehungen weisen alle ausschließlich eine Abhängigkeit von der Stablängsrichtung  $\xi$  auf.

##### Schnittgrößen in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Die Schnittgrößen lassen sich durch die nachstehende, formale Beziehung in Abhängigkeit der zwölf Integrationskonstanten nach Glg. 7-32.b darstellen. Per Definition treten aus den relativen 3D-Verschiebungsfeldern der Freifeldlösungen keine zusätzlichen, globalen Stabschnittgrößen auf.

$$\mathbf{n}_{0,0}^* = \mathbf{S}_{0,0,1-6} \cdot \mathbf{c}_{1-6} \quad [7-39.a]$$

$$\mathbf{m}_{\psi,0}^* = \mathbf{0} \quad [7-39.b]$$

##### Randfesthaltekräfte in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Für den Zusammenhang zwischen den inneren Stabschnittgrößen und den Randfesthaltekräften gilt die folgende Vorschrift. Für den Stabanfang sind die Vorzeichen zu vertauschen.

$$\pm \mathbf{n}_{0,E}^* = - \mathbf{r}_{0,E}^* \quad [7-40]$$

##### Stabachsenbezogene Verzerrungen in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Der stabachsenbezogene Verzerrungsparameter ist nach Glg. 7-34.a und Glg. 7-32.b in Abhängigkeit der Integrationskonstanten  $\mathbf{C}_{1-6}$  – diese stellen die Schnittgrößen am Stabanfang dar – wie folgt definiert. Die zugrunde gelegte Materialnachgiebigkeitsmatrix ist in Glg. 7-35.a definiert.

$$\mathbf{e}_0^* = \mathbf{K}^{*-1} \cdot \mathbf{n}_0^* = \mathbf{K}^{*-1} \cdot \mathbf{S}_{0,0,1-6} \cdot \mathbf{c}_{1-6} \quad [7-41.a]$$

##### Stabachsenbezogene Stabverformungen in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Der stabachsenbezogene Verformungsparameter für den Lösungsanteil I lässt sich nach Glg. 7-37.m in Abhängigkeit der zwölf Integrationskonstanten darstellen.

$$\mathbf{u}_{0,0}^* = \mathbf{U}_{0,0}^* \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-6} \\ \mathbf{c}_{7-12} \end{bmatrix} \quad [7-41.b]$$

Für die relativen 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen gilt für die Abhängigkeit der Integrationskonstanten Glg. 7-38.e:

$$\mathbf{\Omega}_{\Omega,0}^* = \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \mathbf{U}_{\Omega,0}^* \cdot \mathbf{c}_{1-6} \quad [7-41.c]$$

## 7.5 Lösungsanteil 2: Bestimmung der Abklinglösungen

Ausgangspunkt für die Bestimmung der relativen 3D-Verschiebungsfelder für die Abklinglösungen stellt das 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem nach Glg. 6-93.a dar. Die Gleichungen sind für die weiteren Lösungsschritte in erforderlicher Weise aufbereitet worden. Ausgehend von der originalen Darstellungsform der Gleichungen, wird die Bestimmung der Abklinglösungen für die umgewandelte diskretisierte Darstellungsform der Gleichungen gezeigt. Entgegen dem Lösungsanteil I – dabei liegen Polynomfunktionen für die Stablängsrichtung mit bekannter Ordnung vor – treten bei der Lösung des Abklingproblems in Stablängsrichtung exponentiell abklingende Lösungsverläufe aus dem linearen Differentialgleichungssystem auf.

Die Gleichgewichtsgleichungen liegen in der folgenden Darstellungsform vor:

- **Stabgleichgewichtsgleichungen**

Die sieben Stabgleichgewichtsgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen liegen in umgewandelter diskretisierter Integralform vor, diese sind für die Bestimmung der die Abklinglösungen begleitenden Starrkörperverformungen erforderlich.

- **Stab- & Querschnitts-DGL**

Die Stab- und Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen liegen in umgewandelter diskretisierter Integralform vor, diese dienen der Bestimmung der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder für das Abklingproblem für Randstörungen an den Stabendquerschnitten.

### 7.5.1 Lösungsstrategie für die Bestimmung der Abklinglösungen

Werden die Gleichungen des Querschnittproblems nach Glg. 6-93.a (Zeile 8) betrachtet, so ist erkennbar, dass die folgenden unbekanntenen Anteile vorliegen:

- Relative 3D-Verschiebungsfelder  $\Omega$  bzw.  $\hat{\Omega}$  für die diskretisierte Darstellungsform
- Abklingamplituden  $\psi$  für die Beschreibung des Verhaltens in  $X_1$ -Richtung

Für die Bestimmung der oben angeführten unbekanntenen Anteile der zu bestimmenden Abklinglösungen stehen die beiden Gleichgewichtsdifferentialgleichungen für das Stabproblem (Zeile 7) und für das Querschnittproblem zur Verfügung. Eine Bestimmung dieser Anteile unter der alleinigen Verwendung der Querschnittsdifferentialgleichung (Zeile 8) ist nicht möglich. Für die Bestimmung des Abklingverhaltens  $\psi$  in Stablängsrichtung werden die Stabgleichgewichtsgleichungen verwendet, wobei die  $\Omega$ -Verschiebungsfelder unbekannt sind. Werden diese  $\Omega$ -Verschiebungsfelder vorerst als bekannt vorausgesetzt, so wird deutlich, dass die resultierende Differentialgleichung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit damit verbundenen exponentiellen Lösungsansätzen  $e^{\lambda\xi}$  in Stablängsrichtung entspricht, siehe Boyce & DiPrima (1995, S. 436). Der Lösungstyp für den Längsverlauf von  $\psi$  lässt sich somit eindeutig mit exponentiellem Verhalten festlegen. Die absolute Größe der Amplitudenfunktion bleibt dabei vorerst noch offen.

Die Bestimmung der  $\Omega$ -Verschiebungsfelder mit den zugehörigen Absolutwerten des Stablängsverlaufes  $\psi$  erfolgt anschließend aus der Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichung (Zeile 8) unter Zugrundelegung des aus Zeile 7 berechneten exponentiellen Lösungsverlaufes von  $\psi$ . Das dadurch entstehende erweiterte Eigenwertproblem liefert die  $\Omega$ -Verschiebungsfelder (Eigenvektoren) und die damit eindeutig zusammenhängenden Abklingzahlen  $\lambda$  (Eigenwerte).

Werden die ermittelten zusammengehörigen Lösungsanteile allesamt in die 7. Stabgleichungen eingesetzt, so ist das Gleichgewicht eindeutig erfüllt.

### 7.5.2 Formulierung des Eigenwertproblems zur Gleichungslösung

Den Ausgangspunkt für die Lösung des Abklingproblems stellt Glg. 6-93.a, siehe Kapitel 6 dar, wobei die Lösungsfunktion für das Abklingverhalten aus den Stabgleichgewichtsgleichungen mit  $e^{\lambda \xi}$  bekannt ist. Ausgehend vom 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem werden die Vorfaktormatrizen entsprechend ihrer Ordnung der Ableitung nach der Stablängskoordinate in getrennter Weise angeschrieben. Daraus resultieren drei konstante Vorfaktormatrizen für die Ableitungsvorschriften zwischen null und zwei. Alle Vorfaktormatrizen weisen dabei die idente Größe von  $(6+N \times 6+N)$  auf und lassen sich durch elementweise Addition zum gesamten Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem zusammenführen. In schematischer Darstellung ohne Zwangsgleichungen gilt die folgende Form:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}}^* \cdot \mathbf{e}^* = \mathbf{0} \quad [7-42.a]$$

$$\begin{bmatrix} 1, \frac{\partial}{\partial \xi} & \psi, \psi', \psi'' \\ 1, \frac{\partial}{\partial \xi} & \psi, \psi', \psi'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^* \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [7-42.b]$$

$$\left[ \begin{bmatrix} 1 & \psi \\ 1 & \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \psi' \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \psi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \psi'' \\ 0 & \psi'' \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^* \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [7-42.c]$$

$$(\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},0}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},1}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},2}^*) \cdot \mathbf{e}^* = \mathbf{0} \quad [7-42.d]$$

Wie oben erwähnt, weisen die Amplituden  $\psi(\xi)$  einen exponentiellen Verlauf in Stablängsrichtung auf. Basierend auf dieser Eigenschaft lassen sich die Amplitudenverläufe  $\psi(\xi)$  in den Systemunbekanntenvektor verschieben. Das endgültige 3D-Verschiebungsfeld  $\Omega$  wird im Rahmen der Lösung des linearen Gleichungssystems aus den Eigenvektoren bestimmt. Das Abklingverhalten in Längsrichtung resultiert aus dem dem Eigenvektor zugehörigen Eigenwert. Wird dieser als Hochzahl der Exponentialfunktion eingesetzt, so wird durch die Exponentialfunktion der abklingende Lösungsverlauf in Stablängsrichtung abgebildet.

$$\left[ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^*(\xi) \\ \hat{\Omega} \cdot \psi(\xi) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [7-42.e]$$

Die Zwangsgleichungen nach 7.3 weisen einen direkten Zusammenhang mit den relativen 3D-Einzerverschiebungsfeldern auf und werden in das Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem an entsprechender Stelle eingeschleust. In der nach der Ansatzordnung gesplitteten Darstellungsform treten die Zwangsgleichungen, grün gekennzeichnet, in der Konstantenmatrix für die Ableitungsordnung null in Erscheinung. Die Größe der Steifigkeitsmatrix erhöht sich dadurch um die Anzahl der definierten Zwangsgleichungen, die quadratische Form bleibt dabei erhalten.

$$\left( \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},0,Z}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},1,Z}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},2,Z}^* \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^*(\xi) \\ \hat{\Omega} \cdot \psi(\xi) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [7-42.f]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},Z}^* = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1, \frac{\partial}{\partial \xi} & \psi, \psi', \psi'' & 0 \\ \hline 1, \frac{\partial}{\partial \xi} & \psi, \psi', \psi'' & \text{grün} \\ \hline 0 & \text{grün} & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Gesamte Konstantenmatrix der DGL (Vorfaktoren)} \\ \text{mit Ableitungen nach } X_1 \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},0,Z}^* = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \psi & 0 \\ \hline 1 & \psi & \text{grün} \\ \hline 0 & \text{grün} & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Konstantenmatrix der DGL (Vorfaktoren)} \\ \text{für die 0-te Ableitungen nach } X_1 \\ \text{inklusive der Zwangsgleichungen (grün)} \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},1,Z}^* = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{\partial}{\partial \xi} & \psi' & 0 \\ \hline \frac{\partial}{\partial \xi} & \psi' & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Konstantenmatrix der DGL (Vorfaktoren)} \\ \text{für die 1-te Ableitungen nach } X_1 \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},2,Z}^* = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \psi'' & 0 \\ \hline 0 & \psi'' & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Konstantenmatrix der DGL (Vorfaktoren)} \\ \text{für die 2-te Ableitungen nach } X_1 \end{array}$$

[7-42.g]

### 7.5.3 Lösung des Eigenwertproblems für isotropes Materialverhalten $\nu=0$

$$\left( \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 0, Z}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 2, Z}^* \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}_Z^*(\xi) = \mathbf{0} \quad [7-43.a]$$

Für den Systemunbekanntenvektor  $\hat{\boldsymbol{\phi}}^*$  gilt:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_Z^*(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^* \\ \hat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \psi(\xi) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [7-43.b]$$

Für die Systemunbekannten mit der Abhängigkeit von der Stablängsrichtung  $\xi$  werden die folgenden Fundamentalfunktionen für die Lösung definiert (vgl. Boyce & DiPrima, 1995, S. 440):

$$\mathbf{e}_0^*(\xi) = \mathbf{c}_{1-6} \cdot e^{\lambda \xi} \quad [7-43.c]$$

$$\psi(\xi) = \mathbf{c}_N \cdot e^{\lambda \xi} \quad [7-43.d]$$

Werden die Exponentialansätze für die Systemunbekannten in das Gleichungssystem eingearbeitet, so entsteht das nachfolgend dargestellte lineare algebraische Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem zur Bestimmung der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder und der zugehörigen Abklingzahlen.

Die Vorfaktoren  $\lambda$  der Konstantenmatrizen weisen in der Potenz die Ordnung der Ableitungsvorschriften auf; es gilt:

$$\left( \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 0, Z}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z}^* \cdot \lambda + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 2, Z}^* \cdot \lambda^2 \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}_Z^*(\xi) = \mathbf{0} \quad [7-43.e]$$

In schematischer Darstellung gilt für das beschreibende Differentialgleichungssystem 2. Ordnung:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & + & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \cdot \lambda + & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \psi'' & 0 \\ \hline 0 & \psi'' & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \cdot \lambda^2 \end{array} \right] \cdot e^{\lambda \xi} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}_Z^* = \mathbf{0} \quad [7-43.f]$$

Die grün gekennzeichneten Zwangsgleichungen führen im Rahmen der Lösung des Eigenwertproblems zur geforderten Orthogonalität zwischen den relativen und den globalen 3D-Einzelverschiebungsfeldern.

Im Folgenden wird das detaillierte 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem ohne die Zwangsgleichungen dargestellt; daraus werden die einzelnen Konstantenmatrizen abgespalten.

- Gesamtdarstellung der Querschnittsgleichgewichtsdifferentialgleichung für die Lösung des homogenen Falls für den Sonderfall  $\nu = 0$

$\frac{K_{0,11}}{L} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$\frac{K_{0,21}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$\frac{K_{0,13}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	0	0	0	0	$+\frac{\hat{k}_{0,\psi,11}}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$	$\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \hat{\Omega} \cdot \Psi \end{bmatrix} =$	0
$\frac{K_{0,12}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$\frac{K_{0,22}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$\frac{K_{0,23}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	0	$-\frac{S_{0,33}}{L}$	$-\frac{S_{0,31}}{L^2}$	$-\frac{\hat{k}_{0,\psi,51}}{L}$	$+\frac{\hat{k}_{0,\psi,21}}{L^3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$		0
$\frac{K_{0,13}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$\frac{K_{0,23}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$\frac{K_{0,33}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$\frac{S_{0,22}}{L}$	0	$\frac{S_{0,21}}{L^2}$	$\frac{\hat{k}_{0,\psi,41}}{L}$	$+\frac{\hat{k}_{0,\psi,31}}{L^3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$		0
0	0	0	$S_{0,22}$	0	$\frac{S_{0,21}}{L}$	$\hat{k}_{0,\psi,41}$	0		0
0	0	0	0	$S_{0,33}$	$\frac{S_{0,31}}{L}$	$\hat{k}_{0,\psi,51}$	0		0
0	0	0	$\frac{S_{0,21}}{L}$	$\frac{S_{0,31}}{L}$	$\frac{S_{0,11}}{L^2}$	$\frac{\hat{k}_{0,\psi,61}}{L}$	0		0
$\frac{\hat{f}_{\Omega, e0, 11}}{L^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$\frac{\hat{f}_{\Omega, e0, 12}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$\frac{\hat{f}_{\Omega, e0, 13}}{L^3} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$\frac{\hat{f}_{\Omega, e0, 14}}{L}$	$\frac{\hat{f}_{\Omega, e0, 15}}{L}$	$\frac{\hat{f}_{\Omega, e0, 16}}{L^2}$	$\frac{\hat{K}_{\Omega, \psi, 11}}{L}$	$+\frac{\hat{K}_{\Omega, \psi'', 11}}{L^3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$		0

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},0,Z}^* = \left[ \begin{array}{ccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-S_{0,33}}{L} & \frac{-S_{0,31}}{L^2} & \frac{-\hat{\mathbf{k}}_{0,\psi,51}}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S_{0,22}}{L} & 0 & \frac{S_{0,21}}{L^2} & \frac{\hat{\mathbf{k}}_{0,\psi,41}}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{0,22} & 0 & \frac{S_{0,21}}{L} & \hat{\mathbf{k}}_{0,\psi,41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{0,22} & \frac{S_{0,31}}{L} & \hat{\mathbf{k}}_{0,\psi,51} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S_{0,21}}{L} & \frac{S_{0,31}}{L} & \frac{S_{0,11}}{L^2} & \frac{\hat{\mathbf{k}}_{0,\psi,61}}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hat{\mathbf{f}}_{\Omega,e0,14}}{L} & \frac{\hat{\mathbf{f}}_{\Omega,e0,15}}{L} & \frac{\hat{\mathbf{f}}_{\Omega,e0,16}}{L^2} & \frac{\hat{\mathbf{K}}_{\Omega,\psi,11}}{L} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega,e0,11} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega,e0,12} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega,e0,13} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{k}}_{0,\psi,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{k}}_{0,\psi,21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{k}}_{0,\psi,31} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad [7-44.a]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},1,Z}^* = \left[ \begin{array}{ccccccc|ccc} \frac{K_{0,11}}{L} & \frac{K_{0,12}}{L^2} & \frac{K_{0,13}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{0,12}}{L^2} & \frac{K_{0,22}}{L^3} & \frac{K_{0,23}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{0,13}}{L^2} & \frac{K_{0,23}}{L^3} & \frac{K_{0,33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\hat{\mathbf{f}}_{\Omega,e0,11}}{L^2} & \frac{\hat{\mathbf{f}}_{\Omega,e0,12}}{L^3} & \frac{\hat{\mathbf{f}}_{\Omega,e0,13}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad [7-44.b]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 2, Z}^* = \left[ \begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 11}}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 21}}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 31}}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 11}}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad [7-44.c]$$

### 7.5.4 Überführung auf ein erweitertes Eigenwertproblem erster Ordnung

Für die Lösung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems wird das lineare DGL-System 2. Ordnung in ein lineares DGL-System 1. Ordnung übergeführt. Dabei entsteht die doppelte Anzahl an Differentialgleichungen 1. Ordnung. Der Systemunbekanntenvektor  $\hat{\phi}_{\text{ges}}^*$  weist die passende doppelte Anzahl an Systemunbekannten auf. Ausgehend von der folgende Darstellungsform wird die Herabstufung der Ansatzordnung des Differentialgleichungssystems gezeigt.

$$\left( \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 0, Z}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 2, Z}^* \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \cdot \hat{\phi}_Z^* = \mathbf{0} \quad [7-45.a]$$

Ein differentieller Zusammenhang zwischen den vorhandenen Systemunbekannten  $\hat{\phi}_Z^*$  und den neuen Systemunbekannten  $\Theta^*$  wird eingeführt; es gilt:

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}_Z^*}{\partial \xi^2} \quad [7-45.b]$$

Wird die differentielle Beziehung Glg. 7-45.b in Glg. 7-45.a eingesetzt, so verringert sich die Ableitungsordnung auf die gesuchte erste Ordnung.

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 0, Z}^* \cdot \hat{\phi}_Z^* + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z}^* \cdot \frac{\partial \hat{\phi}_Z^*}{\partial \xi_1} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 2, Z}^* \cdot \frac{\partial \Theta^*}{\partial \xi_1} = \mathbf{0} \quad [7-45.c]$$

Durch die einmalige Integration der Substitutionsbeziehung nach Glg. 7-45.b ist der formale Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den neu definierten Systemunbekannten wie folgt definiert:

$$\Theta^* = \frac{\partial \hat{\phi}_Z^*}{\partial \xi_1} \quad \frac{\partial \hat{\phi}_Z^*}{\partial \xi_1} - \Theta^* = 0 \quad [7-45.d]$$

Wird die Glg. 7-45.c mit Glg. 7-45.d kombiniert und in allgemeiner Matrixnotation dargestellt, dann resultiert daraus das gesuchte Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem erster Ordnung für das Abklingproblem. Die Zwangsgleichungen für die Orthogonalisierung der relativen 3D-Verschiebungsfelder sind ebenfalls eingearbeitet worden.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 0, Z}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 2, Z}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \mathbf{I} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\phi}_Z^* \\ \Theta^* \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [7-46.a]$$

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z}^*$  ist von quadratischer Form und weist die Anzahl  $2 \times (6 + N + N_Z)$  auf. Somit entspricht sie exakt der Größe des Systemunbekanntenvektors  $\hat{\phi}_{\text{ges}}^*$ ; es gilt:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z}^* \cdot \hat{\phi}_{\text{ges}}^* = \mathbf{0} \quad [7-46.b]$$

Für den gesamten Systemunbekanntenvektor gilt:

$$\hat{\phi}_{\text{ges}}^* = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_Z^* \\ \Theta^* \end{bmatrix} \quad [7-46.c]$$

Wird die Differentialoperatormatrix nach den Ableitungsordnungen von  $\xi$  separiert, dann gilt:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 0, Z}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\phi}_Z^* \\ \Theta^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z}^* & \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 2, Z}^* \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_Z^* \\ \Theta^* \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [7-46.d]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z, 0}^* \cdot \hat{\phi}_{\text{ges}}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z, 1}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} \hat{\phi}_{\text{ges}}^* = \mathbf{0} \quad [7-46.e]$$

Die beiden Konstantenmatrizen aus Glg. 7-46.e stellen sich wie folgt dar:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z, 0}^* = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 0, Z}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z, 1}^* = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 1, Z}^* & \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL}, 2, Z}^* \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [7-46.f]$$

Unter Berücksichtigung des Exponentialansatzes  $e^{\lambda \xi}$  für den Stablängsverlauf und unter Anwendung der Rechenregeln der Differentiation der Exponentialfunktion tritt in zusammengefasster Darstellung das folgende 3D-Gleichgewichtsdifferentialsystem in Erscheinung:

$$(\hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},1,Z,0}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},1,Z,1}^* \cdot \lambda) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}_{\text{ges}}^* = \mathbf{0} \quad [7-46.g]$$

Werden die Zusammenhänge nach Glg. 7-46.c und Glg. 7-46.f in Glg. 7-46.g eingesetzt, so entsteht das gesuchte finale lineare erweiterte Eigenwertproblem erster Ordnung für die Bestimmung der relativen 3D-Verschiebungsfelder der Abklinglösungen in orthogonalisierter Form mit den zugehörigen Abklingverläufen in Stablängsrichtung.

$$\left( \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},0,Z}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},1,Z}^* & \hat{\mathbf{K}}_{\text{DGL},2,Z}^* \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \lambda \right) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}}_Z^* \\ \hat{\boldsymbol{\Theta}}^* \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad [7-46.h]$$

### 7.5.5 Lösung des erweiterten Eigenwertproblems

Das oben angeführte erweiterte Eigenwertproblem ist mit standardisierten Routinen etablierter Mathematikprogramme lösbar. Auf die Lösungsmethodik wird an dieser Stelle nicht eingegangen, diese wird als bekannt vorausgesetzt.

Auf Grund der physikalisch-mechanischen Problembeschaffenheit treten bei der Lösung dieses erweiterten Eigenwertproblems nach Glg. 7-46.h genau  $2\mathbf{x}(\mathbf{N}-\mathbf{N}_Z)$  Eigenwerte auf, wobei diese stets paarweise mit verschiedenen Vorzeichen entstehen. Die 12 Eigenwerte aus dem Starrkörperproblem treten auf Grund der Vorablösung nicht in Erscheinung ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). Zugehörig zu den  $2\mathbf{x}(\mathbf{N}-\mathbf{N}_Z)$  Abklingzahlen treten die relativen 3D-Verschiebungsfelder auf.

Die problemrelevanten Ergebnisse für das Abklingproblem lauten:

- $2\mathbf{x}(\mathbf{N}-\mathbf{N}_Z)$  Eigenwerte; diese beschreiben die Abklingzahlen  $\lambda_i$  für das Stablängsproblem.
- $2\mathbf{x}(\mathbf{N}-\mathbf{N}_Z)$  Eigenvektoren  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_i^*$  stellen die gesuchten relativen 3D-Verschiebungsfelder dar.

Die  $2\mathbf{x}(\mathbf{N}-\mathbf{N}_Z)$  Lösungen bestehen somit immer aus einem Eigenwertpaar und dem zugehörigen Eigenvektor. Die den Abklingzahlen zugeordneten Eigenvektoren  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_i$  bestehen dabei in Anlehnung an Glg. 7-43.b aus den folgenden Anteilen:

$$\lambda_i = \pm \sqrt{\Lambda_i} \quad [7-47.a]$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_i^* = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}}_{i,16}^* \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}_{i,7+}^* \end{bmatrix} \quad [7-47.b]$$

- Die Zeilen 1 bis 6 stellen die die relativen 3D-Verschiebungsfelder begleitenden Starrkörperverzerrungen dar, die für die Erfüllung des globalen Schnittkraftgleichgewichts erforderlich sind.
- Die Zeilen 7 bis  $(6+\mathbf{N})$  stellen die Elementknotenwerte für die relativen 3D-Verschiebungsfelder für das Abklingproblem dar.

### 7.5.6 Bestimmung der Abklingzahlen für beliebige 3D-Verschiebungsfelder

Wie unter Punkt 7.2 erwähnt, sind im Rahmen der Bestimmung der Stabsteifigkeitsmatrix die 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen durch die relativen 3D-Verschiebungsfelder der Abklinglösungen auszudrücken. Alternativ dazu können auch vorgegebene 3D-Einzelverschiebungsfelder, die die geforderten Randbedingungen im Querschnitt und an den Oberflächen erfüllen, als Abklinglösungen ins Spiel gebracht werden. Dafür besonders geeignete 3D-Verformungsfelder sind durch die 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen selber gegeben.

Die zugehörigen Abklingzahlen lassen sich bei Bekanntheit des 3D-Verformungsfeldes über den Querschnitt aus dem  $\Psi$ -Problem (7. Zeile) bestimmen. Zusätzlich zu den drei Abklingzahlen für die Freifeldlösungen sind die zugehörigen begleitenden Starrkörperverzerrungen der Querschnittskinetik zu ermitteln. Diese ergeben sich aus den Gleichungen 4 bis 6 wie folgt. Bei der Rückrechnung sind die Zwangsgleichungen nicht erforderlich, da die 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösungen bereits die geforderten Eigenschaften der Freiheit von den globalen Schnittgrößen aufweisen.

$$\mathbf{\Omega}_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{0,\gamma 12} & \Omega_{0,\gamma 13} & \Omega_{0,\kappa 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1^* \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{\Omega}}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma}_{0,\gamma} \quad [7-48]$$

Die den 3D-Verschiebungsfeldern der Freifeldlösungen zugehörigen begleitenden Schubverzerrungen ergeben sich aus den Gleichungen 4 bis 6 für  $\Psi = \mathbf{1}$  mit:

$$\hat{\mathbf{S}}_{0,0} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{0,\gamma} + \hat{\mathbf{S}}_{0,\psi}^T \cdot \Psi = \mathbf{0} \quad [7-49.a]$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{0,\gamma} = -\hat{\mathbf{S}}_{0,0}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{0,\psi}^T \quad [7-49.b]$$

Durch das Einsetzen der Freifeldlösung und des Exponentialansatzes in die siebte Gleichgewichtsgleichung gilt:

$$-\hat{\mathbf{S}}_{0,\psi} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{0,\gamma} \cdot e^{\lambda \xi} - \hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot e^{\lambda \xi} + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \xi} = 0 \quad [7-49.c]$$

Die Abklingzahlen ergeben sich für  $e^{\lambda \xi} \neq 0$  ebenfalls als Paar mit verschiedenen Vorzeichen:

$$\lambda = \pm \sqrt{\hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi}^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{S}}_{0,\psi} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{0,\gamma} + \hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi})} = \pm \sqrt{\hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi}^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{S}}_{0,\psi} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{0,0}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{0,\psi}^T + \hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi})} \quad [7-49.d]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{0,\psi} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{0,\psi,2} & \hat{S}_{0,\psi,3} & \hat{S}_{0,\psi,1} \end{bmatrix} \quad [7-49.e]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{0,0} = \begin{bmatrix} S_{0,22} & 0 & S_{0,21} \\ 0 & S_{0,33} & S_{0,31} \\ S_{0,21} & S_{0,31} & S_{0,11} \end{bmatrix} \quad [7-49.f]$$

- Rückrechnung der Abklingzahlen für  $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$  im isotropen Fall für  $\nu = 0$

$K_{0,11}$	$K_{0,12}$	$K_{0,13}$	0	0	0	0	$K_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1}$
$K_{0,12}$	$K_{0,22}$	$K_{0,23}$	0	$-S_{0,33}$	$-S_{0,31}$	$-S_{0,\psi,3}$	$K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1}$
$K_{0,13}$	$K_{0,23}$	$K_{0,33}$	$S_{0,22}$	0	$S_{0,21}$	$+S_{0,\psi,2}$	$K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1}$
0	0	0	$S_{0,22}$	0	$S_{0,21}$	$S_{0,\psi,2}$	0
0	0	0	0	$S_{0,33}$	$S_{0,31}$	$S_{0,\psi,3}$	0
0	0	0	$S_{0,21}$	$S_{0,31}$	$S_{0,11}$	$S_{0,\psi,1}$	0
$K_{0,\psi',1}$	$K_{0,\psi',2}$	$K_{0,\psi',3}$	$-S_{0,\psi,2}$	$-S_{0,\psi,3}$	$-S_{0,\psi,1}$	$-S_{\psi,\Omega,\psi}$	$K_{\psi,\Omega,\psi'} \frac{\partial}{\partial X_1}$

$$\cdot \begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2' \\ \kappa_3' \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \psi \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[7-50]

Für die Steifigkeitskoeffizienten gilt Glg. C-10.a

Wird im Rahmen der Lösung des DGL-Systems die Orthogonalisierung der relativen 3D-Einzerverschiebungsfelder durchgeführt, dann entfallen die Wölbsteifigkeitsterme in der Zeile 7.

## 7.5.7 Darstellung des Abklingverlaufes in Stablängsrichtungen

### 7.5.7.1 Ansatzfunktion in Stablängsrichtung

Für die kompakte Darstellung der Ansatzfunktionen in Stablängsrichtung wird die Darstellung in Matrixschreibweise verwendet. Für die Darstellung des Abklingverhaltens eines globalen oder relativen 3D-Verschiebungsfeldes gilt für die Ansatzfunktionen in Stablängsrichtung mit den zugehörigen Integrationskonstanten:

$$\mathbf{f}_i^T = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_i \cdot \xi} & e^{-\lambda_i \cdot (1-\xi)} \end{bmatrix} \quad [7-51.a]$$

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}_i \quad [7-51.b]$$

Für die Darstellung des Abklingverhaltens aller bzw. ausgewählter relativer 3D-Verschiebungsfelder werden die Einzelanteile des Stablängsrichtungsverhaltens der 3D-Verschiebungsfelder in der Matrix der Ansatzfunktionen paarweise in den Zeilen aneinandergereiht; es gilt:

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 \cdot \xi} & e^{-\lambda_1 \cdot (1-\xi)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_2 \cdot \xi} & e^{-\lambda_2 \cdot (1-\xi)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_N \cdot \xi} & e^{-\lambda_N \cdot \xi} \end{bmatrix} \quad [7-51.c]$$

Der zugehörigen Integrationskonstanten sind im Konstantenvektor  $\mathbf{c}_\Omega$  definiert. Die Anzahl der Integrationskonstanten ergibt sich aus den Stabanfangs- und Stabendwerten mit  $2 \times N$ .

$$\mathbf{c}_\Omega^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{21} & C_{22} & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad [7-51.d]$$

### 7.5.7.2 Ableitungs- und Integrationsvorschriften für die Ansatzfunktionen in Stablängsrichtung

- **Ableitung der Abklingverläufe nach der Stablängskoordinate**

Die Ableitung des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters eines relativen 3D-Verschiebungsfeldes in dimensionsreiner Darstellung wird nach Glg. 7-52.a bestimmt, wobei die Ableitungsmatrix  $\mathbf{D}_i$  in der Hauptdiagonale die paarweise mit verschiedenen Vorzeichen auftretenden Abklingzahlen enthält.

$$\psi_i^{*,i} = \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{c}_i = \frac{1}{L} \cdot \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{c}_i \quad [7-52.a]$$

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad [7-52.b]$$

Für die Gesamtdarstellung für alle oder für ausgewählte relative 3D-Verschiebungsfelder gilt unter Berücksichtigung der Ableitungsmatrix  $\mathbf{D}$  der folgende Zusammenhang:

$$\Psi^{*,i} = \frac{1}{L} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{c}_\Omega \quad [7-52.c]$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad [7-52.d]$$

- **Integration der Abklingverläufe nach der Stablängskoordinate**

Werden die Ansatzfunktionen in Stablängsrichtung integriert, dann gilt analog der Ableitung der folgende Zusammenhang, wobei die Integrationsmatrix in der Hauptdiagonale die Kehrwerte der paarweise auftretenden Abklingzahlen aufweist:

$$\int \mathbf{F}^T d\xi = \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot L \quad \text{und} \quad \iint \mathbf{F}^T d\xi d\xi = \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{D}}^2 \cdot L^2 \quad [7-52.e]$$

mit

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} -1/\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad [7-52.f]$$

### 7.5.7.3 Darstellung der relativen 3D-Verschiebungsfelder

Die Eigenvektoren  $\hat{\phi}_{i,7+}^*$  stellen dabei die Amplituden der Elementrandpunkte der durch die Ansatzfunktionen über den Querschnitt diskretisierten relativen 3D-Verschiebungsfelder dar. Aus der Lösung ergeben sich die Elementrandpunkte-Amplituden in Abhängigkeit des Längsverlaufes wie folgt für einzelne Wölbfunktionen sowie für das Gesamtpaket der relativen 3D-Ganzhöhen-Querschnittsverformungsfelder:

$$\hat{\Omega}_i \cdot \psi_i = \hat{\phi}_{i,7+}^* \cdot \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{c}_i \quad [7-53.a]$$

$$\hat{\Omega} \cdot \Psi = \Omega_{\Omega, \Omega} = \underline{\hat{\phi}}_{7+}^* \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{c}_{\Omega} = \underline{\hat{\phi}}_{7+}^* \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\Omega, \Omega} \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-53.b]$$

Die Gesamtdarstellung für ein relatives 3D-Verschiebungsfeld ohne Berücksichtigung des Stablängsverlaufes wird durch die Multiplikation der Ansatzfunktionen mit dem Vektor der Elementeckpunkt-Amplituden  $\hat{\phi}_{i,7+}^*$  bestimmt, es gilt:

$$\Omega_i = \mathbf{h}^T \cdot \hat{\phi}_{i,7+}^* \quad [7-54.a]$$

Die finale Darstellung eines relativen 3D-Verschiebungsfeldes mit dem Stablängsrichtungsverlauf ist folgendermaßen definiert:

$$\Omega_i \cdot \psi_i = \mathbf{h}^T \cdot \hat{\phi}_{i,7+}^* \cdot \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{c}_i \quad [7-54.b]$$

Die Darstellung für das gesamte Paket an relativen 3D-Verschiebungsfeldern lautet:

$$\Omega \cdot \Psi = \mathbf{H}^T \cdot \underline{\hat{\phi}}_{7+}^* \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-54.c]$$

### 7.5.7.4 Darstellung der begleitenden 3D-Starrkörperverzerrungsfelder

Die ersten sechs Zeilen des Eigenvektors beschreiben die Amplituden der Starrkörperverzerrungsfelder, die als begleitende globale 3D-Verzerrungen zu den relativen 3D-Verschiebungsfeldern auftreten. Diese begleitenden Starrkörperverschiebungsfelder sind für die Erfüllung der globalen Schnittkraftgleichungen erforderlich. Die relativen 3D-Verschiebungsfelder sind entsprechend den betrachteten Zwangsgleichungen frei von normalspannungsbehafteten Schnittgrößen, weisen aber systembedingt schubspannungs-behaftete Schnittgrößen (Querkräfte und Torsionsmoment) auf. Da aus Lösungsanteil I die globalen Stabschnittgrößen bereits vollständig im Gleichgewicht stehen, dürfen aus dem Abklingproblem keinerlei globale Schnittgrößenanteile auftreten. Aus diesem Grund werden die aus den relativen 3D-Verschiebungsfeldern entstehenden Stabschnittgrößen direkt über die begleitenden 3D-Starrkörperverschiebungsfelder kompensiert. Für die Darstellung der begleitenden 3D-Starrkörperverschiebungsfelder gilt unter Berücksichtigung des Exponentialansatzes die folgende Abhängigkeit von den Integrationskonstanten:

$$\mathbf{e}_{0,i,\Omega}^* = \hat{\phi}_{i,16}^* \cdot \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{c}_i \quad [7-55.a]$$

$$\mathbf{e}_{0,\Omega}^* = \underline{\hat{\phi}}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-55.b]$$

Die Matrix der begleitenden 3D-Starrkörperverzerrungsfelder  $\hat{\underline{\phi}}_{16}^*$  reiht dabei die einzelnen begleitenden 3D-Starrkörperverschiebungsfelder in den Spalten.

$$\hat{\underline{\phi}}_{16}^* = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{16,1}^* & \hat{\phi}_{16,2}^* & \dots \end{bmatrix} \quad [7-55.c]$$

### 7.5.7.5 Begleitende Starrkörperverformungen in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Wie bereits diskutiert, treten begleitend zu den relativen 3D-Verschiebungsfeldern globale stabachsenbezogene 3D-Stabverformungsfelder in Abhängigkeit der Stab-End-Verwölbungsamplituden (Integrationskonstanten) auf. Die Ermittlung dieser begleitenden Starrkörperverformungsanteile wird analog zum Lösungsanteil I nach Punkt 7.4.8.2 durchgeführt. Die Anteile „ $\perp$ “ und „ $\parallel$ “ des Verformungsvektors werden dabei gemeinsam in einem Schritt bestimmt.

$$\mathbf{u}_{0,\Omega}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{0,\Omega,\perp}^* \\ \mathbf{u}_{0,\Omega,\parallel}^* \end{bmatrix} = L \cdot \int \mathbf{e}_{0,\Omega}^* d\xi - \frac{L^2}{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{\beta 23}} \cdot \iint \mathbf{e}_{0,\Omega}^* d\xi d\xi \quad [7-56.a]$$

$$\mathbf{u}_{0,\Omega}^* = L \cdot \int \mathbf{e}_{0,\Omega}^* d\xi - L \cdot \mathbf{I}_{\beta 23} \cdot \iint \mathbf{e}_{0,\Omega}^* d\xi d\xi \quad [7-56.b]$$

Für die Ermittlung der Verdrehungsanteile aus dem stabachsenbezogenen Verformungsparameter gilt die folgende Extraktionsmatrix:

$$\mathbf{I}_{\beta 23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [7-56.c]$$

Werden die formalen Beziehungen nach Glg. 7-55.b für die die relativen 3D-Verschiebungsfelder begleitenden globalen stabachsenbezogenen Verzerrungsparameter für die Starrkörperanteile eingesetzt, so gilt:

$$\mathbf{e}_{0,\Omega}^* = \hat{\underline{\phi}}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-56.d]$$

$$\mathbf{u}_{0,\Omega}^* = L \cdot \int \mathbf{e}_{0,\Omega}^* d\xi - L \cdot \mathbf{I}_{\beta 23} \cdot \iint \mathbf{e}_{0,\Omega}^* d\xi d\xi \quad [7-56.e]$$

Unter Anwendung der Integrationsregeln für die Ansatzfunktionenmatrix nach Glg. 7-52.e gilt für den begleitenden globalen stabachsenbezogene Verformungsparameter:

$$\int \mathbf{e}_{0,\Omega}^* d\xi = \hat{\underline{\phi}}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{c}_\Omega \quad \text{und} \quad \iint \mathbf{e}_{0,\Omega}^* d\xi d\zeta = \hat{\underline{\phi}}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{D}}^2 \cdot \mathbf{c}_\Omega \quad [7-56.f]$$

$$\mathbf{u}_{0,\Omega}^* = \mathbf{L} \cdot \left( \hat{\underline{\phi}}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{D}} - \mathbf{I}_{\beta 23} \cdot \hat{\underline{\phi}}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{D}}^2 \right) \cdot \mathbf{c}_\Omega \quad [7-56.g]$$

### 7.5.7.6 Bestimmung der Stabschnittgrößen in Abhängigkeit der Konstanten

Definitionsbedingt treten aus den relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern (Abklinglösungen) keinerlei Anteile an den globalen Stabschnittgrößen für die globalen Starrkörperfreiheitsgrade auf. Wie oben beschrieben, werden alle in den relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern enthaltenen globalen Schnittkraftanteile durch die, die relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder begleitenden, globalen Starrkörperverschiebungsfelder vollständig zu Null kompensiert. Somit gilt für die begleitenden globalen Schnittgrößen  $\mathbf{n}_{0,\Omega}^*$  per Definition:

$$\mathbf{m}_{0,\Omega}^* = 0 \quad [7-57.a]$$

Für den Wölbmomentenverlauf  $\mathbf{M}_\psi^*$  in Stablängsrichtung für ein relatives 3D-Verschiebungsfeld gilt nach Glg. C-39.a:

$$\mathbf{M}_\psi^* = \hat{\underline{\Omega}}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\psi,0}^* \cdot \mathbf{e}_{0,\Omega}^* + \hat{\underline{\Omega}}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi}^* \cdot \hat{\underline{\Omega}} \cdot \Psi + \hat{\underline{\Omega}}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'}^* \cdot \hat{\underline{\Omega}} \cdot \Psi' \quad [7-57.b]$$

$$\mathbf{M}_{\psi i}^* = \hat{\underline{\Omega}}_i^T \cdot (\hat{\mathbf{K}}_{\psi,0}^* \cdot \mathbf{e}_{0,i,\Omega}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi}^* \cdot \hat{\underline{\Omega}}_i \cdot \Psi_i + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'}^* \cdot \hat{\underline{\Omega}}_i \cdot \Psi_i') \quad [7-57.c]$$

Für die  $\hat{\underline{\Omega}}_i$  werden in weiterer Folge die speziell oben ermittelten Lösungen  $\hat{\underline{\phi}}_i^*$  mit all deren besonderen Eigenschaften in geeigneter Anzahl verwendet.

Für den Wölbmomentenverlauf in Stablängsrichtung für ein relatives 3D-Verschiebungsfeld gilt unter Berücksichtigung von Glg. 7-55.b und Glg. 7-53.b:

$$\mathbf{M}_{\psi i}^* = \hat{\underline{\phi}}_{i,7+}^{*T} \cdot \left( \hat{\mathbf{K}}_{\psi,0}^* \cdot \hat{\underline{\phi}}_{i,16}^* \cdot \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{c}_i + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi}^* \cdot \hat{\underline{\phi}}_{i,7+}^* \cdot \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{c}_i + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'}^* \cdot \hat{\underline{\phi}}_{i,7+}^* \cdot \mathbf{f}_i^T \cdot \frac{\mathbf{D}_i}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{c}_i \right) \quad [7-57.d]$$

$$\mathbf{M}_{\psi i}^* = \hat{\underline{\phi}}_{i,7+}^{*T} \cdot \left( \hat{\mathbf{K}}_{\psi,0}^* \cdot \hat{\underline{\phi}}_{i,16}^* \cdot \mathbf{f}_i^T + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi}^* \cdot \hat{\underline{\phi}}_{i,7+}^* \cdot \mathbf{f}_i^T + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'}^* \cdot \hat{\underline{\phi}}_{i,7+}^* \cdot \mathbf{f}_i^T \cdot \frac{\mathbf{D}_i}{\mathbf{L}} \right) \cdot \mathbf{c}_i \quad [7-57.e]$$

Werden mehrere relative 3D-Verschiebungsfelder für die Darstellung verwendet, dann tritt für jedes zusätzliche relative 3D-Verschiebungsfeld eine zusätzliche Schnittgröße  $\mathbf{M}_\psi^*$  auf; es gilt:

$$\mathbf{m}_\psi^* = \hat{\underline{\Omega}}^T \cdot (\hat{\mathbf{K}}_{\psi,0}^* \cdot \mathbf{e}_{0,\Omega}^* + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi}^* \cdot \hat{\underline{\Omega}} \cdot \Psi + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'}^* \cdot \hat{\underline{\Omega}} \cdot \Psi') \quad [7-58.a]$$

$$\mathbf{m}_{\psi}^* = \hat{\phi}_{7+}^{*\top} \cdot \left( \hat{\mathbf{K}}_{\psi,0}^* \cdot \hat{\phi}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} \cdot \mathbf{c}_{\Omega} + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi}^* \cdot \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} \cdot \mathbf{c}_{\Omega} + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'}^* \cdot \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} \cdot \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \right) \quad [7-58.b]$$

$$\mathbf{m}_{\psi}^* = \underbrace{\hat{\phi}_{7+}^{*\top} \cdot \left( \hat{\mathbf{K}}_{\psi,0}^* \cdot \hat{\phi}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi}^* \cdot \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} + \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'}^* \cdot \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} \cdot \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{L}} \right)}_{\mathbf{S}_{\psi,\psi}} \cdot \mathbf{c}_{\Omega} = \mathbf{S}_{\psi,\psi} \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-58.c]$$

Für den Zusammenhang der Stabschnittgrößen mit den Randfesthaltekräften an den beiden Stabenden gilt aus den Randbedingungen:

$$\pm \mathbf{m}_{\psi,E}^* = -\mathbf{r}_{\psi,E}^* \quad [7-58.d]$$

### 7.5.7.7 Kompakte Zusammenfassung für den Lösungsanteil 2: Abklinglösungen

Alle Beziehungen zwischen den Konstanten und den Schnittgrößen bzw. den Stabverformungen lauten in kompakter Darstellung: Die die Abhängigkeiten von den Integrationskonstanten darstellenden Matrizenbeziehungen zeigen alle ausschließlich eine Abhängigkeit von der Stablängsrichtung  $\xi$ .

#### Schnittgrößen in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Die Schnittgrößen lassen sich durch die nachstehende formale Beziehung in Abhängigkeit der zwölf Integrationskonstanten nach Glg. 7-58.c darstellen. Per Definition treten aus den 3D-Verschiebungsfeldern der Freifeldlösungen keine zusätzlichen globalen Stabschnittgrößen auf.

$$\mathbf{m}_{0,\Omega}^* = 0 \quad [7-59.a]$$

$$\mathbf{m}_{\Psi}^* = \hat{\phi}_{7+}^{*\top} \cdot \left( \hat{\mathbf{K}}_{\Psi,0}^* \cdot \hat{\phi}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} + \hat{\mathbf{K}}_{\Psi,\Omega,\Psi}^* \cdot \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} + \hat{\mathbf{K}}_{\Psi,\Omega,\Psi'}^* \cdot \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} \cdot \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{L}} \right) \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-59.b]$$

#### Randfesthaltekräfte in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Für den Zusammenhang zwischen den inneren Stabschnittgrößen und den Randfesthaltekräften gilt die folgende Vorschrift. Für den Stabanfang sind die Vorzeichen zu vertauschen.

$$\pm \mathbf{m}_{\Psi,A,E}^* = -\mathbf{r}_{\Psi,A,E}^* \quad [7-60]$$

#### Stabachsenbezogene Verzerrungen in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Der stabachsenbezogene Verzerrungsparameter ist nach Glg. 7-55.b in Abhängigkeit der Integrationskonstanten  $\mathbf{c}_{\Omega}$  – diese stellen die Schnittgrößen am Stabanfang dar – wie folgt definiert:

$$\mathbf{e}_{0,\Omega}^* = \hat{\phi}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-61]$$

#### Stabachsenbezogener Verformungsparameter in Abhängigkeit der Integrationskonstanten

Der stabachsenbezogene Verformungsparameter für den Lösungsanteil II lässt sich nach Glg. 7-56.g in Abhängigkeit der 2N Integrationskonstanten darstellen.

$$\mathbf{u}_{0,\Omega}^* = \mathbf{L} \cdot \underbrace{\left( \hat{\phi}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} \cdot \bar{\mathbf{D}} - \mathbf{I}_{\beta 23} \cdot \hat{\phi}_{16}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} \cdot \bar{\mathbf{D}}^2 \right)}_{\mathbf{U}_{0,\Omega}^*} \cdot \mathbf{c}_{\Omega} = \mathbf{U}_{0,\Omega}^* \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-62.a]$$

Die relativen 3D-Verschiebungsfelder lassen sich in Abhängigkeit der Integrationskonstanten nach Glg. 7-53.b darstellen.

$$\Omega_{\Omega,\Omega} = \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \mathbf{F}^{\top} \cdot \mathbf{c}_{\Omega} = \hat{\phi}_{7+}^* \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\Omega,\Omega} \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-62.b]$$

## 7.6 Bestimmung der Lösungsanteile mit kommerziellen FE-Programmen

### 7.6.1 Einzellastfälle – Bestimmung der Freifeldlösung

Die 3D-Einzelverschiebungsfelder der Freifeldlösungen sind für die folgenden Zustände unter Berücksichtigung der Orthogonalisierungsbedingungen zu bestimmen:

- Abscheren in 2-Richtung
- Abscheren in 3-Richtung
- Torsion um die 1-Achse

### 7.6.2 Natural Frequency Extraction – Lösung des Eigenwertproblems

Die relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösung (Ganzhöhenverwölbungen) lassen sich beispielsweise mit der „Natural Frequency Extraction“ implementiert in Abaqus 6.10.-1 bestimmen. Das zur Bestimmung der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder zu lösende erweiterte Eigenwertproblem weist die in Glg. 7-63.a gezeigte Gestalt auf. Die Normierungsbedingungen sind bei der Definition der Systemsteifigkeitsmatrix zusätzlich zu berücksichtigen.

$$\left( \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi} - \frac{\lambda^2}{L^2} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0} \quad \text{es gilt: } \lambda^{*2} = \frac{\lambda^2}{L^2} \quad [7-63.a]$$

mit  $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega} \cdot e^{-\lambda \xi}$ : [m]

Diese Form des Gleichungsaufbaus entspricht jenem der „Natural Frequency Extraction“ in Abaqus 6.10.-1 zur Berechnung der dünnen schwingenden Platte, dargestellt in Abaqus Usermanual (2010, 6.3.5).

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad [7-63.b]$$

mit  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \text{Sin}(\omega t)$ : [m]

Die Wölbsteifigkeitsmatrize  $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi}$  nach Glg. 7-63.a und die Systemsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  nach Glg. 7-63.b sind bei Definition der Randbedingungen ident, d. h. die beiden reinen Schubzustände und der Torsionszustand sind unterbunden und es treten ausschließlich axiale Verschiebungen auf.

Für die Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''}$  gilt bei Verwendung des isotropen Materialverhaltens bei dimensionsloser Darstellung der Verwölbungsfunktionen  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} = \int_A \mathbf{h} \mathbf{D}_{11} \mathbf{h}^T dA: [\text{Nm}] \quad [7-63.c]$$

Für die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  der „Natural Frequency Extraction“ gilt unter Zugrundelegung der dimensionslosen Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{M} = \int_V \rho_0 \cdot \mathbf{N}_m \cdot \mathbf{N}_m^T \cdot dV \quad [\text{kg}] \quad [7-63.d]$$

### Bestimmung der Ersatzrohndichte zur Bestimmung der Verwölbungsfunktionen

Die Gleichungen Glg. 7-63.c und Glg. 7-63.d unterscheiden sich nur in den Vorfaktoren, d. h. durch das Verhältnis der Rohdichte zum Elastizitätsmodul. Auf Grund dieser formalen Äquivalenz der Gleichungen kann diese Art der Frequenzanalyse zur Bestimmung der Verwölbungsfunktionen verwendet werden.

### Prinzip der virtuellen Arbeit für die Anteile aus den normalspannungsbehafteten Wölbanteilen

$$\delta \hat{\Omega}^T \cdot (-\lambda^{*2} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} \cdot \hat{\Omega}) \quad [-] \cdot \left[ \frac{1}{m^2} \cdot \text{Nm} \cdot m \right] = [\text{N}] \quad [7-64.a]$$

### Prinzip der virtuellen Arbeit für die Trägheitskräfte der Natural Frequency Extraction

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^T \cdot (-\omega^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad [-] \cdot \left[ \frac{1}{t^2} \cdot \text{kg} \cdot m \right] = [\text{N}] \quad \text{mit } \omega = 2\pi \cdot f \quad \left[ \frac{1}{t} \right] \quad [7-64.b]$$

### Gegenüberstellung der Vorfaktoren

$$-\omega^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}} / = -\lambda^{*2} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} \cdot \hat{\Omega} \quad \longrightarrow \quad -\omega^2 \cdot \rho_0 = -\lambda^{*2} \cdot E \quad [7-64.c]$$

Für die Einheiten gilt:  $\omega$ : [1/t] und  $\lambda$ : [1/m]

$$\frac{\omega^2}{\lambda^{*2}} = \frac{E}{\rho_0} \quad \longrightarrow \quad \frac{\omega}{\lambda^*} = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \stackrel{!}{=} 1 \frac{m}{s} \quad \longrightarrow \quad \rho_0 = \frac{E}{1(m/s)^2} \quad [7-64.d]$$

$$\text{Für die Einheit von } \rho_0 = \frac{E}{1(m/s)^2} \text{ gilt: } \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \left( \frac{\text{t}}{\text{m}} \right)^2 \right] = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{t}^2 \cdot \text{m}^2} \cdot \frac{\text{t}^2}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad [7-64.e]$$

Somit ist für die Rohdichte  $\rho_0$  [kg/m<sup>3</sup>] ein Ersatzmodul  $E$  in [N/m<sup>2</sup>] einzugeben.

Die Eigenwerte und die Eigenformen sind bei Berechnungen mit dem beschriebenen Modell unabhängig von der Stablänge, da die Verwölbungen für diesen Fall in Stablängsrichtung stets konstant sind.

### 7.6.3 Massenkorrektur für die transversale Schwingung

Für die Gleichungslösung basierend auf der implementierten „Natural Frequency Extraction“ sind zur problemadäquaten Gleichungslösung die folgenden Überlegungen wichtig: Bei der Bestimmung der Eigenformen mit der „Natural Frequency Extraction“ ist der Endknoten der Stabachse frei beweglich zu halten. Dies ist erforderlich um die die Eigenformen begleitenden Starrkörperabscherungen und Starrkörperverdrillungen zu ermöglichen. Durch dieses Vorgehen sind zusätzlich auch die Randbedingungen in Form der spannungsfreien Oberflächen erfüllt. Für den senkrecht zur Stabachse verschiebbaren und um die Stabachse drehbaren Querschnitt ist die Massenmatrix in der Form zu korrigieren, dass ausschließlich schwingungswirksame Massen in Stablängsrichtung vorhanden sind. Die Korrektur wird in der Form durchgeführt, dass die Stab(torsion)masse am Endknoten in negativer Schwing- und Verdrehrichtung aufgebracht wird.

## 7.7 Stabsteifigkeitsmatrix für das Stabelement

Basierend auf den Ergebnissen der beiden Lösungsanteile I&II gilt es im Folgenden die Gesamtlösung der Stabsteifigkeitsmatrix für das etablierte 3D-Stabmodell aufzustellen. Im Gesamtfall treten die beiden Lösungsanteile I&II nicht in autonomer, sondern in gegenseitig interagierender Beziehung auf. Die Interaktion ergibt sich dabei über den vorliegenden Vektor der Integrationskonstanten, der idente Ausdrücke für beide Lösungsanteile bezeichnet.

Für beide Lösungsanteile I & II werden die formalen Beziehungen in der bekannten Blockmatrizenschreibweise der Übersicht halber noch einmal angeführt, wobei nur mehr die für die Lösung der Längsrichtung erforderlichen Anteile mit einer  $\xi$ -Abhängigkeit dargestellt werden.

### 7.7.1 Zusammenfassung für Lösungsanteil I: 0-Problem

Für Lösungsanteil I gelten für die Schnittgrößen und die Verformungen die folgenden Abhängigkeiten von den Integrationskonstanten. Es werden nur mehr die erforderlichen Längsrichtungsanteile dargestellt.

Nach den Glg. 7-39.a, Glg. 7-39.b, Glg. 7-41.b und Glg. 7-38.e gilt:

$$\mathbf{n}_{0,0,\xi}^*(\xi) = \mathbf{S}_{0,0,1-6}(\xi) \cdot \mathbf{c}_{1-6} \quad [7-65.a]$$

$$\mathbf{m}_{\Psi,0,\xi}^*(\xi) = \mathbf{0} \quad [7-65.b]$$

$$\mathbf{u}_{0,0,\xi}^*(\xi) = \mathbf{U}_{0,0}^*(\xi) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-6} \\ \mathbf{c}_{7-12} \end{bmatrix} \quad [7-65.c]$$

$$\mathbf{\Omega}_{\Omega,0,\xi}^*(\xi) = \mathbf{U}_{\Omega,0}^*(\xi) \cdot \mathbf{c}_{1-6} \quad [7-65.d]$$

### 7.7.2 Zusammenfassung für Lösungsanteil II: $\Omega$ -Problem

In gleicher Weise wie für das 0-Problem werden die Ergebnisse für das  $\Omega$ -Problem auch in Matrixschreibweise unter Berücksichtigung der Konstantenabhängigkeiten zusammengefasst. Für die Zusammenhänge zwischen den Wölbschnittgrößen sowie den Verformungsanteilen und den Integrationskonstanten gilt den Glg. 7-56.a, Glg. 7-58.c, Glg. 7-62.a und Glg. 7-53.b gilt für den  $\Psi$ -Anteil:

$$\mathbf{m}_{0,\Omega,\xi}^*(\xi) = \mathbf{0} \quad [7-66.a]$$

$$\mathbf{m}_{\Psi,\xi}^*(\xi) = \mathbf{S}_{\Psi,\Psi}(\xi) \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-66.b]$$

$$\mathbf{u}_{0,\Omega,\xi}^*(\xi) = \mathbf{U}_{0,\Omega}^*(\xi) \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-66.c]$$

$$\mathbf{\Omega}_{\Omega,\Omega,\xi}^*(\xi) = \hat{\mathbf{U}}_{\Omega,\Omega}(\xi) \cdot \mathbf{c}_{\Omega} \quad [7-66.d]$$

### 7.7.3 Finale Formulierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Wie oben beschrieben, treten die beiden Lösungen in interagierender Form auf. Durch die richtige Kombination der beiden Anteile lässt sich der Gesamtschnittgrößenvektor sowie der Gesamtverformungsvektor in Abhängigkeit der Integrationskonstanten darstellen.

#### 7.7.3.1 Ermittlung der homogenen Verformungsmatrix

Die Blockmatrizendarstellung zeigt die Notwendigkeit auf, weshalb die Freifeldlösungen in Abhängigkeit der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder darzustellen ist. Der Verformungsanteil  $\mathbf{U}_{\Omega,\Omega}$  ist durch eine  $\mathbf{N} \times 2\mathbf{N}$  Matrix – die Reduktion durch Zwangsgleichungen ist zusätzlich zu beachten – definiert. Werden nicht alle relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder verwendet, so reduziert sich die  $\mathbf{U}_{\Omega,\Omega}$ -Matrix entsprechend.

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0,0}^* & \mathbf{U}_{0,\Omega}^* \\ \mathbf{U}_{\Omega,0}^* \cdot [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] & \hat{\mathbf{U}}_{\Omega,\Omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_{\text{HOM}}^* \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [7-67]$$

#### Motivation zur Darstellung der Freifeldlösung durch die Abklinglösungen an den Stabenden

Bei Betrachtung der nicht adaptierten Darstellung der  $\mathbf{U}_{\Omega,0}^*$ -Verformungsmatrix aus der Freifeldlösung ist ersichtlich, dass die Zeilenanzahl stets mit der Anzahl der vorliegenden Freifeldlösungen übereinstimmt. Aus diesem Grund ist es erforderlich, die Freifeldlösungen in Abhängigkeit der verwendeten relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder darzustellen, um eine übereinstimmende Matrixgröße für die elementweise Matrixaddition herzustellen.

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0,0}^* & \mathbf{U}_{0,\Omega}^* \\ \mathbf{U}_{\Omega,0}^* \cdot [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] & \hat{\mathbf{U}}_{\Omega,\Omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \times 12 & 6 \times 2\mathbf{N} \\ 3 \times 12 & \mathbf{N} \times 2\mathbf{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [7-68.a]$$

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \boxed{6 \times 12} & \boxed{6 \times 2\mathbf{N}} \\ \boxed{3 \times 12} & \boxed{\mathbf{N} \times 2\mathbf{N}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [7-68.b]$$

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \boxed{6 \times 12} & \boxed{6 \times 2\mathbf{N}} \\ \boxed{\mathbf{N} \times 12} & \boxed{\mathbf{N} \times 2\mathbf{N}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [7-68.c]$$

### Stabendverformungen für den Stabanfang und das Stabende

Werden die beiden Verformungsanteile für den Stabanfang und das Stabende zu einer Matrix zusammengefasst, so wird von der sogenannten homogenen Verformungsmatrix gesprochen. Die Auswertung der Verformungsbeziehungen erfolgt demnach für  $\xi=0$  (Stabanfang) und  $\xi=1$  (Stabende).

Durch die Bildung der Inversen der diskreten homogenen Verformungsmatrix ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Integrationskonstanten und den Stabendverformungen.

$$\hat{\mathbf{u}}_{AE}^* = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \hat{\mathbf{u}}_E^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_{0,0}^* & \hat{\mathbf{U}}_{0,\Omega}^* \\ \hat{\mathbf{U}}_{\Omega,0}^* \cdot [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] & \hat{\mathbf{U}}_{\Omega,\Omega}^* \end{bmatrix}_A \quad \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_\Omega \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_{0,0}^* & \hat{\mathbf{U}}_{0,\Omega}^* \\ \hat{\mathbf{U}}_{\Omega,0}^* \cdot [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] & \hat{\mathbf{U}}_{\Omega,\Omega}^* \end{bmatrix}_E \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^*} = \hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^* \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_\Omega \end{bmatrix} \quad [7-69.a]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_\Omega \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^{*-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \hat{\mathbf{u}}_E^* \end{bmatrix} \quad [7-69.b]$$

#### 7.7.3.2 Ermittlung der homogenen Spannungsmatrix

In einem zweiten Schritt wird die sogenannte homogene Spannungsmatrix definiert, die den Zusammenhang zwischen den Stabendschnittgrößen und den Integrationskonstanten beschreibt.

$$\mathbf{n}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_0^* \\ \mathbf{m}_\Psi^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{0,0,1-6} \cdot [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\Psi,\Psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_\Omega \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{\text{HOM}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_\Omega \end{bmatrix} \quad [7-70]$$

### Stabendfesthaltekräfte für den Stabanfang und das Stabende

Die Stabendschnittgrößen werden durch die Auswertung der Spannungsbeziehung für  $\xi=0$  (Stabanfang) und  $\xi=1$  (Stabende) gewonnen. Werden zudem die Vorzeichenkonventionen für den Zusammenhang der Stabschnittgrößen mit dem Randfesthaltekräften an den Stabenden eingearbeitet, so resultiert daraus der formale Zusammenhang zwischen den Randfesthaltekräften und den unbekanntem Integrationskonstanten in Form der homogenen Spannungsmatrix.

$$\pm \hat{\mathbf{n}}_{AE}^* = - \hat{\mathbf{r}}_{AE}^* \quad [7-71.a]$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{A,E}^* = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_A^* \\ \hat{\mathbf{r}}_E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{n}}_A^* \\ \hat{\mathbf{n}}_E^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{0,0,1-6} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_{\Psi,\Psi} \end{bmatrix}_A \\ \hat{\mathbf{S}}_{0,0,1-6} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_{\Psi,\Psi} \end{bmatrix}_E \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{S}}_{\text{HOM}}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{S}}_{\text{HOM}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [7-71.b]$$

### 7.7.3.3 Resultierende Steifigkeitsbeziehung

Wird die Abhängigkeit der Randfesthaltekräfte von den Integrationskonstanten mit der Abhängigkeit der Integrationskonstanten von den Stabendverformungen kombiniert, so resultiert daraus mit dem formalen Zusammenhang zwischen den Randfesthaltekräften und den Stabendverformungen die Stabsteifigkeitsmatrix für das neu etablierte Stabmodell.

$$\hat{\mathbf{r}}_{A,E}^* = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_A^* \\ \hat{\mathbf{r}}_E^* \end{bmatrix} = \underbrace{\hat{\mathbf{S}}_{\text{HOM}} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^{*-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_{\text{STAB}}} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \hat{\mathbf{u}}_E^* \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{K}}_{\text{STAB}} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \hat{\mathbf{u}}_E^* \end{bmatrix} \quad [7-72.a]$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{A,E}^* = \hat{\mathbf{K}}_{\text{STAB}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{A,E}^* \quad [7-72.b]$$

### Rückrechnung der Stabverformungen in Abhängigkeit der Stabendverformungen

Werden die Beziehungen für die Integrationskonstanten nach Glg. 7-69.b in Glg. 7-67 eingesetzt, so entsteht der formale Zusammenhang zwischen den Stabverformungen und den Stabendverformungen.

$$\mathbf{u}^*(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_{\text{HOM}}^* \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^{*-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \hat{\mathbf{u}}_E^* \end{bmatrix} \quad [7-73]$$

### Rückrechnung der Stabschnittgrößen in Abhängigkeit der Stabendverformungen

Werden die Beziehungen für die Integrationskonstanten nach Glg. 7-69.b in Glg. 7-70 eingesetzt, so entsteht der formale Zusammenhang zwischen den Stabschnittgrößen und den Stabendverformungen.

$$\mathbf{n}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_0^* \\ \mathbf{m}_{\Psi}^* \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{\text{HOM}} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^{*-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \hat{\mathbf{u}}_E^* \end{bmatrix} \quad [7-74]$$

## 7.8 Stabsteifigkeitsmatrix mit partieller Integration in $X_1$ -Richtung

Auf Grund der approximierten Darstellung der Freifeldlösung ergeben sich basierend auf der Approximationsungenauigkeit der FE-Lösung des Querschnittproblems geringe Abweichungen in der Symmetrie der Stabsteifigkeitsmatrix. Mit zunehmender Genauigkeit in der Approximation der Freifeldlösungen verschwindet die Unsymmetrie in der Stabsteifigkeitsmatrix. Um diese Ungereimtheiten in der Symmetrie der Stabsteifigkeitsmatrix zu beheben, wird in Stablängsrichtung zusätzlich die partielle Integration durchgeführt, wobei die bekannten exponentiellen Ansatzfunktionen in Stablängsrichtung erhalten bleiben.

### 7.8.1 FE-Formulierung in Stablängsrichtung

Grundlage für die FE-Diskretisierung in Stablängsrichtung sind die oben verwendeten kinematischen Beziehungen für die Verschiebungsverläufe in Stablängsrichtung, ausgedrückt in den Stabendverformungen.

Der formale Zusammenhang zwischen den Stabverschiebungen und den Integrationskonstanten ist durch  $\mathbf{U}_{\text{HOM}}^*$  nach Glg. 7-65.a wie folgt definiert:

$$\mathbf{u}^*(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_{\text{HOM}}^* \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} \quad [7-75.a]$$

Der Zusammenhang der Integrationskonstanten mit den Stabendverformungen lässt sich nach Glg. 7-70 wie folgt definieren:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1-12} \\ \mathbf{c}_{\Omega} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^{*-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \hat{\mathbf{u}}_E^* \end{bmatrix} \quad [7-75.b]$$

Der direkte Zusammenhang zwischen den Stabverformungen und den Stabendverformungen ist durch Kombination der obigen Beziehungen wie folgt definiert; dieser Zusammenhang stellt im Weiteren die FE-Ansatzfunktionen dar.

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{U}_{\text{HOM}}^* \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^{*-1}}_{\hat{\mathbf{U}}_{\text{FE-X1}}^*} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \hat{\mathbf{u}}_E^* \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{U}}_{\text{FE-X1}}^* \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \hat{\mathbf{u}}_E^* \end{bmatrix} \quad [7-75.c]$$

### 7.8.2 Partielle Integration der inneren virtuellen Arbeit

Die Stabsteifigkeitsmatrix mit in Stablängsrichtung partiell integrierter Darstellung ergibt sich auf Basis des Prinzips der virtuellen Arbeit. Für die Herleitung der Steifigkeitsmatrix ist dabei die innere virtuelle Arbeit nach Glg. 4-23.d zu berechnen.

$$-\delta W_{\text{int}} = \int_V \delta \mathbf{e}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dV \quad [7-76.a]$$

Unter Berücksichtigung von Glg. 6-12.b für das 3D-Verzerrungsfeld  $\mathbf{e}_{3D}$  sowie Glg. 6-10.b für den stabachsenbezogenen Verzerrungsparameter  $\mathbf{e}$  gilt:

$$\mathbf{e}_{3D} = \mathbf{A}_u \cdot \mathbf{e} \quad \text{und} \quad \mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad [7-76.b]$$

$$-\delta W_{\text{int}} = \int_L \int_A \delta (\mathbf{A}_u \cdot \mathbf{e})^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX = \int_L \int_A \underbrace{\delta (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})^T}_{\delta \mathbf{e}^T} \cdot \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA dX \quad [7-76.c]$$

$$-\delta W_{\text{int}} = \int_L (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot \underbrace{\int_A \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA}_{\mathbf{n}} \cdot dX = \int_L (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{n} \cdot dX \quad [7-76.d]$$

$\mathbf{n}$  stellt in diesem Zusammenhang den Schnittkraftvektor dar:

$$\mathbf{n} = \int_{A_i} \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{A}_u \cdot \mathbf{e} \cdot dA_i = \int_A \underbrace{\mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{A}_u}_{\mathbf{D}_{FE}} \cdot dA \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad [7-76.e]$$

$$\mathbf{D}_{FE} = \int_A \mathbf{A}_u^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{A}_u \cdot dA \quad [7-76.f]$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{D}_{FE} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{D}_{FE} \cdot \mathbf{e} \quad [7-76.g]$$

Unter Beachtung der oben angeführten Beziehungen gilt für die innere virtuelle Arbeit:

$$-\delta W_{\text{int}} = \int_L (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{D}_{FE} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \cdot dL \quad [7-77.a]$$

Werden die FE-Ansatzfunktionen für die Stablängsrichtung in die obige Beziehung eingesetzt, so resultiert daraus die FE-Stabsteifigkeitsmatrix mit absoluter Symmetrie.

$$-\delta W_{\text{int}} = \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \delta \mathbf{u}_E^* \end{bmatrix}^T \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^{*-T} \cdot \int_L (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_{\text{HOM}}^*)^T \cdot \mathbf{D}_{FE} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_{\text{HOM}}^* \cdot dL \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^{*-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_{\text{STAB, FE}}} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_A^* \\ \mathbf{u}_E^* \end{bmatrix} \quad [7-77.b]$$

Die resultierende Stabsteifigkeitsmatrix für das in Stabrichtung partiell integrierte Stabelement lautet:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{STAB, FE}} = \hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^{*-T} \cdot \int_L (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_{\text{HOM}}^*)^T \cdot \mathbf{D}_{FE} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_{\text{HOM}}^* \cdot dL \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\text{HOM}}^{*-1} \quad [7-78]$$



# 8

**Beispiele für den  
2D- & 3D-Fall**

## 8.1 Einleitung

Im Folgenden werden ausgewählte Beispiele mit verschiedenen Stabquerschnittsgeometrien untersucht und darauf aufbauend ausgewählte bekannte Stabeffekte diskutiert. Die verwendeten relativen 3D-Verschiebungsfelder beschränken sich ausschließlich auf die Querschnittsverwölbungen, die echten Querschnittsverformungen werden nicht untersucht. Diese Einschränkung geht konform mit der gezeigten Lösung des Differentialgleichungssystems für den Fall der materiellen Isotropie mit  $\nu=0$ . Neben homogenen werden auch inhomogene Stabquerschnitte untersucht. Zusätzlich zu starr gekoppelten werden nachgiebige Verbundfugen bei mehrteiligen Querschnitten untersucht. Als Grundlage für sämtliche Beispiele dient lineares elastisches Materialverhalten, dies gilt für die Einzelquerschnittsteile und auch für die materiellen Grundlagen der nachgiebigen Verbundfugen.

Das Beispiel 1a (ebene 2D-Stabkinematik) „Rechteck-Querschnitt mit ebener Stab-Kinematik: Exakte Lösung“, siehe Punkt 8.3.1, und das Beispiel 5 (3D-räumliche Stabkinematik) „Einteiliger Rechteck-Querschnitt (1S)“, siehe Punkt 8.5.1, werden detaillierter aufbereitet, die Darstellung der weiteren Beispiele beschränkt sich auf die wesentlichen Ergebnisse.

### 8.1.1 Stabquerschnitte mit ebener 2D-Stabkinematik

Die Beispiele mit 2D-Kinematik umfassen neben dem homogenen (Querschnitt mit nur einem Querschnittsteil) inhomogene geschichtete Stabquerschnitte mit und ohne nachgiebige Verbundfugen zwischen den Einzelquerschnittsteilen.

- Beispiel 1a: Rechteck-Querschnitt mit ebener Stab-Kinematik: Exakte Lösung
- Beispiel 1b: Rechteck-Querschnitt mit ebener Stab-Kinematik: FF-Lösung als Abklinglösung
- Beispiel 2: Rechteckquerschnitt mit einer nachgiebigen Verbundfuge
- Beispiel 3: Dreiteiliger rechteckiger Verbund-QS mit zwei starren Fugen: Typ 1

### 8.1.2 Stabquerschnitte mit räumlicher 3D-Stabkinematik

Die Beispiele mit 3D-Kinematik umfassen neben den oben erwähnten Beispielen mit 2D-Kinematik verschiedene kompakte dickwandige Querschnittstypen. Stäbe mit dünnwandigen Querschnitten, basierend auf den Annahmen der kinematischen Dünnwandigkeit, werden an dieser Stelle nicht behandelt.

Vielmehr wird die Berechnung eines geometrisch dünnwandigen und unsymmetrischen I-Querschnitts, basierend auf einer vollständigen 3D-Kinematik (dickwandig), gezeigt.

- Beispiel 4: Einteiliger Rechteck-Querschnitt (1S)
- Beispiel 5: Dreiteiliger Rechteck-Querschnitt (3S):
- Beispiel 6: Zweiteiliger Rechteckquerschnitt mit nachgiebiger Verbundfuge
- Beispiel 7: Allgemeine Querschnittsberandung: Zwei QS-Teile
- Beispiel 8: Monosymmetrischer I-Querschnitt mit starren Verbundfugen

### 8.1.3 Grundlagen zum statischen System für die Beispiele mit 2D- & 3D-QS-Kinematik

In Abb. 8.1 ist die Systemskizze für das den 3D-Beispielen zugrunde gelegte statische System gezeigt. Für die 2D-Beispiele reduziert sich dieses System um die nicht vorhandenen Freiheitsgrade und Belastungen, d. h. Systemreduktion um die transversale Querkraft  $V_2$  in der Koordinatenrichtung  $X_2$

und um das Torsionsmoment  $M_1$  um die Koordinatenachse  $X_1$ .

Der prismatische Stab ist durch einen vollständig eingespannten Stab-Anfangs-Querschnitt und einen völlig frei verformbaren Stab-End-Querschnitt definiert. Mit „eingespannt“ ist in diesem Zusammenhang die völlige Unterbindung sämtlicher Querschnitts-Freiheitsgrade der Starrkörperkinematik sowie die Unterbindung sämtlicher axialer relativer 3D-Verschiebungsfelder zu verstehen. Die Belastungen greifen am Stabendquerschnitt jeweils im elastischen Kräftemittelpunkt des prismatischen Stabes an.

#### 8.1.4 Belastungssituation für den Kragarm in axialer Richtung

Die in Abb. 8.1 angeführte 3D-Belastungssituation am Stab-End-Querschnitt führt zu folgender Stab-Beanspruchung entlang der Stabachse: Es liegen konstante Querkraftverläufe mit den zugehörigen linearen Momentenverläufen sowie ein konstanter Torsionsmomentenverlauf vor. Die konstanten Querkraftverläufe und der konstante Torsionsmomentenverlauf führen in ungestörten Stabbereichen zu den Freifeldlösungen der einzelnen Verformungszustände.

In Abb. 8.2 ist der Sonderfall der 2D-Belastungssituation inklusive der Verläufe in der Stablängsrichtung gezeigt.

#### 8.1.5 Bezugsspannungen für die Normalspannung die Schubspannungsdarstellung

Für die dimensionsreine Darstellung der Spannungsplots werden die folgenden Bezugsspannungen für Schubspannungen und die Normalspannungen definiert. Diese Bezugsspannungen stellen dabei eindeutig berechenbare Größen dar, es gilt:

##### 8.1.5.1 Bezugsgröße für die Normalspannung

Als Bezugsgröße für die Normalspannungen wird die maximale Wölbnormalspannung am Einspannquerschnitt verwendet, die sich bei Verwendung der Freifeldlösung als axiale Abkling-QS-Verwölbung ergibt. Diese ergibt sich aus der Ableitung des relativen 3D-Verschiebungsfeldes der Freifeldlösung nach der Stablängsrichtungskoordinate  $\xi$ . In Glg. 8-1 ist die formale Beziehung für die Wölbnormalspannung der Freifeldlösung definiert. Es zeigt sich eindeutig die geometrische Affinität zum relativen 3D-Verschiebungsfeld der Freifeldlösung. Die Ableitung ergibt sich aus der Multiplikation der Freifeldlösung mit der Abklingzahl in Form der Hochzahl aus dem Stablängsrichtungsverlauf  $e^{\lambda\xi}$ .

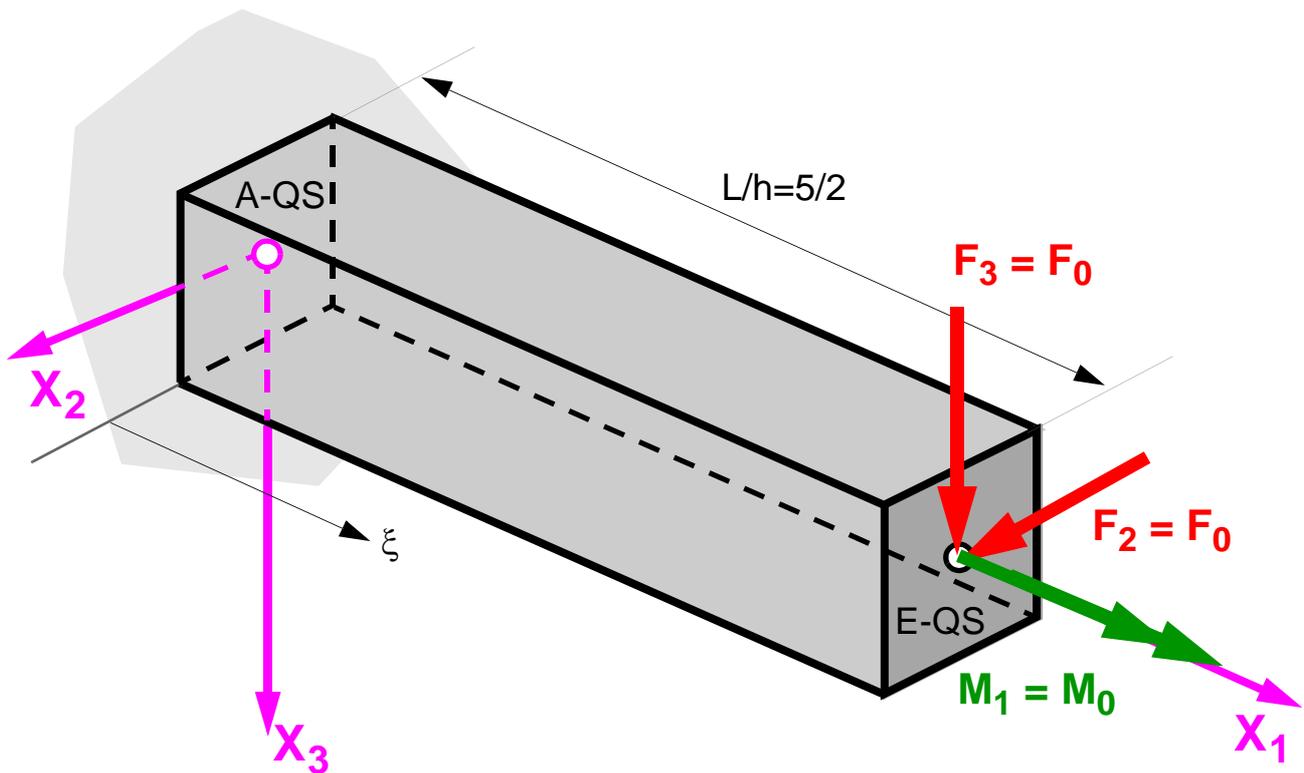
$$S_{11, \Omega, FF, \max} = \max(E(X_2; X_3) \cdot \lambda_{FF} \cdot \Omega_{FF, \gamma_0}) \quad [8-1]$$

##### 8.1.5.2 Bezugsgröße für die Schubspannungen

Als Bezugsgröße für die Schubspannungen wird die Schubspannungsverteilung des äquivalenten wölbstarreren Stabquerschnitts verwendet. Diese entspricht der Schubspannungsverteilung am Einspannquerschnitt des Kragarms, bei  $\xi=0$  sind auf Grund der Einspannung die relativen 3D-Verschiebungsfelder per Definition unterbunden.

$$S_{13, \text{woelbstarr}} = S_{13}(\xi = 0) \quad [8-2]$$

### Statisches System: Einseitig eingespannter Kragarm



A-QS:  
Einspannstelle mit vollständiger Unterbindung sämtlicher axialer globaler und lokaler 3D-Verschiebungsfelder

E-QS:  
Stabendquerschnitt mit völliger 3D-Verschiebungsfreiheit

**Abb. 8.1:** *Systemskizze für die berechneten Beispiele (2D und 3D): Einseitig eingespannter Kragarm. Die Einspannung am Einspannquerschnitt gilt für sämtliche Stabfreiheitsgrade*

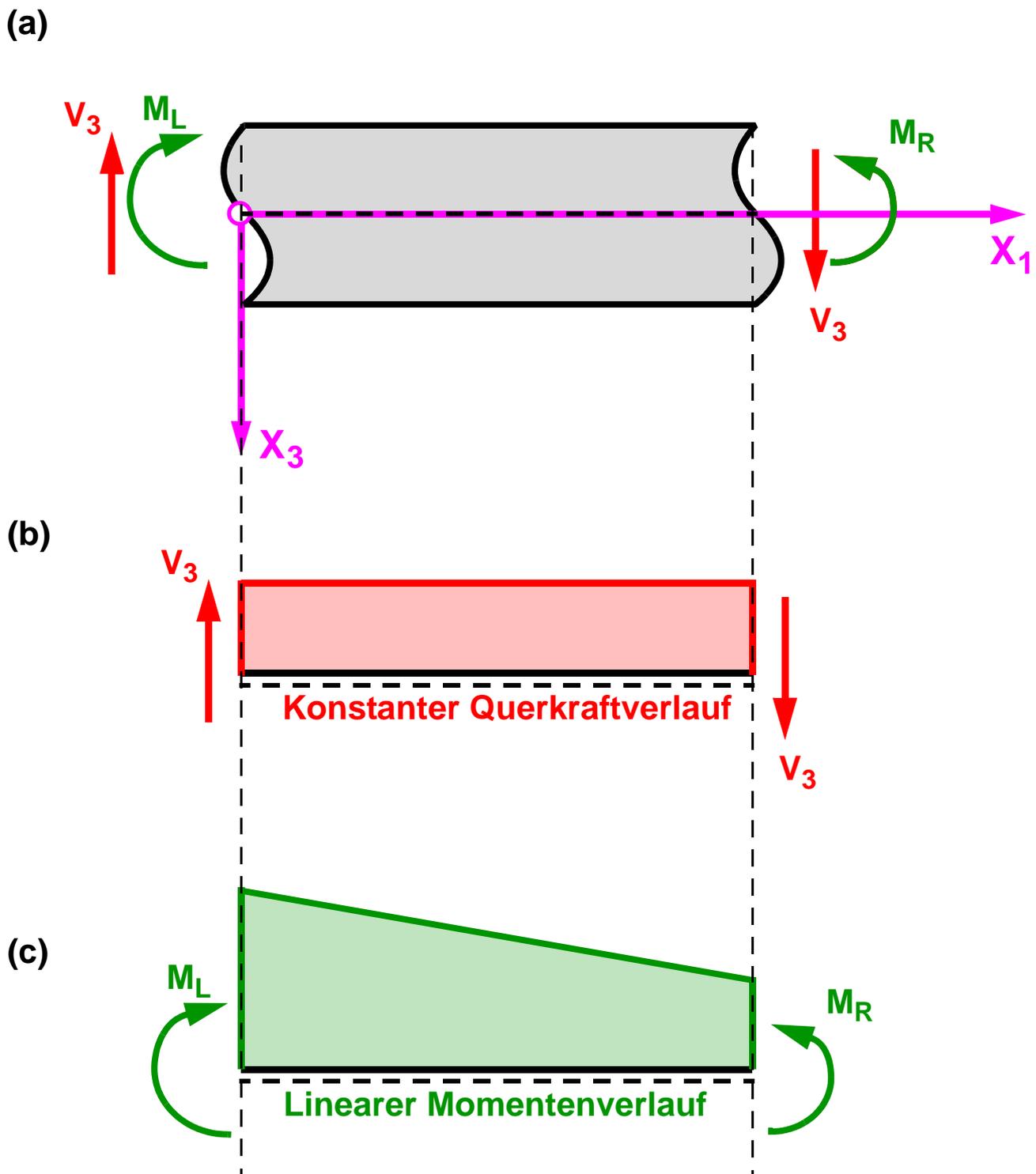


Abb. 8.2: a) Systemskizze des Stabes mit QS-Verwölbungen und zugehöriger Schnittkraftverteilung in Stablängsrichtung: (b) konstanter Querkraftverlauf als primärer Belastungszustand mit (c) linearem Momentenverlauf

## 8.2 Erläuterungen zu den Beispielen und zu den Ergebnissen

Für die berechneten Beispiele werden die folgenden Ergebnisse grafisch und numerisch in systematischer Weise dargestellt.

- **Darstellung der relativen 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit zugehörigem Abklingverhalten in Stablängsrichtung**

Dargestellt sind die relativen 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösung der QS-Verwölbung über den gesamten Stabquerschnitt in auf die Querschnittshöhe bezogener Darstellung. Die den relativen 3D-Verschiebungsfeldern der Freifeldlösung zugehörigen Abklingzahlen für das Abklingverhalten in Stablängsrichtung sind in dimensionsloser Form angeführt. Zusätzlich wird die effektive Abklinglänge angegeben, diese ist als Abstand zwischen dem Koordinatenursprung und dem Anfangstangenten-Abszissenschnittpunkt definiert. Es kann festgehalten werden, dass bei der dreifachen effektiven Abklinglänge die Randstörungen auf rund 5 % abgeklungen sind. Dies gilt für alle drei auftretenden Freifeldlösungen in gleicher Weise. Für den angegebenen homogenen Rechteckquerschnitt (Beispiel 1) entspricht die dreifache effektive Abklinglänge in etwa der Gesamtquerschnittshöhe, d. h. Randstörungen klingen großteils innerhalb der Trägerhöhe in Stablängsrichtung ab.

- **Abkling-Querschnitts-Verwölbungen mit zugehörigem Abklingverhalten in Stablängsrichtung**

Aus dem in Kapitel 7 dargestellten Eigenwertproblem ergibt sich in Abhängigkeit der Anzahl der Querschnittsdiskretisierungspunkte ein Stapel an relativen abklingenden 3D-Einzelverschiebungsfeldern. Dabei treten aus der Lösung des Eigenwertproblems sowohl symmetrische als auch antimetrische relative 3D-Einzelverschiebungsfelder auf.

- Symmetrische (nicht wirksame) abklingende relative 3D-Einzelverschiebungsfelder mit abklingendem Verhalten in Stablängsrichtung
- Antimetrische (wirksame) abklingende relative 3D-Einzelverschiebungsfelder mit abklingendem Verhalten in Stablängsrichtung

Auf Grund des antimetrischen Querschnittsverformungsverhaltens sind für die gezeigten Beispiele auf Grund der Systemdefinition und in Abhängigkeit des Belastungszustands nur die antimetrischen relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder von Relevanz. Die symmetrischen relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder werden nur der Vollständigkeit halber gezeigt. Diese wären beispielsweise für lokale axiale Lasteinleitungen am Stabquerschnitt erforderlich, dies ist allerdings außerhalb der Themenabgrenzung dieser Arbeit zu sehen.

Mit zunehmender Feinwelligkeit der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder vergrößert sich die Abklingzahl. Hohe Abklingzahlen führen zu einem rascheren Abklingverhalten in Stablängsrichtung. Nachgiebige Verbundfugen führen zu einer sehr geringen ersten Abklingzahl, was zu einem sehr schwachen Abklingen in Stablängsrichtung führt. Somit kann festgehalten werden, dass nachgiebige Verbundfugen bereits mit den ersten paar relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern mit hoher Genauigkeit erfasst sind.

Der Vollständigkeit halber wird für alle Beispiele, wie oben erwähnt, auch die Abklingzahl der relativen 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösung der QS-Verwölbung berechnet. Diese reiht sich mit ihrer absoluten Größe stets unter die ersten paar Abklingzahlen der Abkling-Querschnitts-Verwölbungen. Für Querschnitte mit nachgiebigen Verbundfugen stimmt diese bereits annähernd mit der Abklingzahl des ersten relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldes überein, dies resultiert aus der beinahe Affinität der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit dem ersten relativen 3D-Einzelverschiebungsfeld.

Dies gilt für Beispiele mit 2D- beziehungsweise mit 3D-Kinematik in gleicher Weise.

- **Wölbnormalspannungen und Wölbschubspannungen für die abklingenden relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder**

Die Wölbnormalspannungen für die relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder ergeben sich durch Differentiation der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder nach der Stablängskoordinate  $X_1$ . Auf dieser Tatsache beruht die eindeutige Affinität zwischen der Wölbnormalspannung und dem zugehörigen relativen 3D-Einzelverschiebungsfeld.

Die Wölbschubspannungen ergeben sich durch Differentiation der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder nach den Querschnittskordinaten  $X_2$  und  $X_3$ . Die Oberflächenrandbedingungen der Schubspannungen sind dabei nur für die symmetrischen relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder gegeben, da diese bei der Differentiation nach den Querschnittskordinaten zu antimetrischen Schubspannungsverteilungen führen, siehe Abb. 8.8. Für die antimetrischen relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder nach Abb. 8.9 mit den zugehörigen symmetrischen Schubspannungsverläufen sind hingegen die oben erwähnten begleitenden Starrkörperverzerrungen zur Erfüllung der Oberflächenrandbedingungen erforderlich.

- **Wölbnormalspannungen und Schubspannungen für den Gesamtzustand für ausgewählte Stabstellen  $X_1$**

Die Wölbnormalspannungen und die Schubspannungen werden in bezogener Form für ausgewählte Stabstellen  $X_1$  dargestellt, um den Verlauf in Stablängsrichtung zu zeigen. Die Wölbnormalspannungen werden abgesehen von Beispiel 1 für den Plotbereich zwischen -1 und 1 dargestellt. Die Spannungsspitzen, diese treten insbesondere für den Stab-Anfangs-Querschnitt auf, werden dadurch nicht dargestellt, da diese grundsätzlich eine starke Abhängigkeit von der Querschnittsdiskretisierung zeigen und somit nur eine geringe Aussagekraft aufweisen. Durch die Beschränkung des Plotbereichs lassen sich zudem die Verläufe der Spannungen über den Stabquerschnitt wesentlich besser darstellen und vergleichen. Dies gilt vor allem für den direkten Vergleich der Spannungsverläufe von Beispiel 1a und Beispiel 1b.

- **Verläufe für die Wölbnormalspannungen, die Schubspannungen und für den Abklinganteil der Randstörung der Schubspannungen entlang der Stabachse**

Zum besseren Verständnis der Querschnitts-Spannungsverläufe und deren Verhalten in Stablängsrichtung werden diese entlang der Stabachse dargestellt.

Die dabei entstehenden 3D-Spannungsplots stellen die Veränderungen der Spannungsverteilungen ausgehend vom wölbstarren Stab-Anfangs-Querschnitt hin zur sogenannten Freifeldlösung ( $X_1 \rightarrow \infty$ ) dar. Für einzelne Beispiele stellen sich durchaus überraschende Ergebnisse ein, da die maximale Schubspannung nicht immer für den Grenzfall  $X_1 \rightarrow \infty$  auftreten muss, siehe Abb. 8.62. Für einzelne Beispiele treten diese in der durch das Abklingen der Randstörung beeinflussten Stabzone im Nahbereich der Einspannstelle auf.

Neben den Wölbnormalspannungen und den Gesamtschubspannungen wird auch das Abklingen der Randstörung der Schubspannungen ins Stabinnere dargestellt.

Eine Darstellung dieser Art ist aus keiner anderen Literaturquelle bekannt.

Die Randstörung der Schubspannungen berechnet sich dabei als Differenz zwischen dem Gesamtschubspannungsverlauf und dem Schubspannungsverlauf der Freifeldlösung der QS-Verwölbung.

Zudem werden der Vollständigkeit halber die Schubspannungen mit den zugehörigen Längsrichtungsverläufen in Stabrichtung für den Starrkörperanteil sowie den Abklinganteil getrennt dargestellt.

- **Approximation der 3D-Einzelverschiebungsfelder der Freifeldlösung durch die 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösung und Angabe der zugehörigen Anteilsfaktoren**

Wie bereits in Kapitel 7 aufgezeigt, ist es für die Bestimmung der Stabsteifigkeitsmatrix erforderlich, die Freifeldlösung der QS-Verwölbung durch die 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösung, basierend auf einer „Fehler-Quadrat-Minimum“-Berechnung, auszudrücken. Die Anzahl der dafür ins Spiel gebrachten Abkling-Querschnitts-Verwölbungen ist frei wählbar, diese beeinflusst allerdings gerade bei einer geringen Anzahl an verwendeten relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern das Ergebnis wesentlich.

Die Approximationsqualität der Freifeldlösung der QS-Verwölbung, in Abhängigkeit der für die Approximation verwendeten Anzahl an Abkling-Querschnitts-Verwölbungen, wird im Detail dargestellt. Zudem werden die durch die „Fehler-Quadrat-Minimum“-Berechnung ermittelten Anteilsfaktoren für die jeweiligen Abkling-Querschnitts-Verwölbungen angegeben. Es kann festgehalten werden, dass bereits bei einer geringen Anzahl an verwendeten relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern eine brauchbare approximierte Freifeldlösung der QS-Verwölbung erzielt wird. Gerade für Querschnitte mit nachgiebigen Verbundfugen, es gilt, wie oben erwähnt, eine annähernde Affinität zwischen der ersten Abkling-Querschnitts-Verwölbung und der Freifeldlösung der QS-Verwölbung, führt bereits eine geringe Anzahl an relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern zu hervorragend guten Ergebnissen.

Als Sonderfall wird in Beispiel 1b die Freifeldlösung der QS-Verwölbung als Abkling-Querschnitts-Verwölbung verwendet und den exakten Ergebnissen aus Beispiel 1a gegenüber gestellt. Qualitativ kann von einer sehr guten Übereinstimmung der Ergebnisse gesprochen werden. Für den Schubspannungsverlauf, siehe Abb. 8.33, treten im Nahbereich des Einspannquerschnitts Verletzungen der Oberflächenschubspannungsrandbedingung in exponentiell abklingender Form auf.

- **Darstellung des Fehlers der QS-Verwölbung und der Wölbschubspannung bei der Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung durch die relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder für eine verschiedene Anzahl N.**

Für die oben erwähnte Approximation der Freifeldlösung werden die über den Stabquerschnitt aufsummierten quadratischen Fehler der

- QS-Verwölbung-Approximation, dieser entspricht auch dem Fehler der Wölbnormalspannungen auf Grund deren Affinität, und der
- Wölbschubspannungen

für eine verschiedene Anzahl an verwendeten relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern dargestellt. Mit zunehmender Anzahl der verwendeten Abkling-Querschnitts-Verwölbungen verbessert sich die Approximationsgenauigkeit. Der quadratische Approximationsfehler tendiert gegen Null.

- **Darstellung der approximierten Freifeldlösung der QS-Verwölbung, der Wölbnormalspannungen und der Gesamtschubspannungen für verschiedene Stabstellen  $X_1$ .**

Für die oben erwähnte approximierte Darstellung der Freifeldlösung der QS-Verwölbung werden die Abweichungen für die

- Freifeldlösung der QS-Verwölbung, die
- Wölbnormalspannung und die
- Gesamtschubspannung

für den Stabanfangs- und den Stabendquerschnitt dargestellt. Die verwendete Anzahl an relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern ist mit eins, fünf und  $\infty$  festgelegt. Es zeigt sich, dass für den randstörungsnahen Bereich des Stabs für eine ausreichende Approximation der Ergebnisse deutlich mehr relative 3D-Einzelverschiebungsfelder erforderlich sind als für den ungestörten Stabbereich.

### 8.3 Homogener Querschnitt mit ebener Stab-Kinematik (2D-Kinematik)

#### 8.3.1 Rechteck-Querschnitt mit ebener Stab-Kinematik: Exakte Lösung

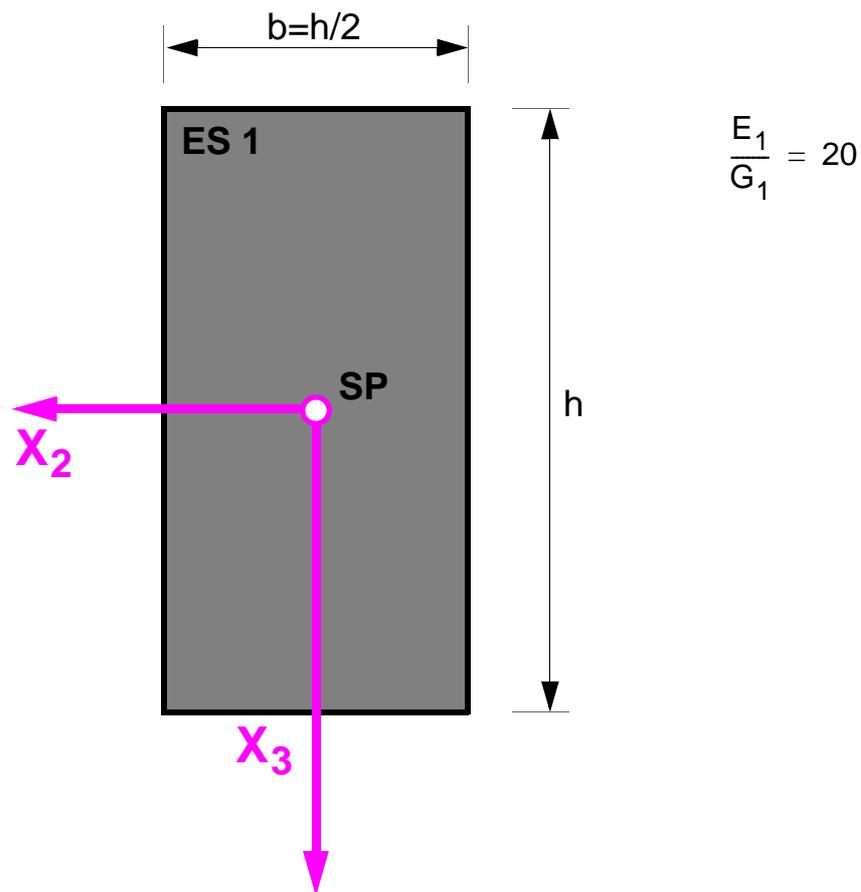
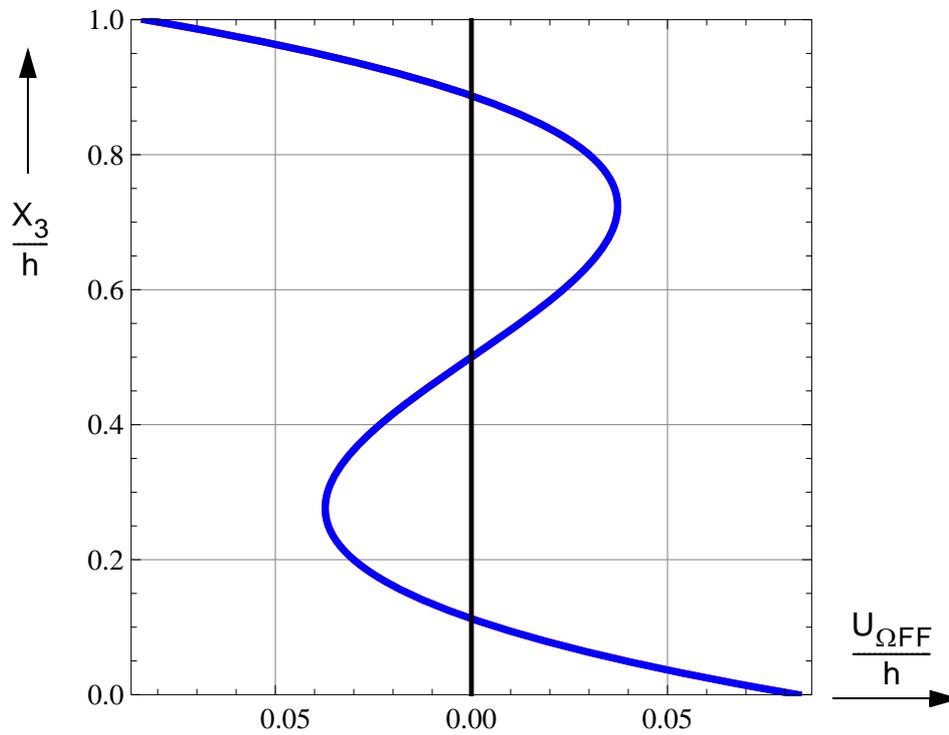


Abb.8.3: Beispiel 1a: Homogener rechteckiger Stabquerschnitt mit 2D-Stabkinematik – Geometrische Abmessungen und Materialdefinitionen für die Elastizitätskonstanten

(a)



(b)

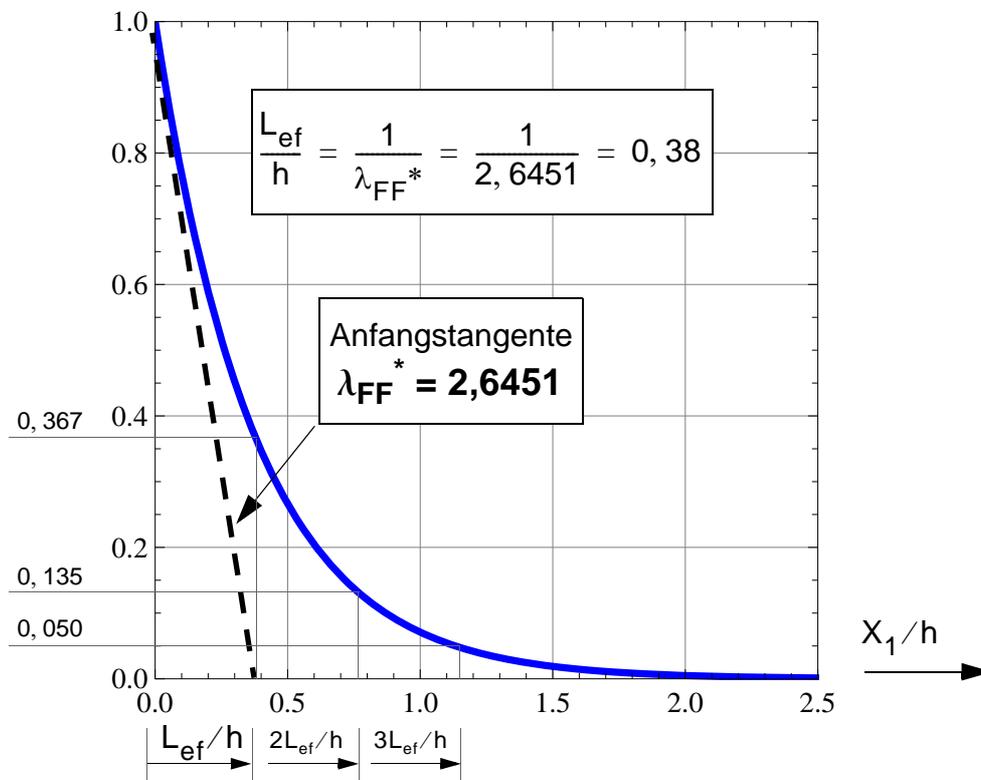


Abb.8.4: (a) Freiefeldlösung für die axiale QS-Verwölbung,  
 (b) Abklingverhalten der QS-Verwölbung der Freiefeldlösung in Stablängsrichtung bei Verwendung als Abkling-QS-Verwölbung

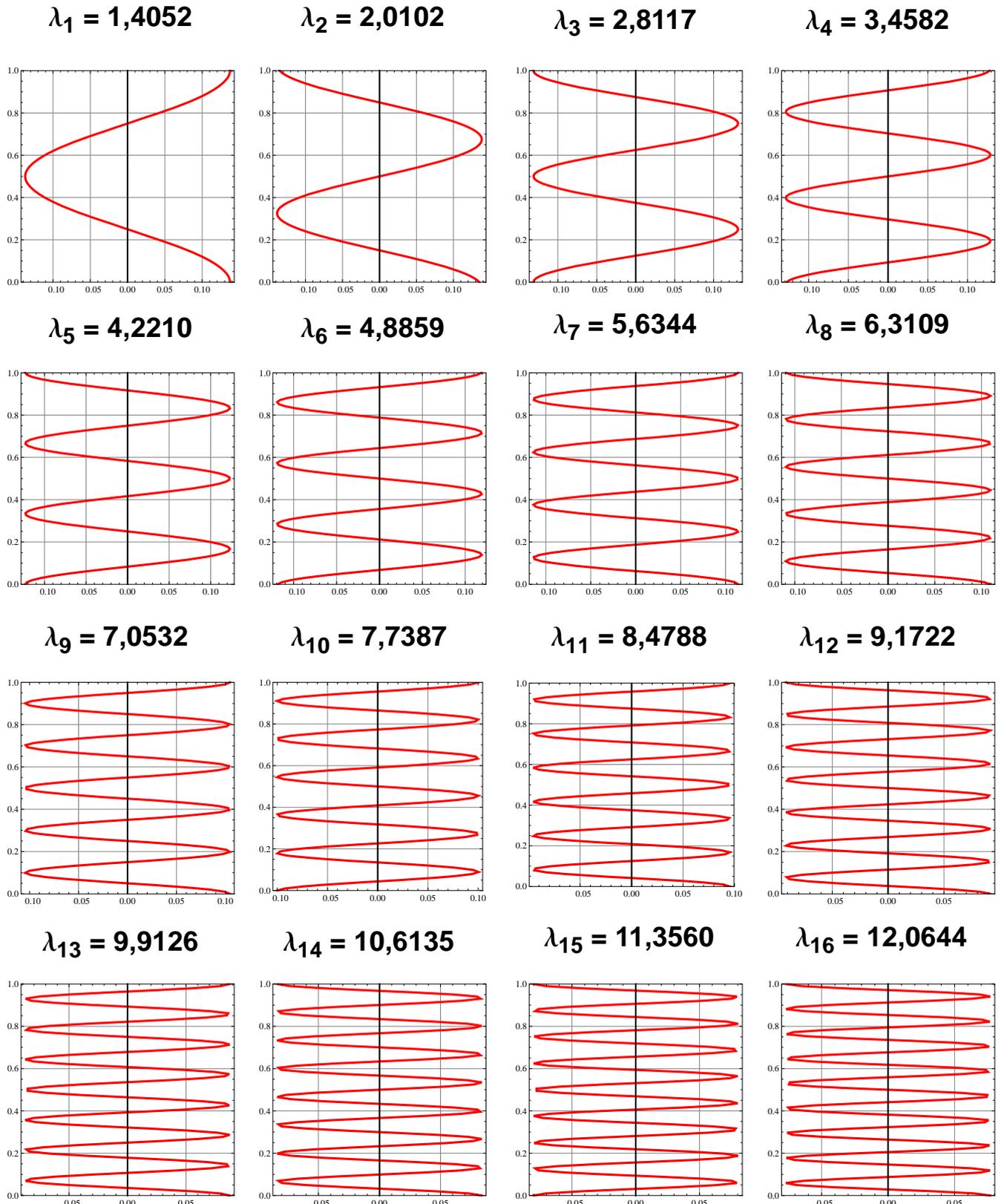


Abb.8.5: Abkling-QS-Verwölbungen ( $n=1$  bis 16) und zugehörige Abklingzahlen für das exponentielle Abklingverhalten in Stablängsrichtung ( $X_1$ )

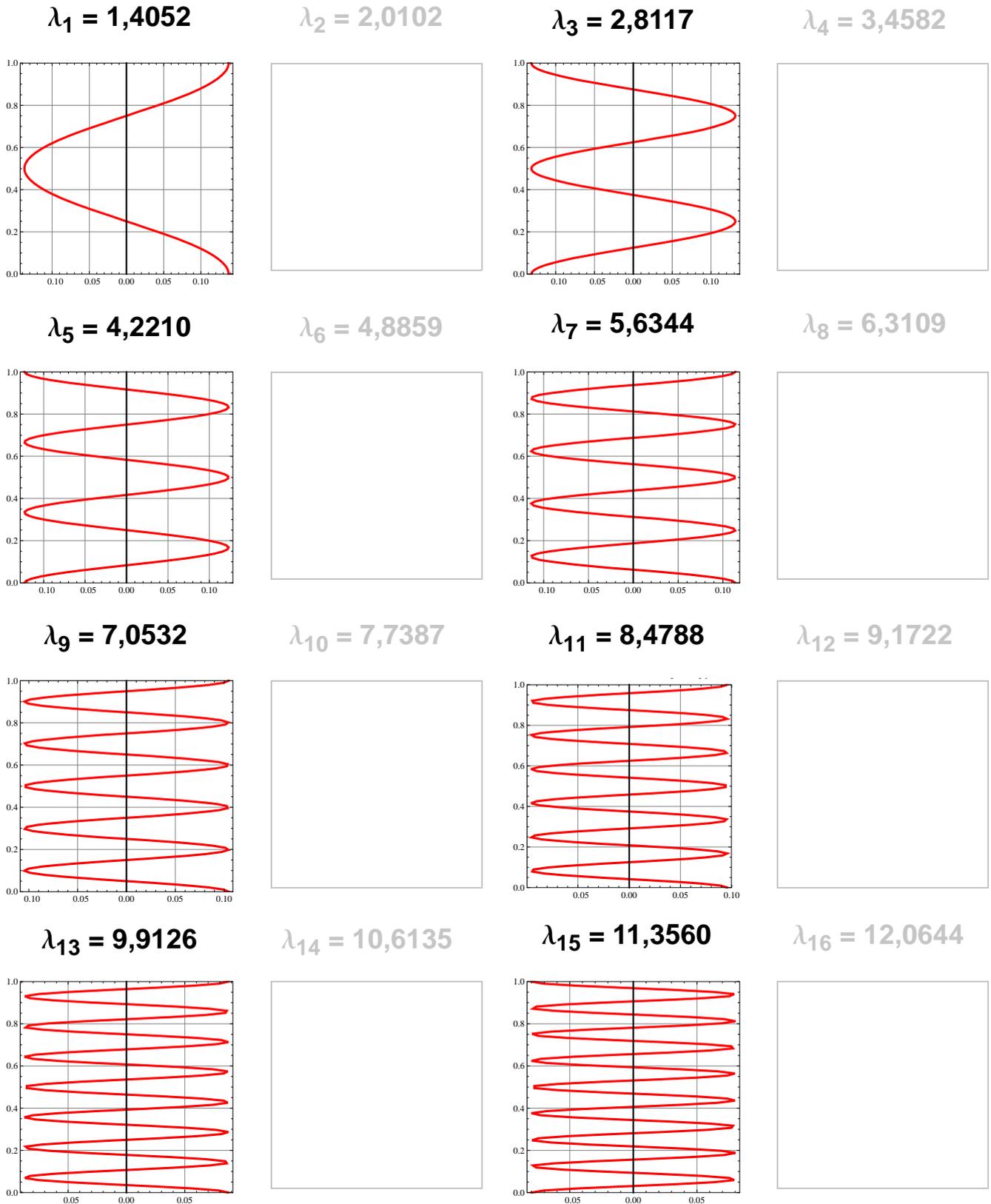


Abb.8.6: Symmetrische (nicht wirksame) Abkling-QS-Verwölbungen ( $n=1$  bis  $16$ ) und zugehörige Abklingzahlen für das exponentielle Abklingverhalten in Stablängsrichtung ( $X_1$ )

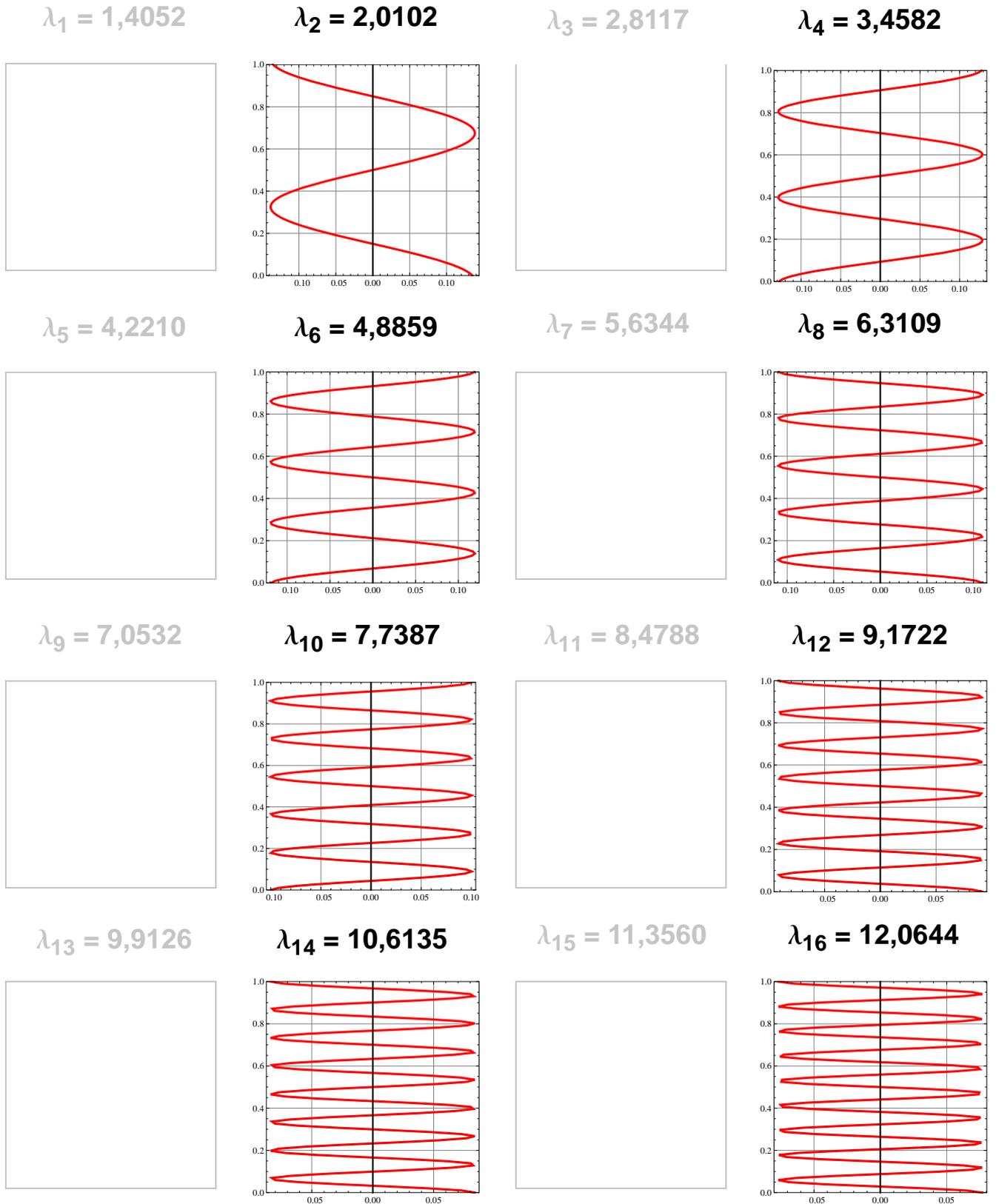
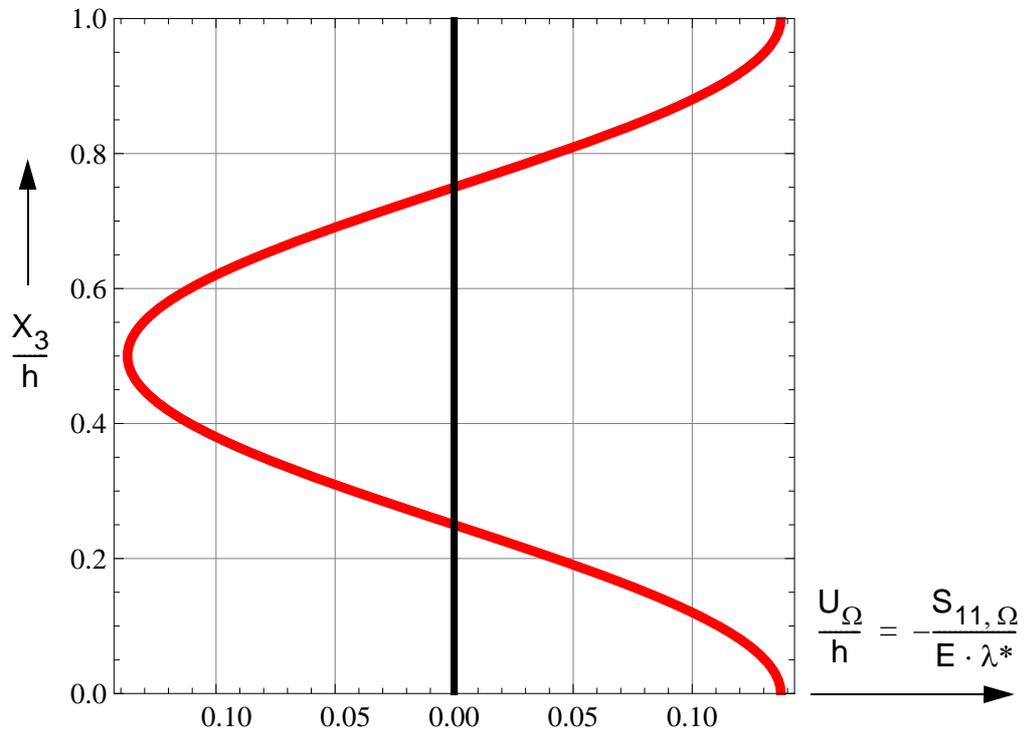


Abb.8.7: Antimetrische (wirksame) Abkling-QS-Verwölbungen ( $n=1$  bis 16) und zugehörige Abklingzahlen für das exponentielle Abklingverhalten in Stablängsrichtung ( $X_1$ )

(a)



(b)

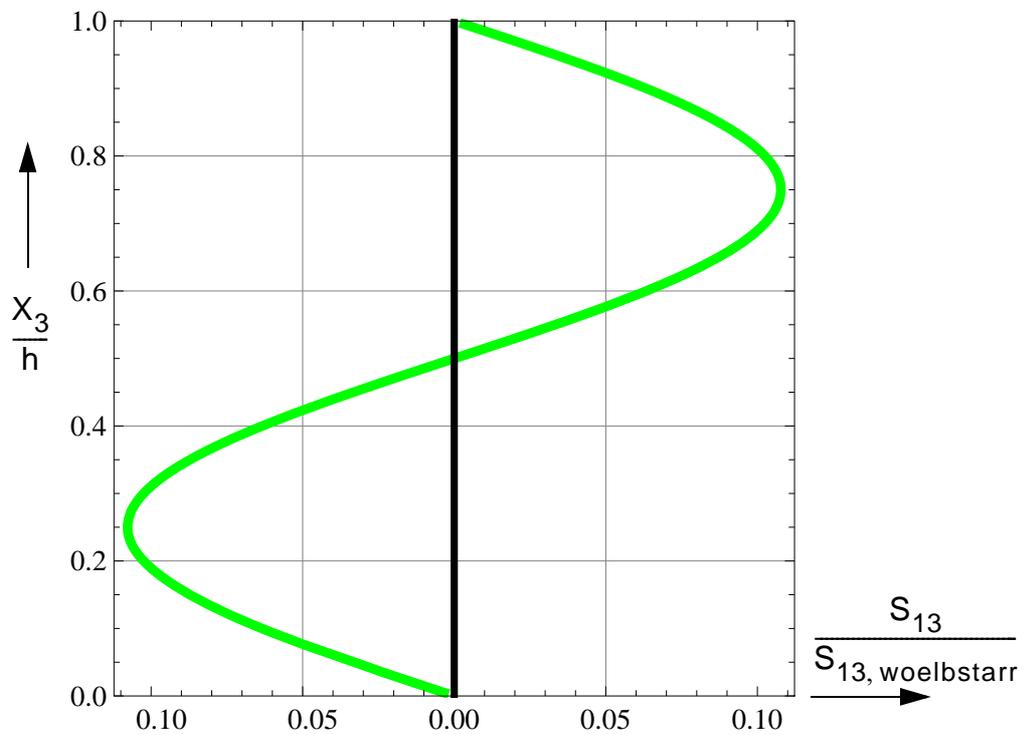
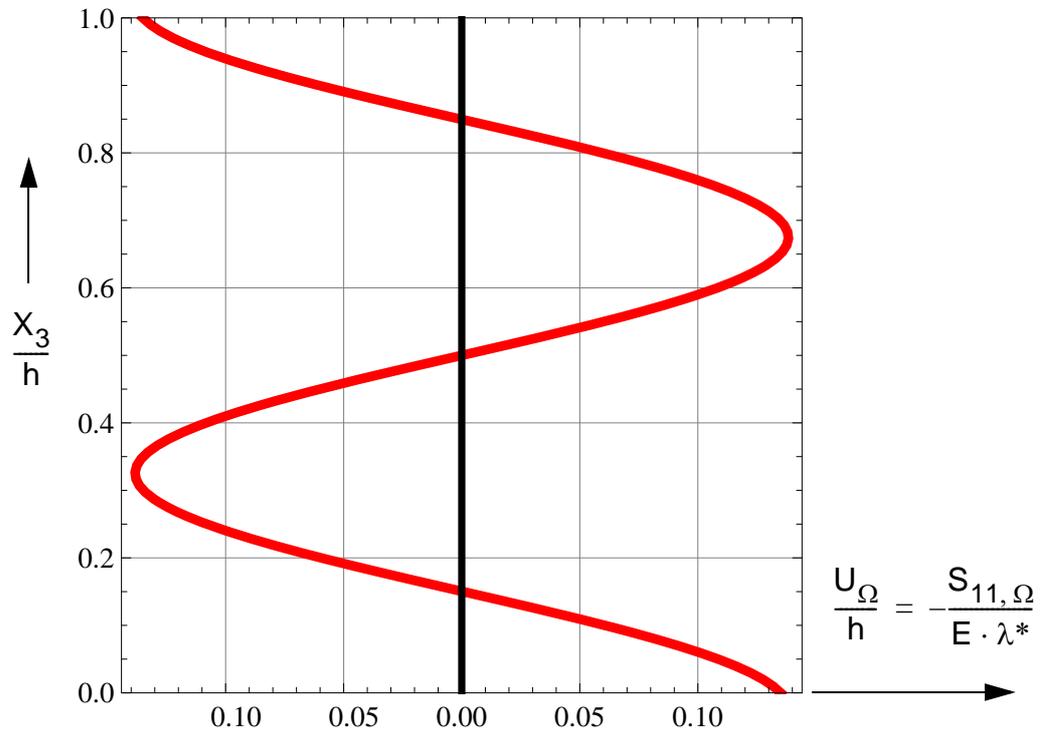


Abb.8.8: (a) Abklinglösung der QS-Verwölbung ( $n=1$ ) und zugehörige Wölbnormalspannung in bezogener Darstellung, (b) zugehörige Wölb Schubspannungen in bezogener Darstellung

(a)



(b)

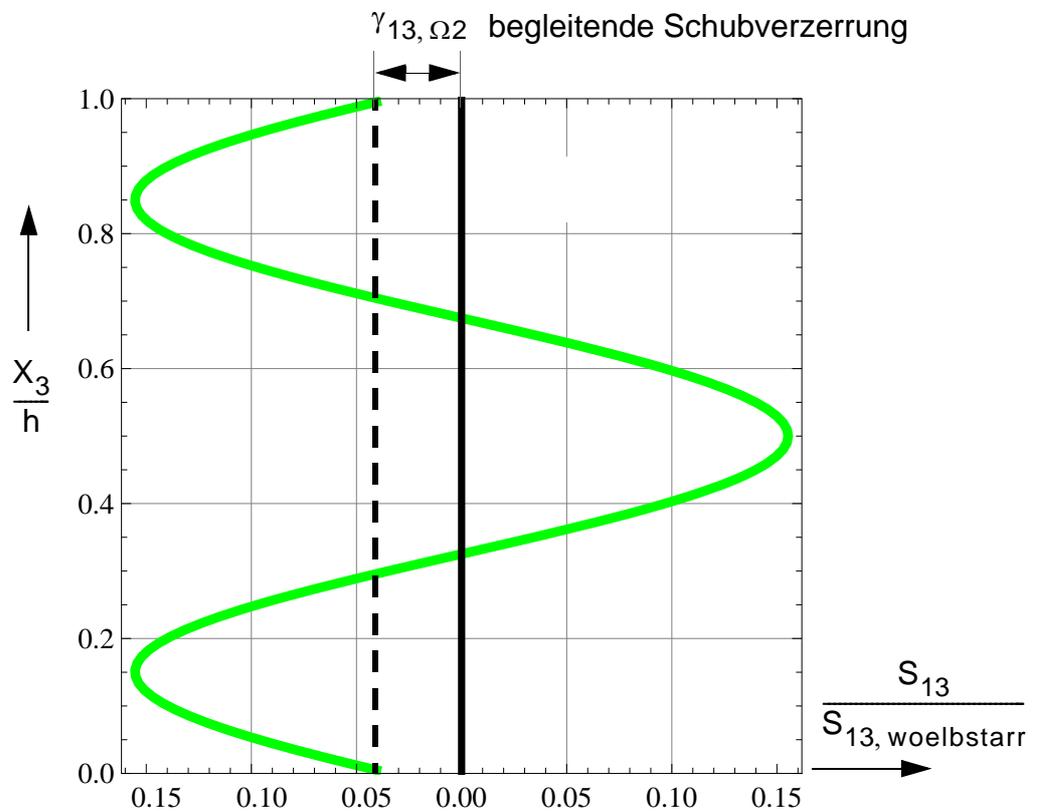


Abb.8.9: (a) Abklinglösung der QS-Verwölbung ( $n=2$ ) und zugehörige Wölbnormalspannung in bezogener Darstellung, (b) zugehörige Wölbschubspannungen in bezogener Darstellung

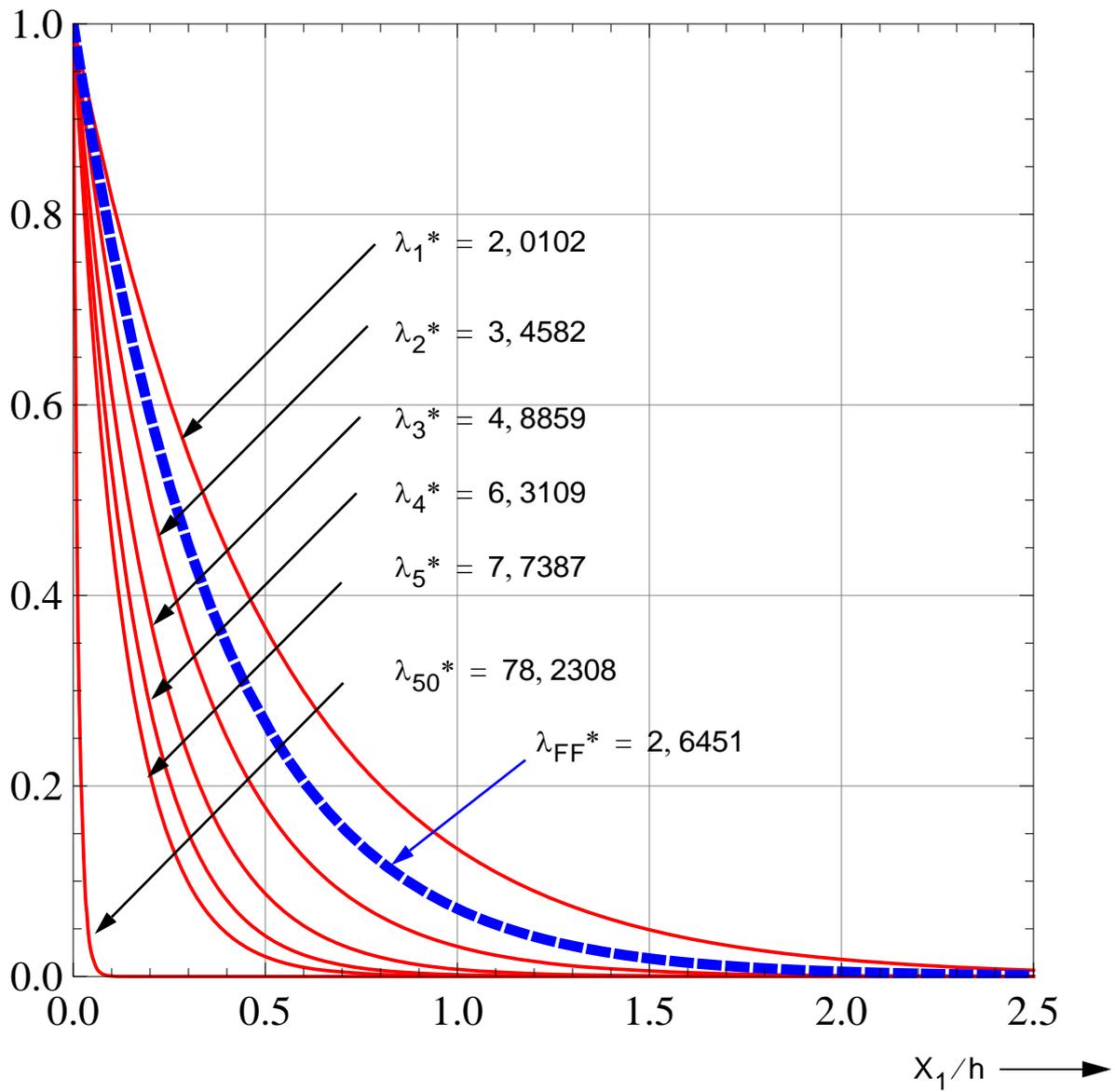


Abb.8.10: Stablängsverhalten der Abkling-QS-Verwölbungen ( $n=1$  bis  $5$  und  $50$ ) sowie der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

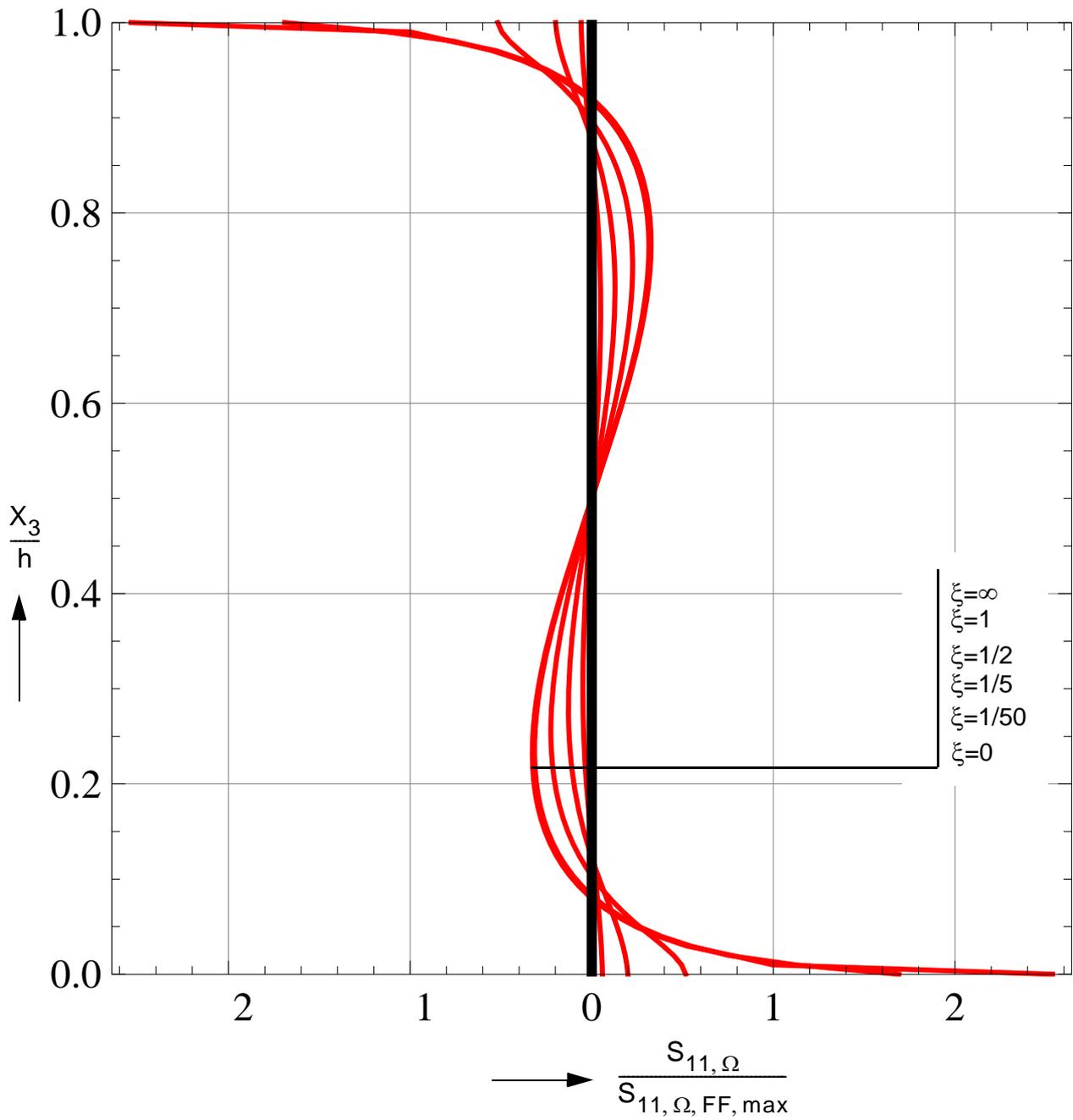


Abb.8.11: Exakte QS-Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung für verschiedene Stellen  $X_1$  in Stablängsrichtung mit Darstellung der Spannungsspitzen

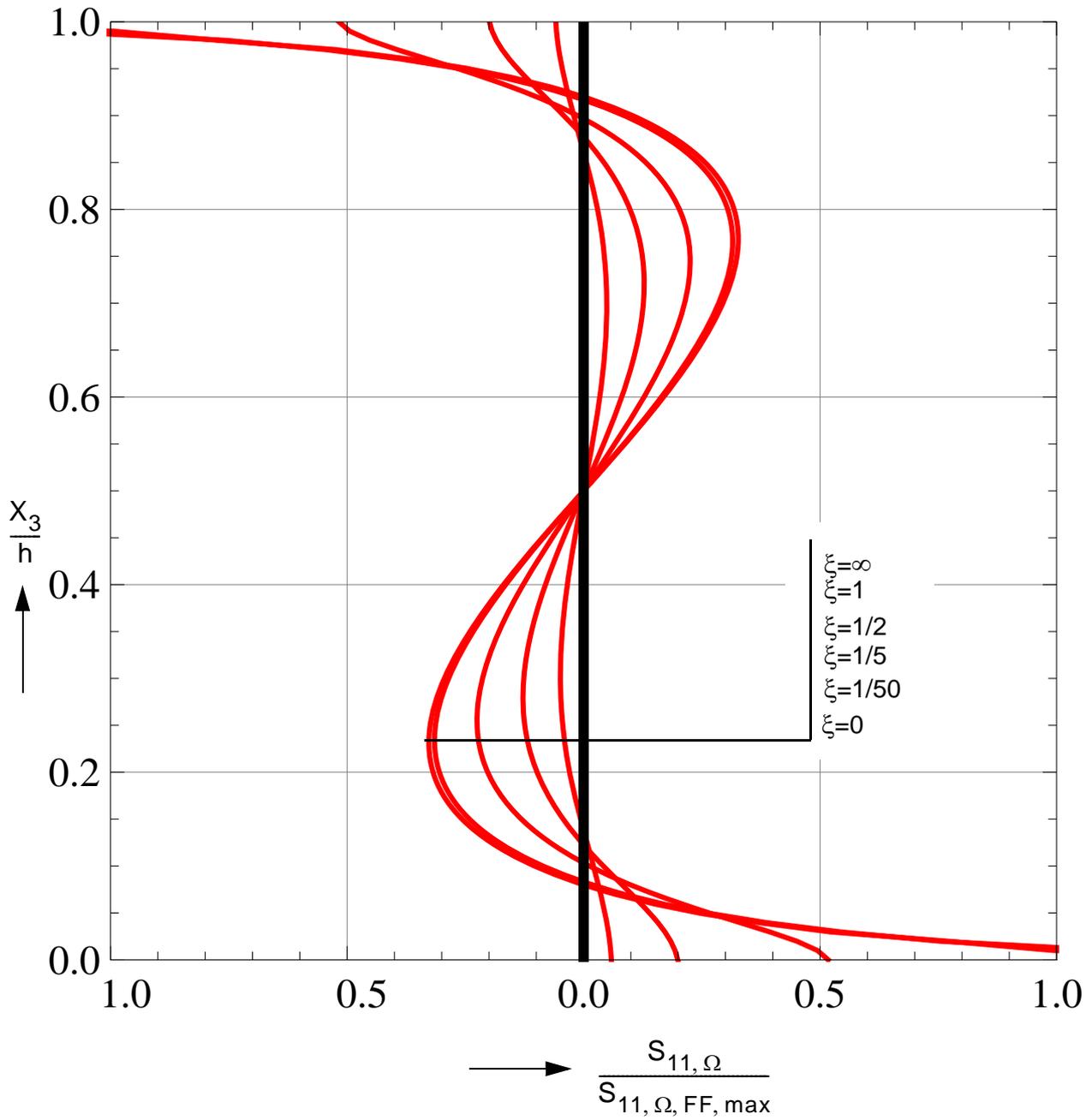


Abb.8.12: Exakte QS-Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung für verschiedene Stellen  $X_1$  in Stablängsrichtung ohne Darstellung der Spannungsspitzen (Plotbereich:  $-1/1$ )

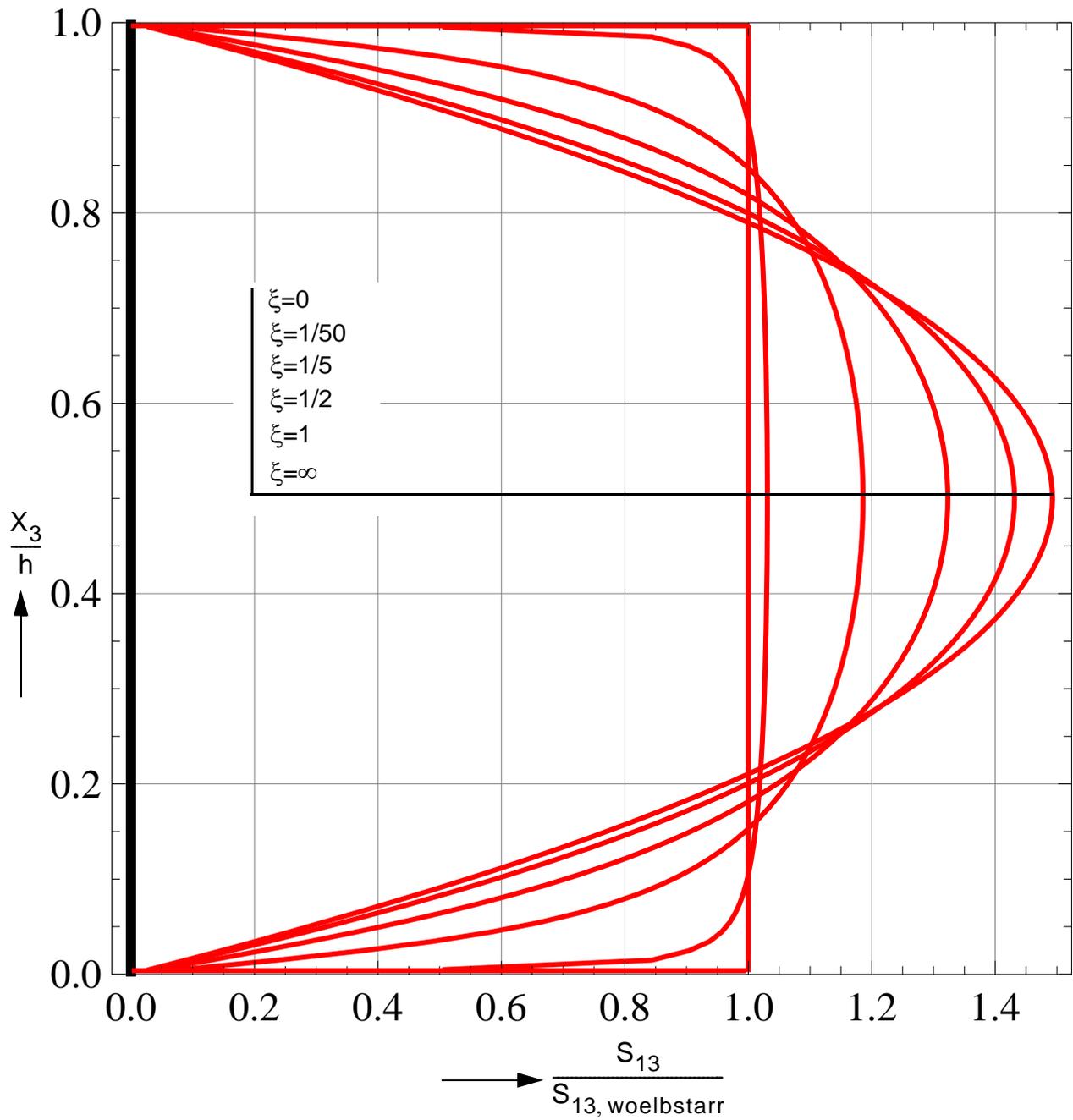


Abb.8.13: Schubspannungen in bezogener Darstellung für verschiedene  $X_1$  in Stablängsrichtung

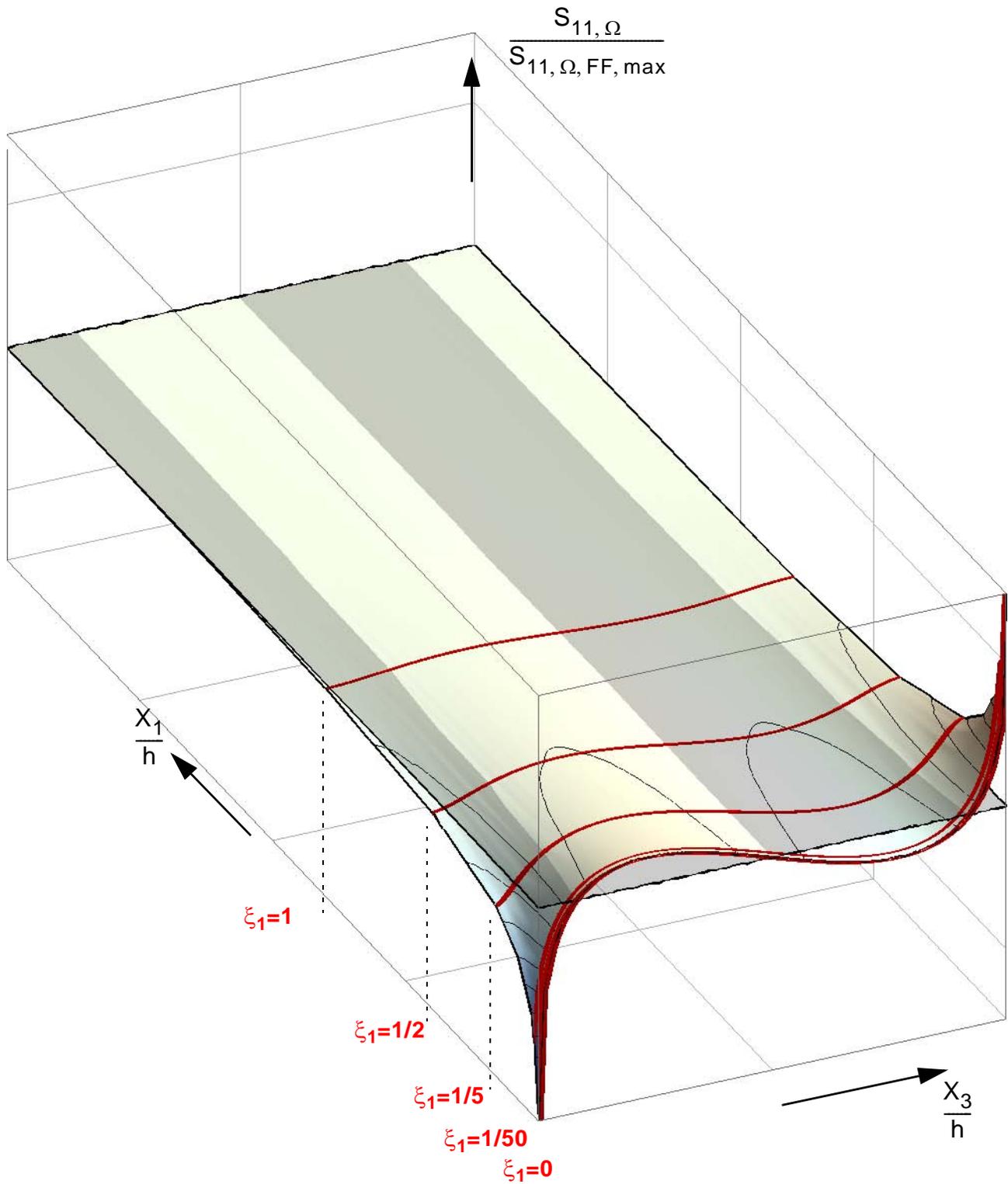


Abb.8.14: Verlauf der Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen für Abb. 8.11 a)

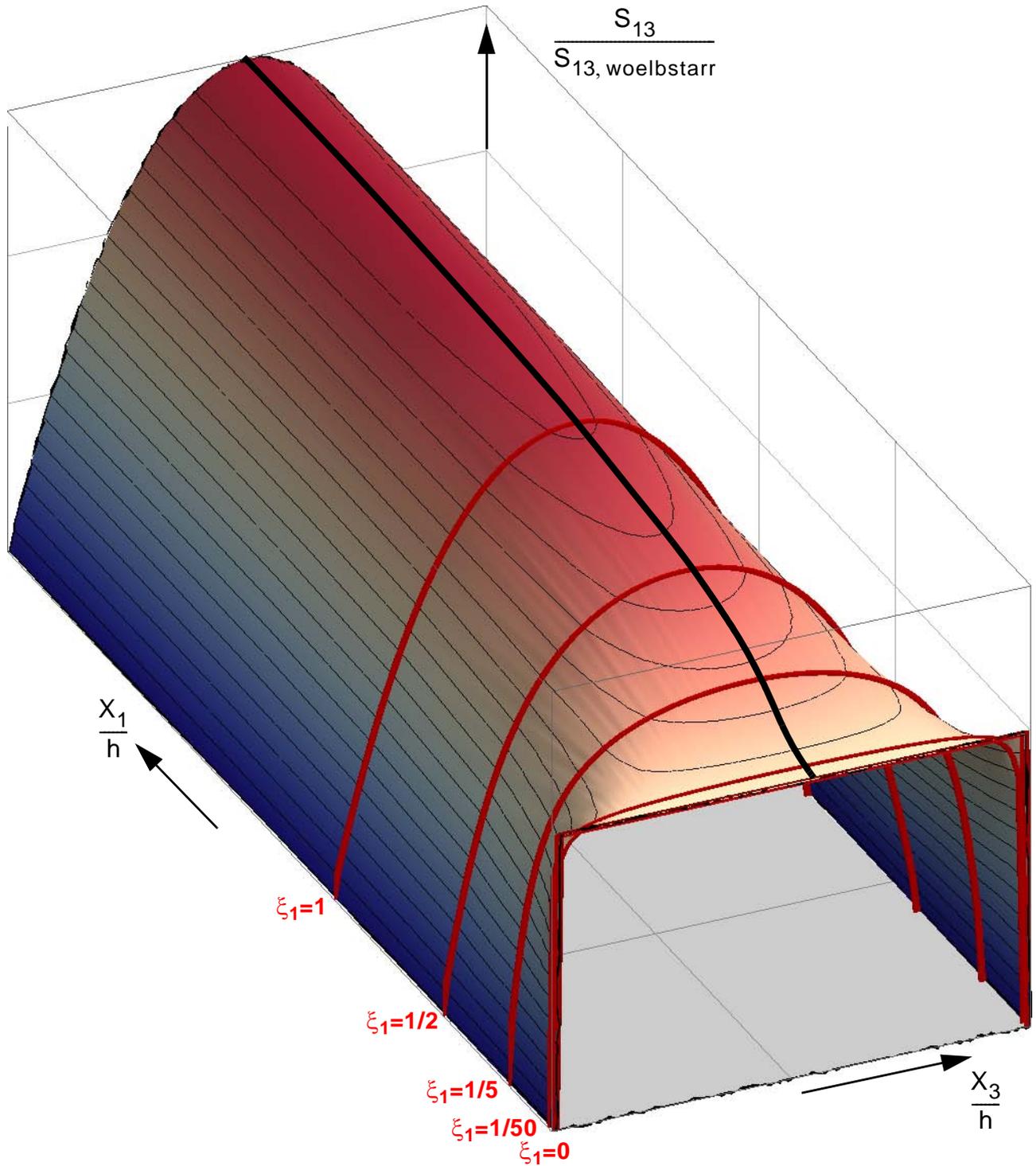


Abb.8.15: Verlauf der Schubspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen für Abb. 8.13 a)

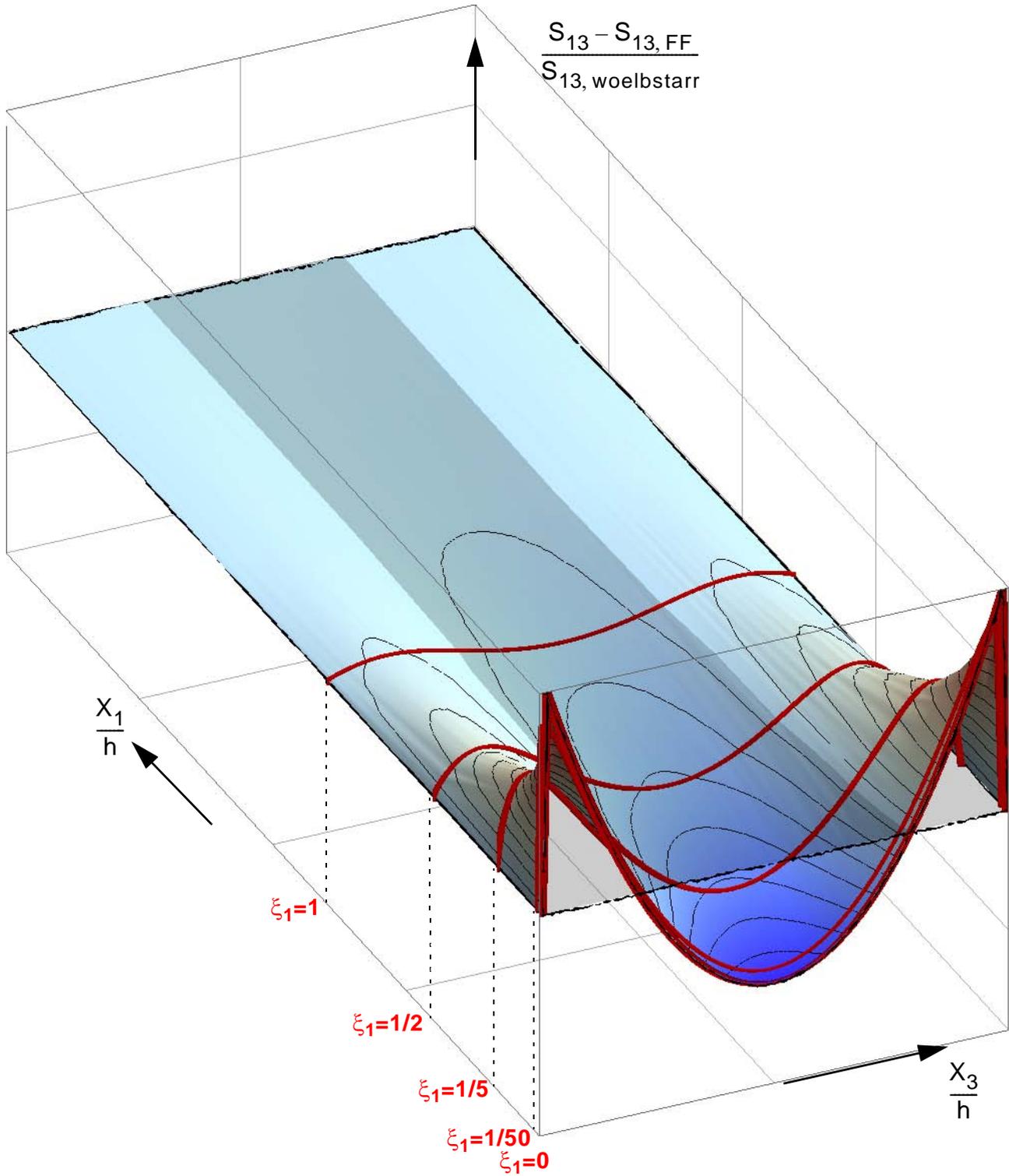


Abb.8.16: Abklingende Randstörung der Schubspannungen bezogen auf die Schubspannung des wölbestarren Querschnitts in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen

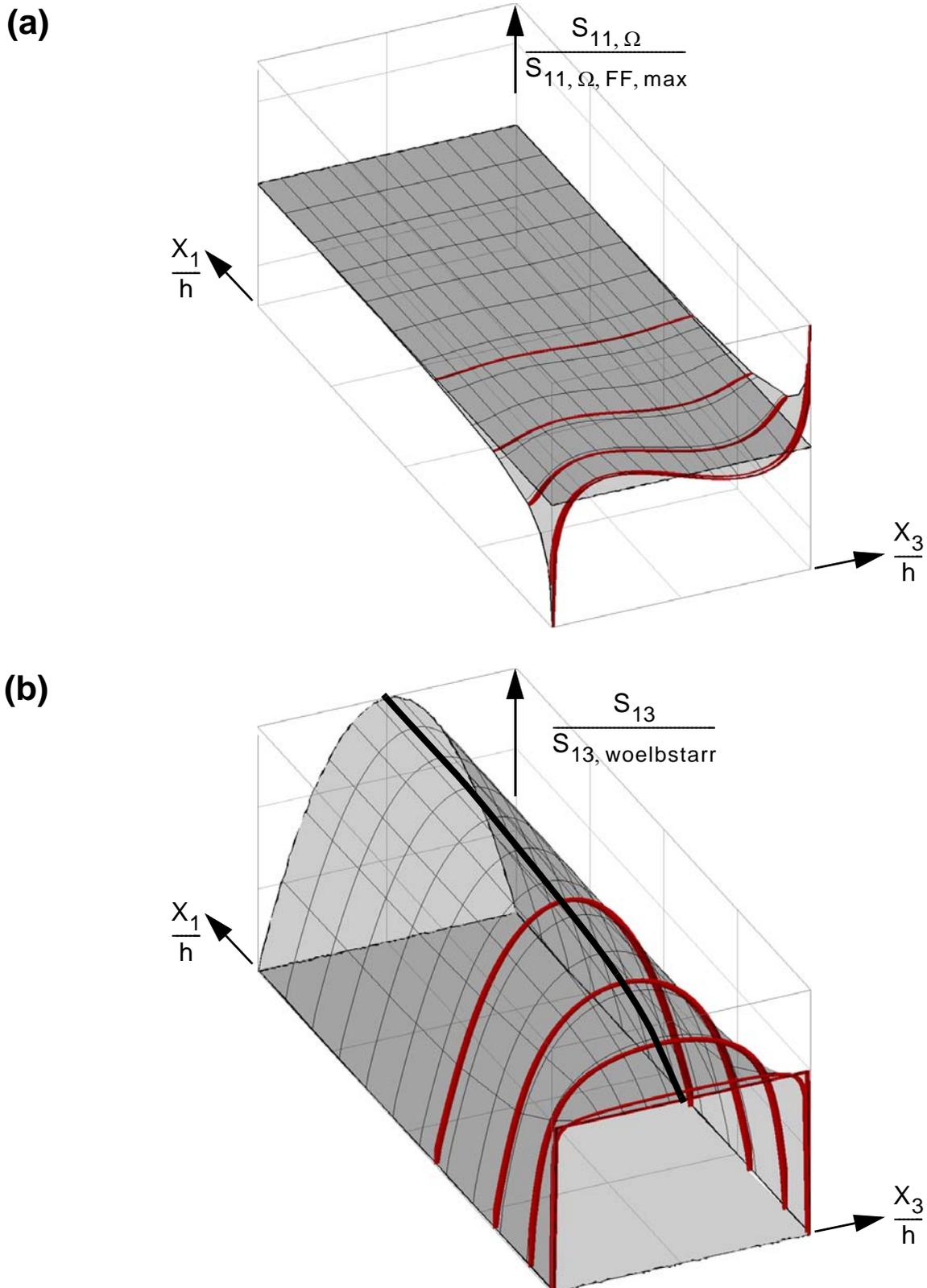


Abb.8.17: a) Verlauf der Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung, b) Verlauf der Schubspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen

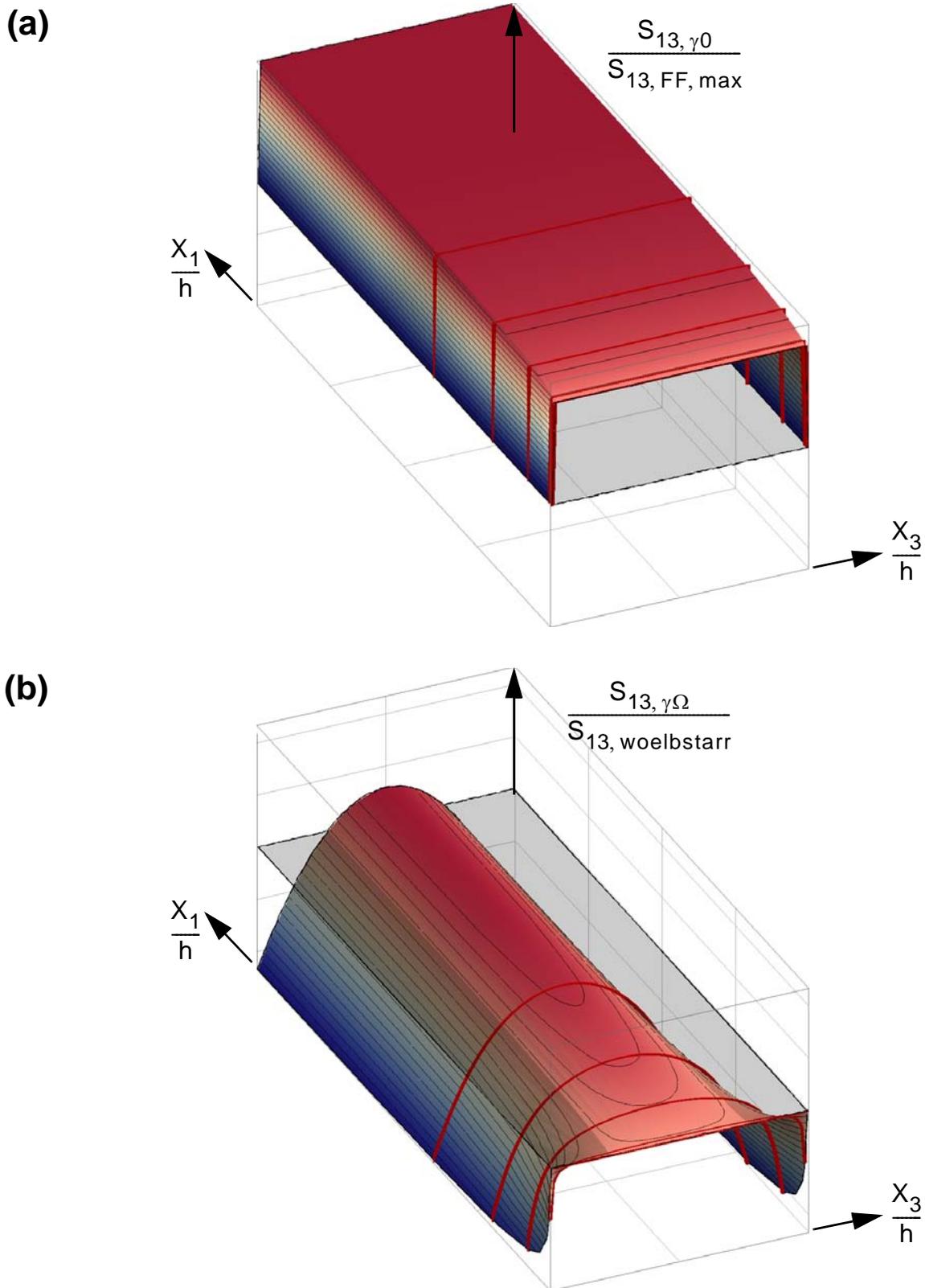


Abb.8.18: Verlauf der Schubspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung  $X_1$ :  
 a) Starrkörperanteil b) Abklinganteil

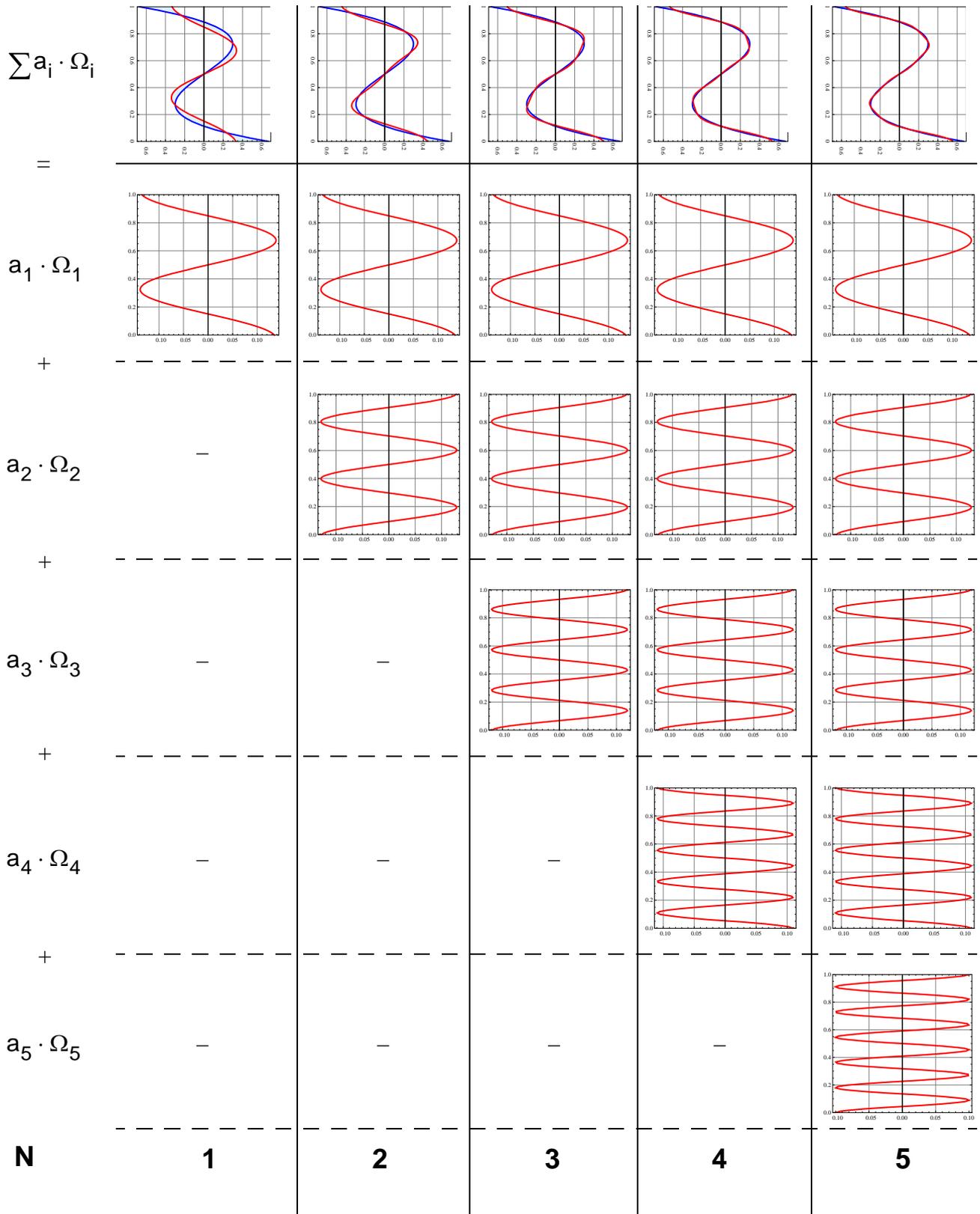


Abb.8.19: Approximation der Freiefeldlösung der QS-Verwölbung durch 1, 2, 3, 4 und 5 wirksame Abkling-QS-Verwölbungen

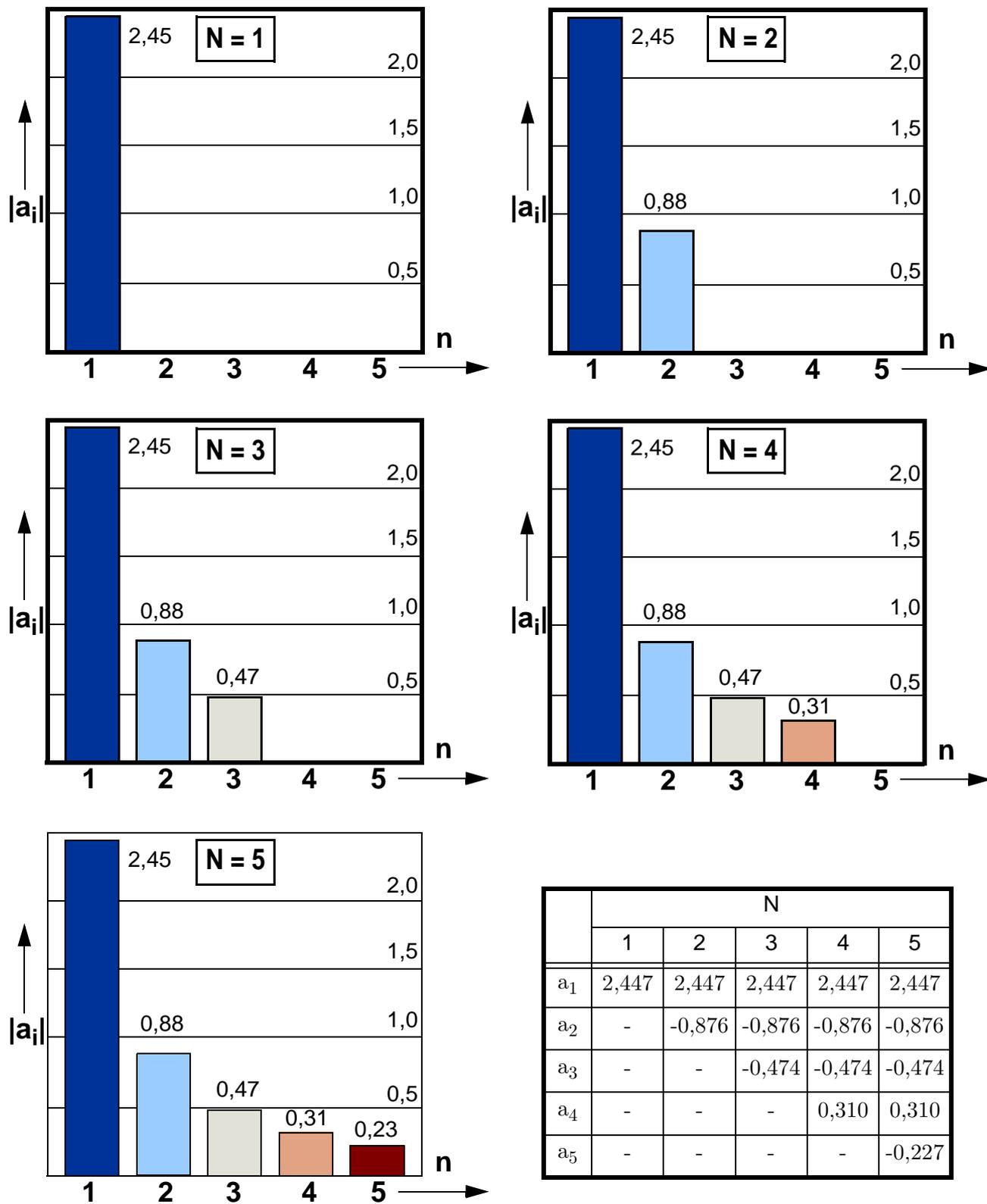


Abb.8.20: Anteilsfaktoren der Abkling-QS-Verwölbungen für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung für  $N=1, 2, 3, 4$  und  $5$  wirksame Abkling-QS-Verwölbungen

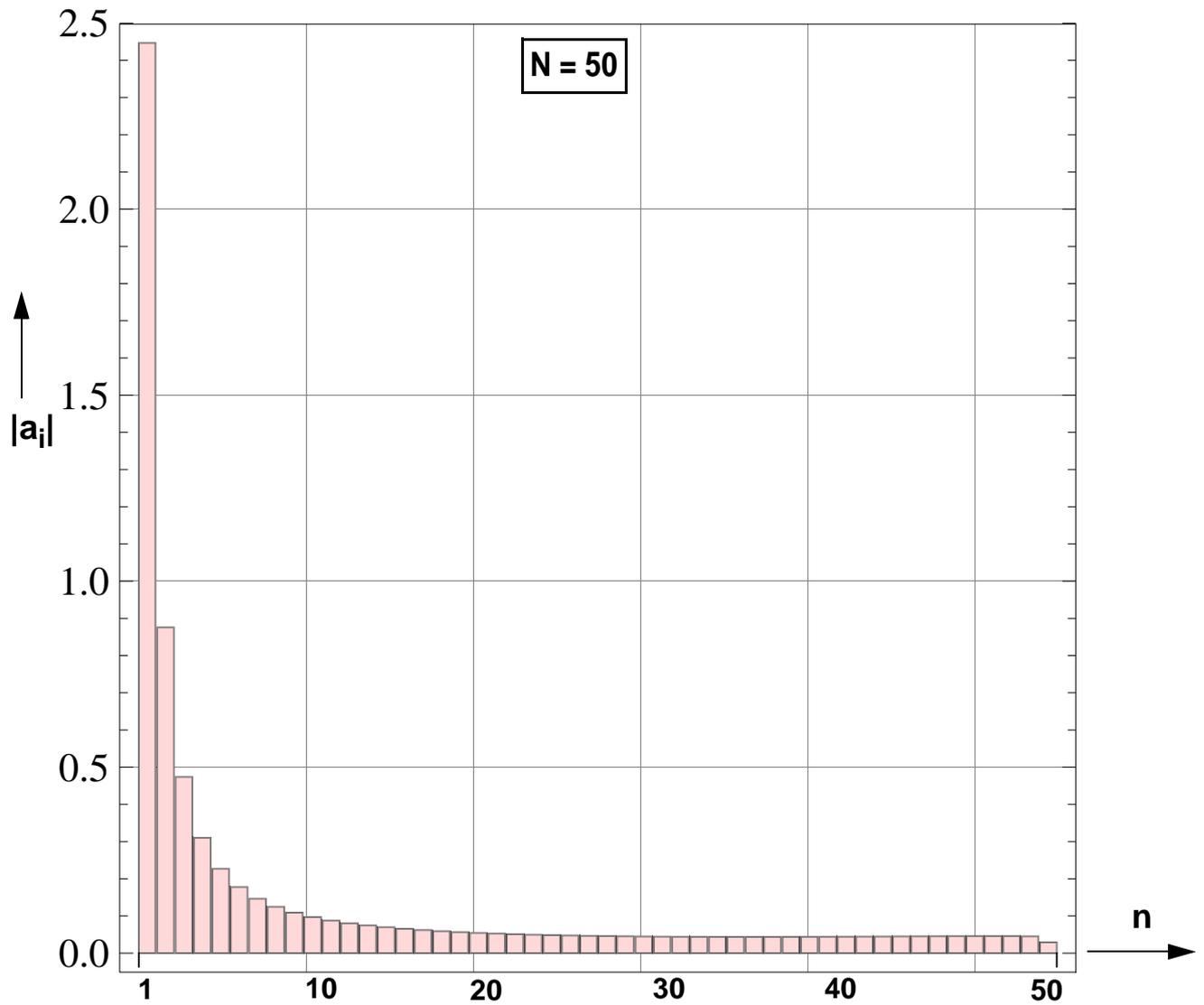
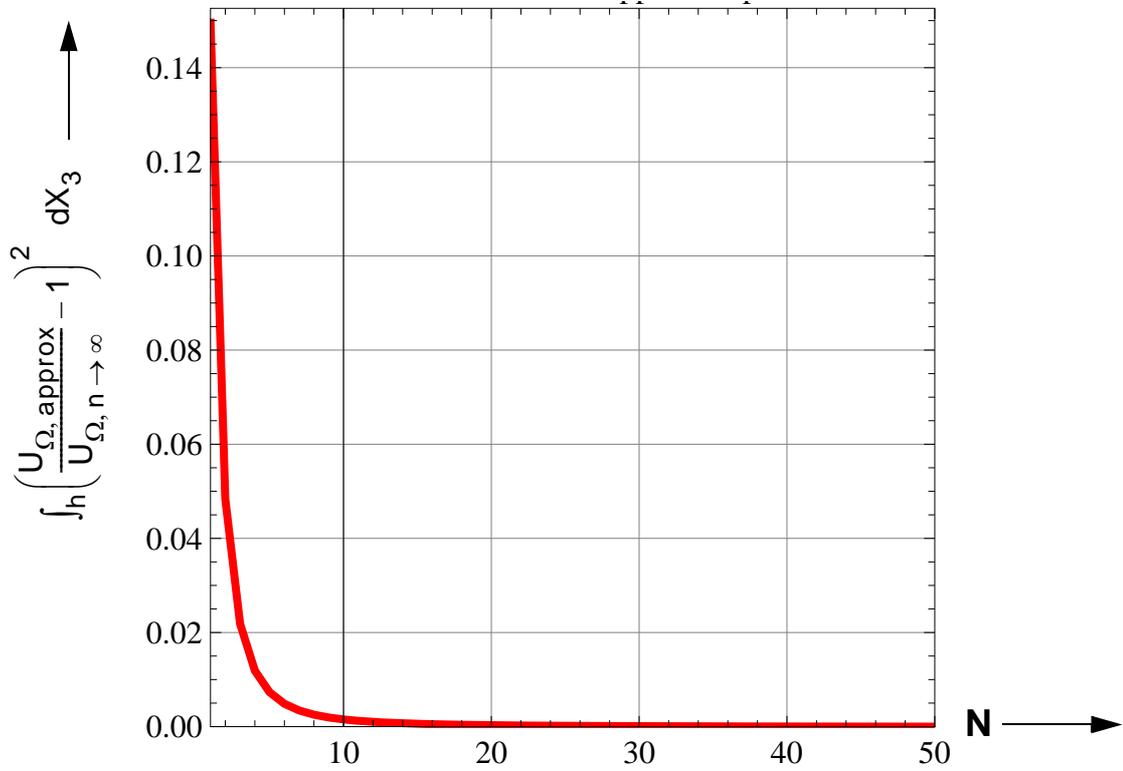


Abb.8.21: Anteilfaktoren der Abkling-QS-Verwölbungen für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung für  $N=50$  wirksame Abkling-QS-Verwölbungen

(a)



(b)

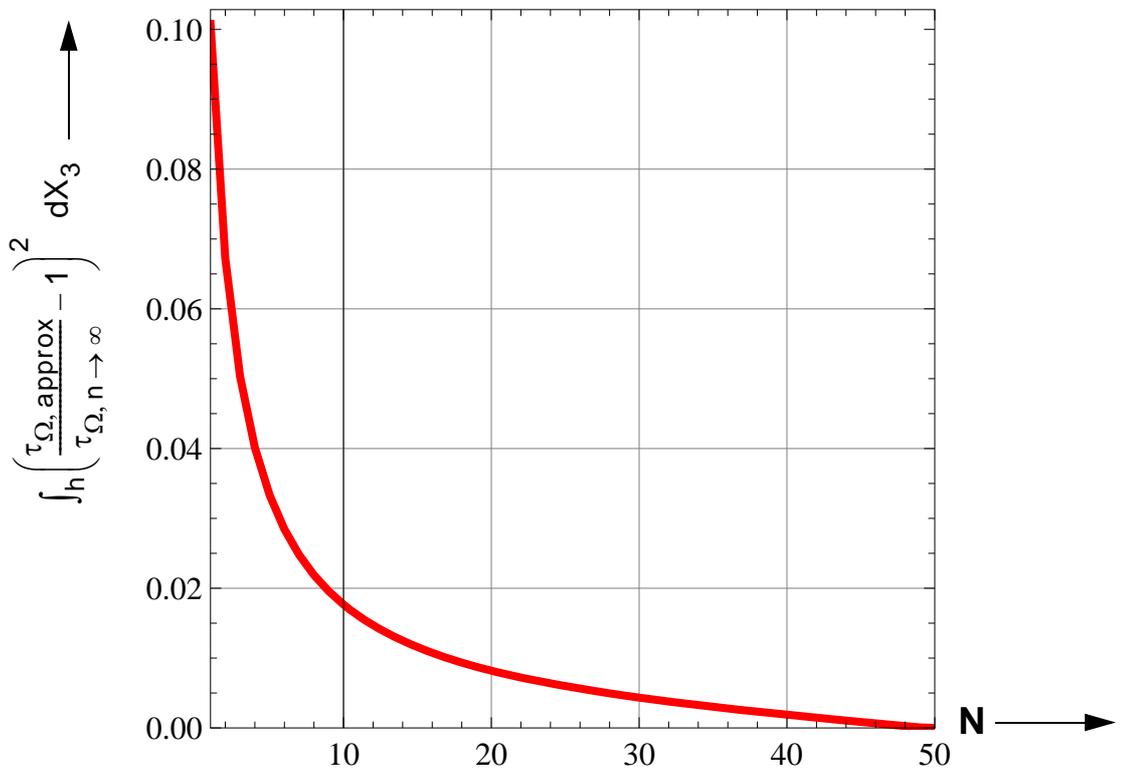


Abb.8.22: Auftretender Fehler bei Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung durch die Ableitung-QS-Verwölbungen  $N=1$  bis 50: (a)  $U_{\Omega}$  und (b) Schubspannungen  $\tau_{\Omega}$  bei  $\xi=0$

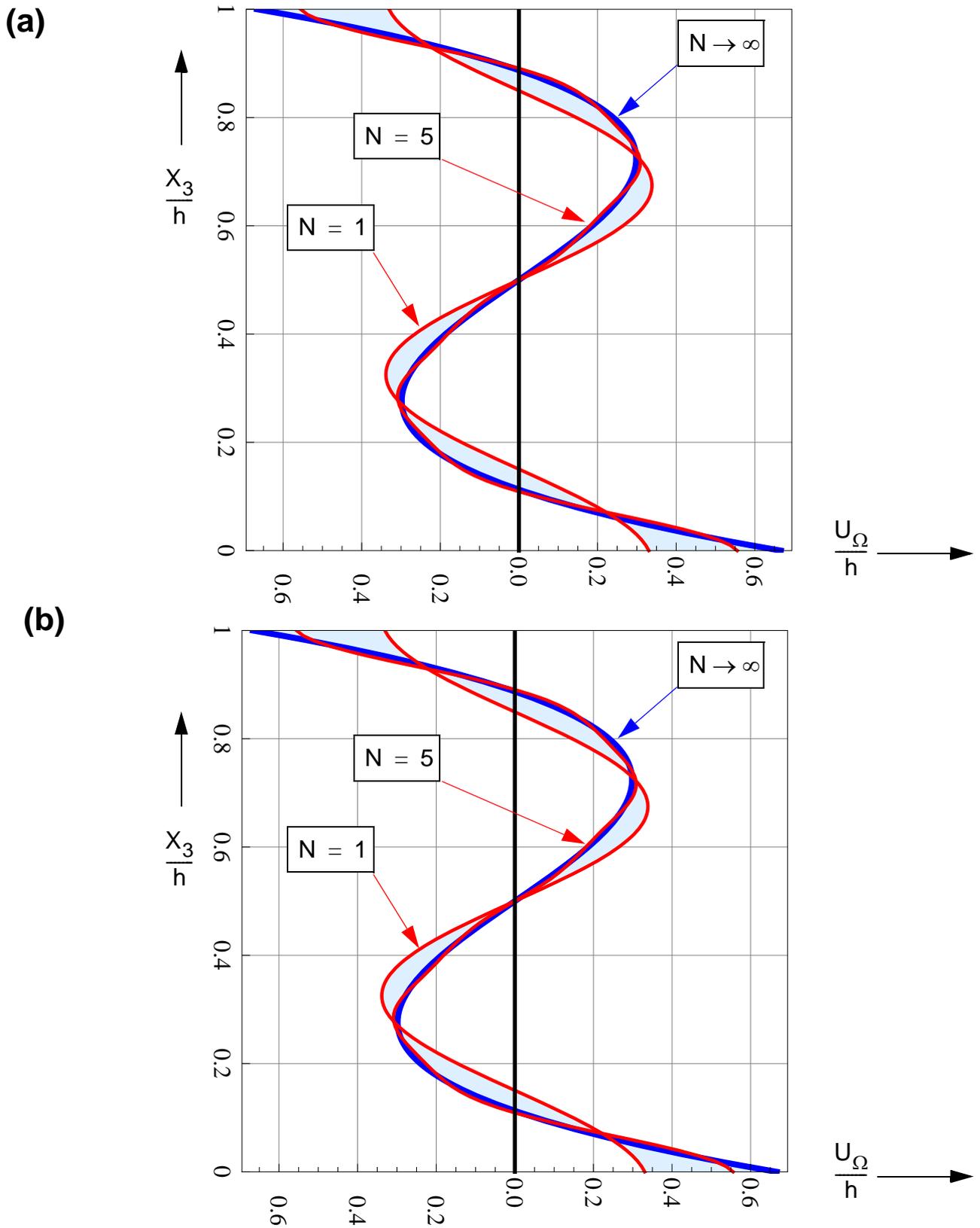


Abb.8.23: Approximierte Freifeldlösung der QS-Verwölbung für a)  $\xi=0$  und b)  $\xi=1$

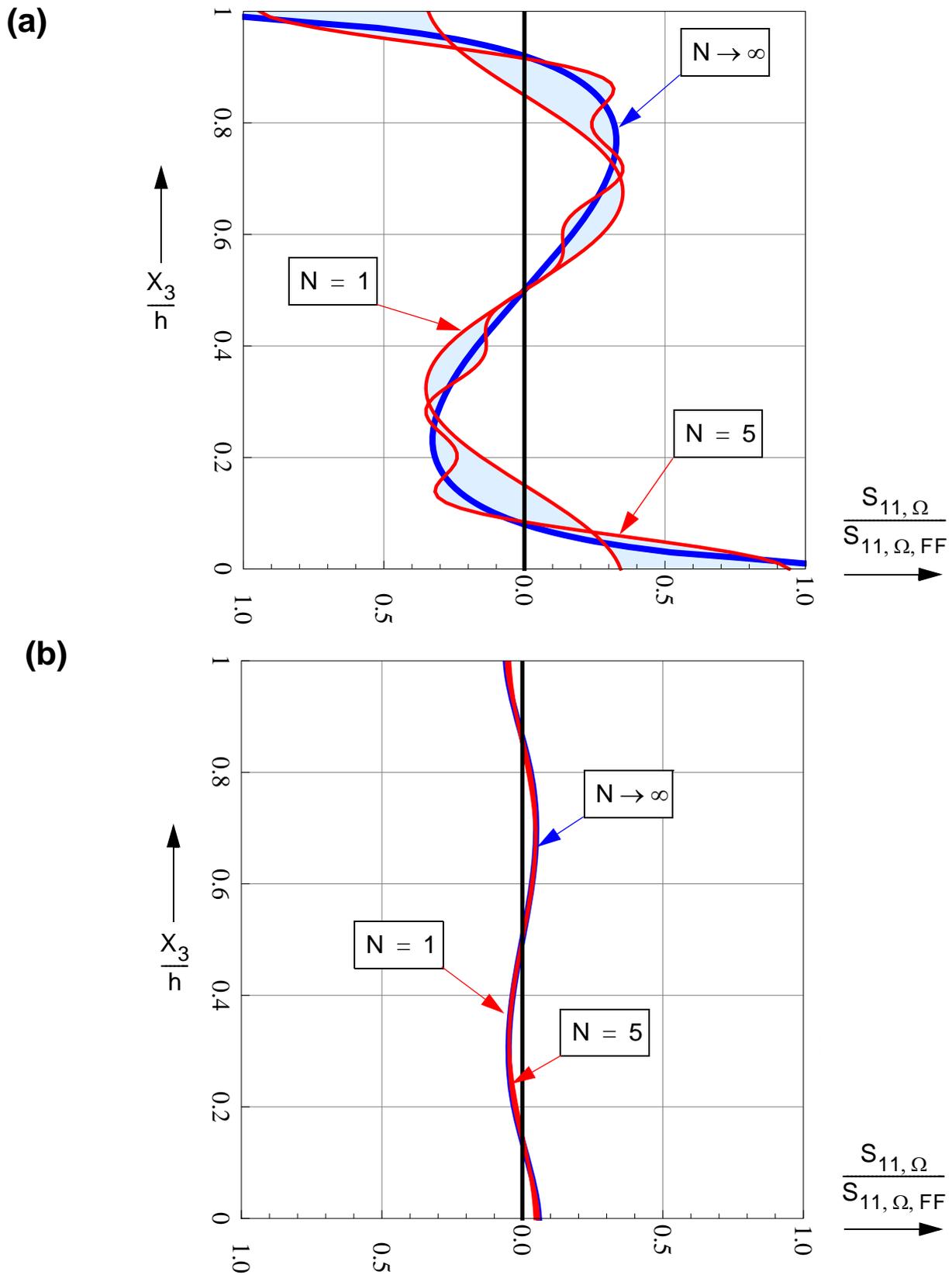


Abb.8.24: Wölbnormalspannung in bezogener Darstellung für die approximierte Freiefeldlösung der QS-Verwölbung für a)  $\xi_5=0$  und b)  $\xi_5=1$

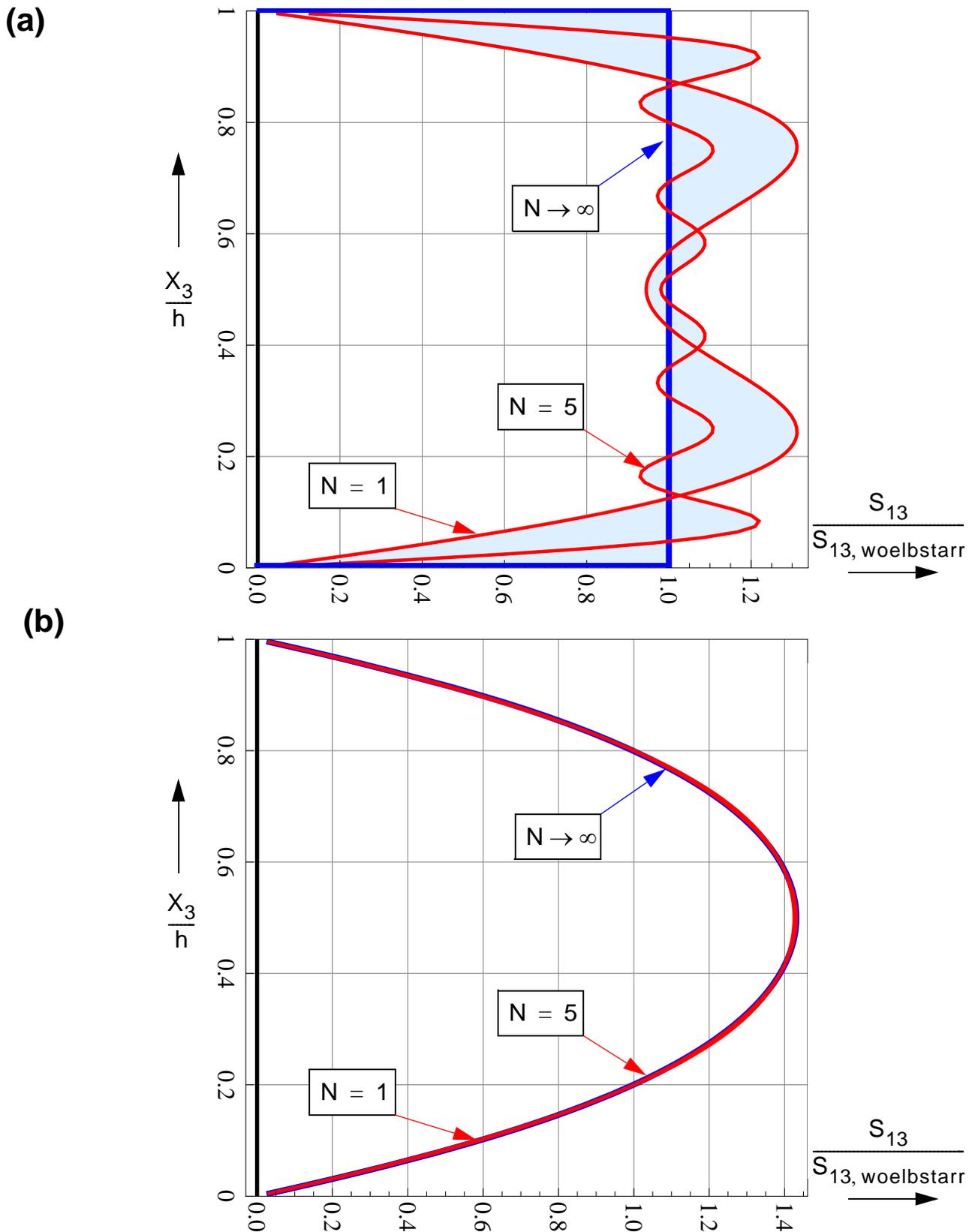


Abb.8.25: Resultierende Schubspannung in bezogener Darstellung für die approximierte Freifeldlösung der QS-Verwölbung für a)  $\xi=0$  und b)  $\xi=1$



## 8.3.2 Rechteck-Querschnitt mit ebener Stab-Kinematik: FF-Lösung als Abklinglösung

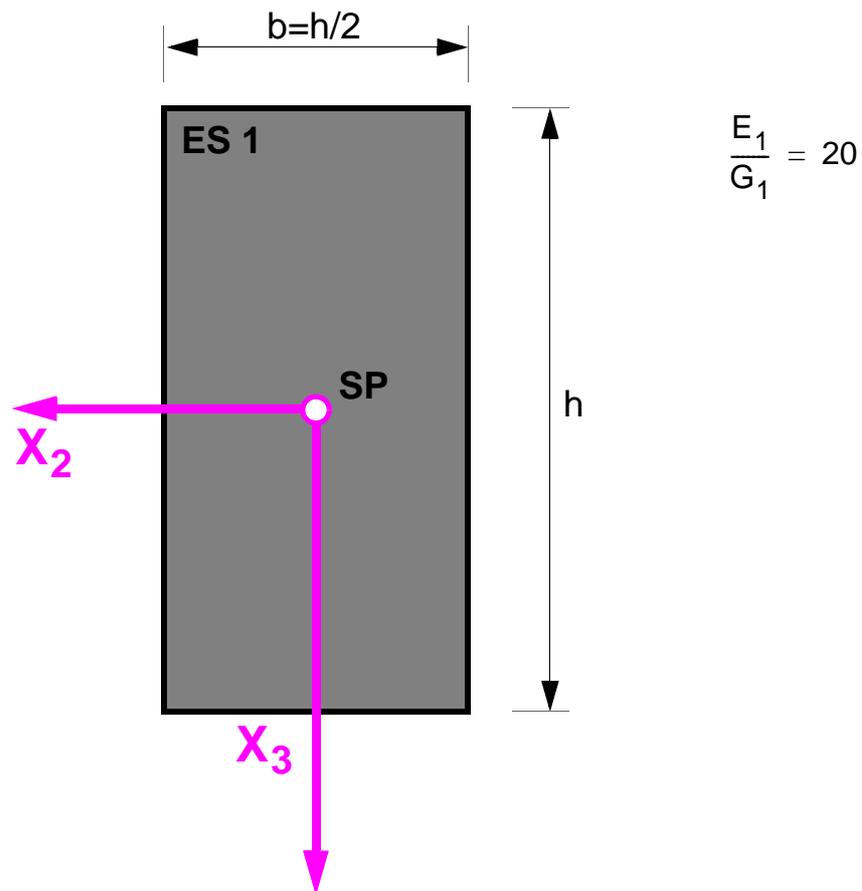


Abb.8.26: Beispiel 1b: Homogener rechteckiger Stabquerschnitt mit 2D-Stabkinematik – Geometrische Abmessungen und Materialdefinitionen für die Elastizitätskonstanten

### 8.3.2.1 Interpretation der Ergebnisse

Wird das relative 3D-Einzelverschiebungsfeld der Freifeldlösung im Falle des Stabes mit 2D-Kinematik als einzige Abklinglösung verwendet, ist für die daraus resultierenden Ergebnisse für die Normalspannungen und für die Schubspannungen über den Stabquerschnitt Folgendes festzuhalten.

Die Verwendung des 3D-Einzelverschiebungsfeldes der Freifeldlösung als Abklinglösung bringt zwei wesentliche Vorteile in der Berechnung mit sich:

- Der Rechenaufwand bei der Ermittlung der Stabsteifigkeitsmatrix kann bei Verwendung nur einer Abklinglösung auf ein Minimum reduziert werden.
- Für den Stabbereich außerhalb der dreifachen effektiven Abklinglänge stellt das 3D-Einzelverschiebungsfeld der Freifeldlösung bereit die exakte Lösung dar. Für den betrachteten homogenen Stabquerschnitt kann davon ausgegangen werden, dass in einer Entfernung der einfachen Querschnittshöhe die Randstörungseinflüsse unter 5 % abgeklungen sind.

Für die Normalspannungen und für die Schubspannungen über den Stabquerschnitt ist Folgendes festzuhalten:

- **Normalspannungen**

Der Wölbnormalspannungsverlauf über die Querschnittshöhe ergibt sich in völlig affiner Form zum Verlauf des 3D-Einzelverschiebungsfeldes der Freifeldlösung. Eine in Stablängsrichtung für die Erfüllung der Oberflächenspannungen erforderliche veränderliche Wölbnormalspannung über den Querschnitt lässt sich mit nur einem 3D-Einzelverschiebungsfeld nicht realisieren, was im Bereich der Randstörung zu Abweichungen in der Genauigkeit der Ergebnisse führt. Speziell für den Bereich innerhalb der dreifachen effektiven Abklinglänge in Stablängsrichtung ergeben sich deutliche Abweichungen in der Spannungsverteilung, wie in Abb. 8.29 dargestellt.

Auf Grund der den Normalspannungsverläufen nach Glg. 8-1 zugrunde gelegten Bezugsspannung ergibt sich die maximale bezogene Normalspannungsamplitude am Querschnittsrand mit eins.

- **Schubspannungen**

Die Schubspannungen ergeben sich wie bereits erwähnt aus der Ableitung der über den Querschnitt vorliegenden Querschnittsverwölbung. Gleich der Wölbnormalspannung ergeben sich auch für die Wölbschubspannung keinerlei Veränderungen der Spannungsverteilung über den Querschnitt in Stablängsrichtung.

Die Berücksichtigung des abklingenden Verhaltens führt ausschließlich zu einer Skalierung der Wölbschubspannungsverteilung über den Querschnitt in exponentieller Form in Stablängsrichtung, siehe Abb. 8.28. Die Schubspannungsrandbedingungen an den Staboberflächen können dadurch nicht erfüllt werden, die maximale bezogene Schubspannungsamplitude stimmt für den Bereich außerhalb der dreifachen effektiven Abklinglänge gut mit der exakten Lösung überein.

Die Verletzungen der Oberflächenschubspannungen an den Staboberflächen weisen ein exponentielles Abklingverhalten in Stablängsrichtung auf, siehe Abb. 8.34.

Allen Schubspannungsverläufen wird die in Glg. 8-2 dargelegte Bezugsspannung zugrunde gelegt, dadurch ergibt sich die maximale bezogene Schubspannungsamplitude im elastischen Kräftemittelpunkt des Querschnitts mit 1,5. Diese Größe ist aus der Literatur mit  $3/2$  für den Rechteckquerschnitt bekannt.

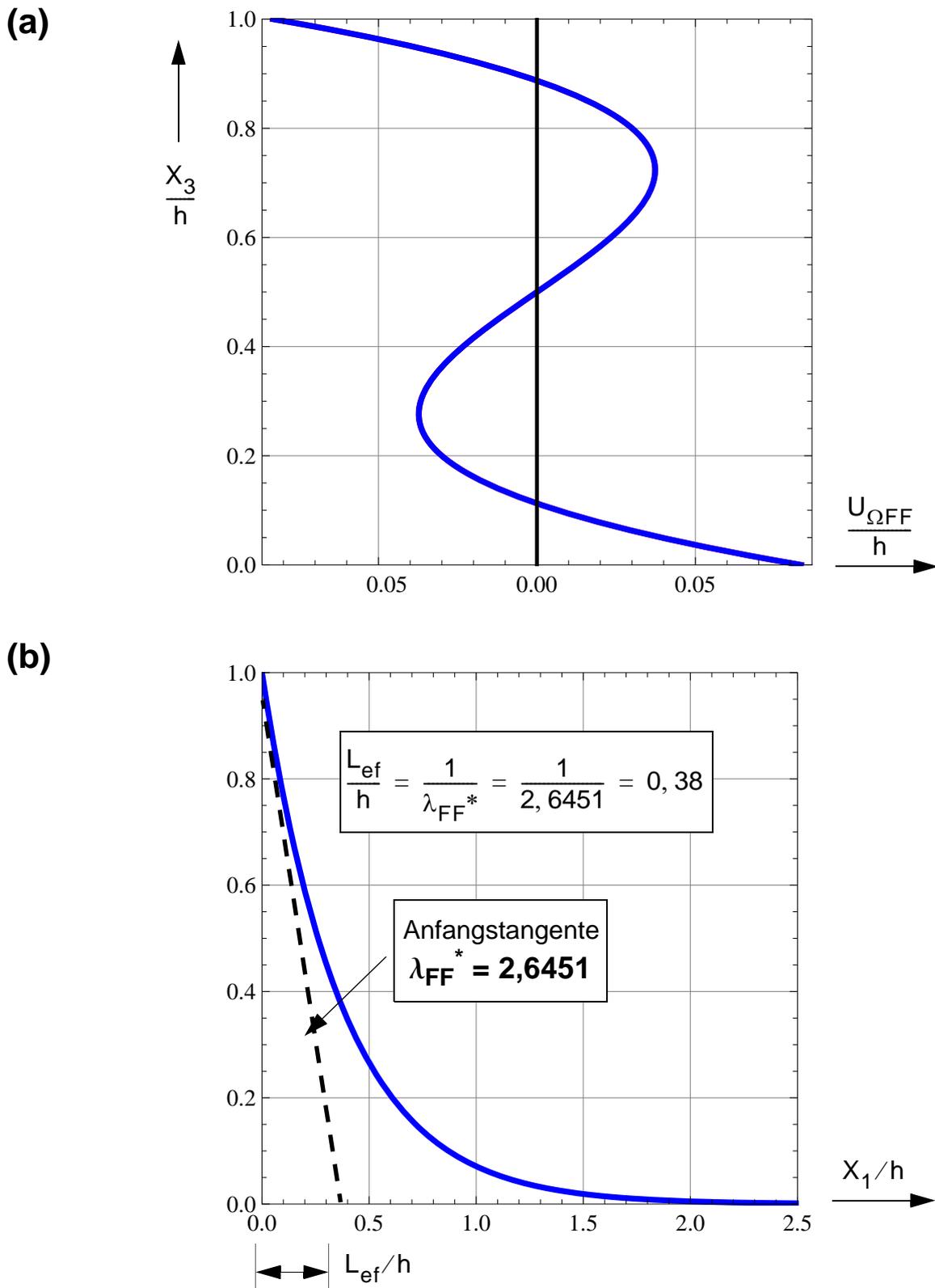


Abb.8.27: (a) Freiefeldlösung für die QS-Verwölbung,  
 (b) Abklingverhalten der QS-Verwölbung der Freiefeldlösung in Stablängsrichtung bei Verwendung als Abkling-QS-Verwölbung

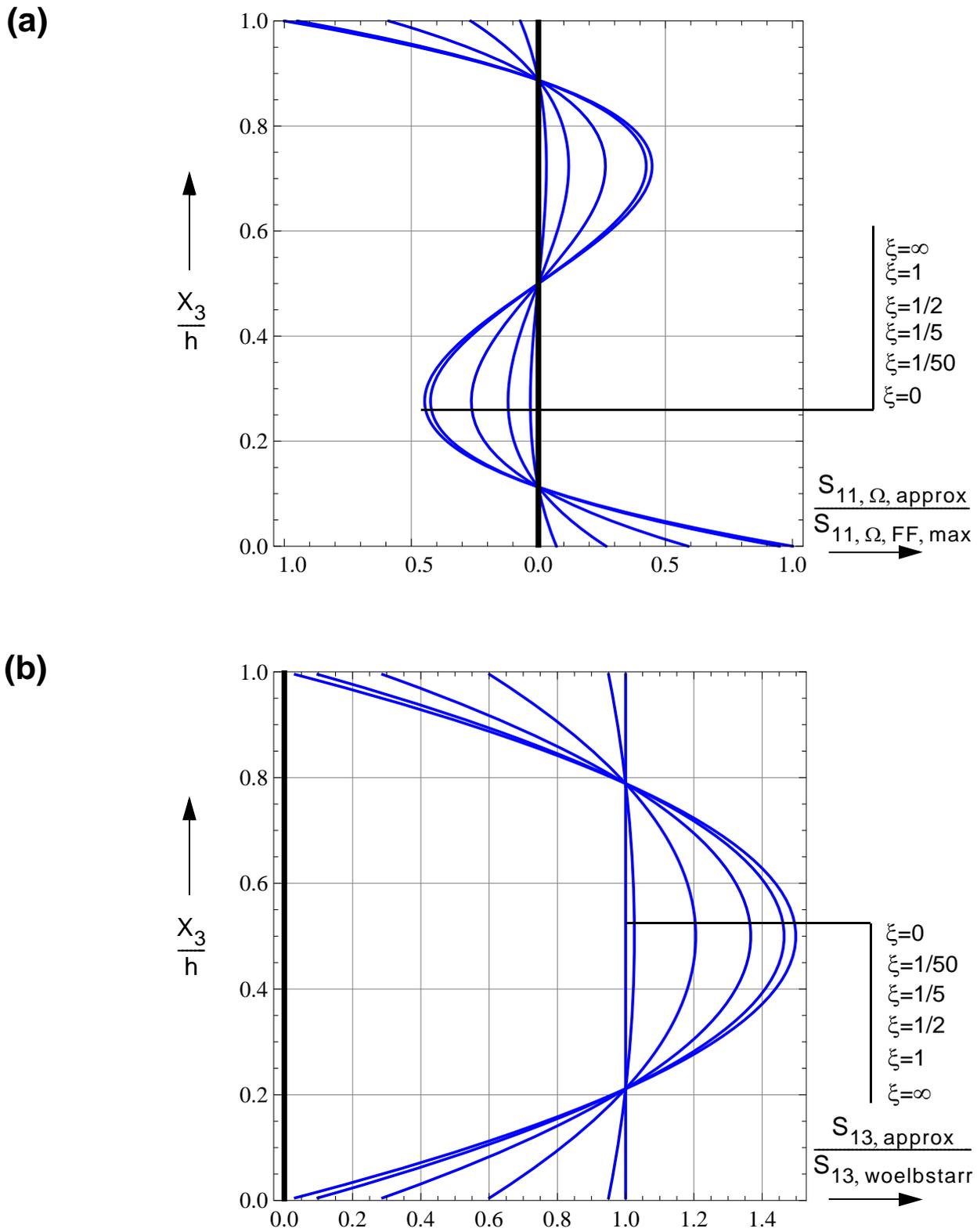


Abb.8.28: (a) Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung, (b) Schubspannungen in bezogener Darstellung für verschiedene  $X_1$  in Stablängsrichtung

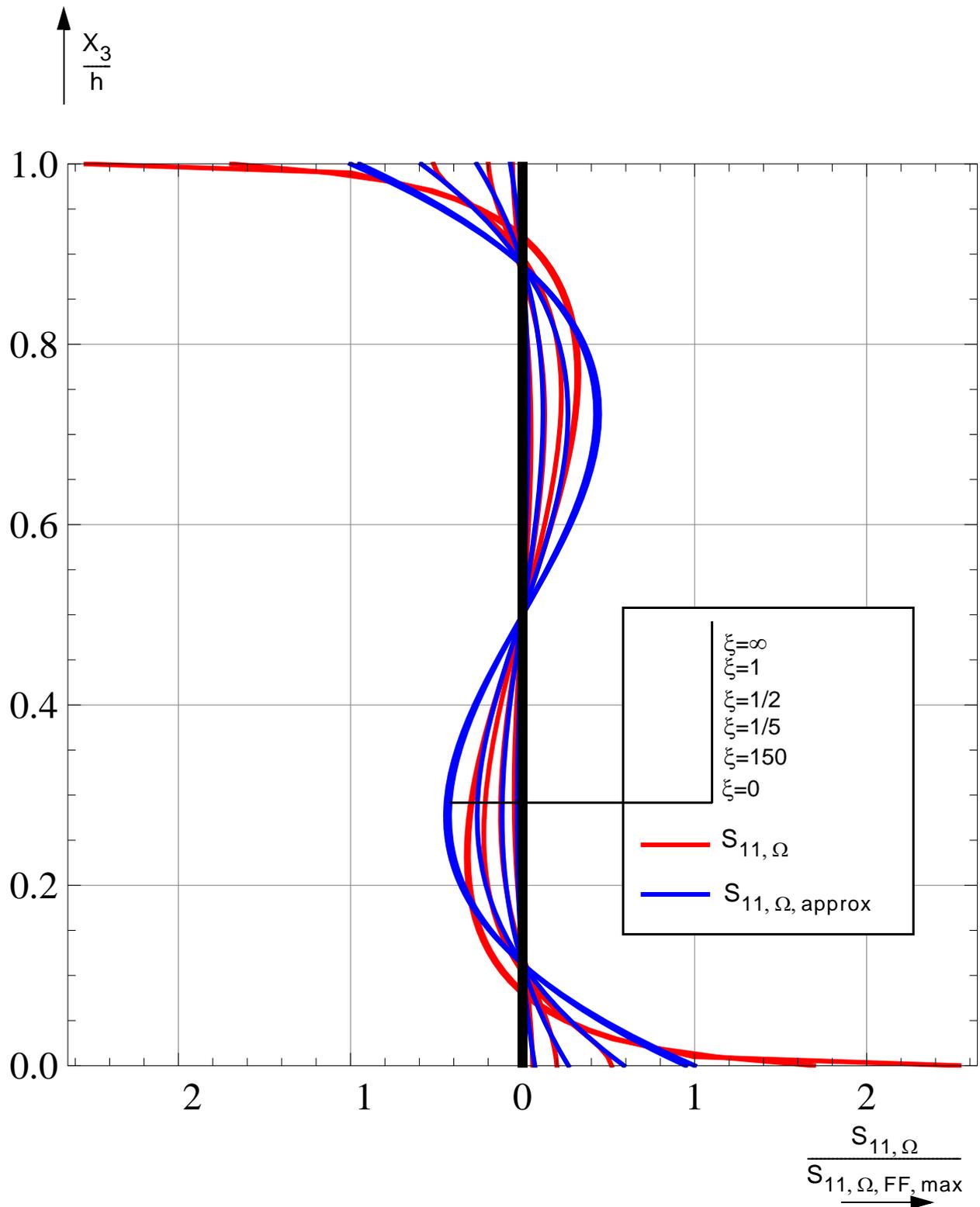


Abb.8.29: Vergleich der Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung für die exakte Lösung mit dem approximierten Wölbnormalspannungsverlauf (FF-Lösung als Abklinglösung).

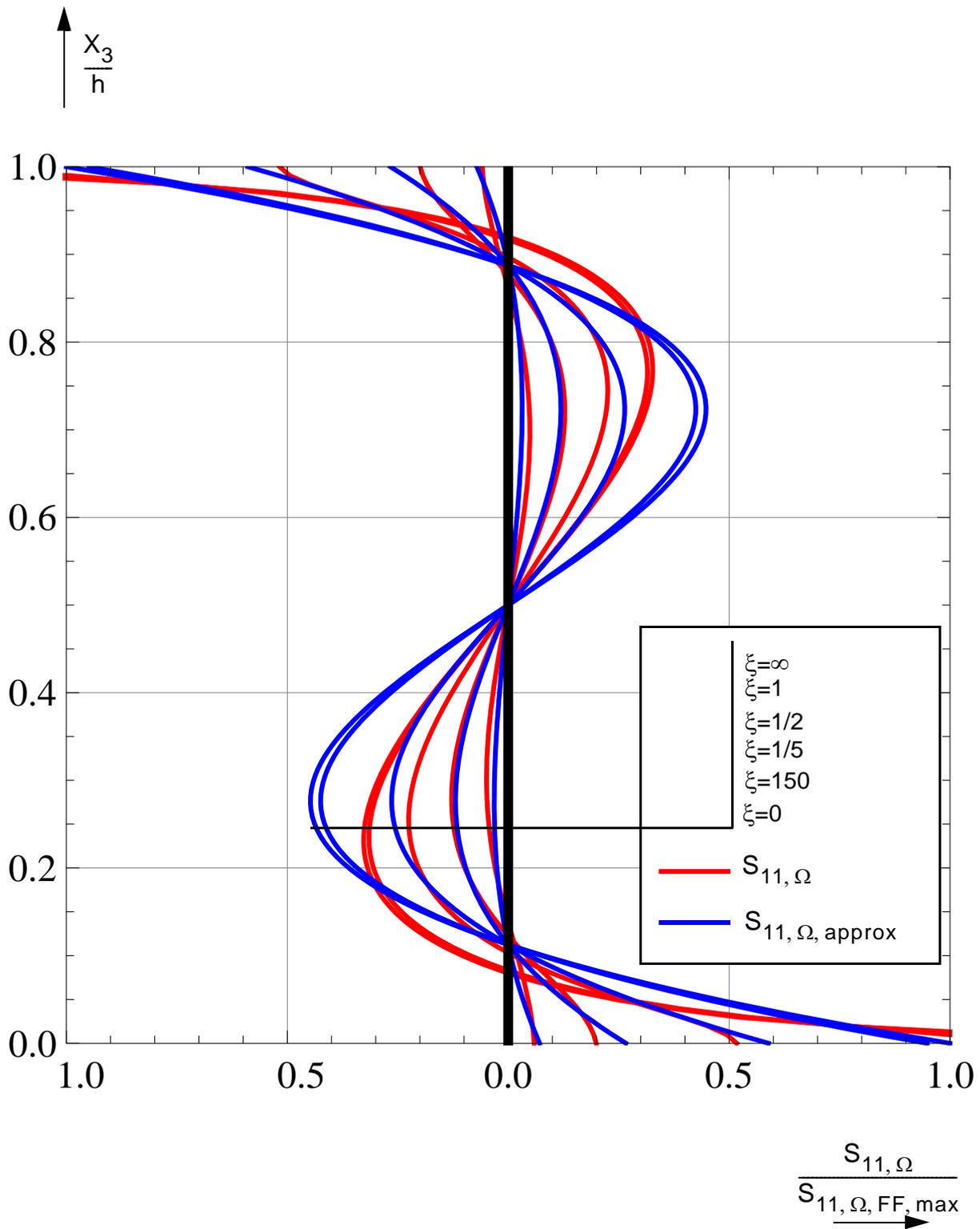


Abb.8.30: Vergleich der Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung für die exakte Lösung mit dem approximierten Wölbnormalspannungsverlauf (FF-Lösung als Abklinglösung).

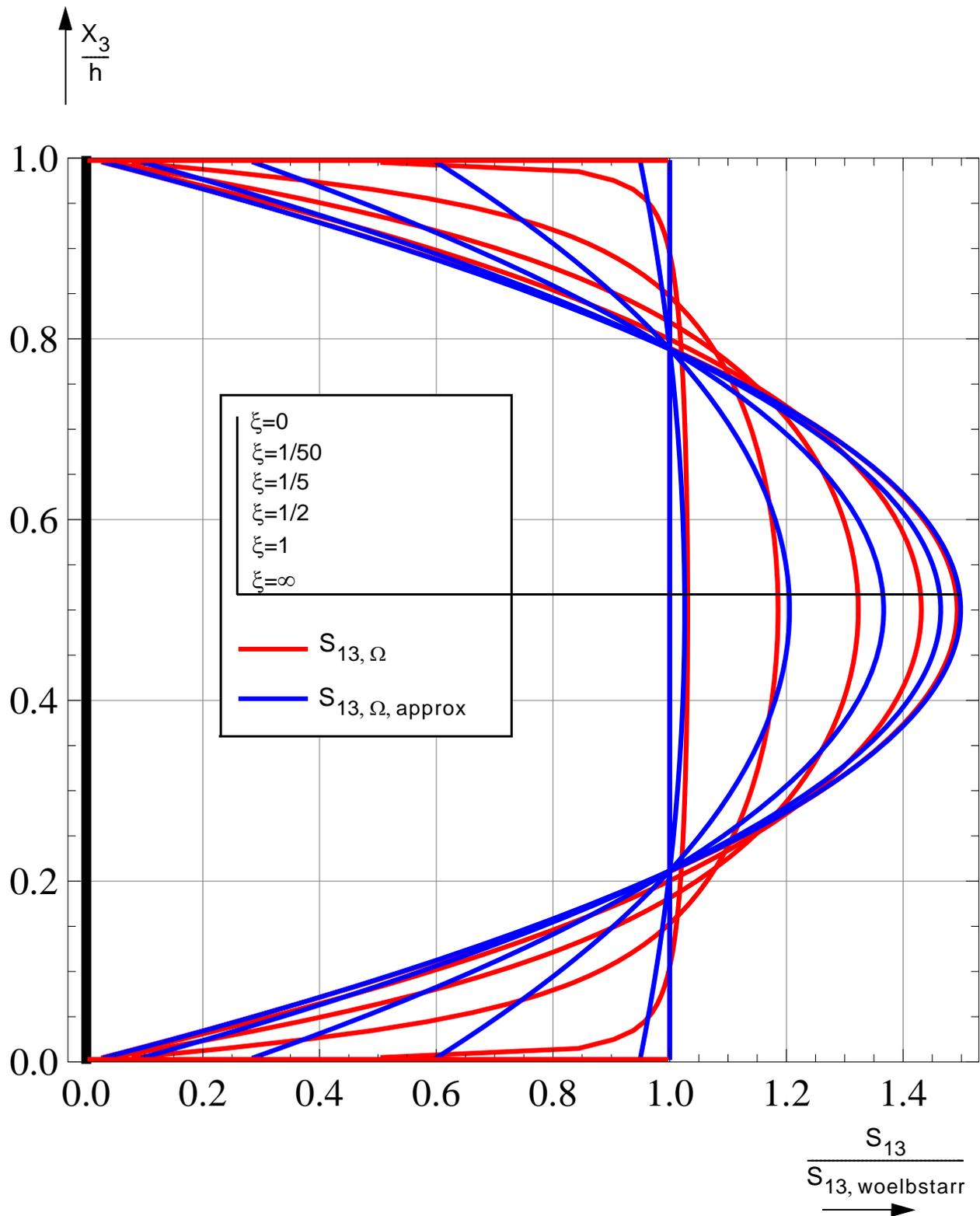


Abb.8.31: Vergleich der Schubspannungen für die exakte Lösung mit dem approximierten Schubspannungsverlauf (FF-Lösung als Abklinglösung).

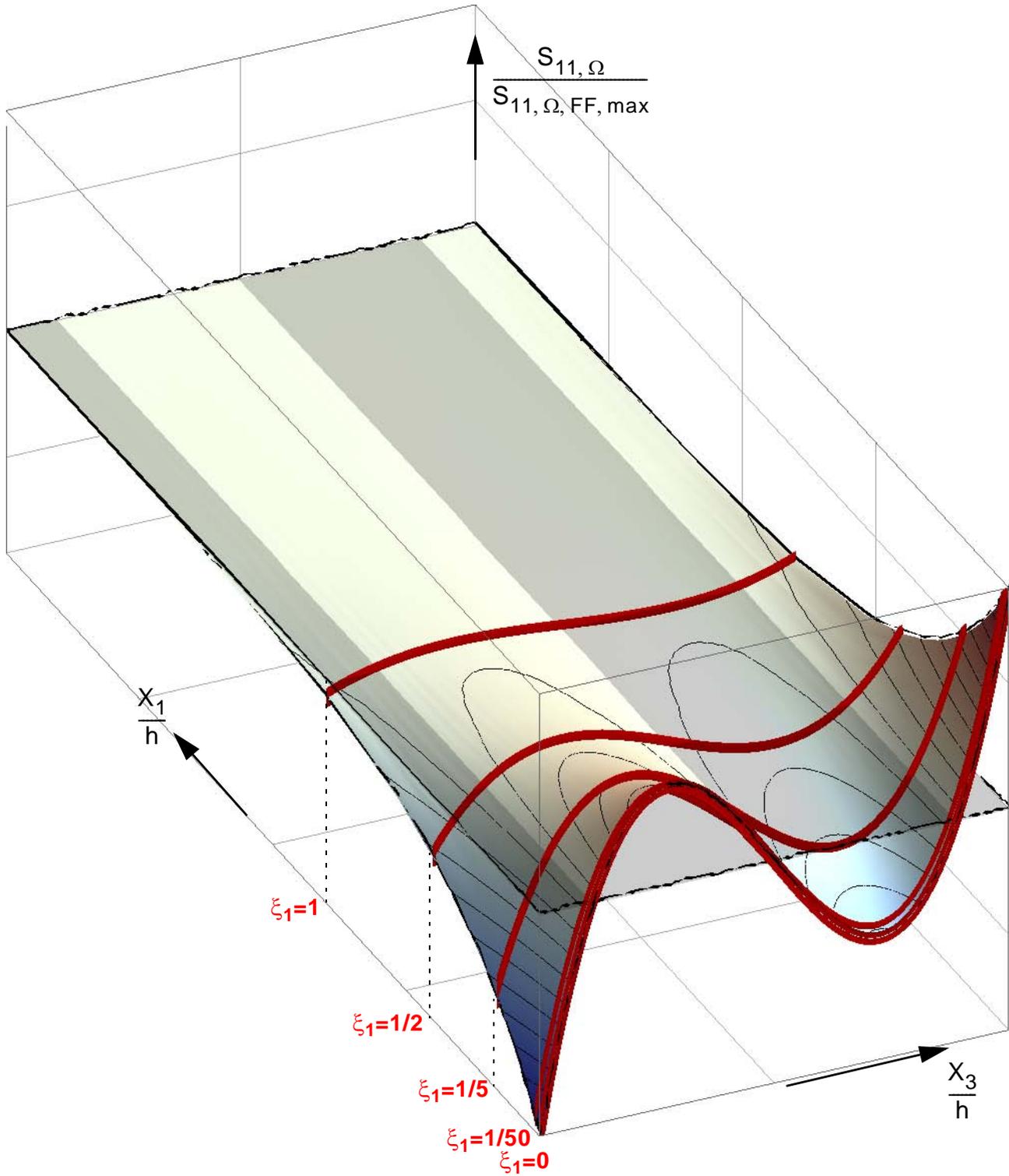


Abb.8.32: Verlauf der Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen für Abb. 8.28 a)

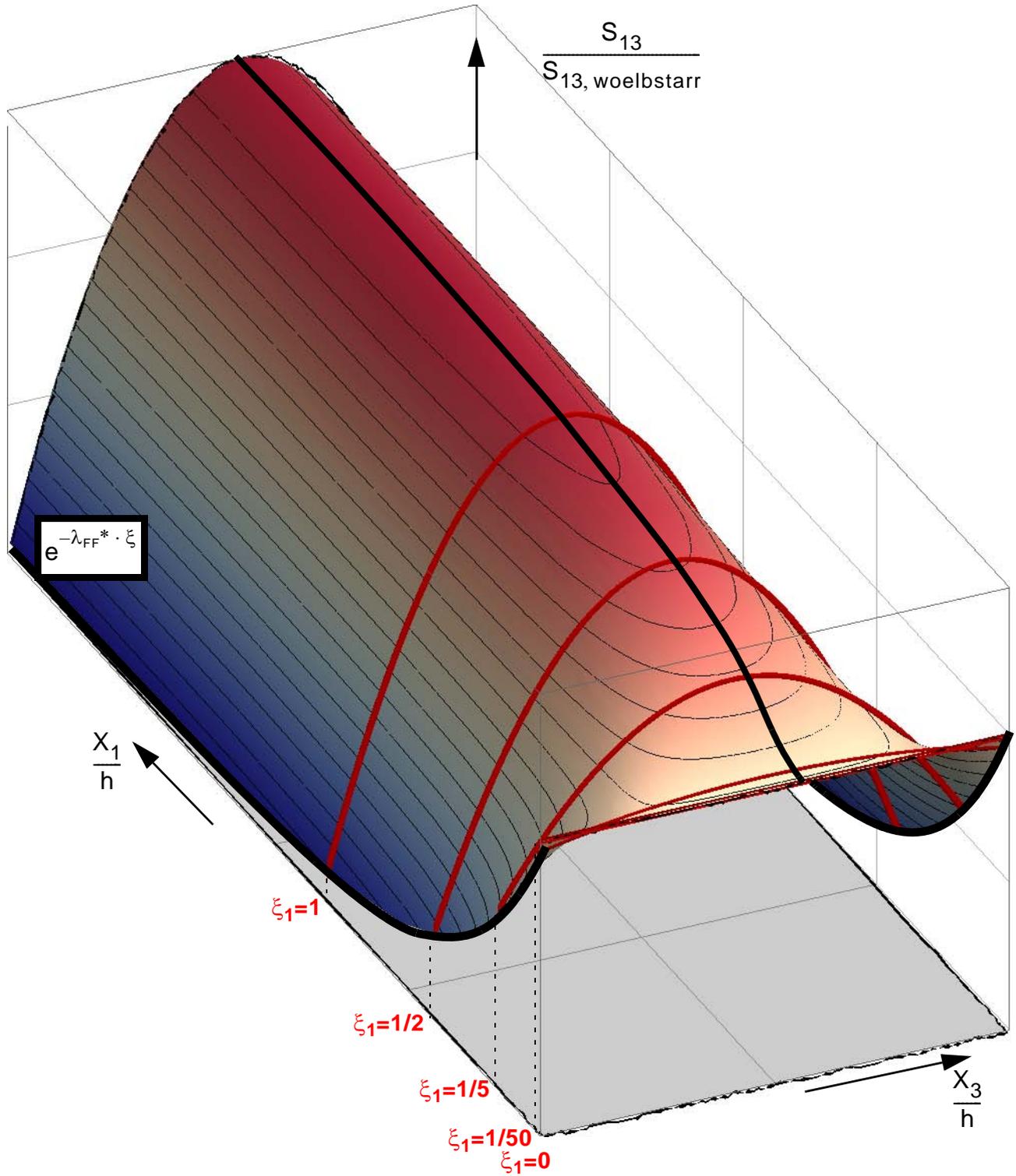


Abb.8.33: Verlauf der Schubspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen für Abb. 8.28 b)

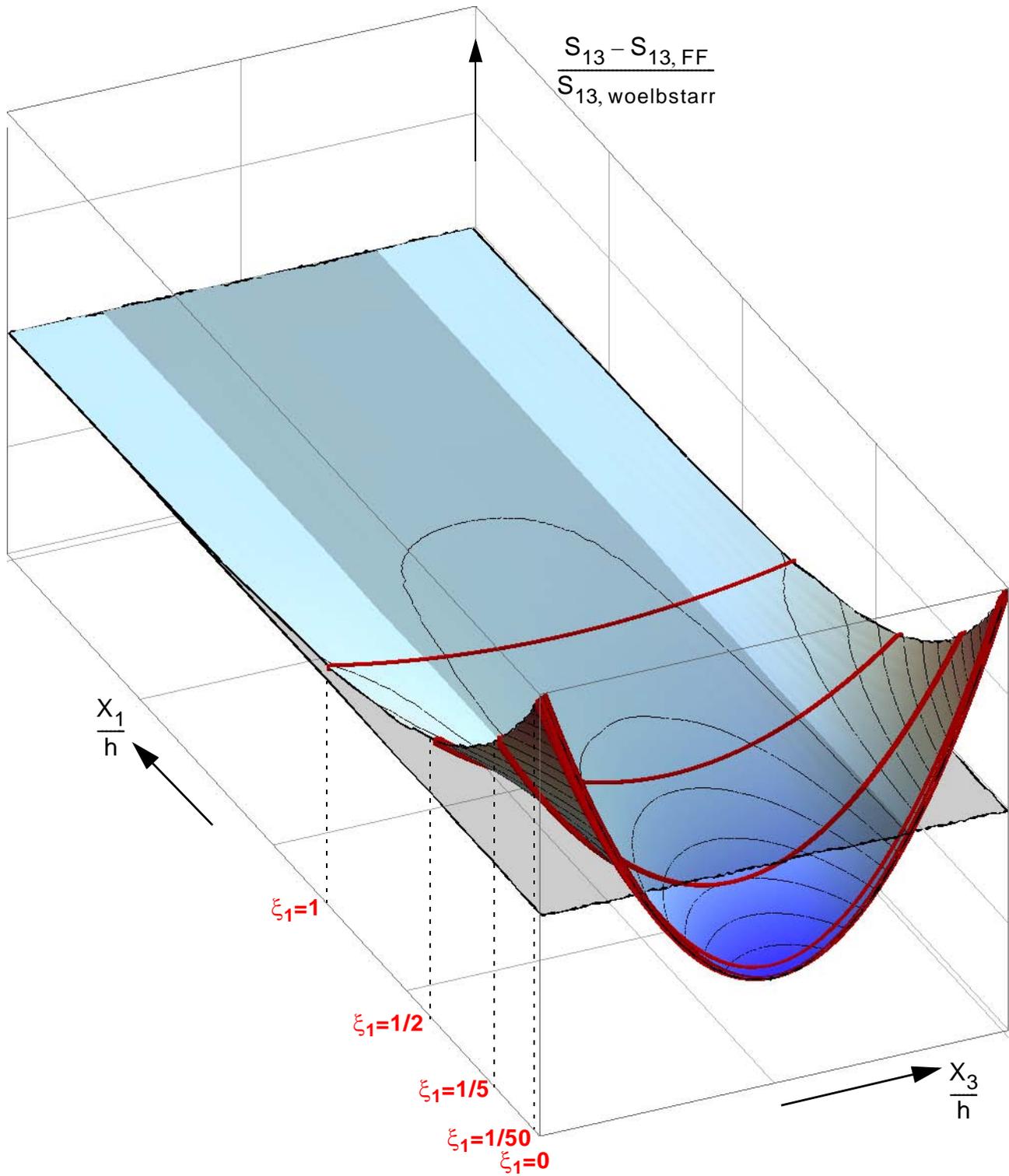


Abb.8.34: Abklingende Randstörung der Schubspannungen bezogen auf die Schubspannung des wölbstarren Querschnitts in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen

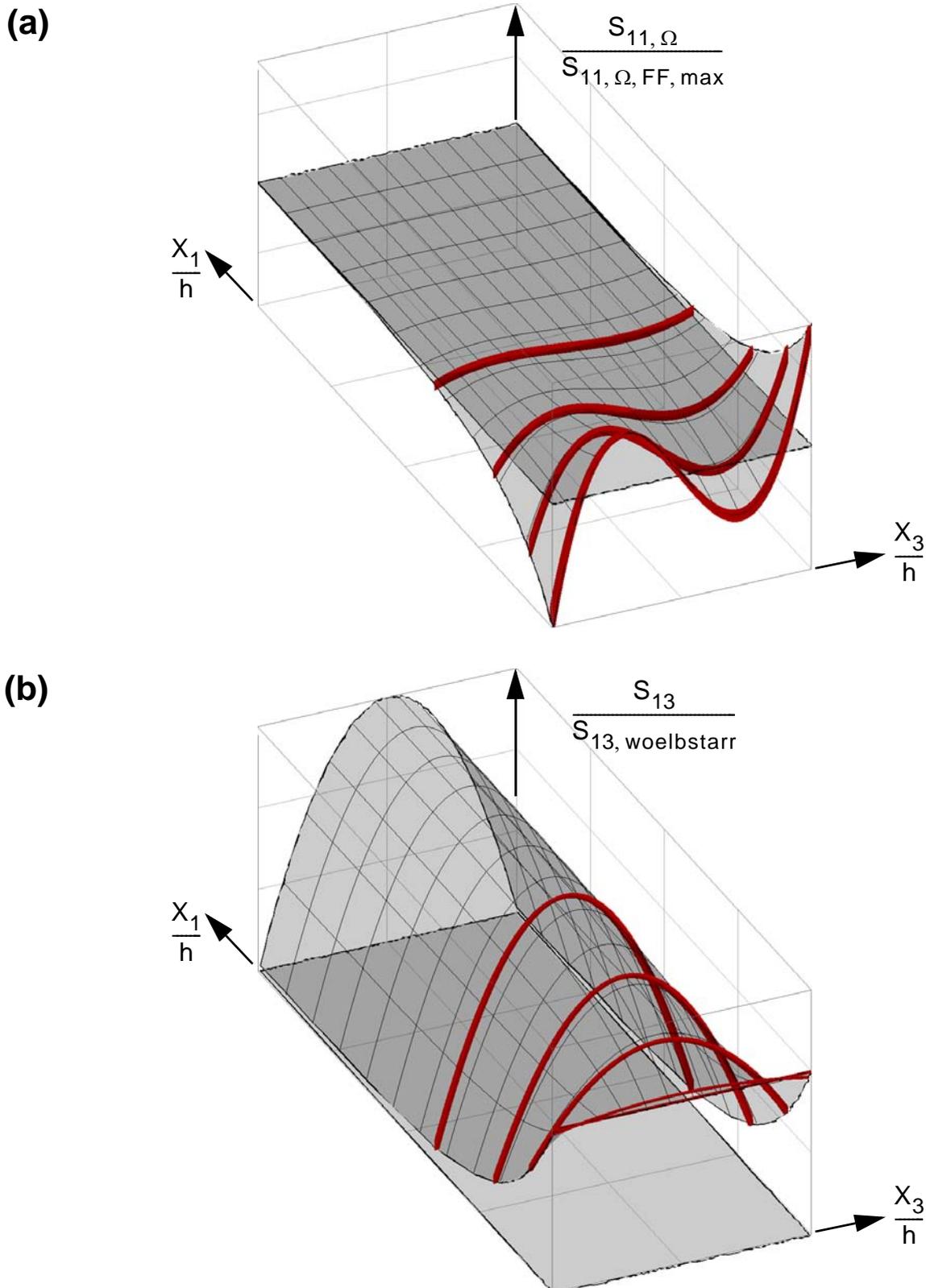


Abb.8.35: (a) Verlauf der Wölbnormalspannungen bezogen auf die Wölbnormalspannung der Freifeld-QS-Verwölbung, b) Verlauf der Schubspannungen bezogen auf die Schubspannung des wölbstarren Querschnitts



## 8.4 Inhomogene Querschnitte mit ebener Kinematik (2D-Kinematik)

### 8.4.1 Rechteckquerschnitt mit einer nachgiebigen Verbundfuge

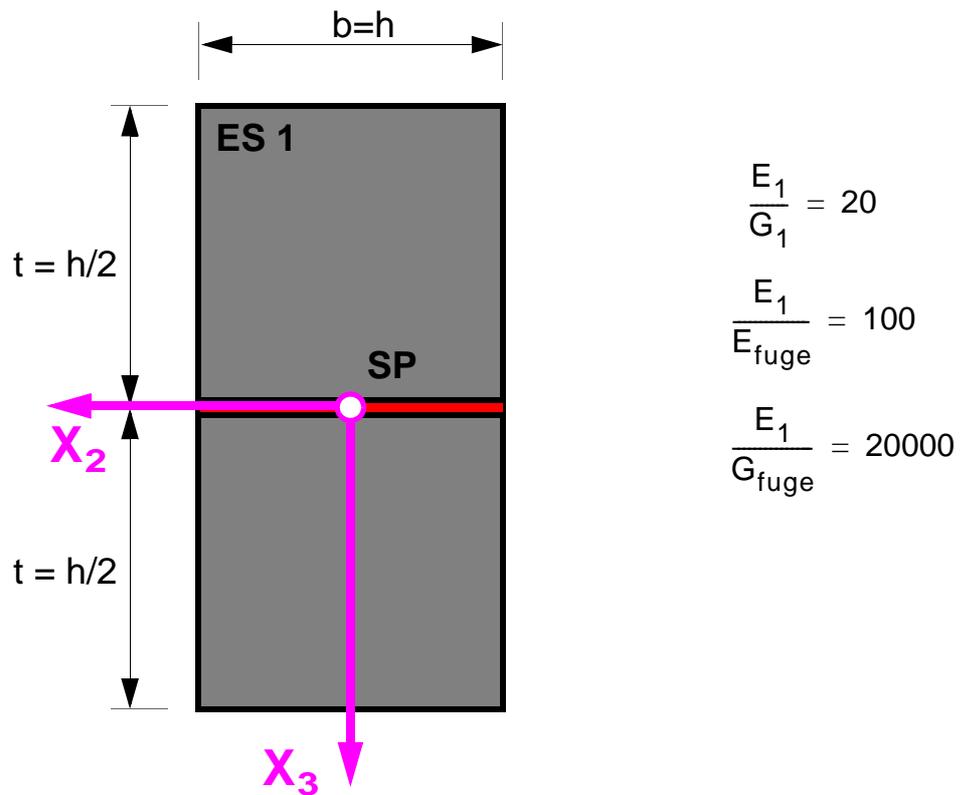


Abb.8.36: Beispiel 2: Zweiteiliger rechteckiger Stabquerschnitt mit elastischer nachgiebiger Verbundfuge und 2D-Stabkinematik – Geometrische Abmessungen und Materialdefinitionen für die Elastizitätskonstanten

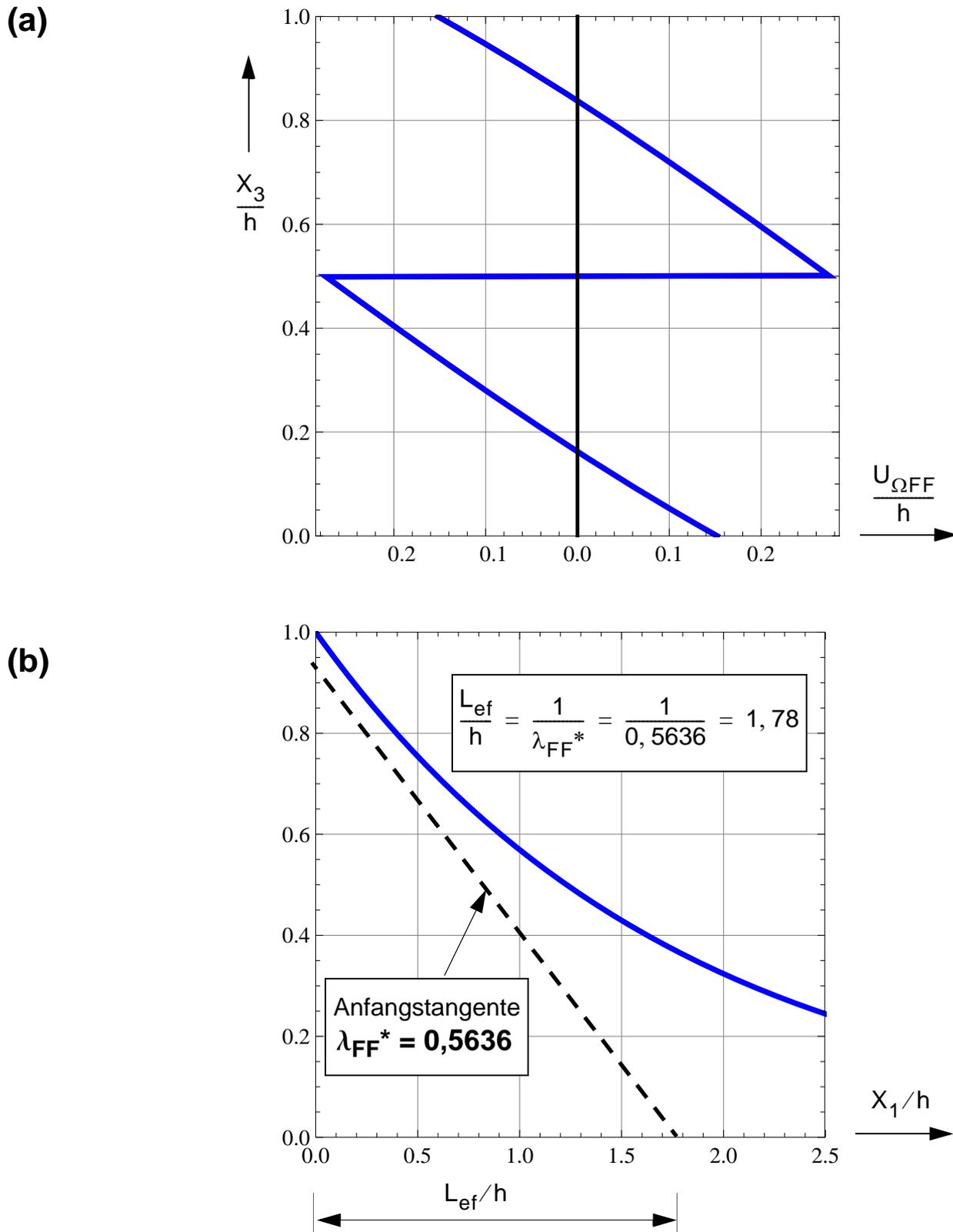


Abb.8.37: (a) Freiefeldlösung für die axiale QS-Verwölbung,  
 (b) Abklingverhalten der QS-Verwölbung der Freiefeldlösung in Stablängsrichtung bei Verwendung als Abkling-QS-Verwölbung

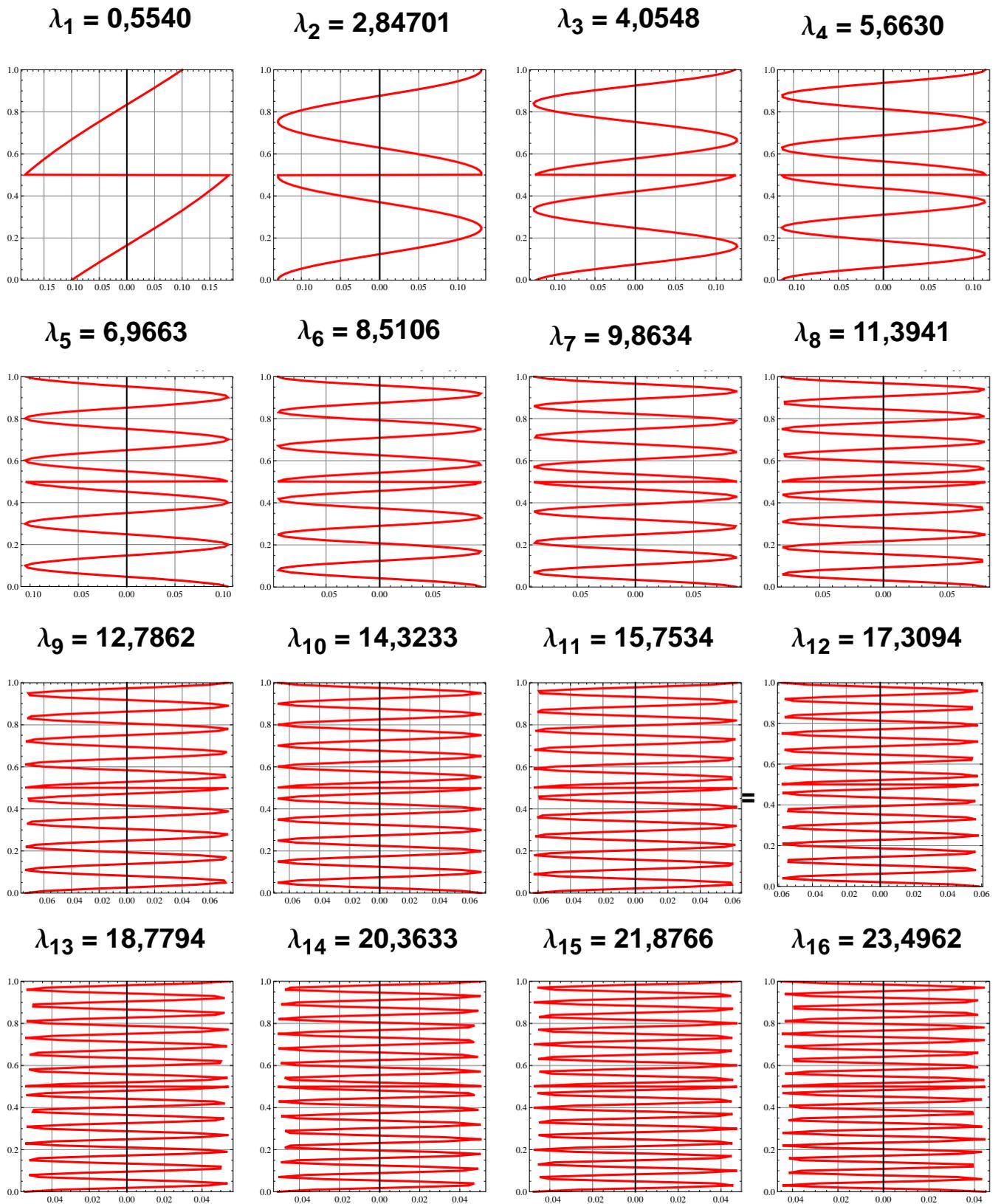
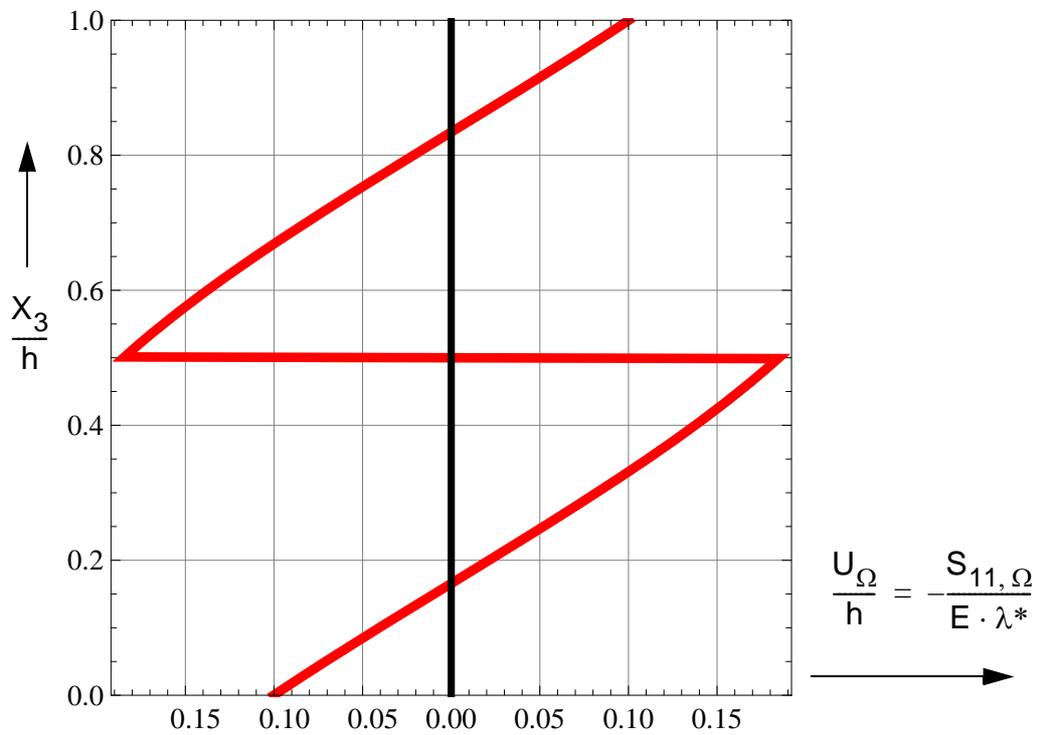


Abb.8.38: Antimetrische (wirksame) Abkling-QS-Verwölbungen ( $n=1$  bis 16) und zugehörige Abklingzahlen für das exponentielle Abklingverhalten in Stablängsrichtung ( $X_1$ )

(a)



(b)

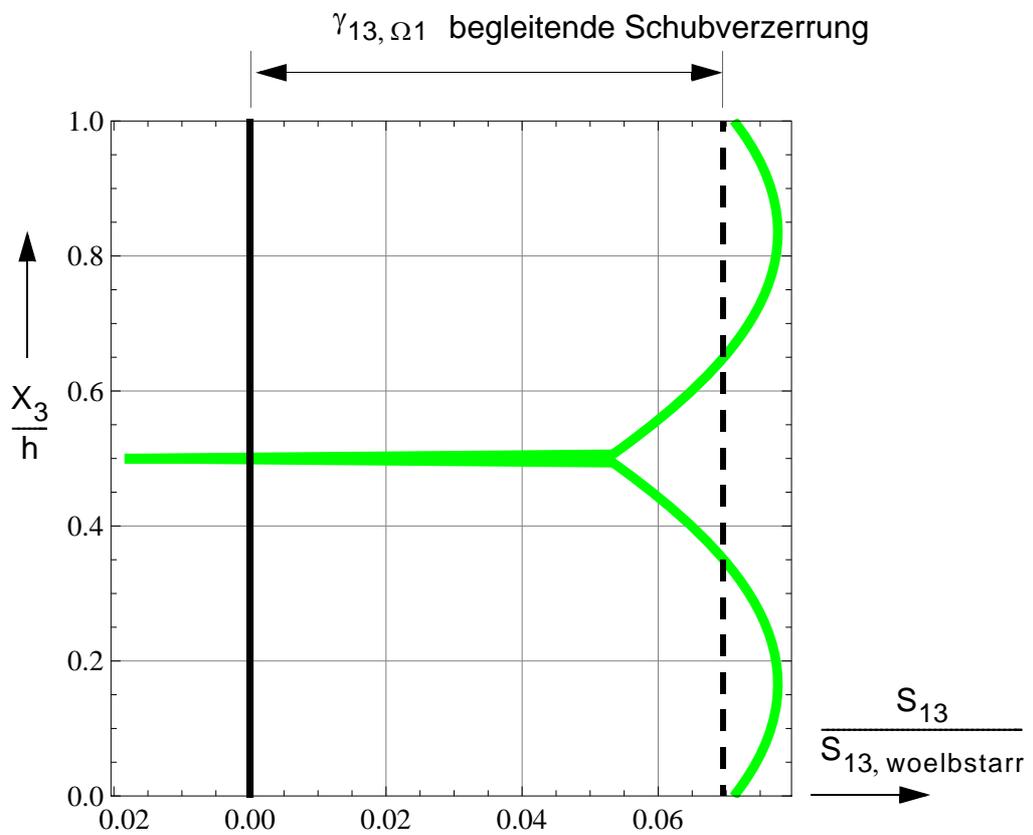
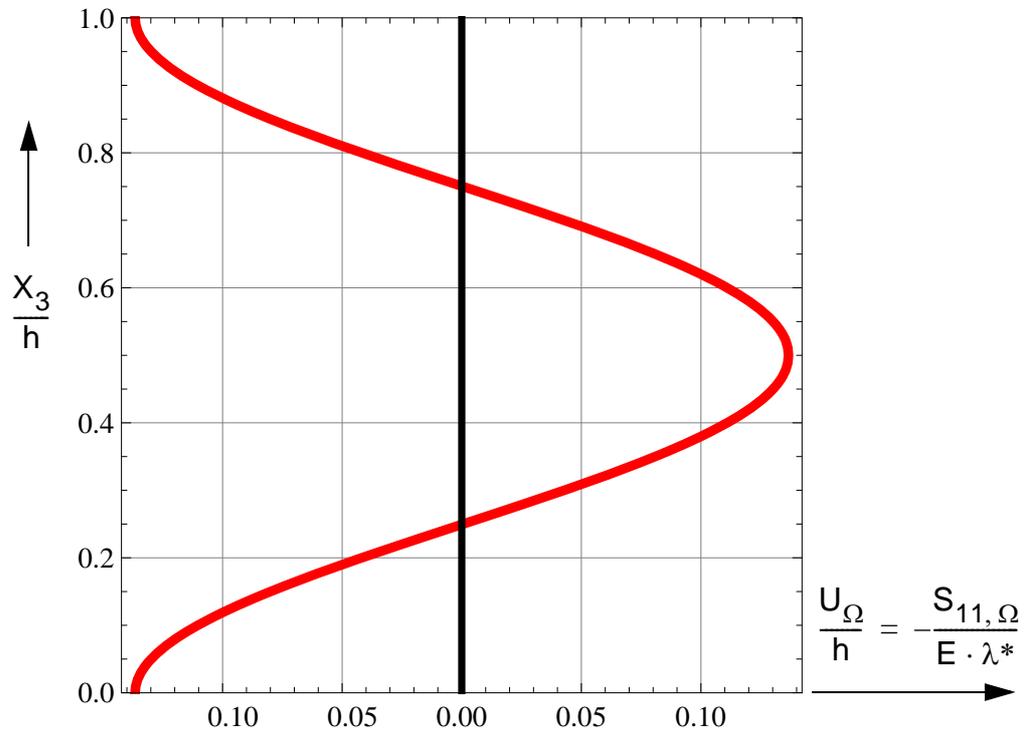


Abb.8.39: (a) Abklinglösung der QS-Verwölbung ( $n=1$ ) und zugehörige Wölbnormalspannung in bezogener Darstellung, (b) zugehörige Wölbschubspannungen in bezogener Darstellung

(a)



(b)

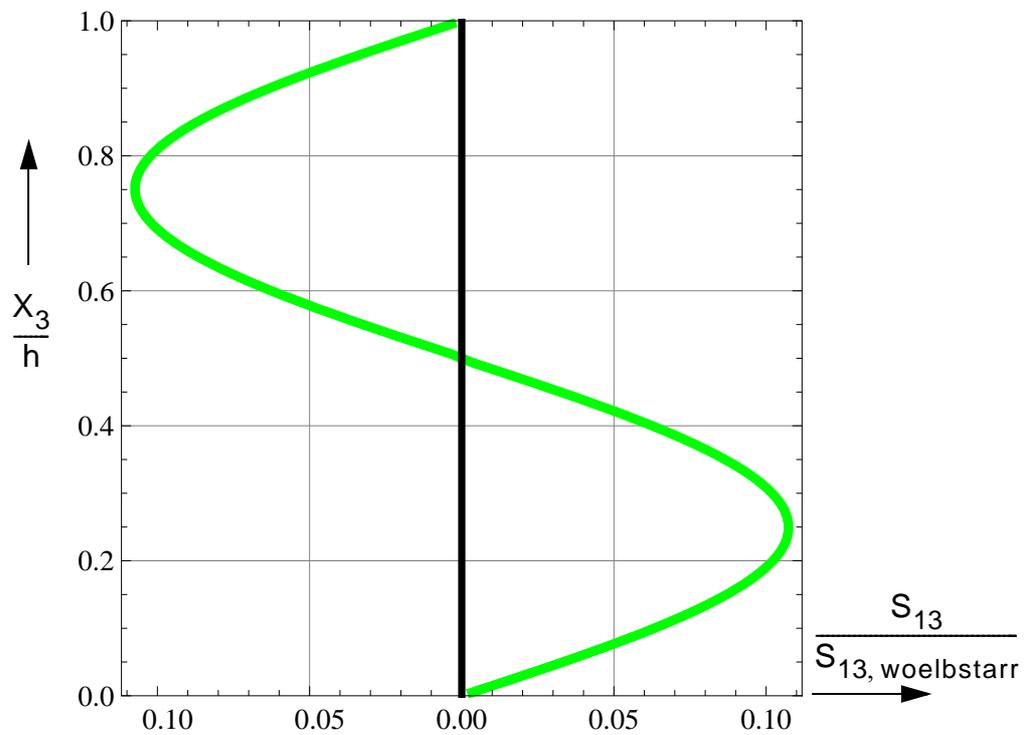


Abb.8.40: (a) Abklinglösung der QS-Verwölbung ( $n=2$ ) und zugehörige Wölbnormalspannung in bezogener Darstellung, (b) zugehörige Wölbschubspannungen in bezogener Darstellung

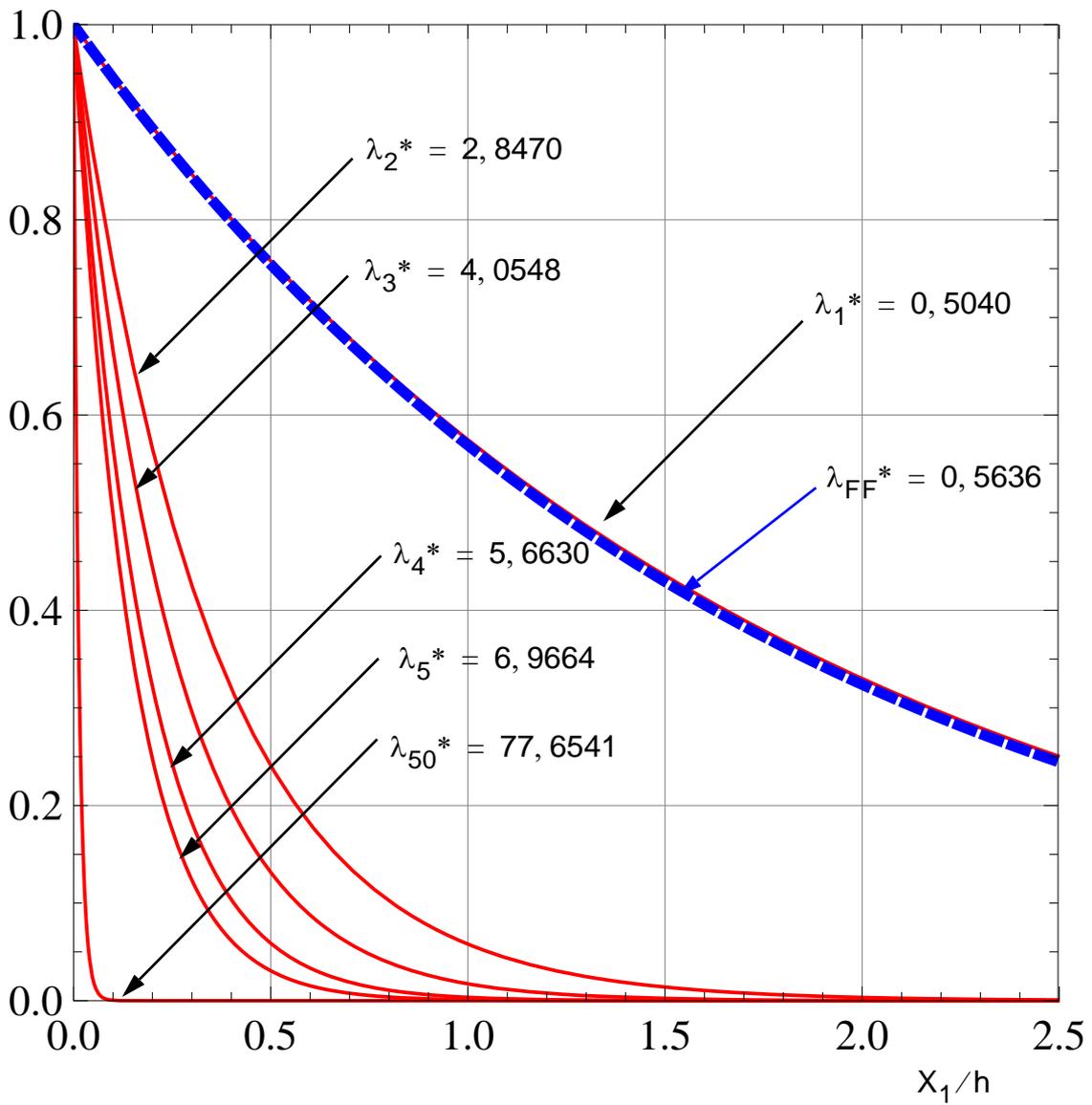


Abb.8.41: Stablängsverhalten der Abkling-QS-Verwölbungen ( $n=1$  bis  $5$  und  $50$ ) sowie der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

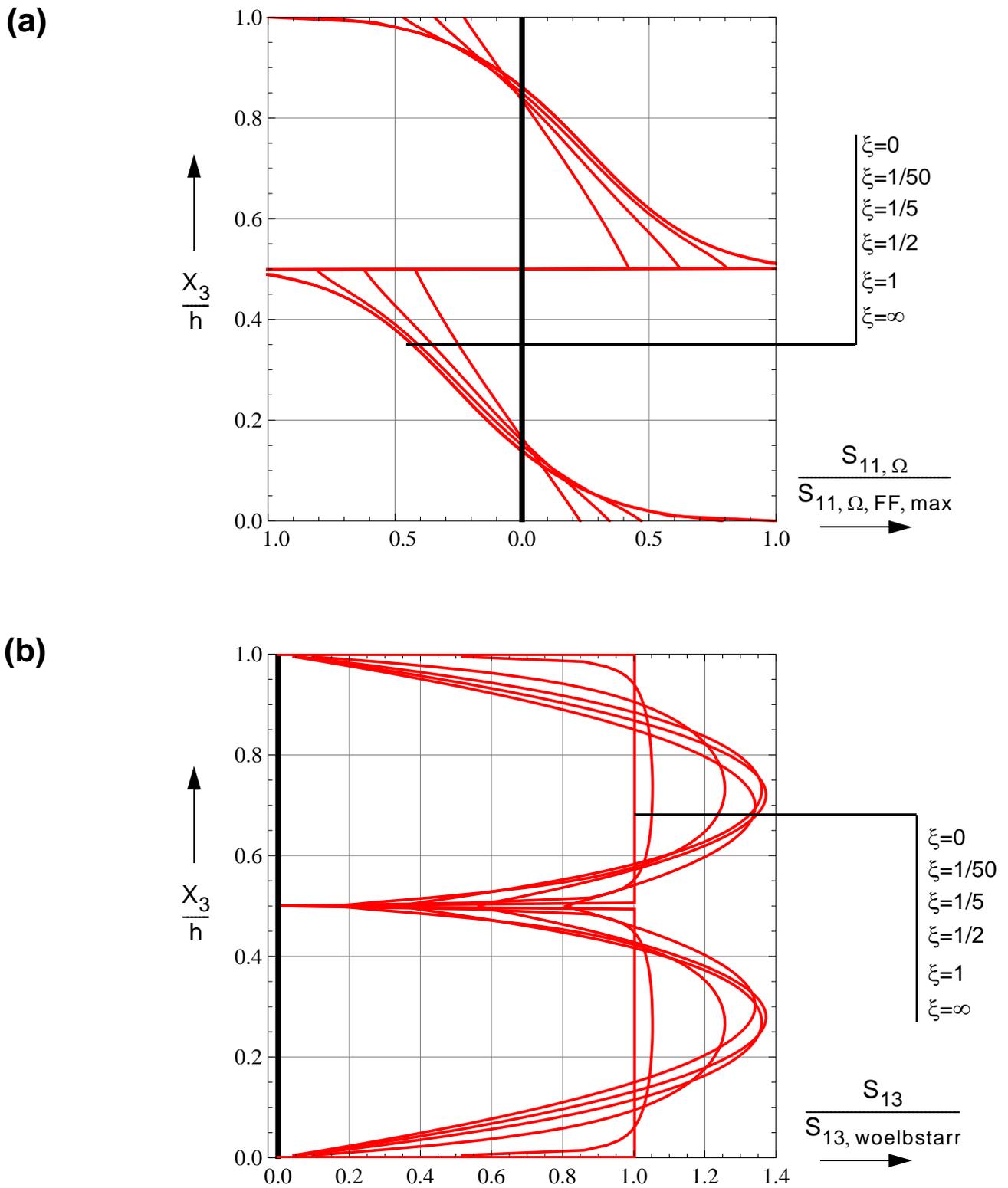


Abb.8.42: (a) Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung, (b) Schubspannungen in bezogener Darstellung für verschiedene  $X_1$  in Stablängsrichtung ohne Darstellung der Spannungsspitzen

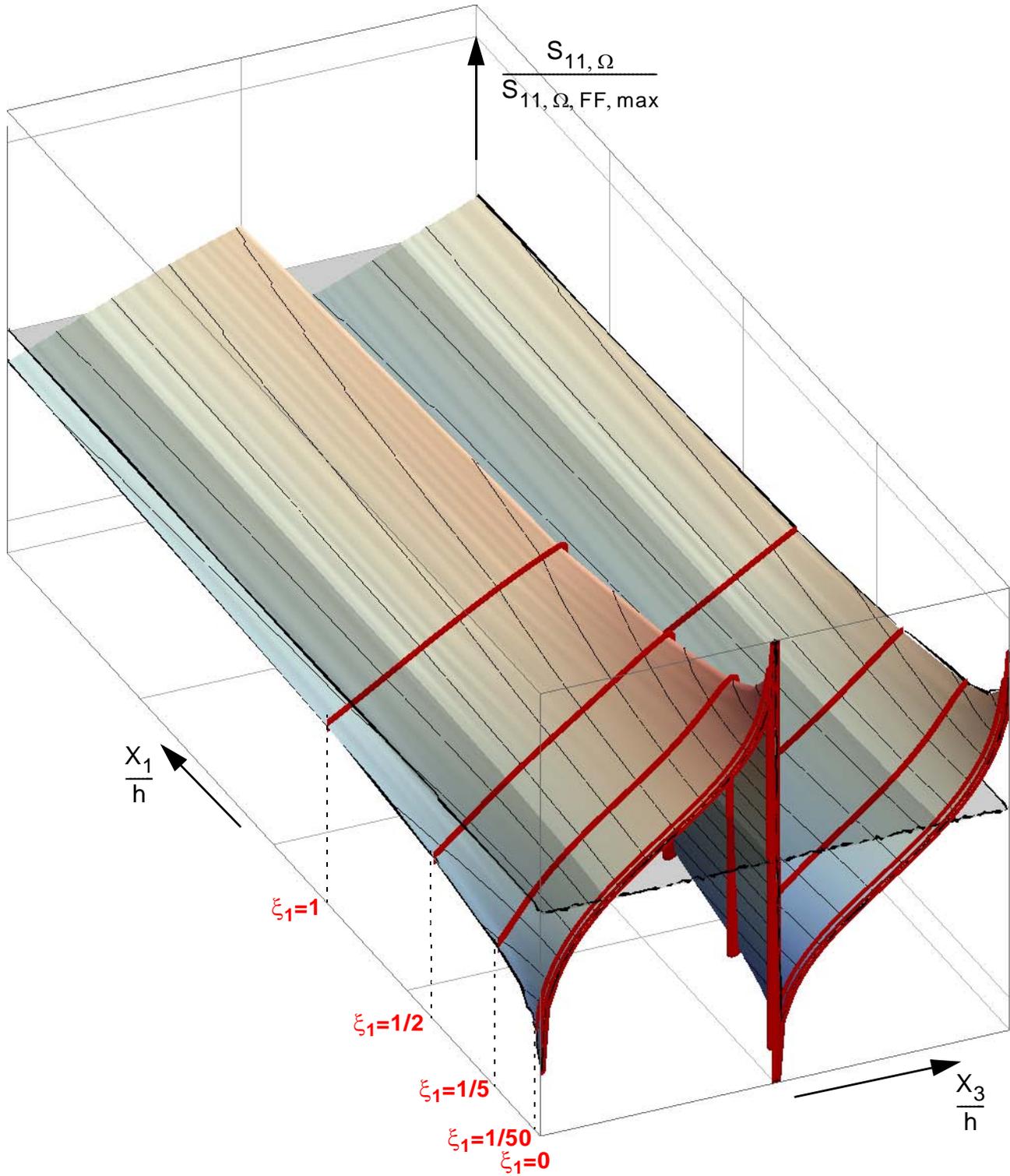


Abb.8.43: Verlauf der Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen für Abb. 8.42 a)

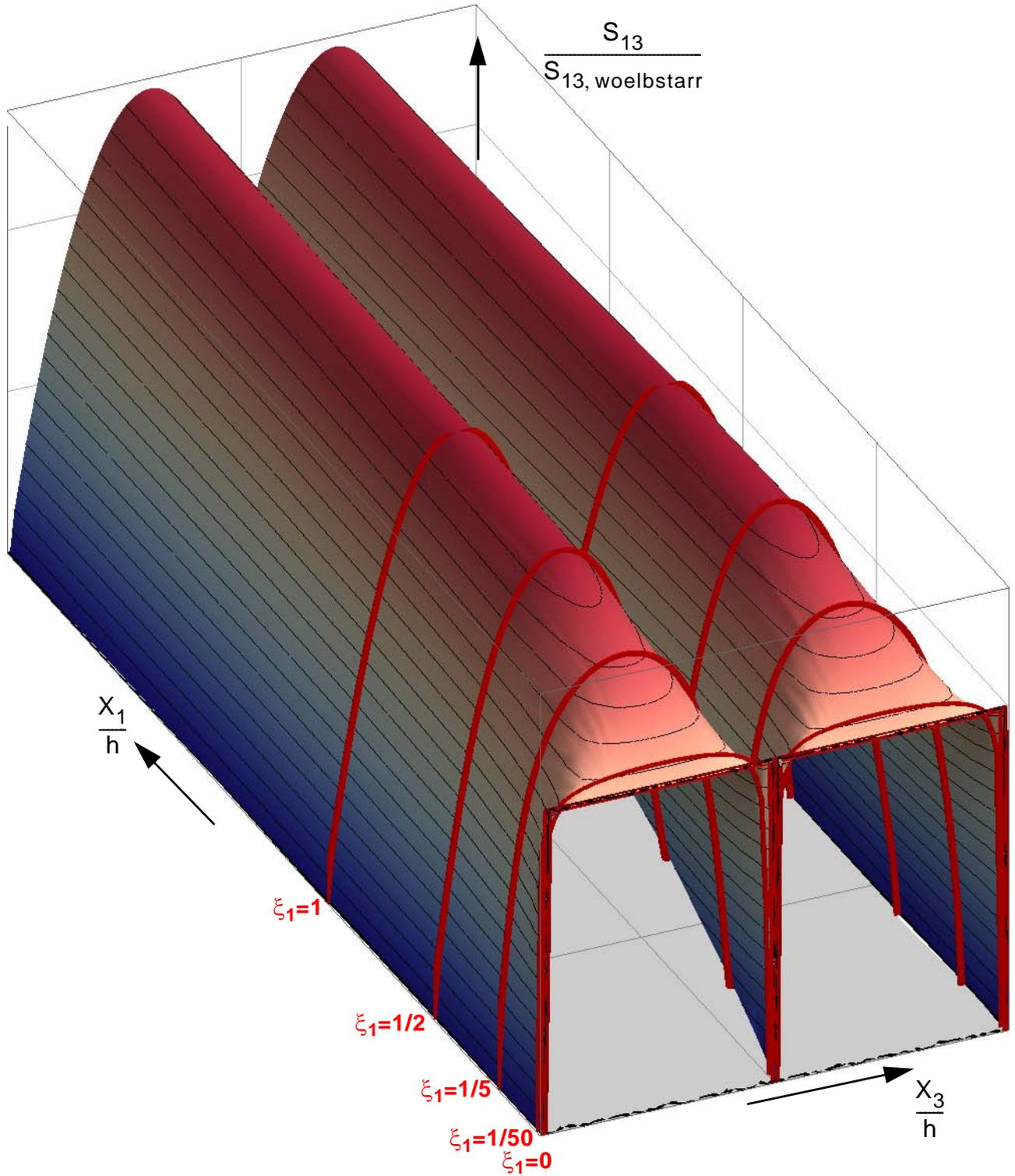


Abb.8.44: Verlauf der Schubspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen für Abb. 8.42 b)

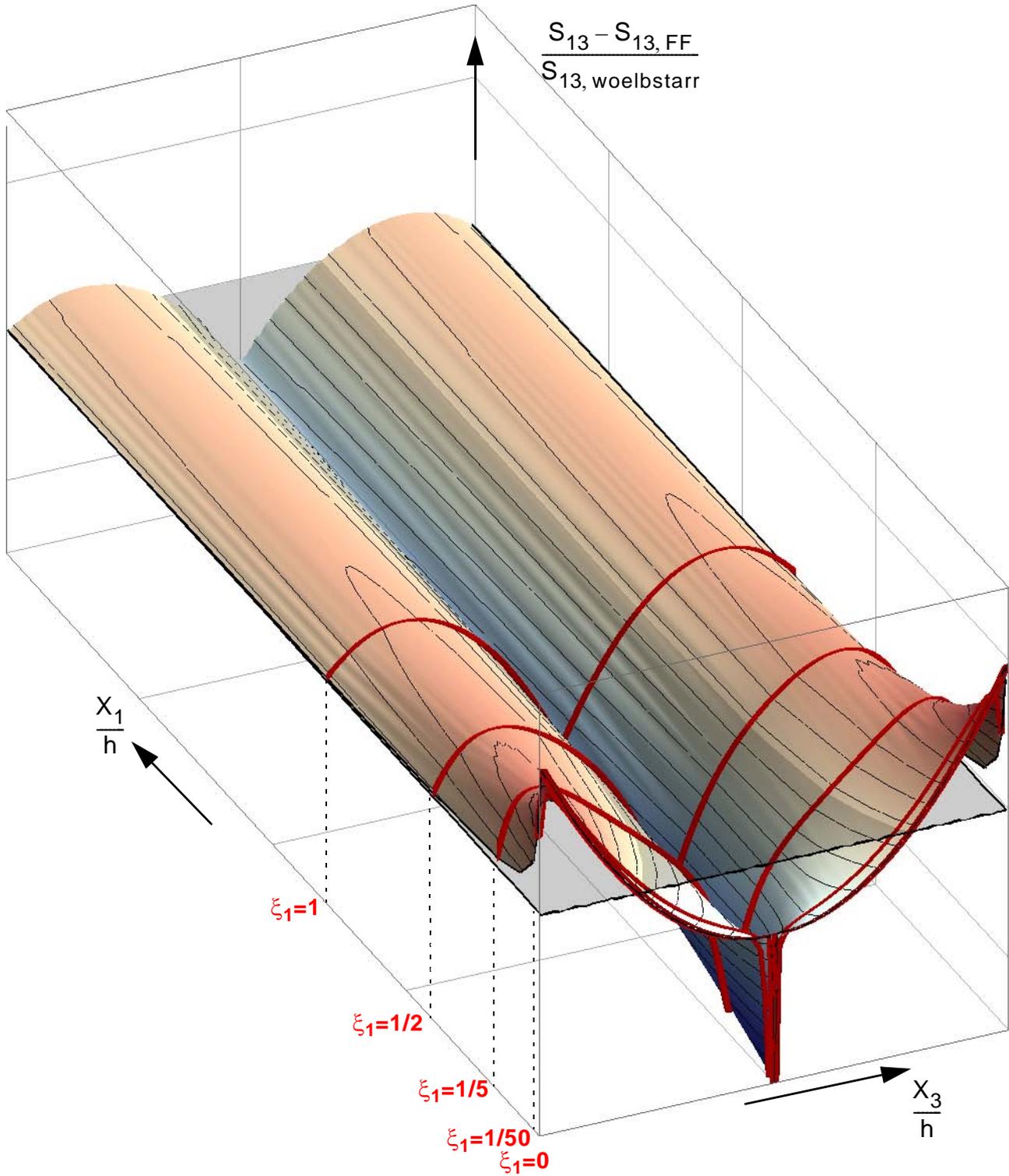


Abb.8.45: Abklingende Randstörung der Schubspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen

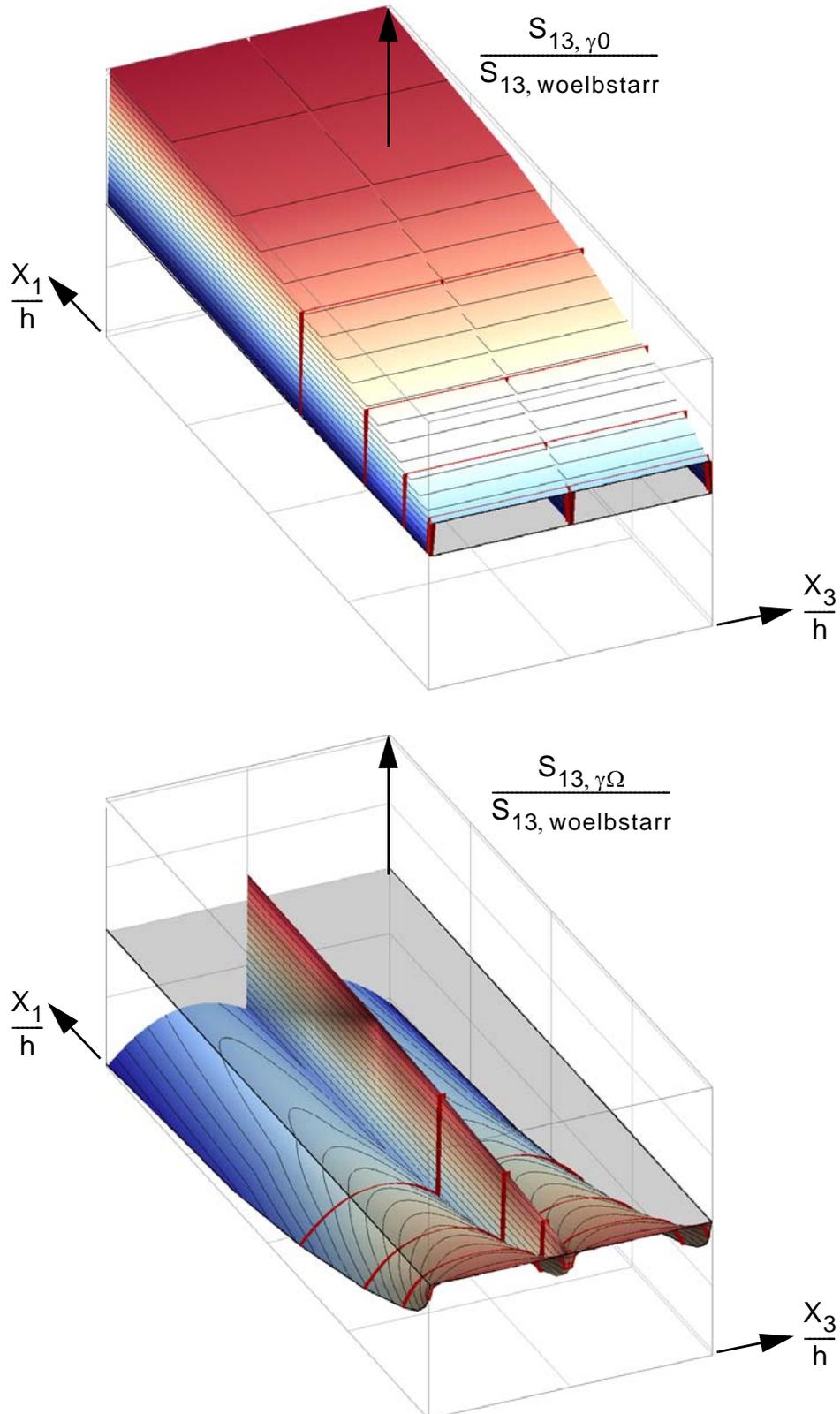


Abb.8.46: Verlauf der Schubspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung  $X_1$ : a) Starrkörperanteil b) Abklinganteil

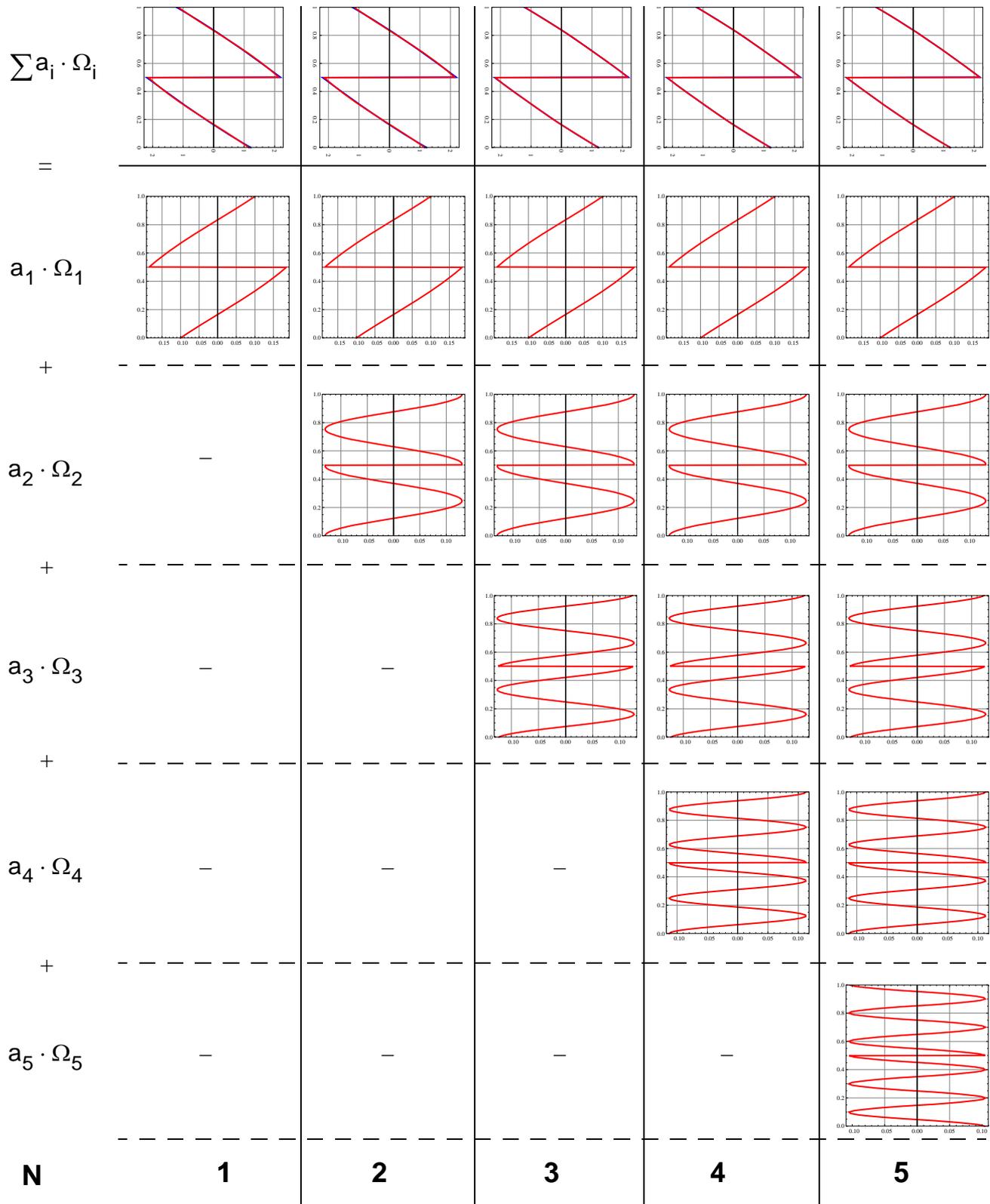


Abb.8.47: Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung durch 1, 2, 3, 4 und 5 wirksame Abkling-QS-Verwölbungen

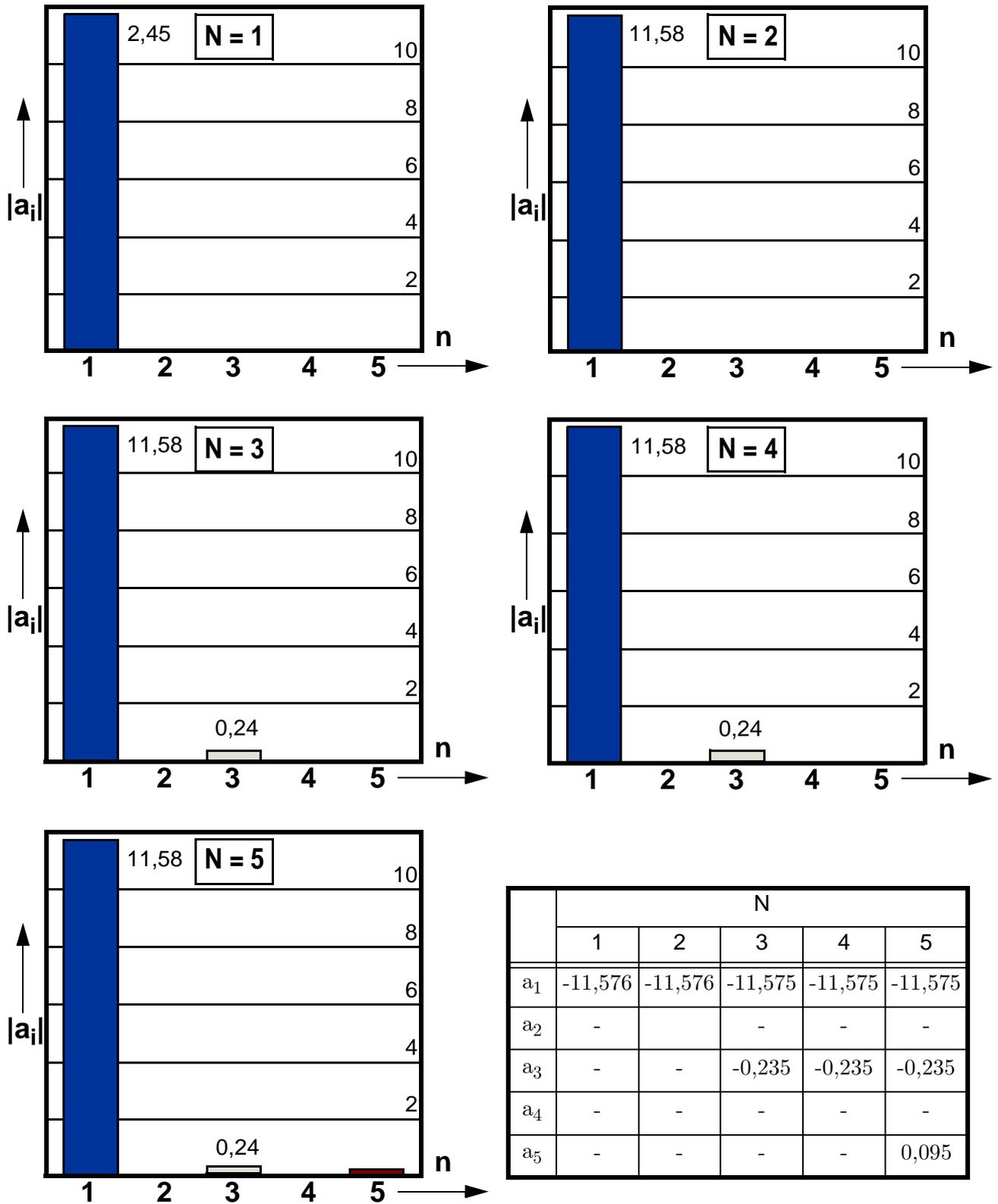


Abb.8.48: Anteilfaktoren der Abkling-QS-Verwölbungen für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung für  $N=1, 2, 3, 4$  und  $5$  wirksame Abkling-QS-Verwölbungen

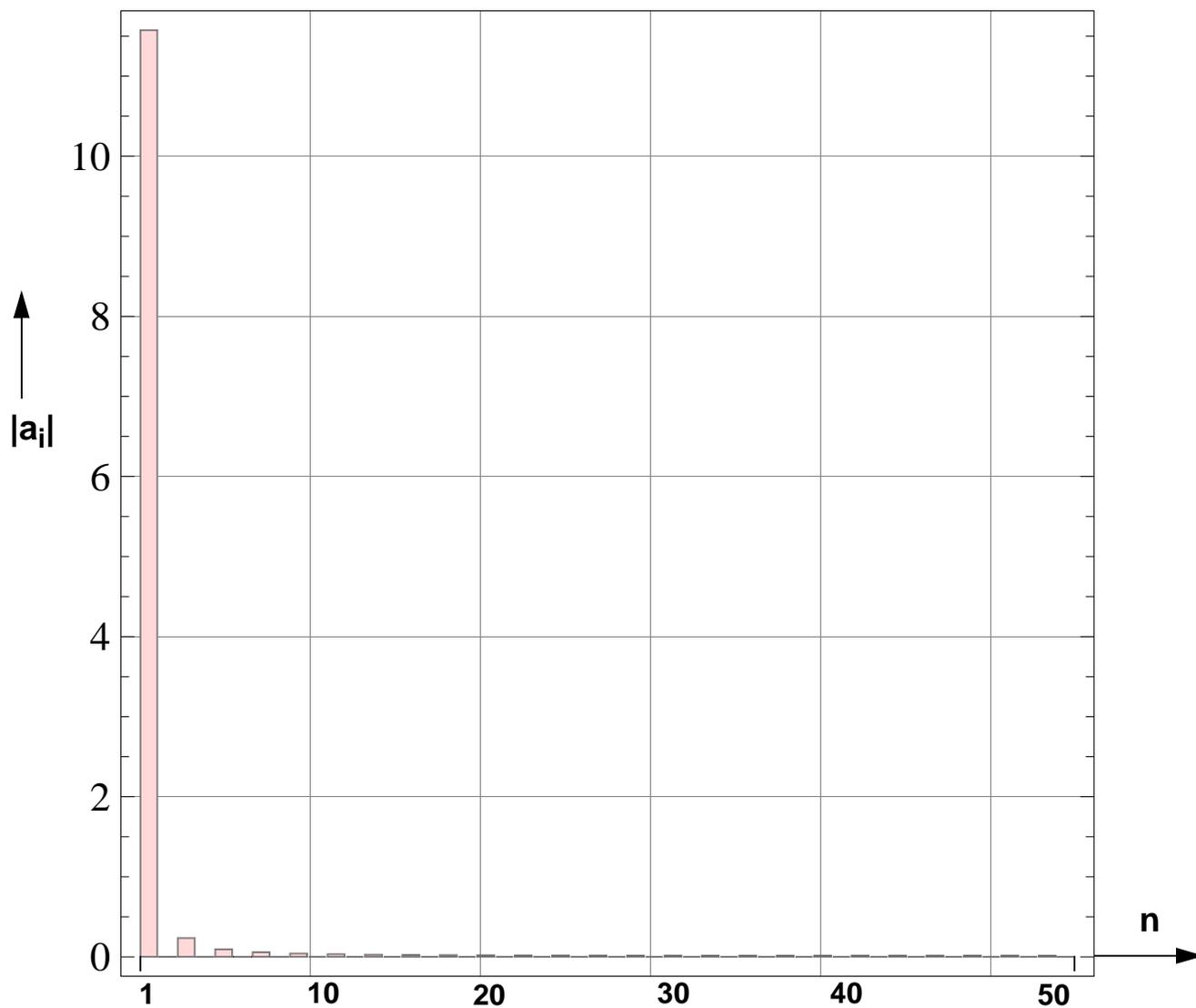
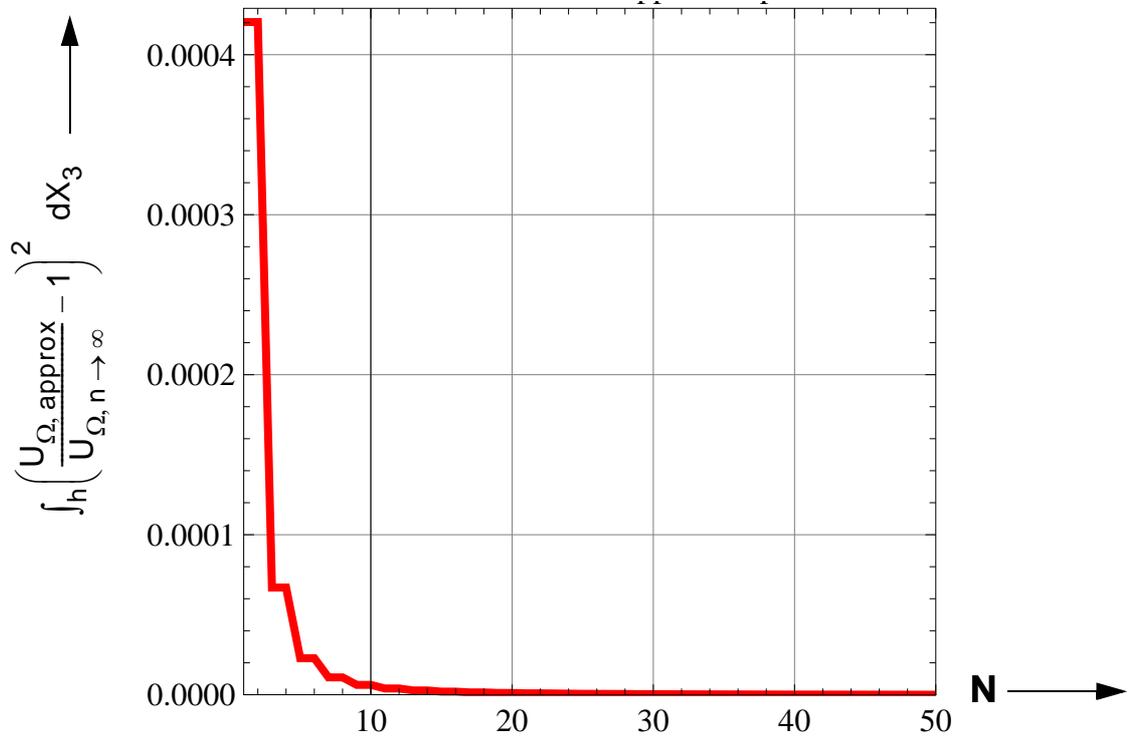


Abb.8.49: Anteilsfaktoren der Abkling-QS-Verwölbungen für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung für  $N=50$  wirksame Abkling-QS-Verwölbungen

(a)



(b)

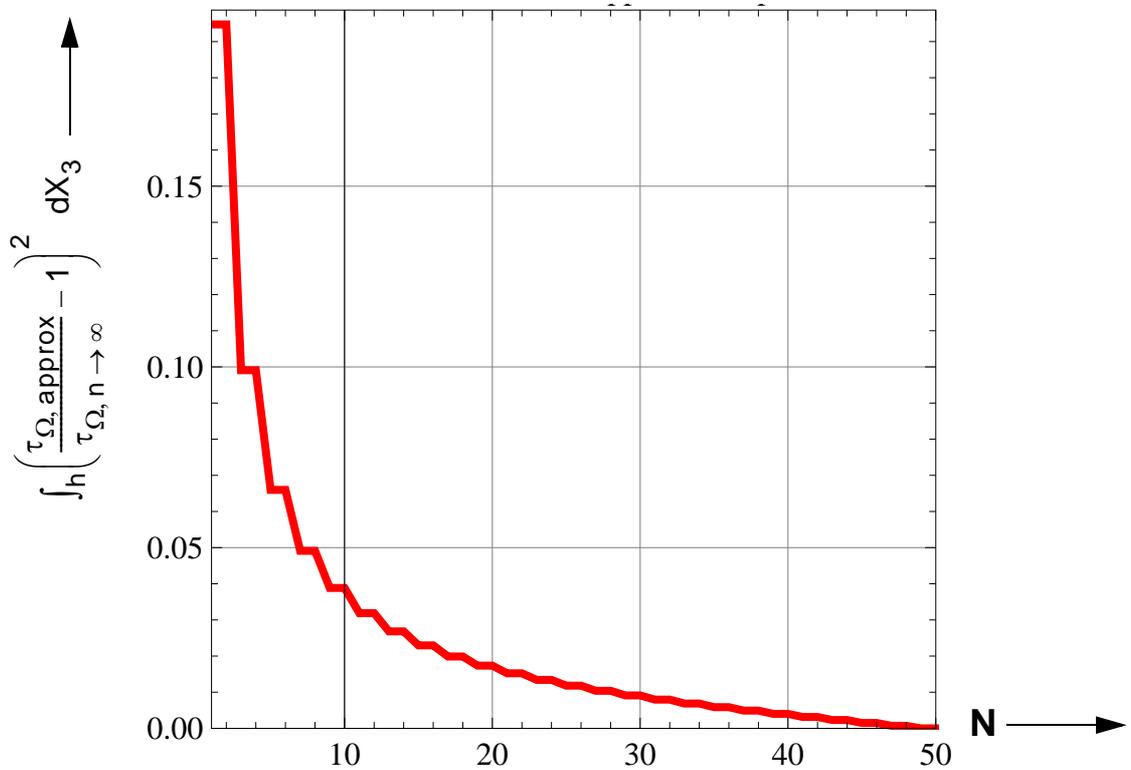


Abb.8.50: Auftretender Fehler bei Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung durch die Ableitung-QS-Verwölbungen  $N=1$  bis 50: (a)  $U_{\Omega}$  und (b) Schubspannungen  $\tau_{\Omega}$  bei  $\xi=0$

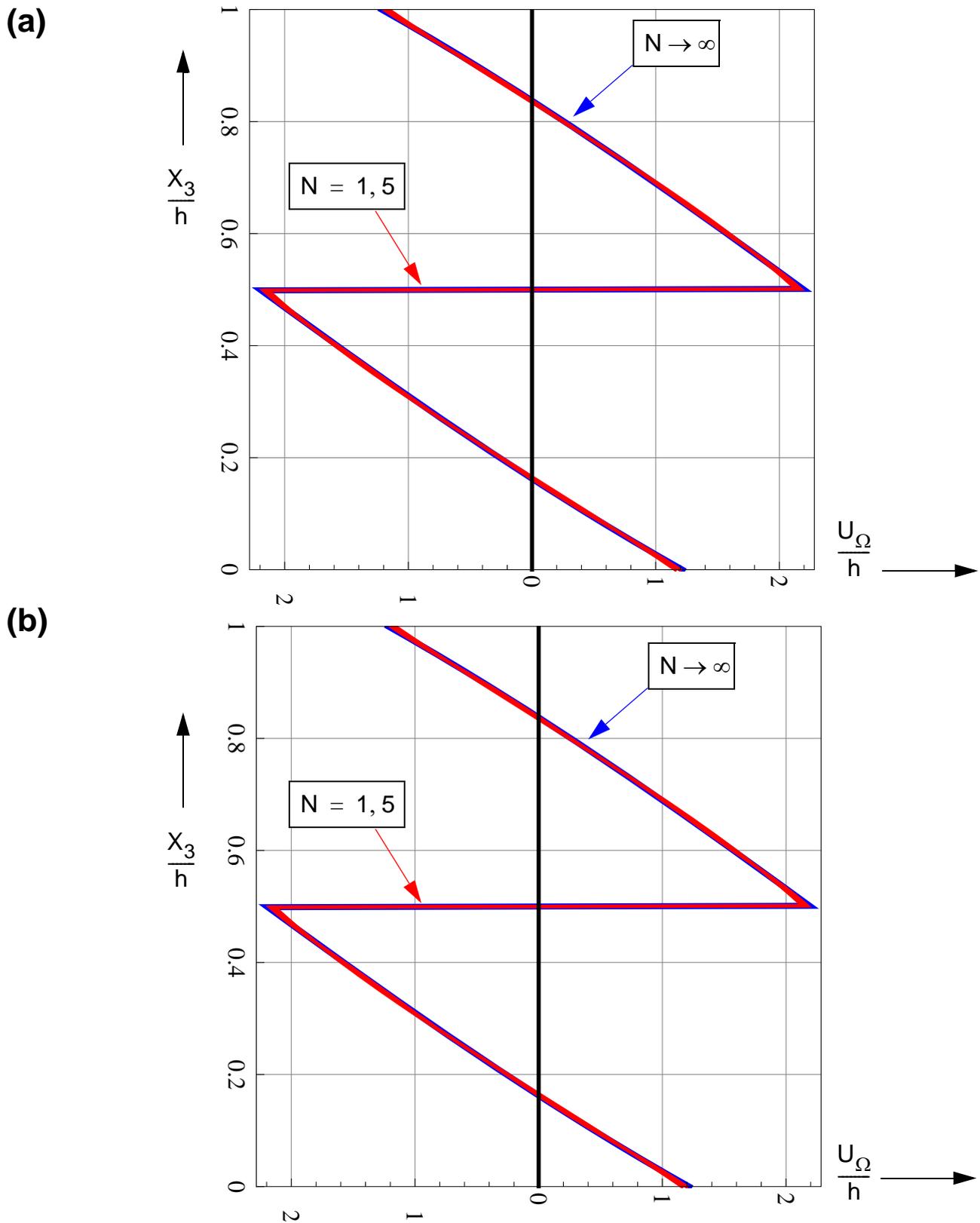


Abb.8.51: Approximierte Freiefeldlösung der QS-Verwölbung für a)  $\xi=0$  und b)  $\xi=1$

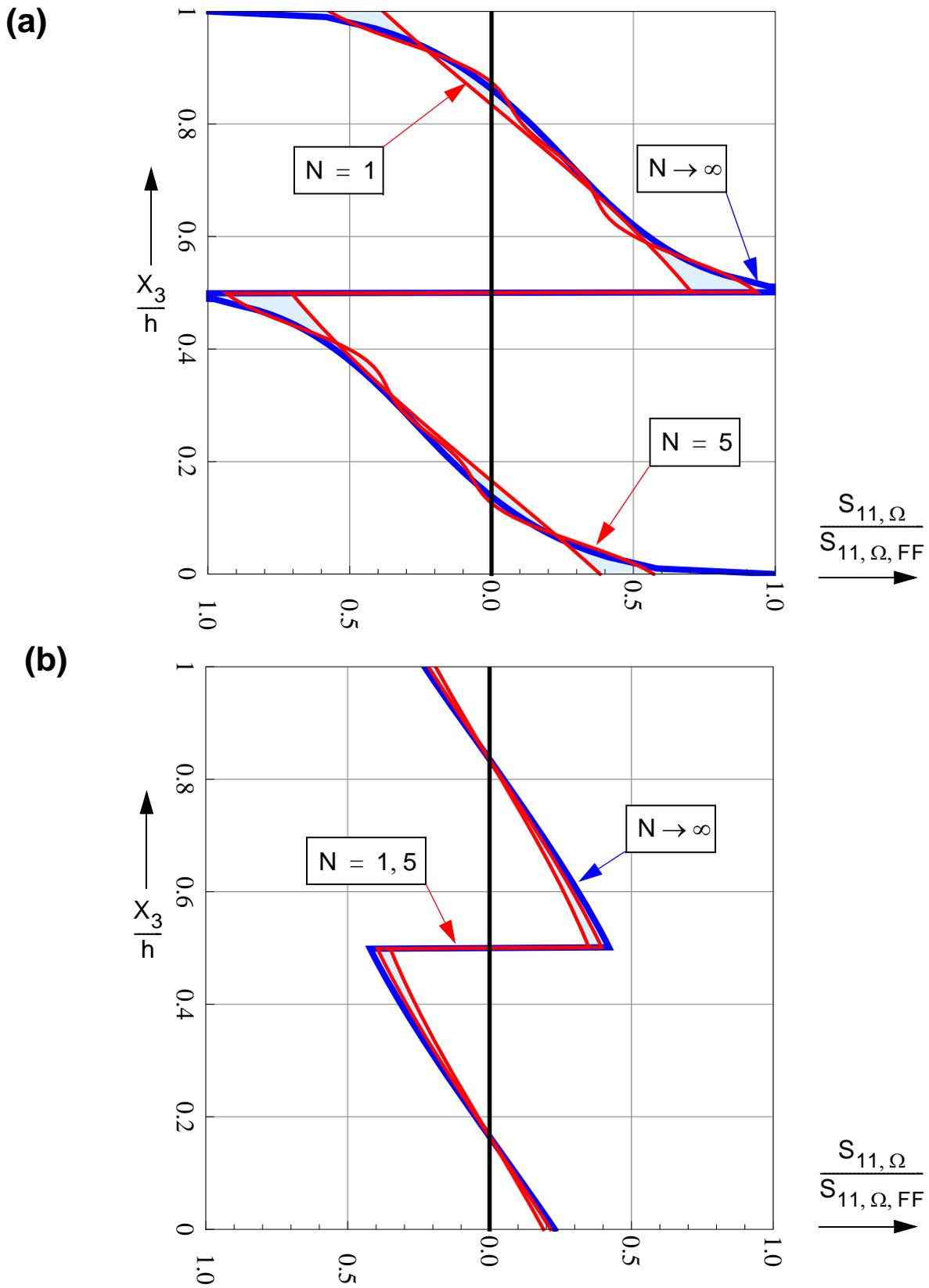


Abb.8.52: Wölbnormalspannung in bezogener Darstellung für die approximierte Freiefeldlösung der QS-Verwölbung für a)  $\xi=0$  und b)  $\xi=1$

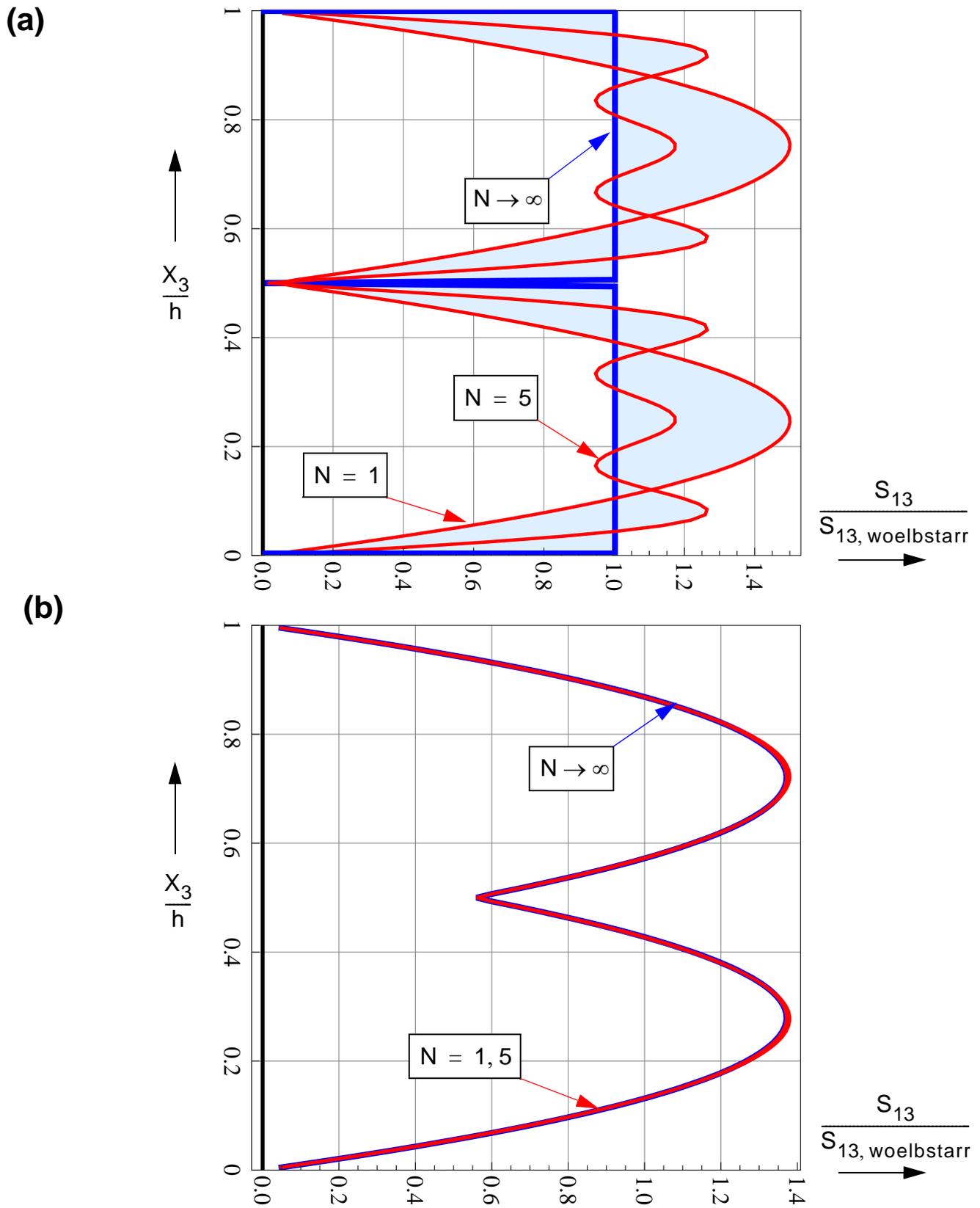


Abb.8.53: Resultierende Schubspannung in bezogener Darstellung für die approximierte Freifeldlösung der QS-Verwölbung für a)  $\xi=0$  und b)  $\xi=1$

## 8.4.2 Dreiteiliger rechteckiger Verbund-QS mit zwei starren Fugen: Typ 1

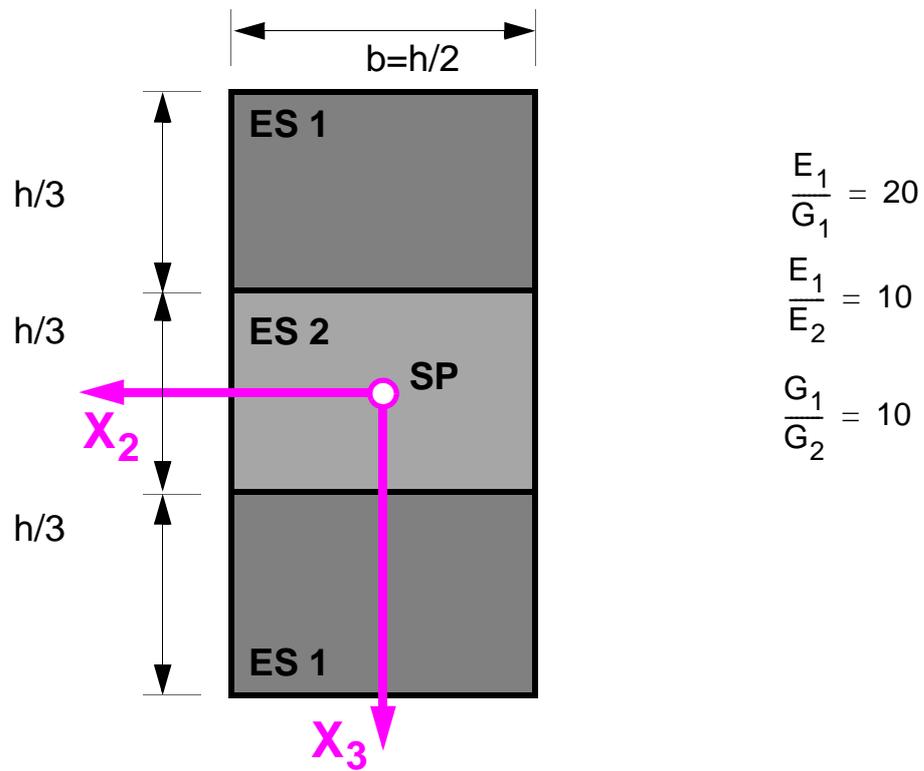


Abb.8.54: Beispiel 3: Dreiteiliger rechteckiger Stabquerschnitt mit starren Verbundfugen und 2D-Stabkinematik – Geometrische Abmessungen und Materialdefinitionen für die Elastizitätskonstanten

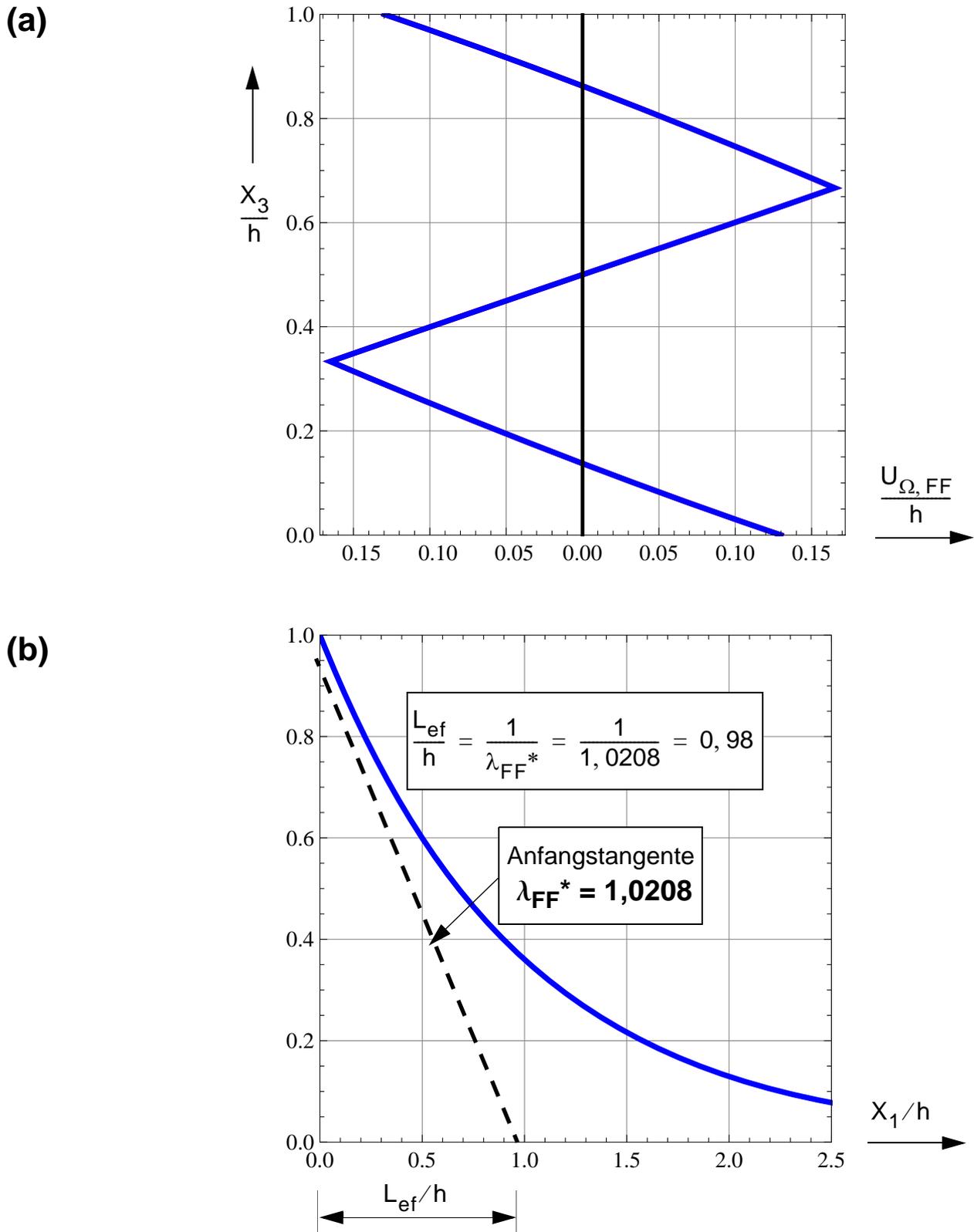


Abb.8.55: (a) Freiefeldlösung für die QS-Verwölbung  
 (b) Abklingverhalten der QS-Verwölbung der Freiefeldlösung in Stablängsrichtung bei Verwendung als Abkling-QS-Verwölbung

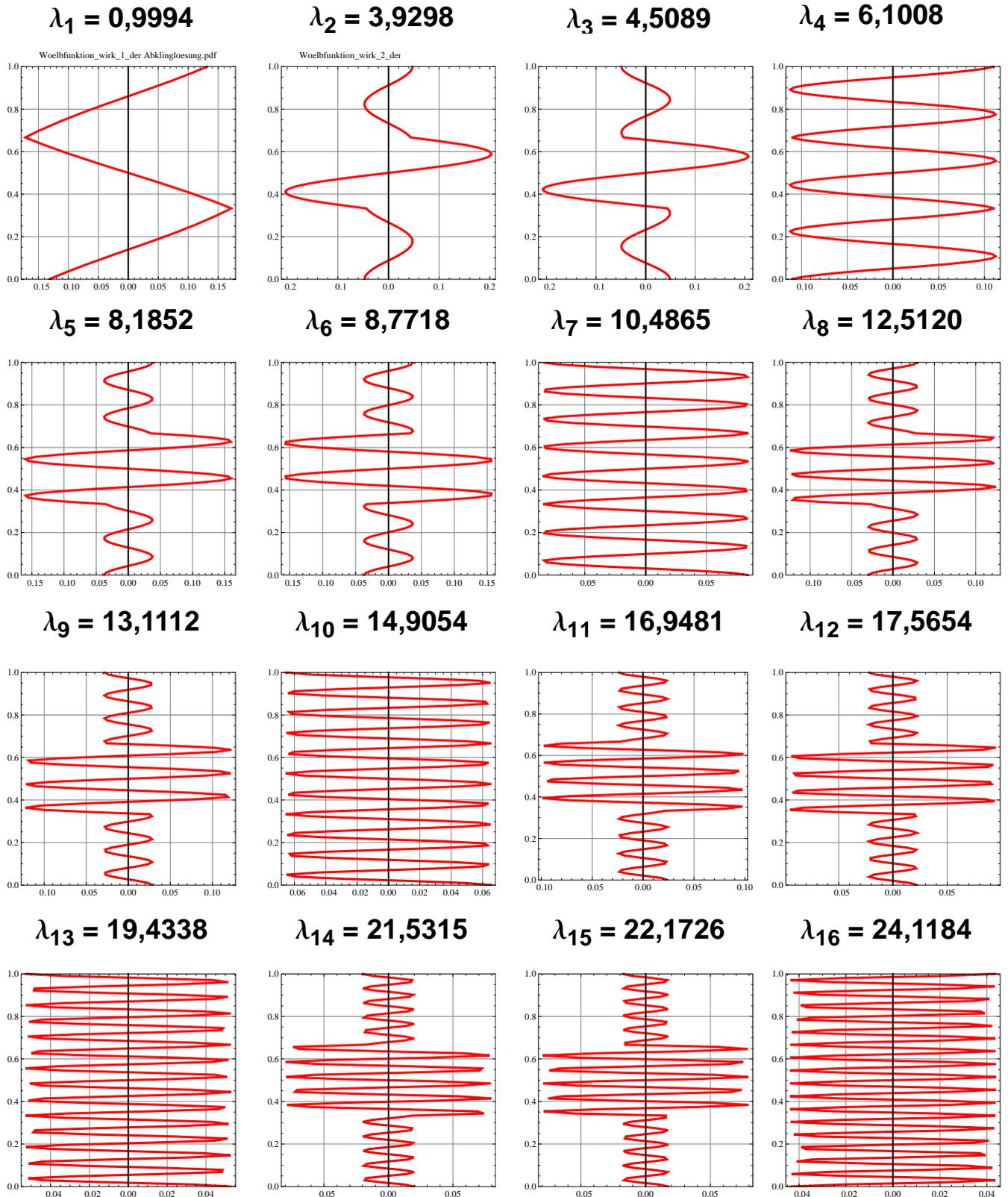


Abb.8.56: Antimetrische (wirksame) Abkling-QS-Verwölbungen ( $n=1$  bis 16) und zugehörige Abklingzahlen für das exponentielle Abklingverhalten in Stablängsrichtung ( $X_1$ )

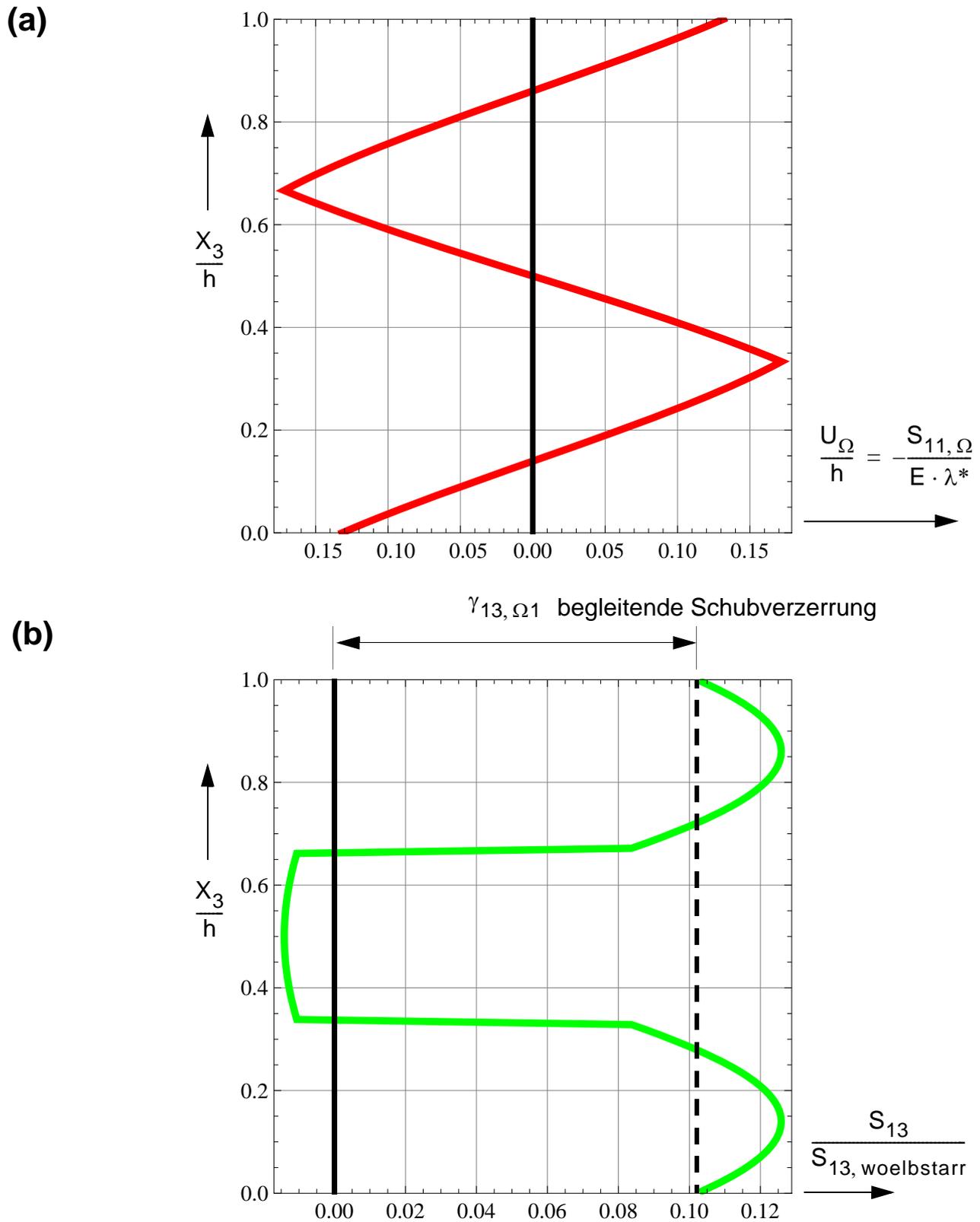
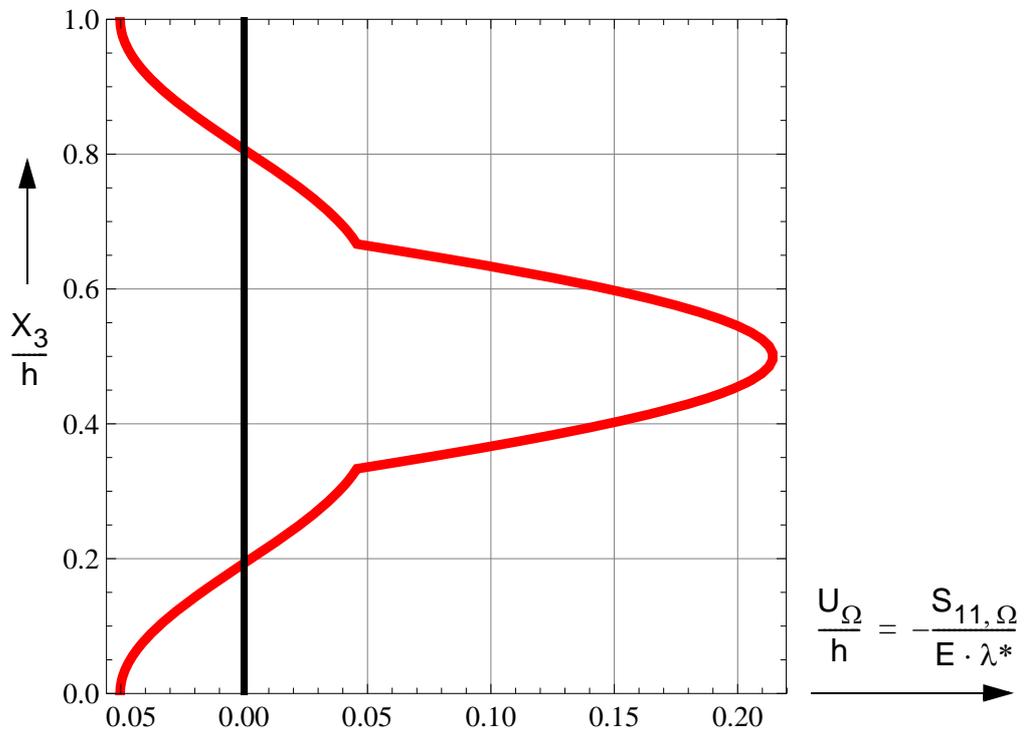


Abb.8.57: (a) Abklinglösung der QS-Verwölbung ( $n=1$ ) und zugehörige Wölbnormalspannung in bezogener Darstellung, (b) zugehörige Wölbschubspannungen in bezogener Darstellung

(a)



(b)

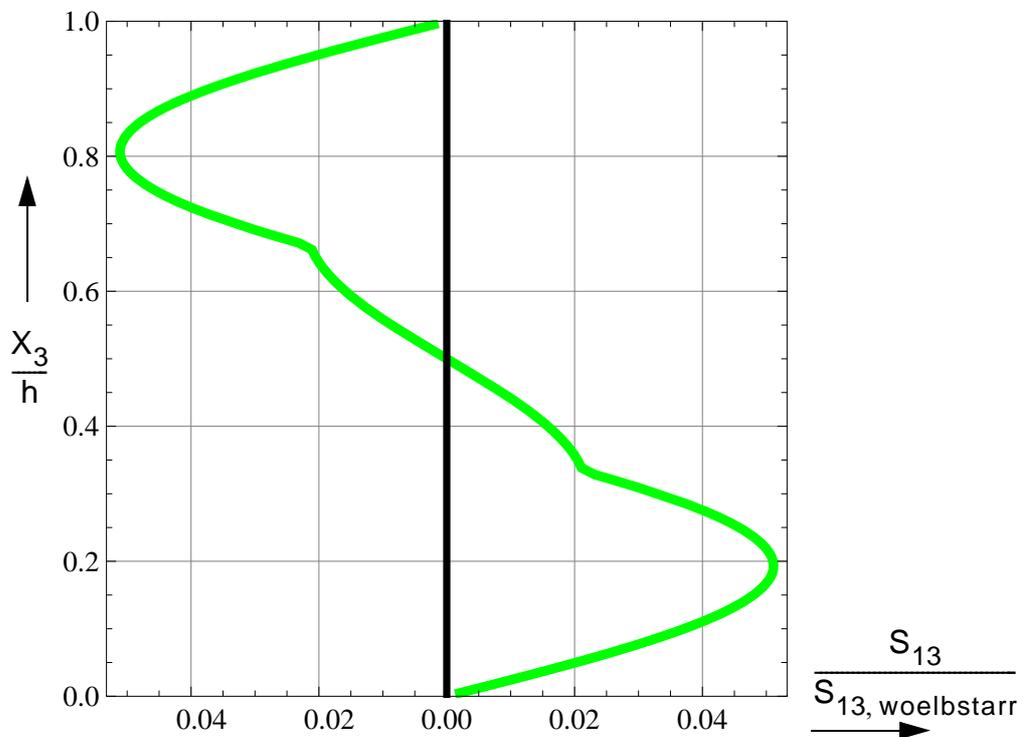


Abb.8.58: (a) Abklinglösung der QS-Verwölbung ( $n=2$ ) und zugehörige Wölbnormalspannung in bezogener Darstellung, (b) zugehörige Wölbschubspannungen in bezogener Darstellung

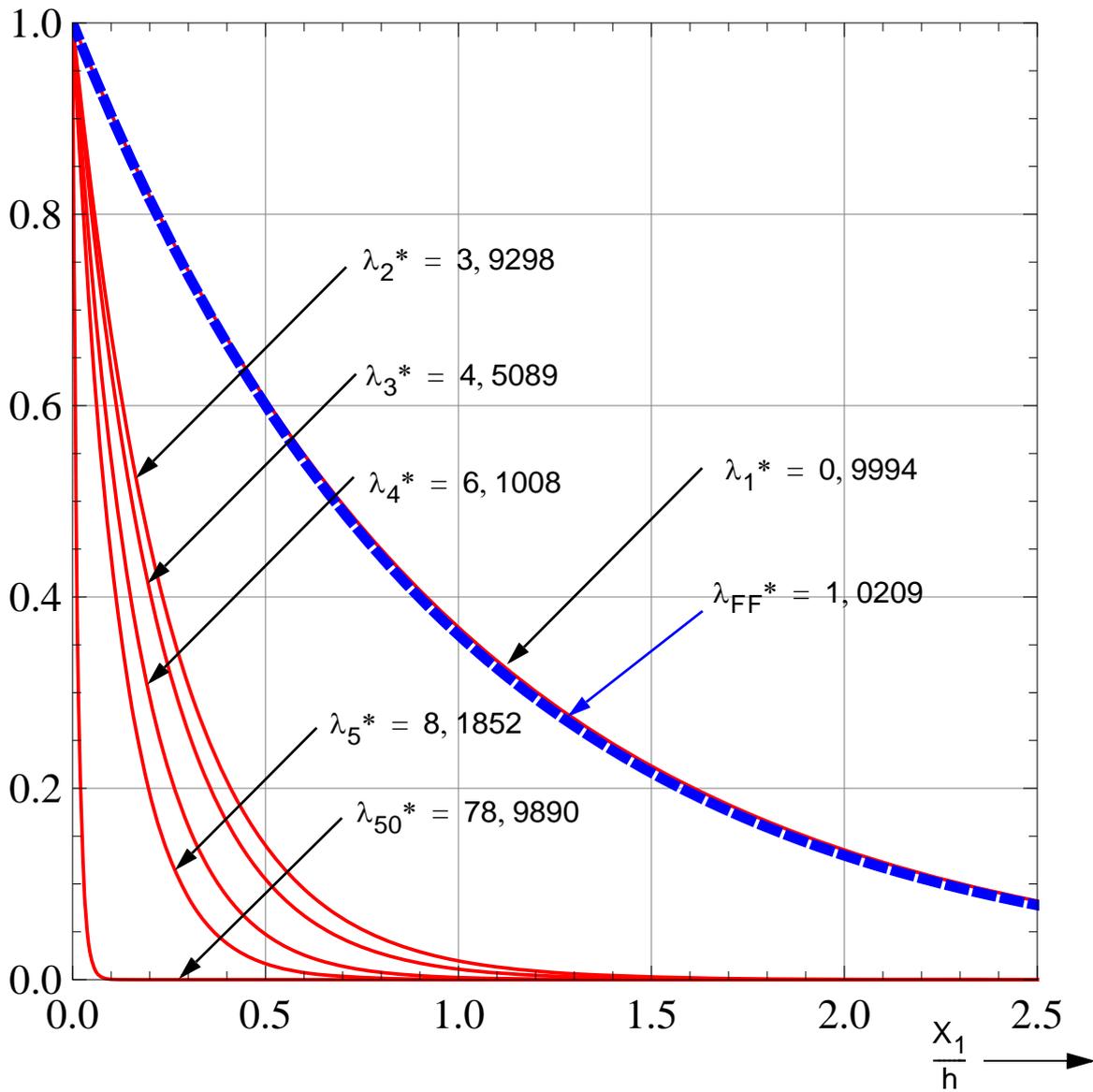
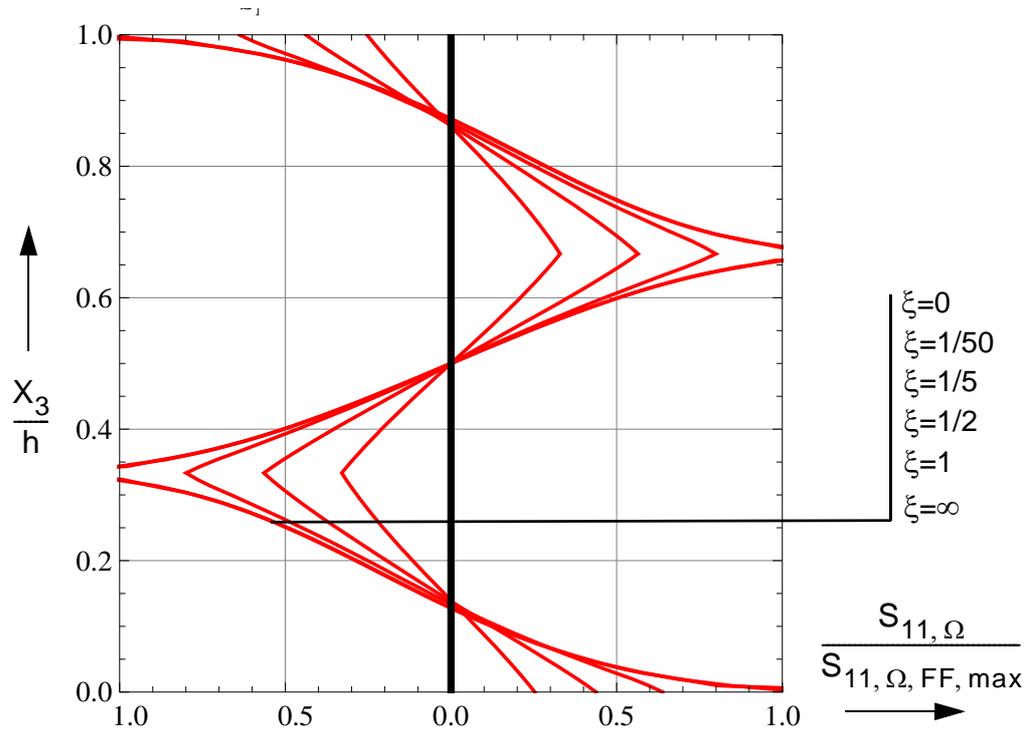


Abb.8.59: Stablungsverhalten der Abkling-QS-Verwölbungen ( $n=1$  bis  $5$  und  $50$ ) sowie der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

(a)



(b)

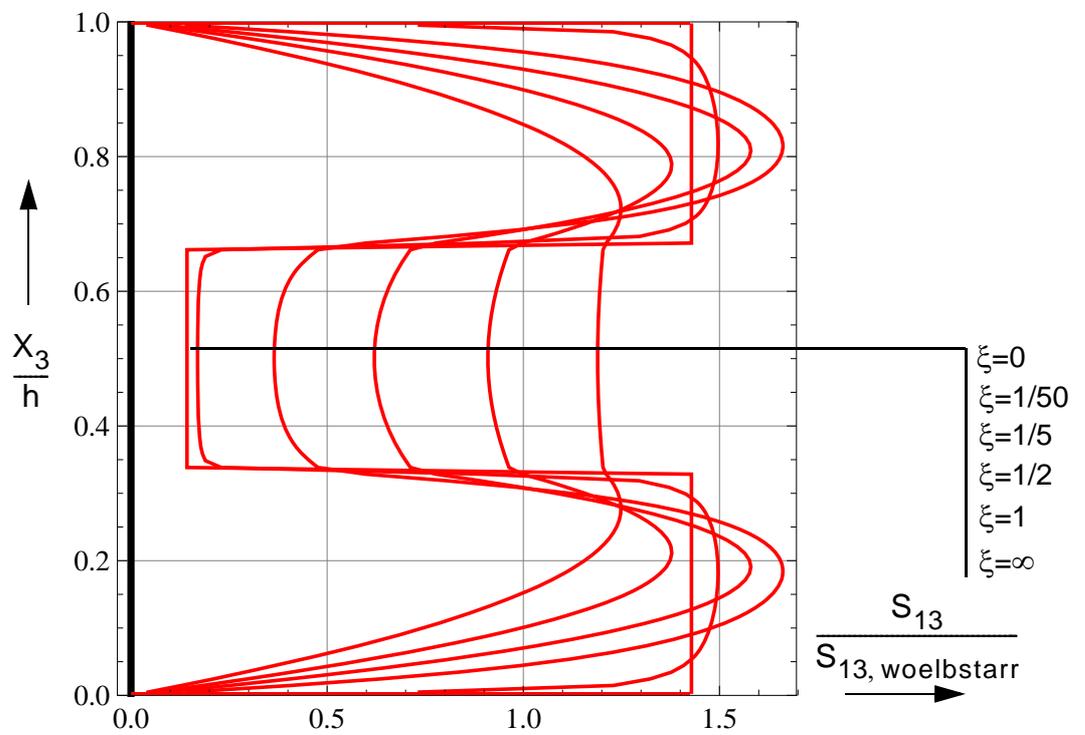


Abb.8.60: (a) Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung, (b) Schubspannungen in bezogener Darstellung für verschiedene  $X_1$  in Stablängsrichtung ohne Darstellung der Spannungsspitzen

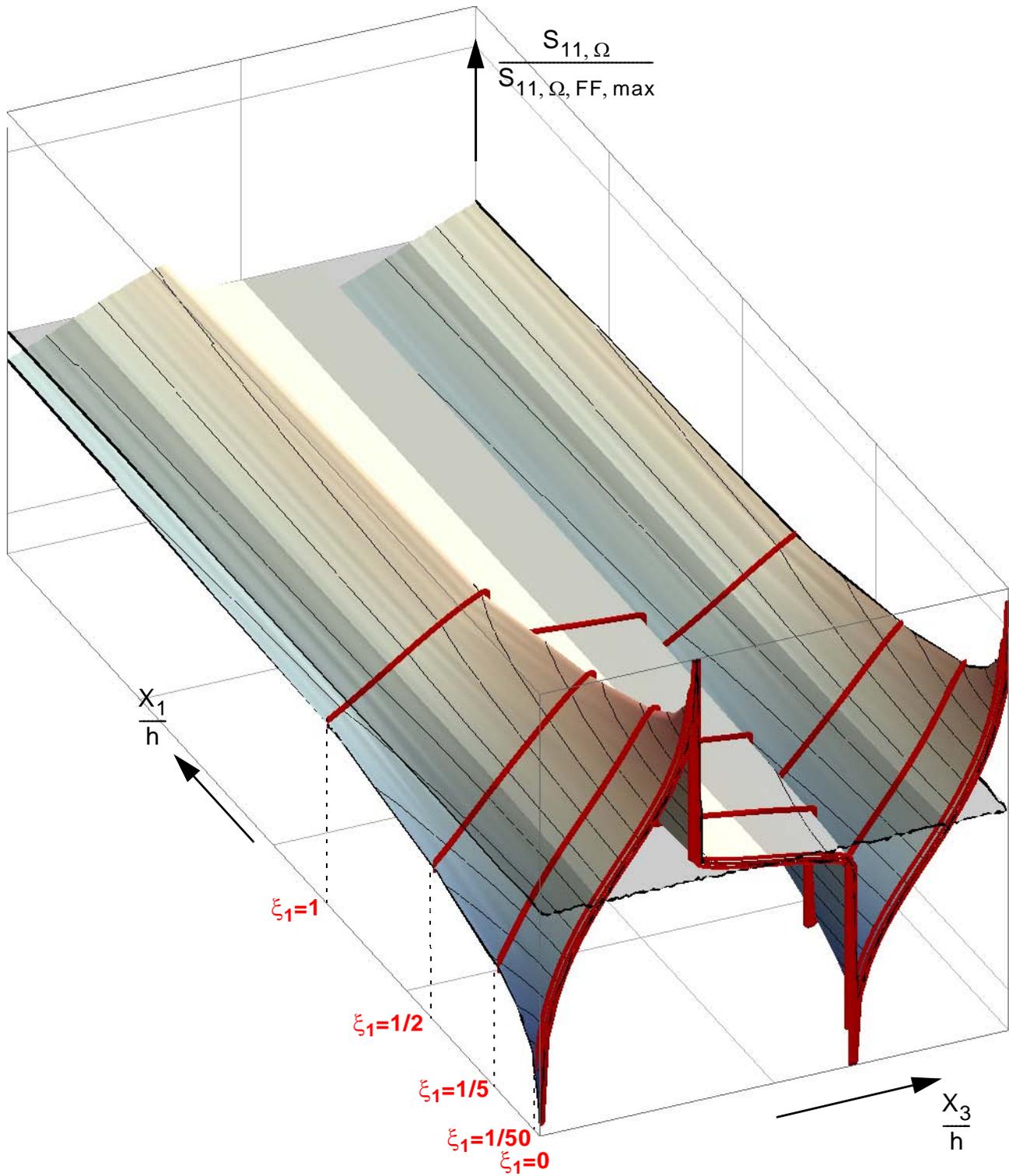


Abb.8.61: Verlauf der Wölbnormalspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen für Abb. 8.60 a)

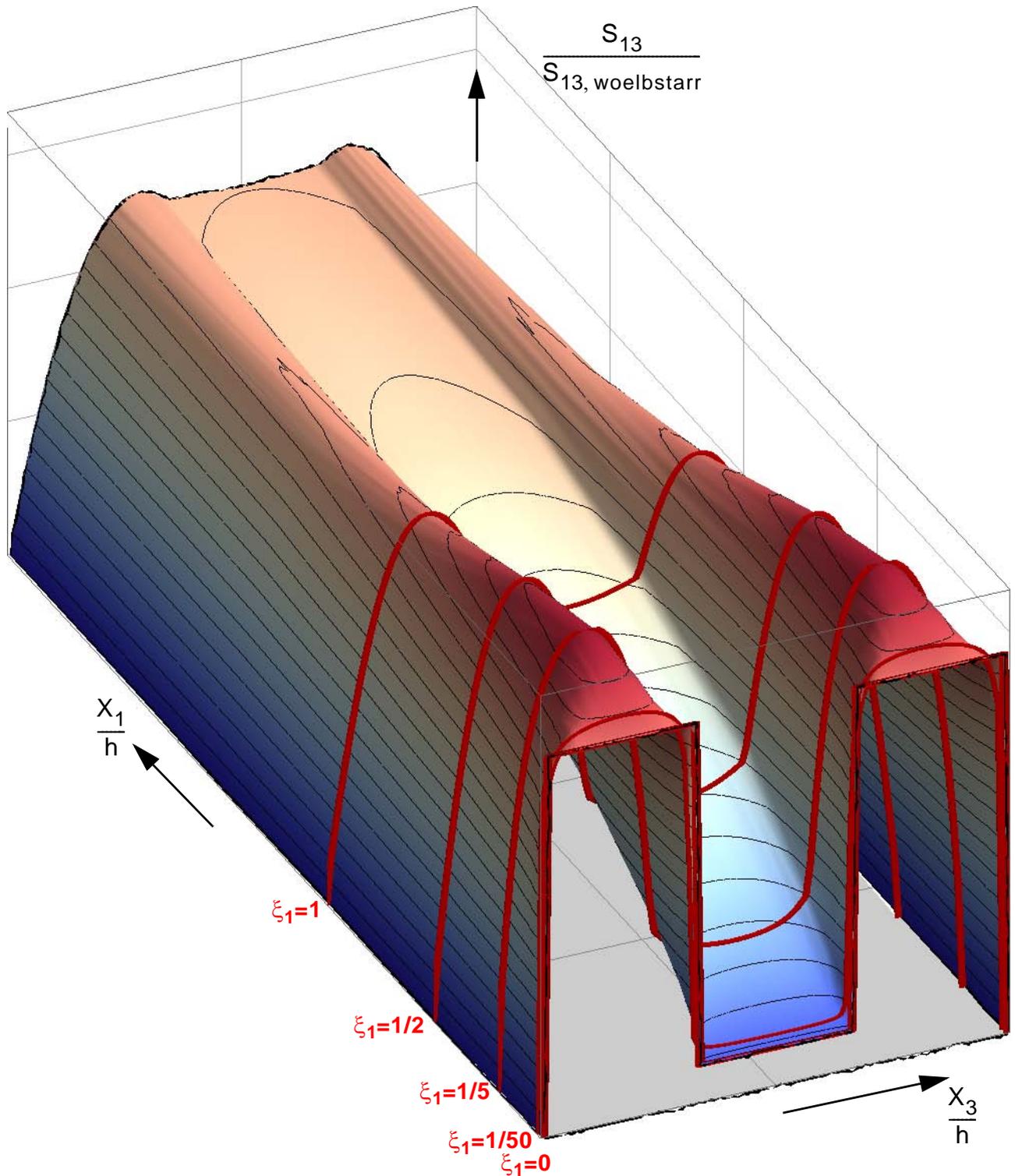


Abb.8.62: Verlauf der Schubspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen für Abb. 8.60 b)

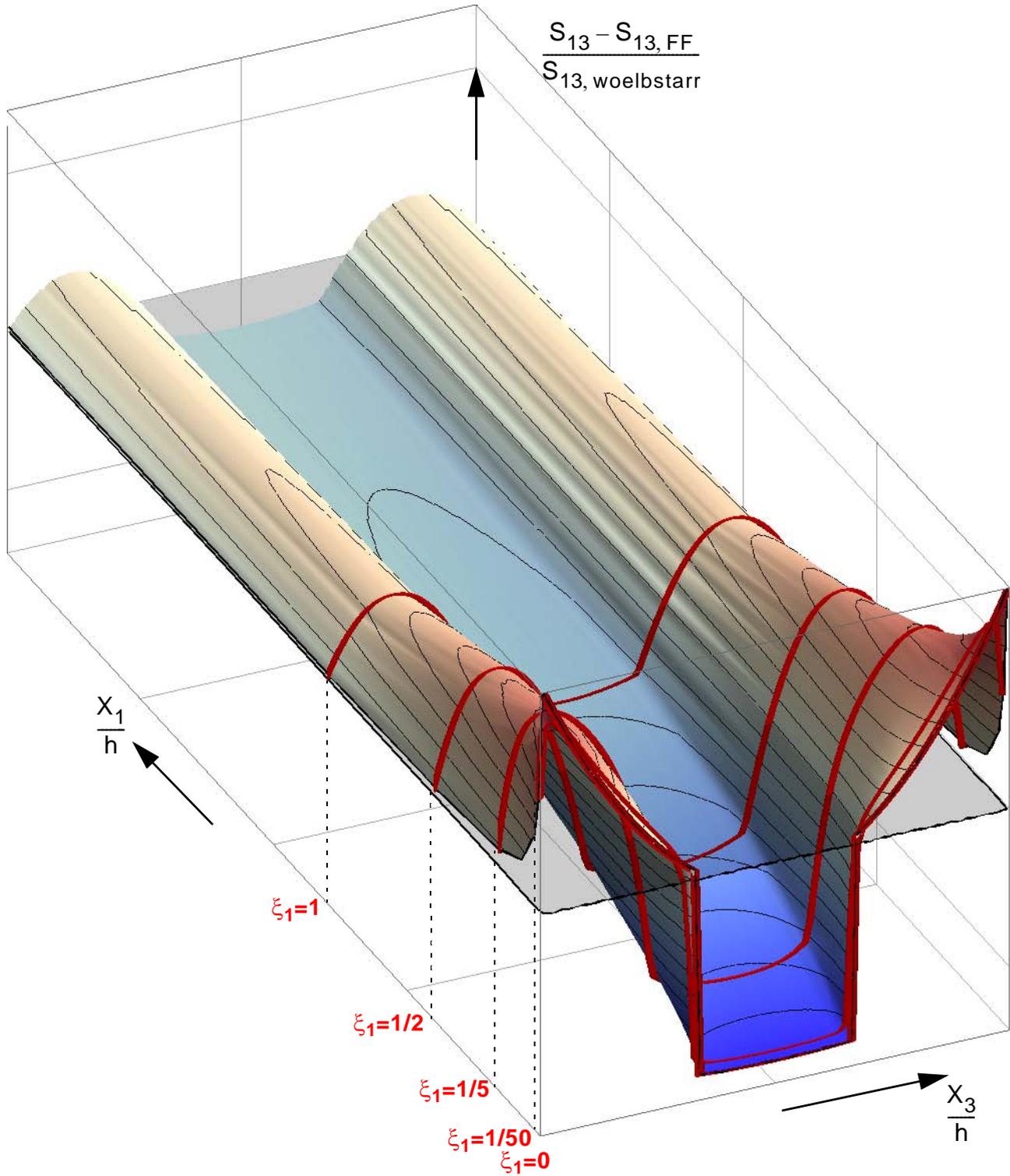


Abb.8.63: Abklingende Randstörung der Schubspannungen bezogen auf die Schubspannung des wölbstarreren Querschnitts in Stablängsrichtung mit Darstellung der Schnittführungen

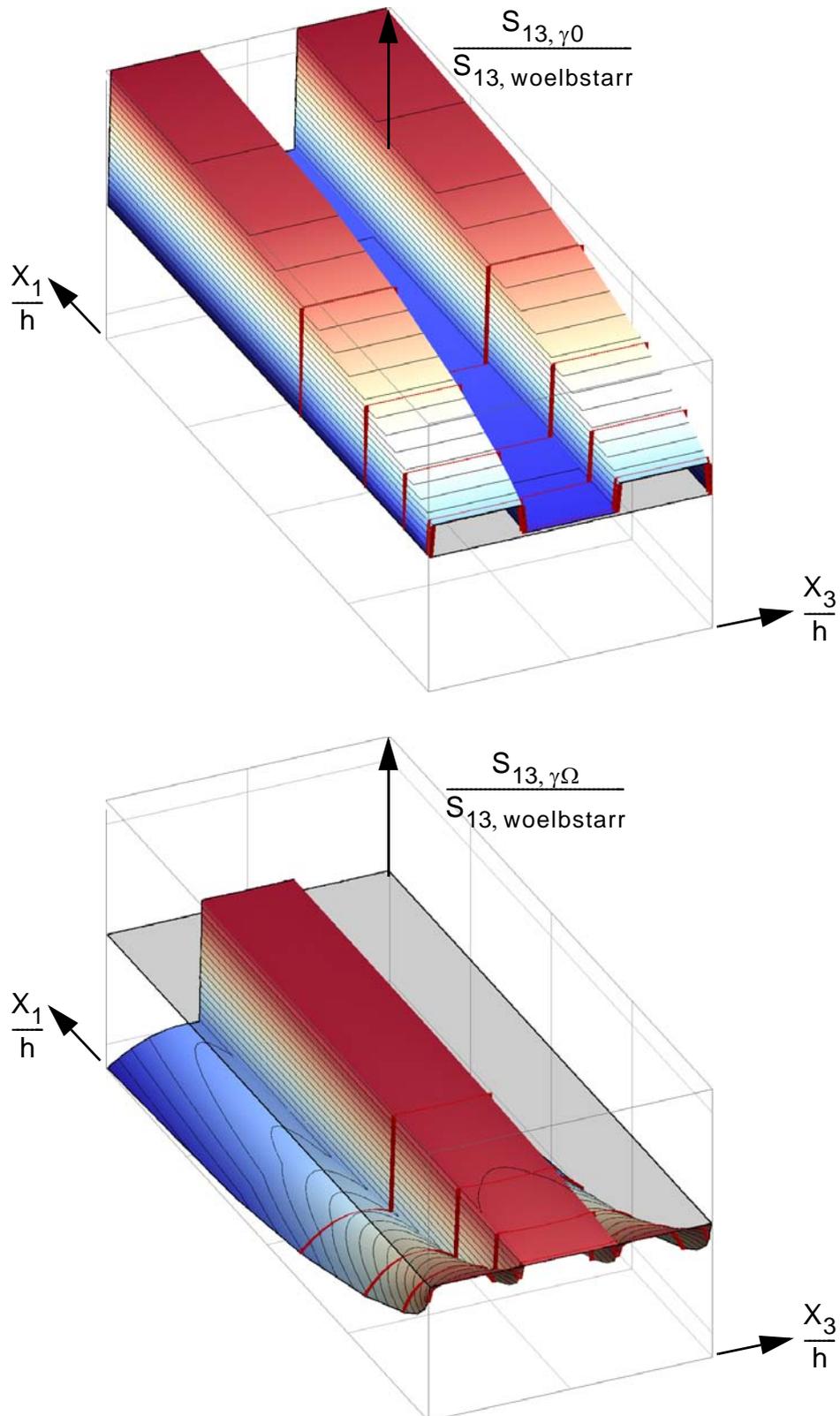


Abb.8.64: Verlauf der Schubspannungen in bezogener Darstellung in Stablängsrichtung  $X_1$ :  
 a) Starrkörperanteil b) Abklinganteil

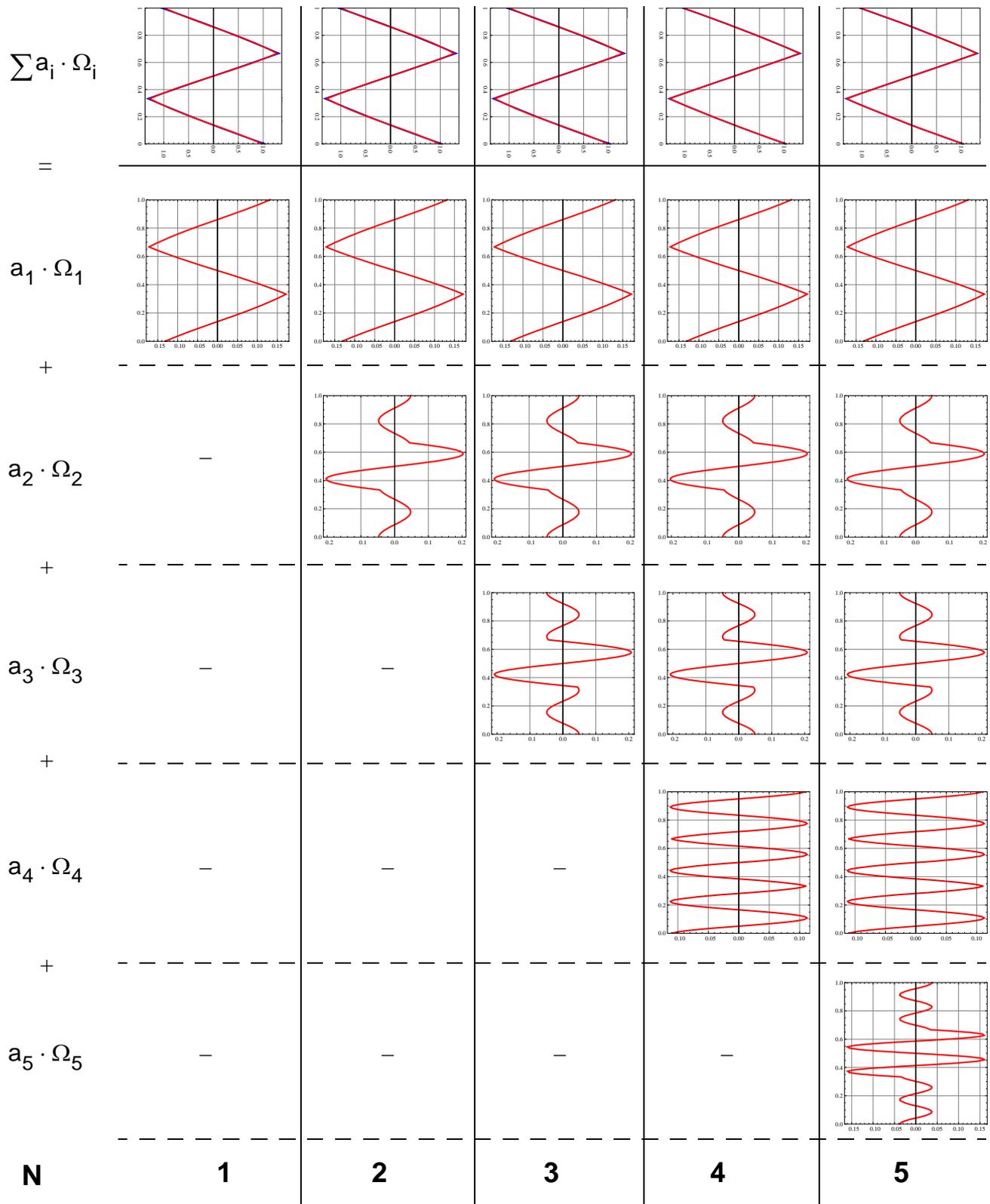


Abb.8.65: Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung durch 1, 2, 3, 4 und 5 wirksame Abkling-QS-Verwölbungen

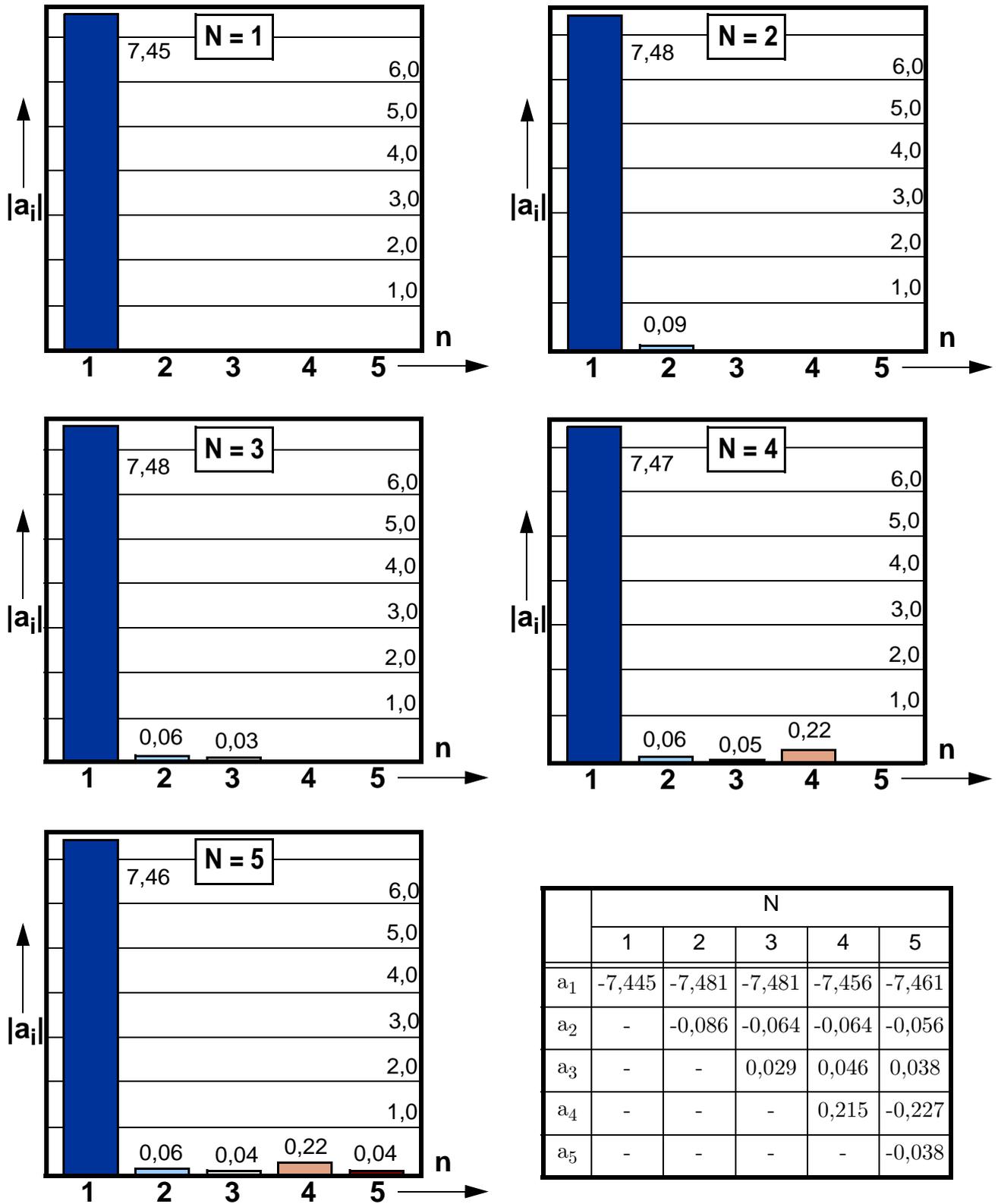


Abb.8.66: Anteilfaktoren der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung für N=1, 2, 3, 4 und 5 wirksame 3D-Einzelverschiebungsfelder

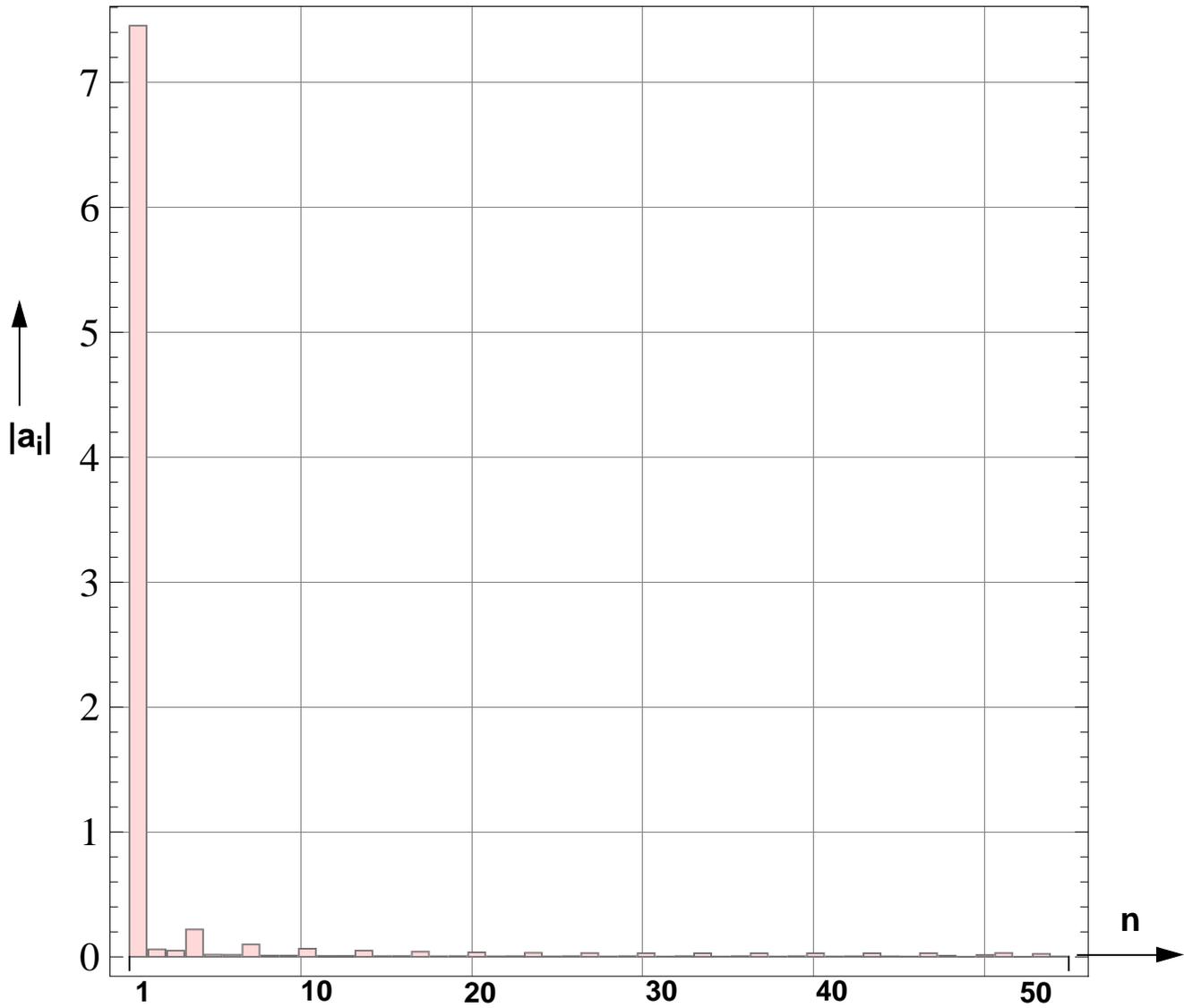
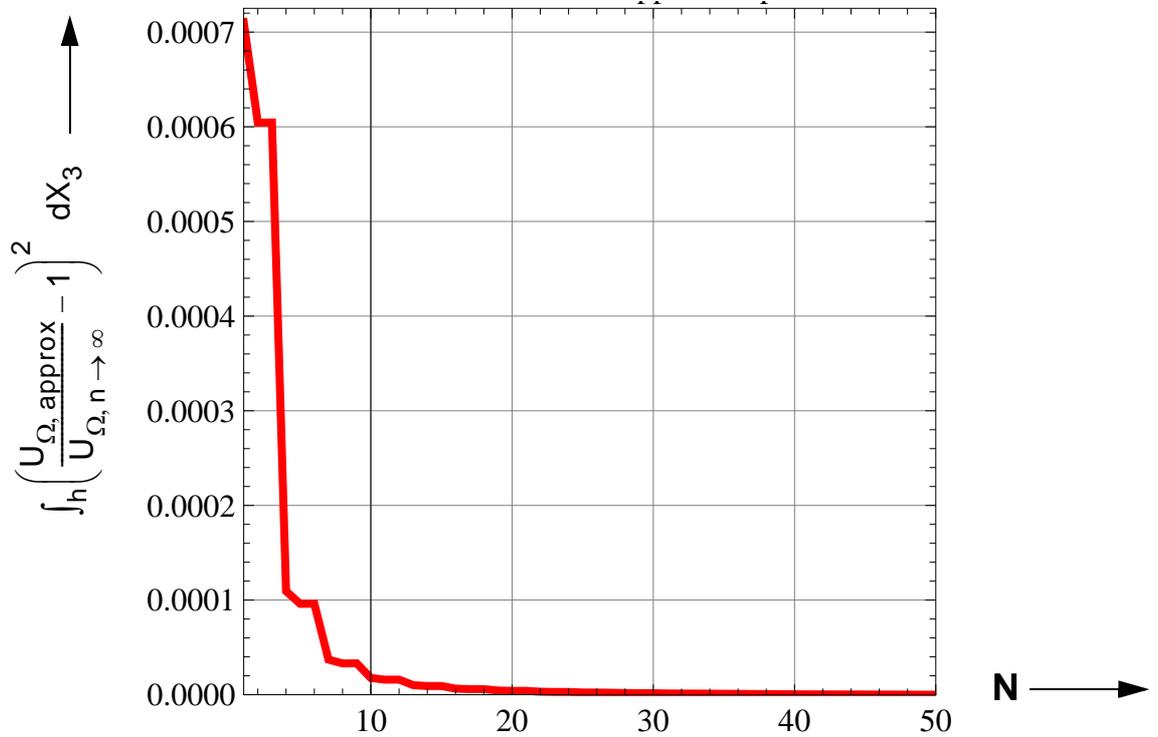


Abb.8.67: Anteilfaktoren der relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung für  $N=50$  wirksame 3D-Einzelverschiebungsfelder

(a)



(b)

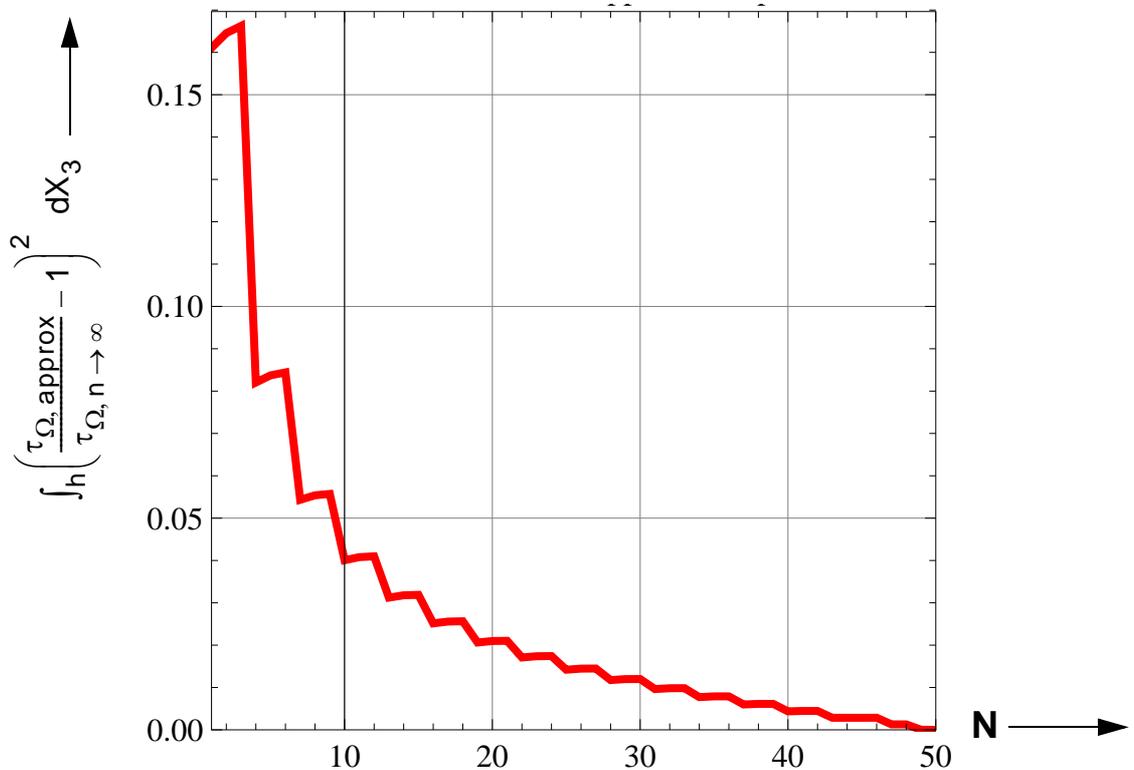


Abb.8.68: Auftretender Fehler bei Approximation der Freiefeldlösung der QS-Verwölbung durch relative 3D-Einzelverschiebungsfelder  $N=1$  bis 50: (a)  $U_{\Omega}$  und (b) Schubspannungen  $\tau_{\Omega}$  bei  $\xi=0$

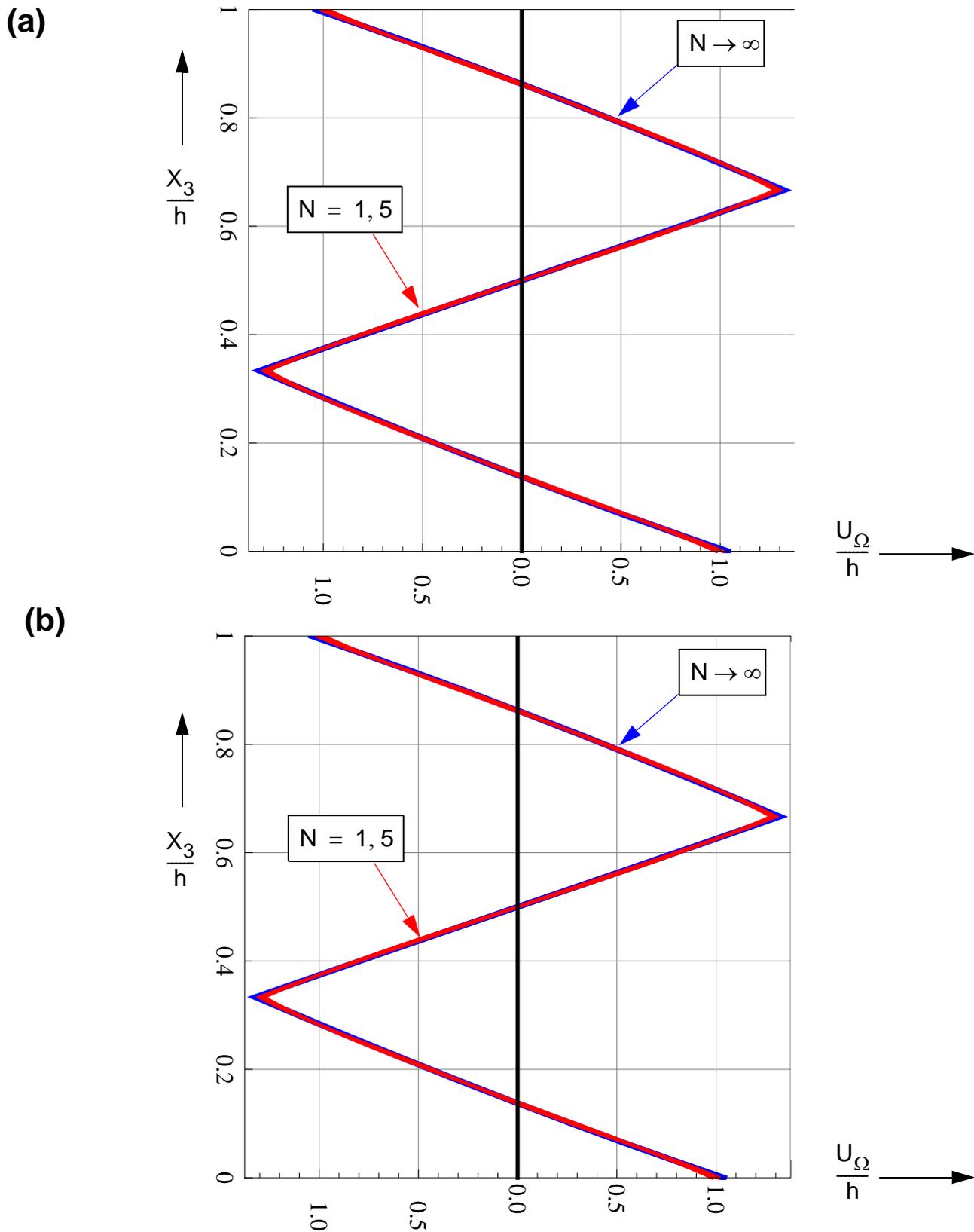


Abb.8.69: Approximierte Freifeldlösung der QS-Verwölbung für a)  $\xi=0$  und b)  $\xi=1$

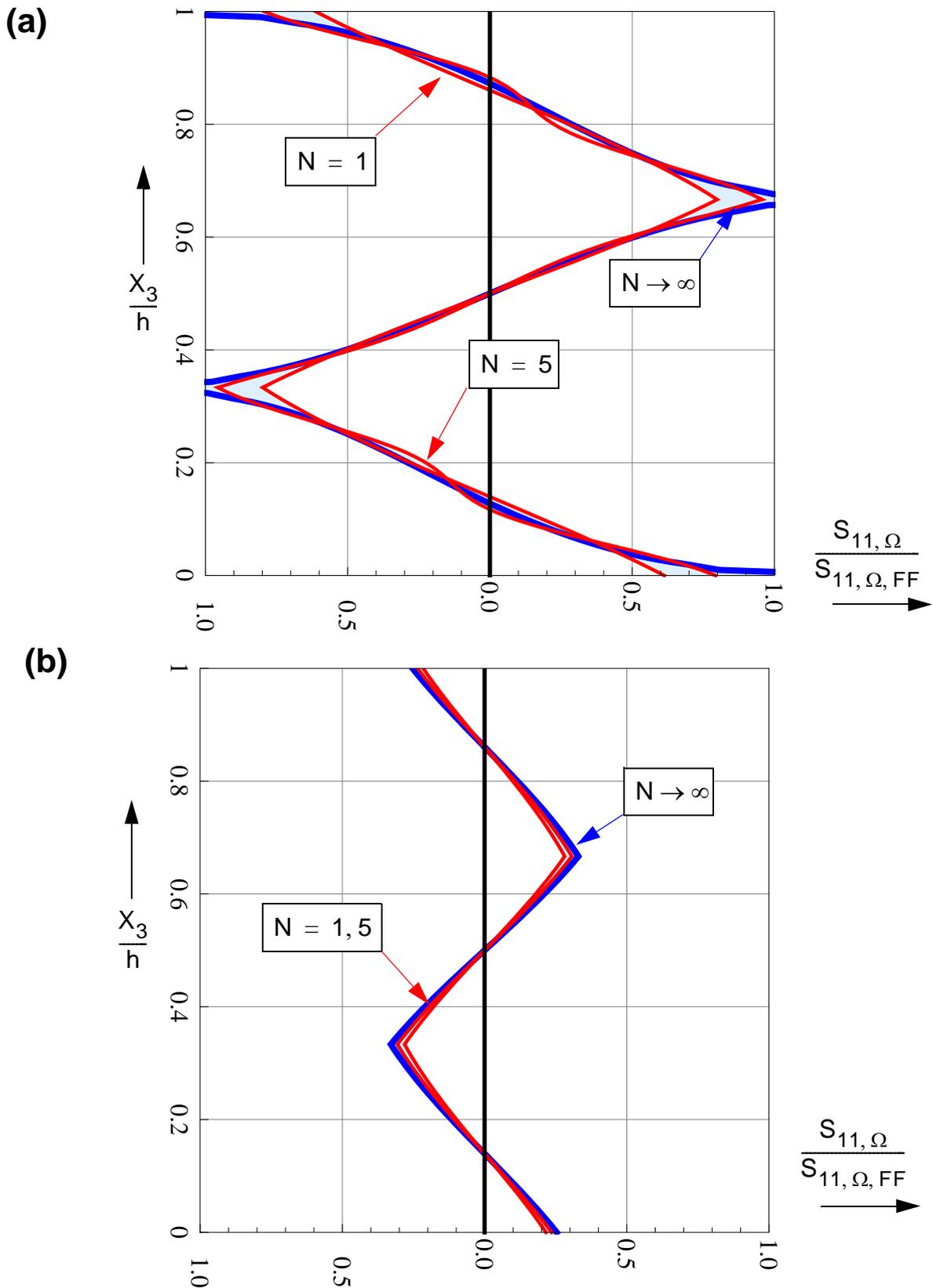


Abb.8.70: Wölbnormalspannung in bezogener Darstellung für die approximierte Freifeldlösung der QS-Verwölbung für a)  $\xi=0$  und b)  $\xi=1$

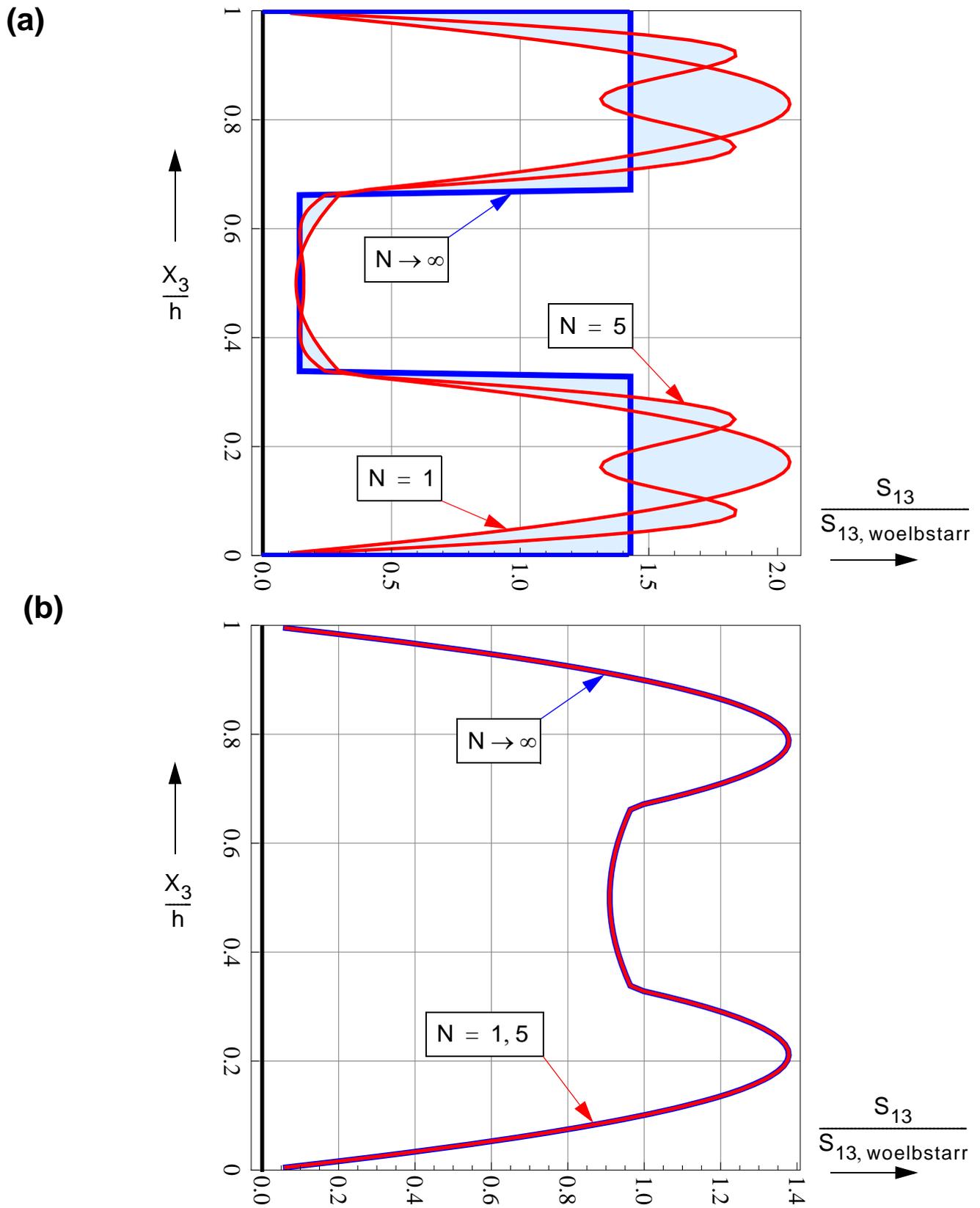
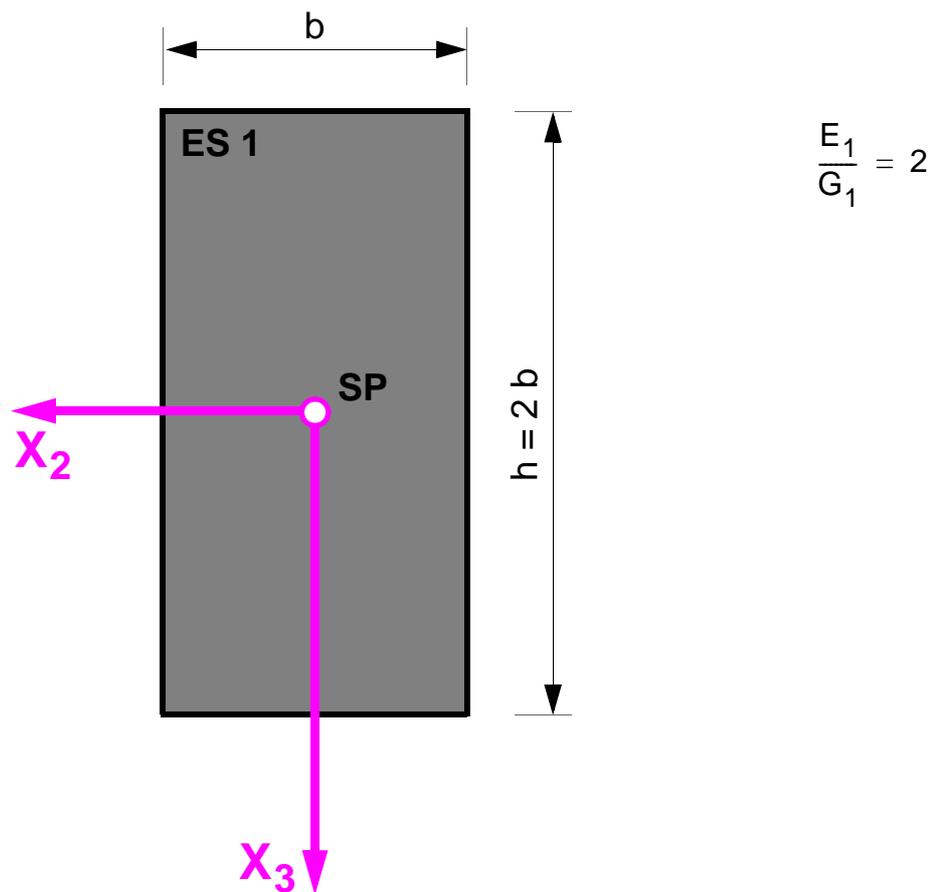


Abb.8.71: Resultierende Schubspannung in bezogener Darstellung für die approximierte Freifeldlösung der QS-Verwölbung für a)  $\xi=0$  und b)  $\xi=1$

## 8.5 Massive Querschnitte mit räumlicher Kinematik (3D-Kinematik)

### 8.5.1 Einteiliger Rechteck-Querschnitt (1S)



### Schubkorrekturfaktorenmatrix

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0,8336 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8336 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5491 \end{bmatrix}$$

Abb.8.72: Beispiel 5: Homogener rechteckiger Stabquerschnitt mit 3D-Stabkinematik: Geometrische Abmessungen und Materialdefinitionen für die Elastizitätskonstanten und Matrix der Schubkorrekturfaktoren

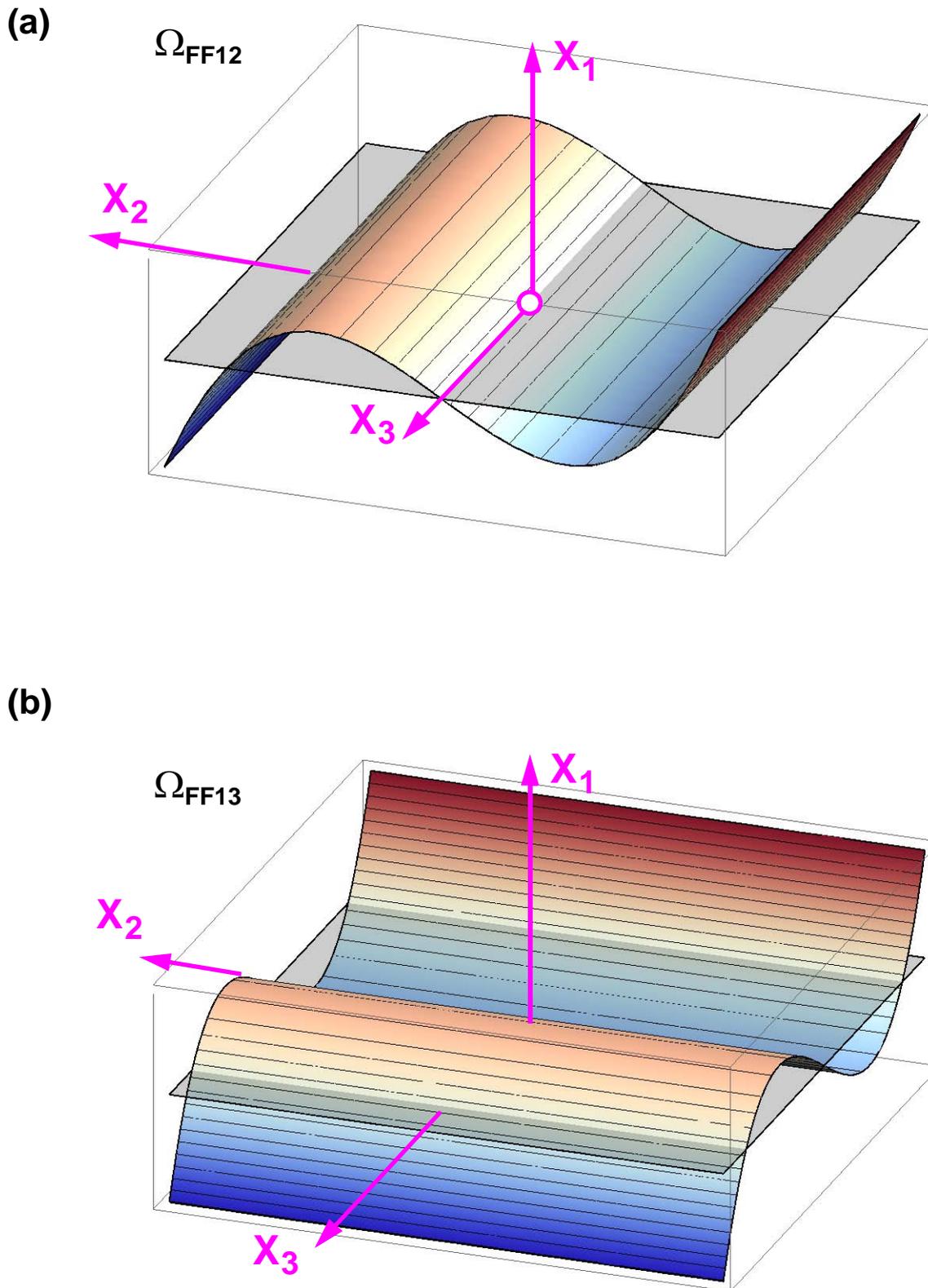


Abb.8.73: Freiefeldlösungen der QS-Verwölbungen für (a)  $V_2$  und für (b)  $V_3$ ;

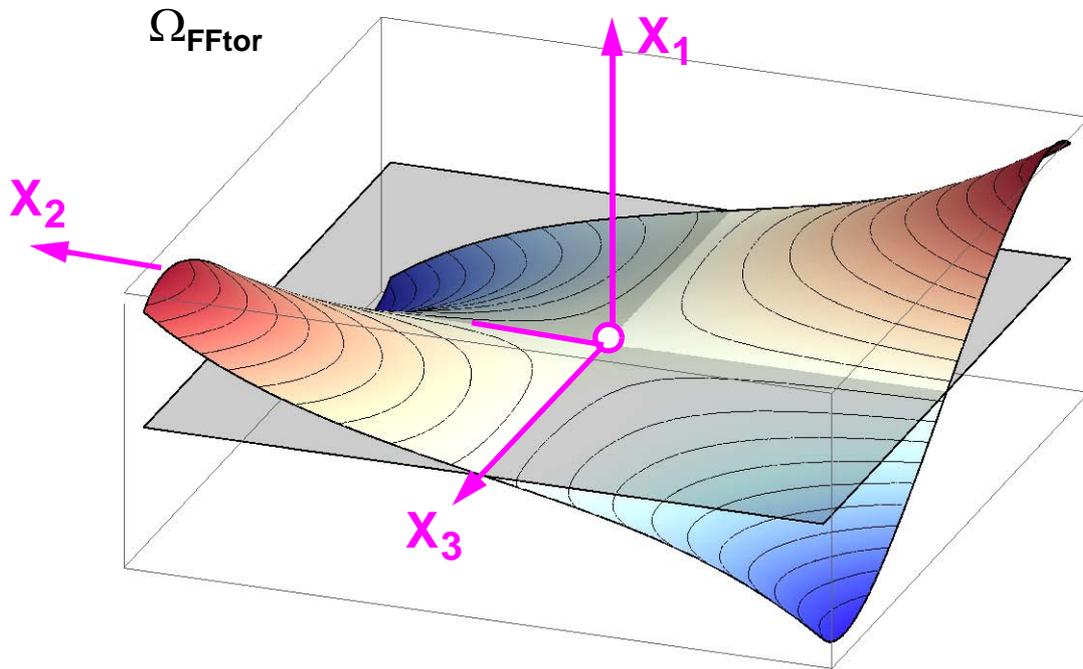


Abb.8.74: Freiefeldlösungen der QS-Verwölbungen für  $M_1$

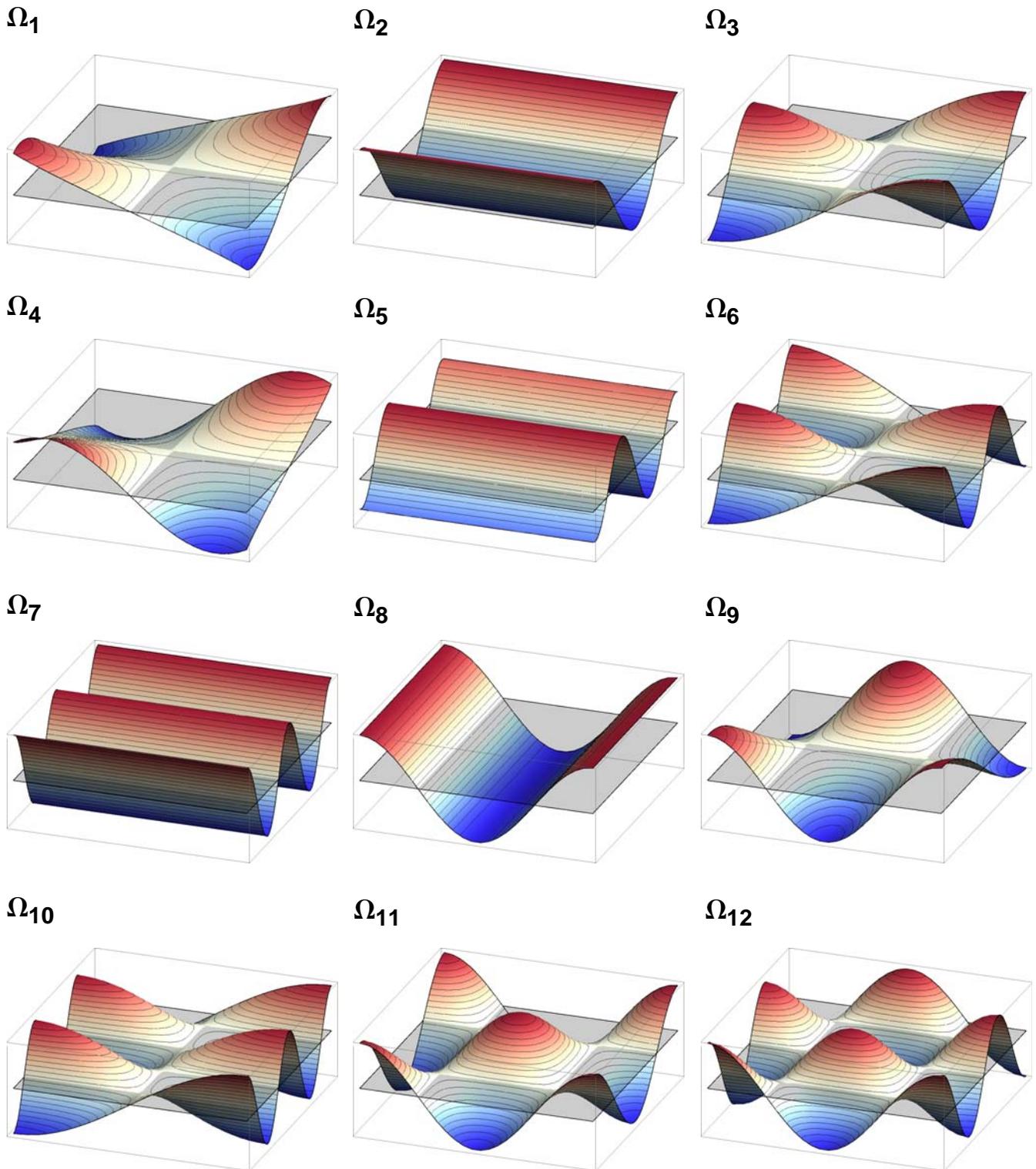


Abb.8.75: 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=1$  bis 12) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens

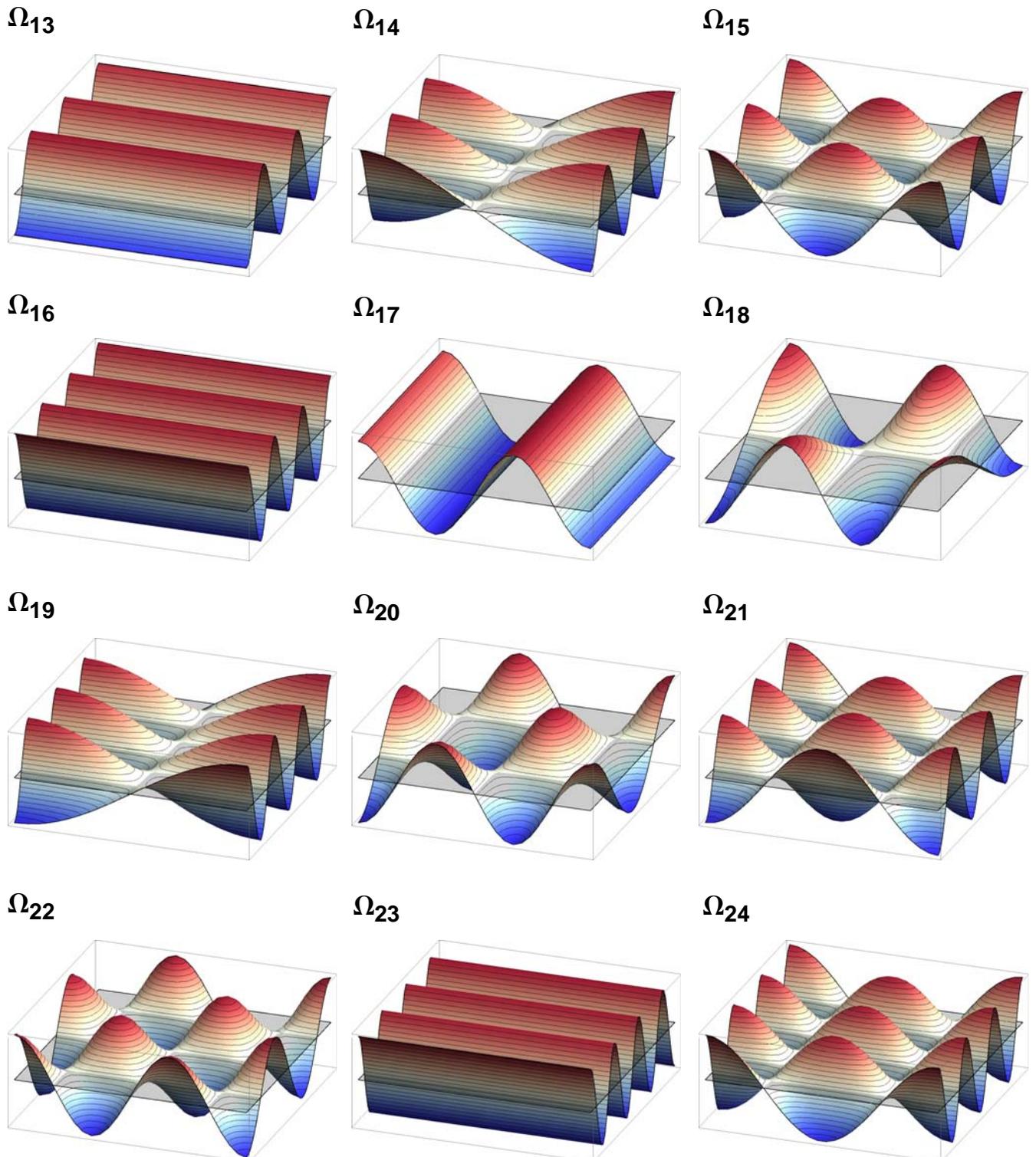


Abb.8.76: 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=13$  bis  $24$ ) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stab-längsverhaltens

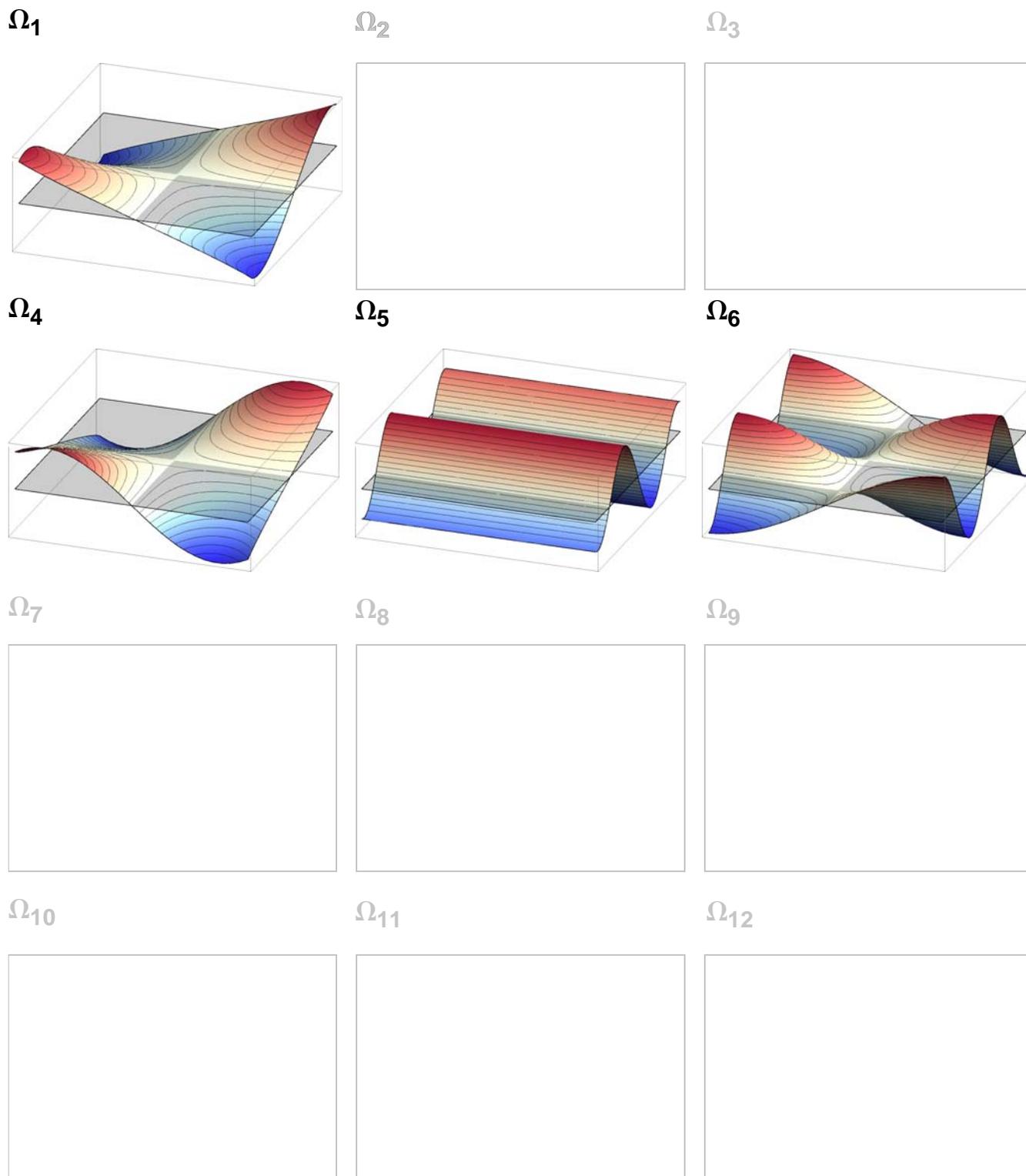


Abb.8.77: Wirksame 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=1$  bis 12) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens mit Beachtung der Anteilsfaktoren zur Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

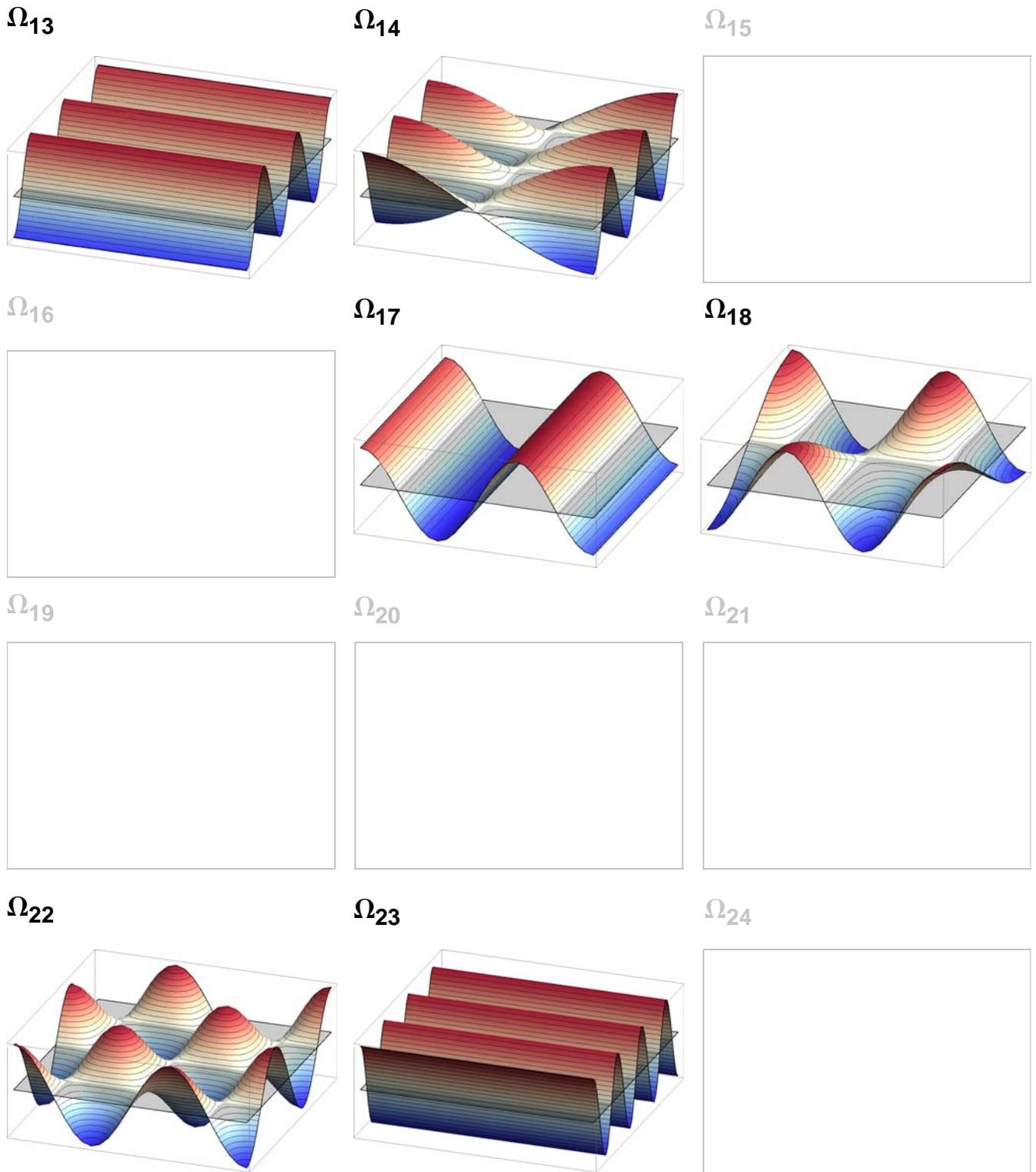


Abb.8.78: Wirksame 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=13$  bis  $24$ ) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens mit Beachtung der Anteilsfaktoren zur Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

Tab. 8.1: Abkling-QS-Wölbfunktionen mit zugehörigen Abklingzahlen für das Stablängsverhalten und Anteilsfaktoren für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösungen

	Wölbfunktion	Abklingzahl	Anteilsfaktoren		
	$\Omega_i$	$\lambda_i$	$a_{V2,i}$	$a_{V3,i}$	$a_{M1,i}$
Freifeld-Lösungen	$\Omega_{FF,V2}$	0	1	-	-
	$\Omega_{FF,V3}$	0	-	1	-
	$\Omega_{FF,M1}$	0	-	-	1
Abkling-Wölbfunktionen 1-12	1	3,2414	0	0	8,5135
	4	6,3460	0	0	1,7777
	5	6,9788	0	0,3473	0
	6	8,0028	0	0	0,0619
	13	11,1148	0	0,1515	0
	14	11,9068	0	0	-0,0030
	17	13,2928	-0,1709	0	0
	18	13,5306	0	0	-0,0051
	22	14,7768	0	0	0,0002
	23	15,4547	0	-0,0764	0
	25	16,0336	0	0	-0,0003
	27	16,2284	0	0	-5,6106

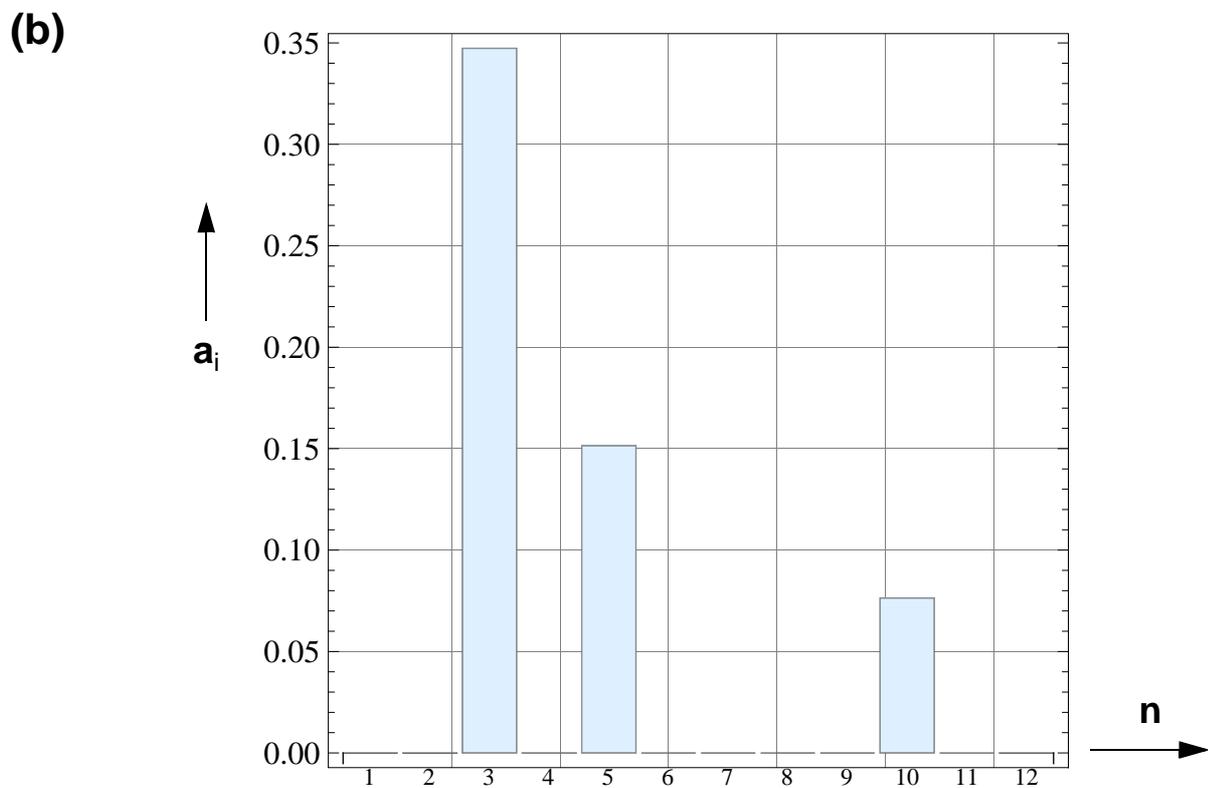
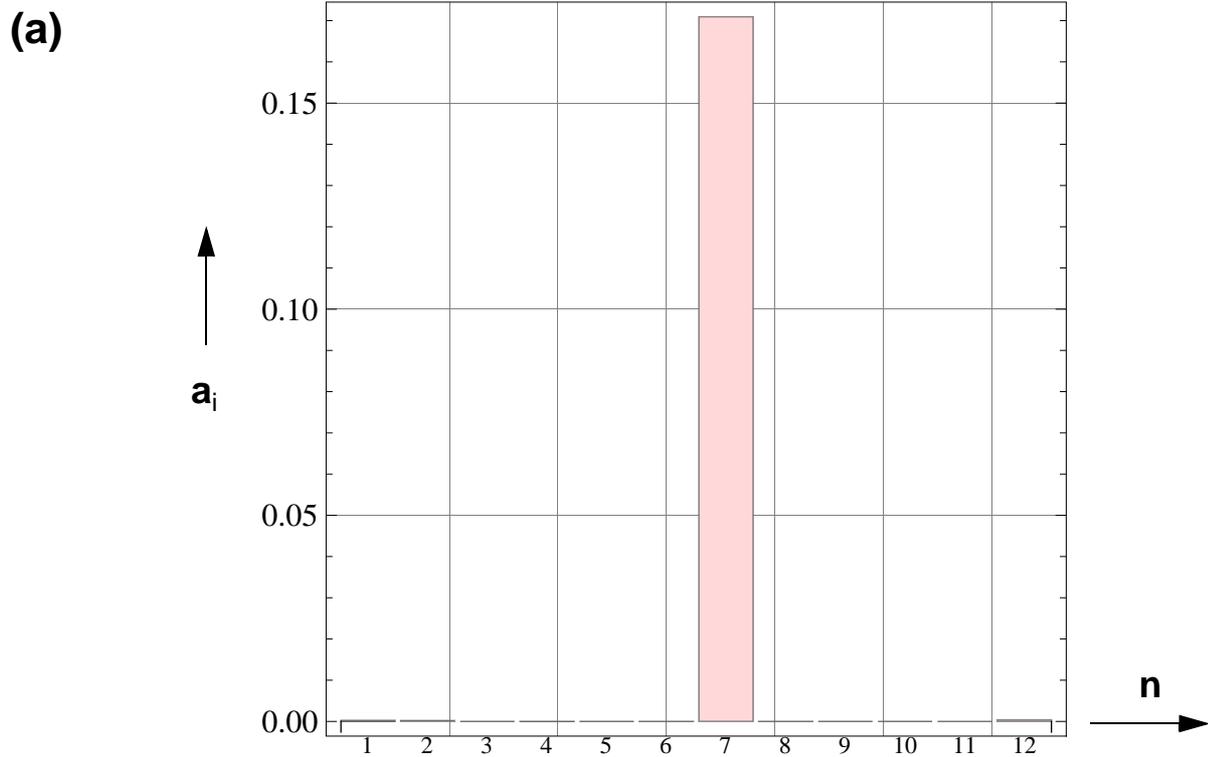


Abb.8.79: Anteilfaktoren  $a_i$  der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit  $N=12$  wirksamen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für (a):  $V_2$ , (b)  $V_3$

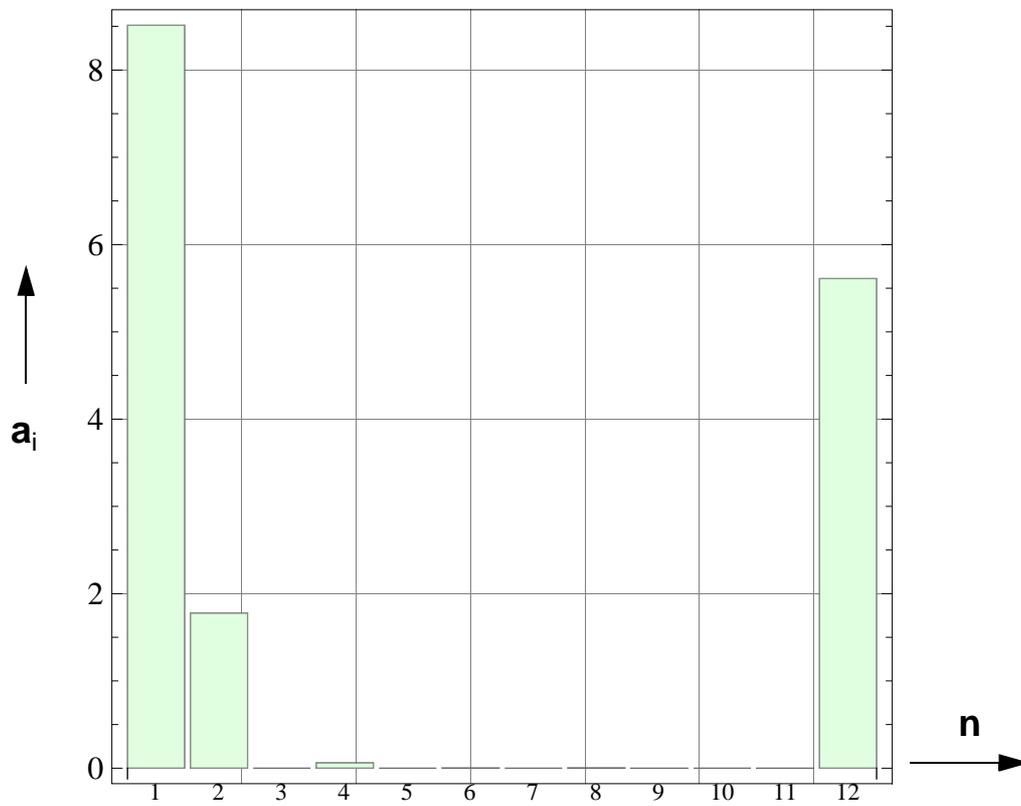
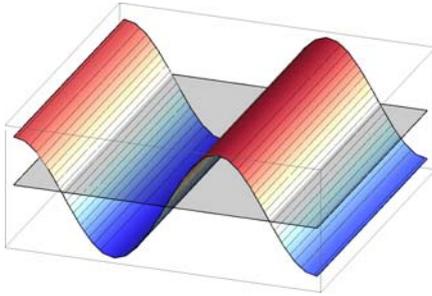


Abb.8.80: Anteilsfaktoren  $a_i$  der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit  $N=12$  wirksamen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für  $M_1$

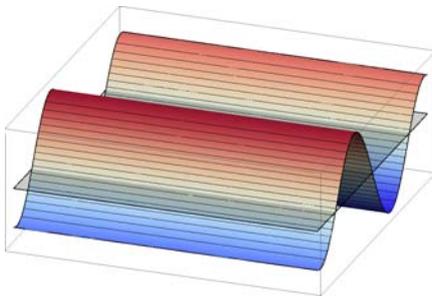
(a)

$\Omega_{17}$

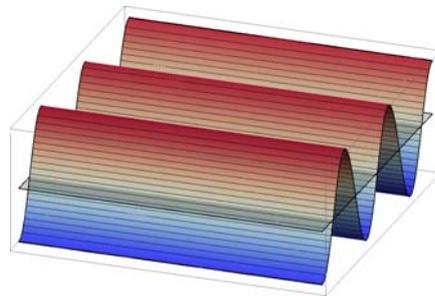


(b)

$\Omega_5$



$\Omega_{13}$



$\Omega_{23}$

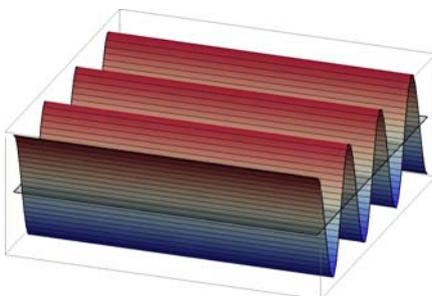
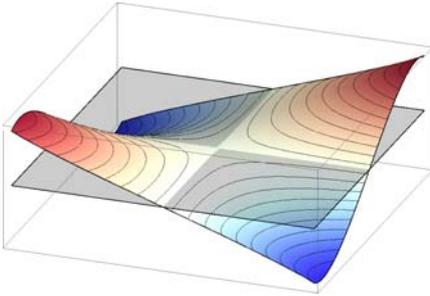


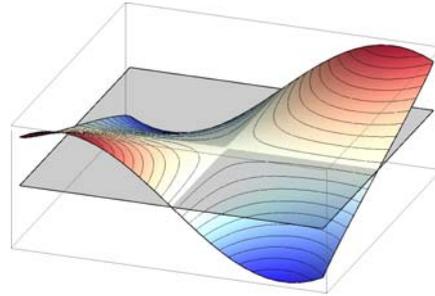
Abb.8.81: Wirksame Abkling-QS-Wölbfunktionen für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung für (a)  $V_2$  und (b)  $V_3$

**(c)**

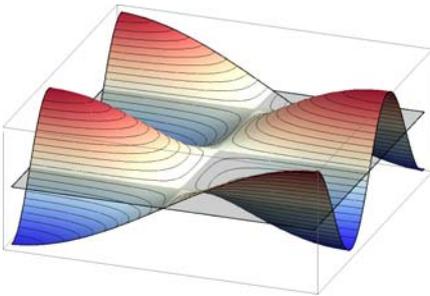
$\Omega_1$



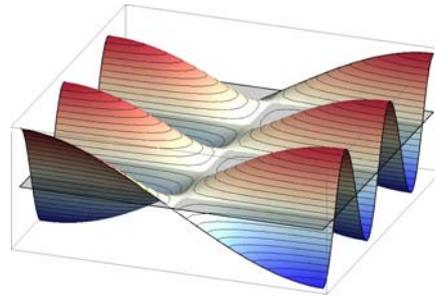
$\Omega_4$



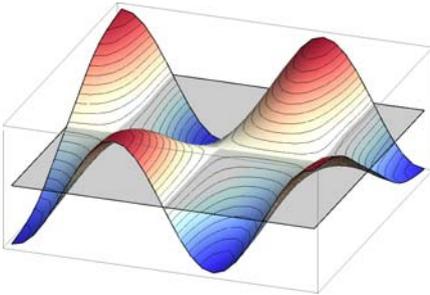
$\Omega_6$



$\Omega_{14}$



$\Omega_{18}$



$\Omega_{22}$

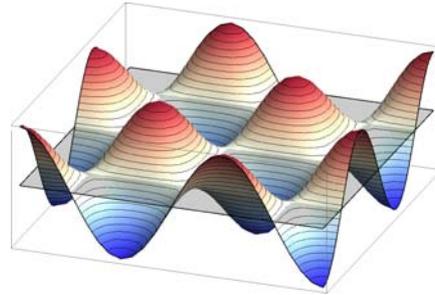
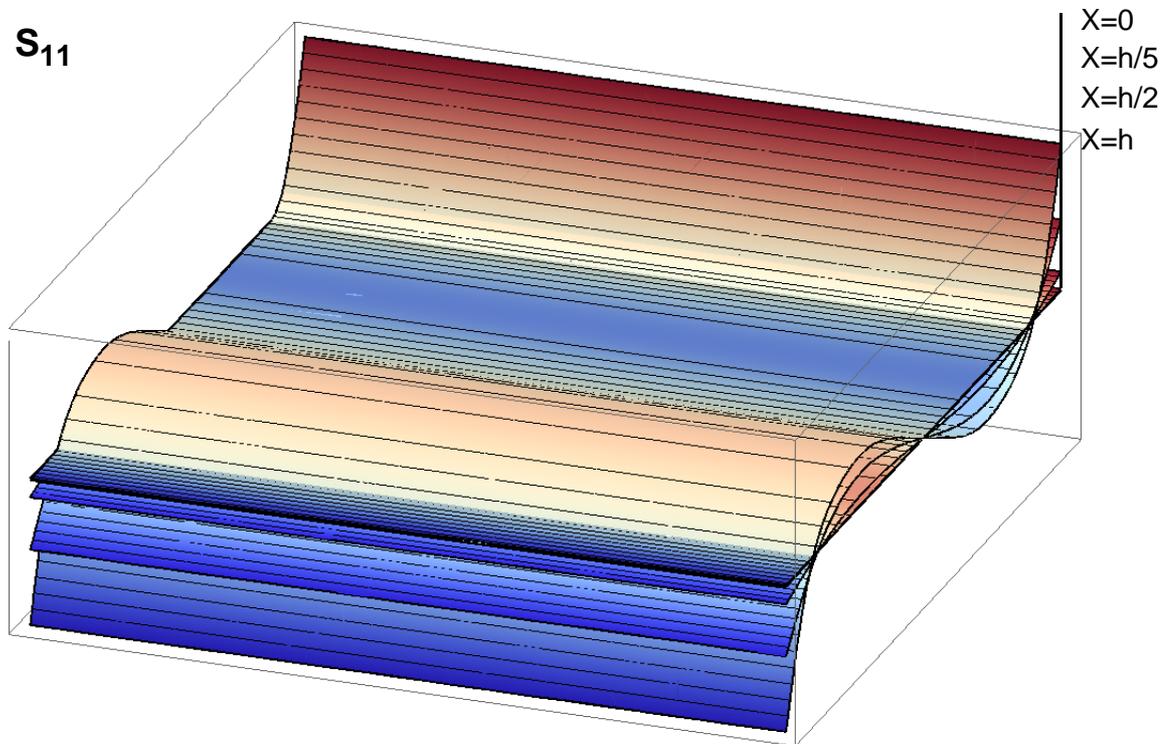


Abb.8.82: Wirksame Abkling-QS-Wölbfunktionen für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung für (c)  $M_1$

(a)



(b)

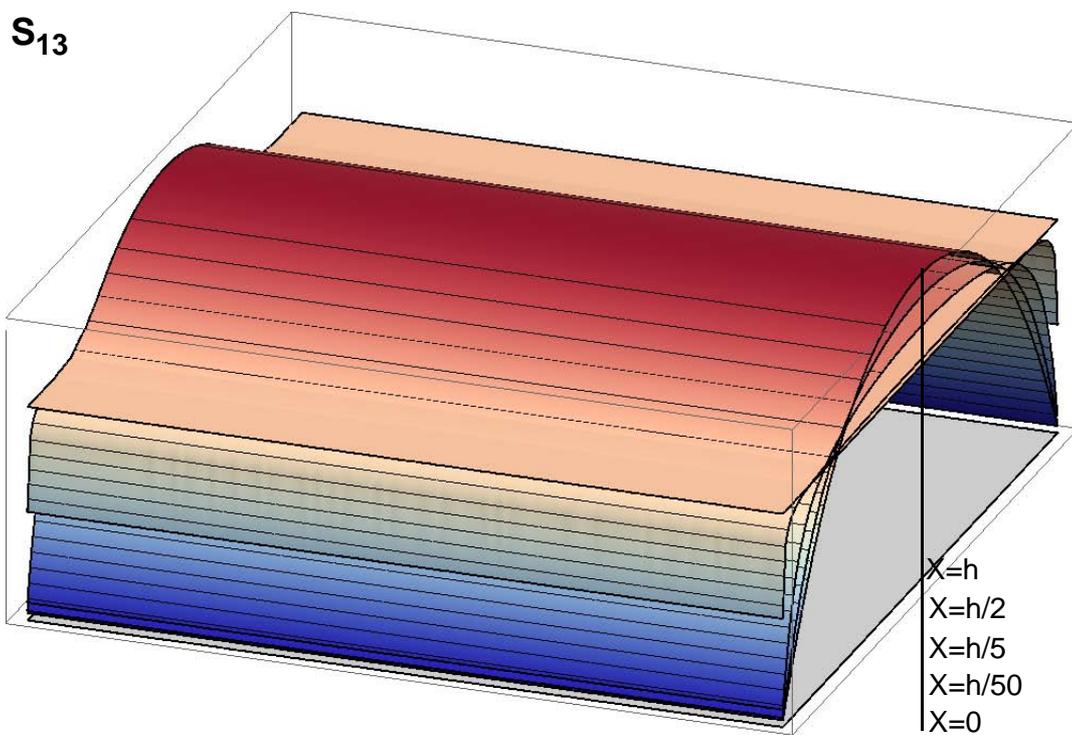


Abb.8.83: (a) Wölbnormalspannung, (b) gesamte Schubspannung:  $V_3$

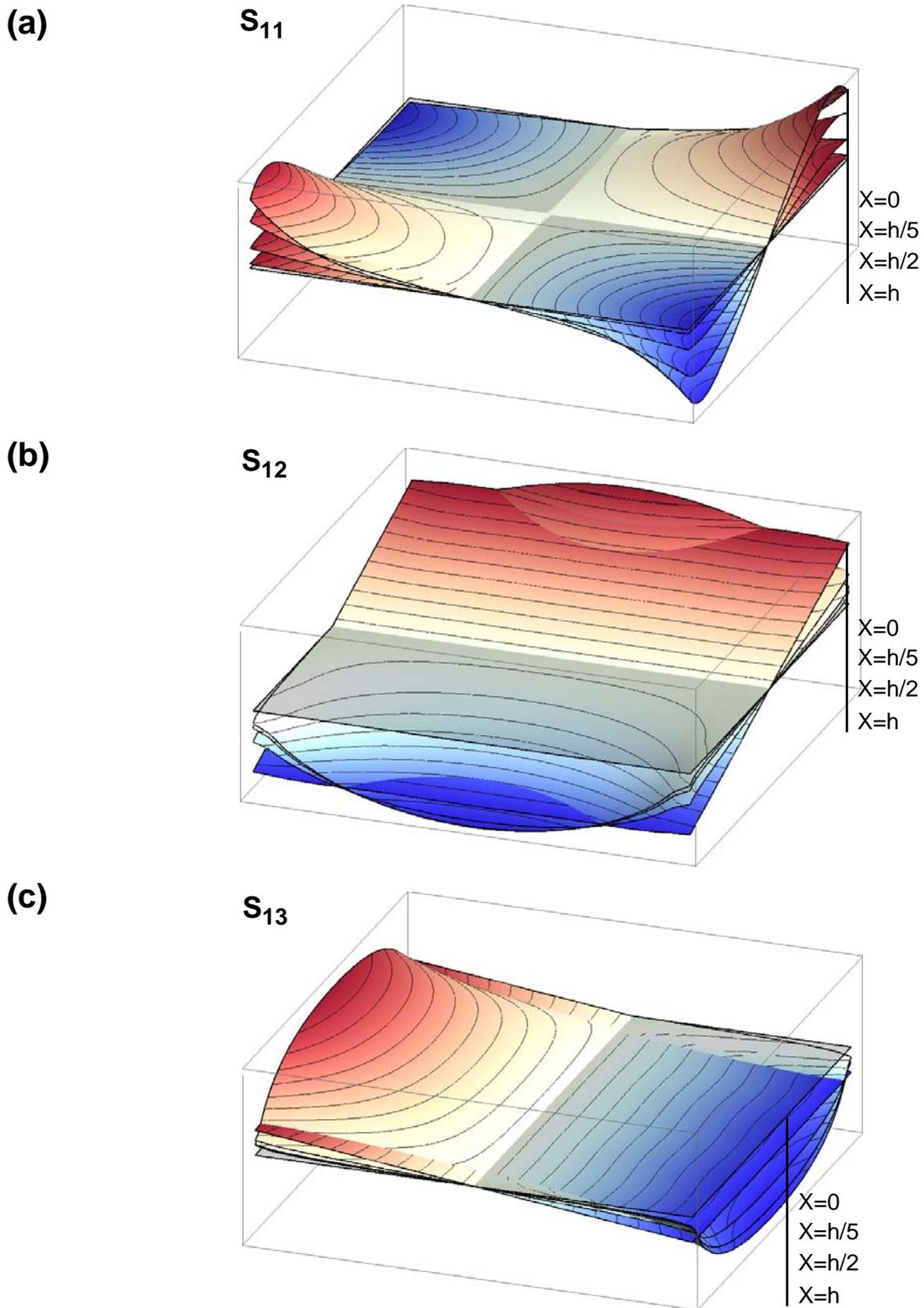
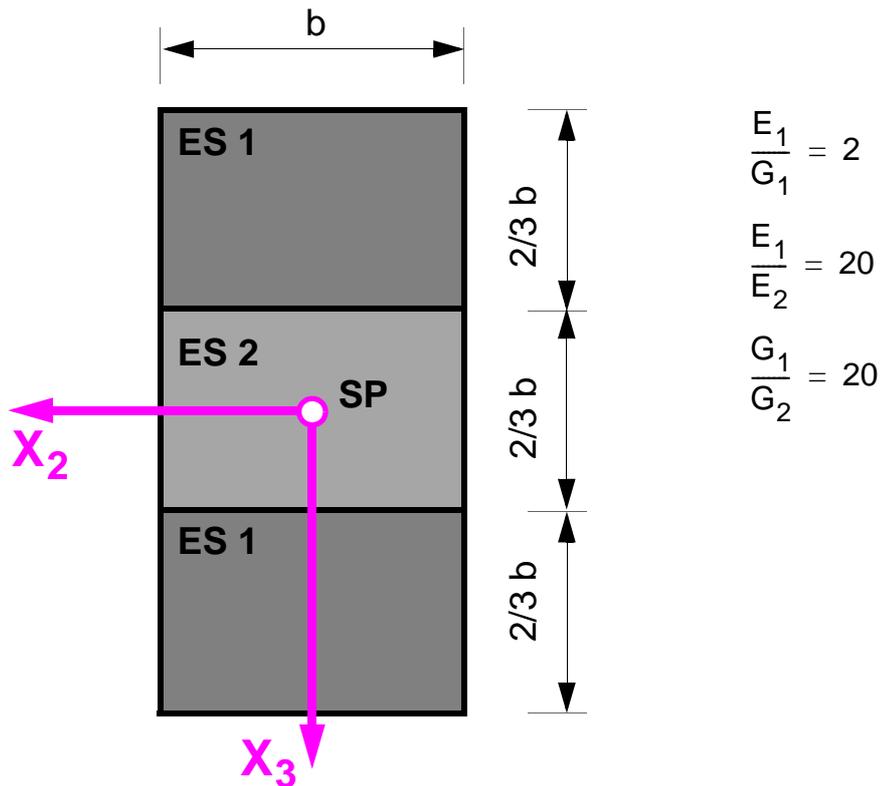


Abb.8.84: (a) Wölbnormalspannung, (b und c) resultierende gesamte Schubspannungen:  $M_1$

## 8.5.2 Dreiteiliger Rechteck-Querschnitt (3S):

QS-Teile mit unterschiedlichen Materialeigenschaften und zwei starren Verbundfugen



## Schubkorrekturfaktorenmatrix

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0,8341 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1109 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2032 \end{bmatrix}$$

Abb.8.85: Beispiel 6: Dreiteiliger rechteckiger Stabquerschnitt mit starren Verbundfugen und 3D-Stabkinematik – Geometrische Abmessungen und Materialdefinitionen und Matrix der Schubkorrekturfaktoren

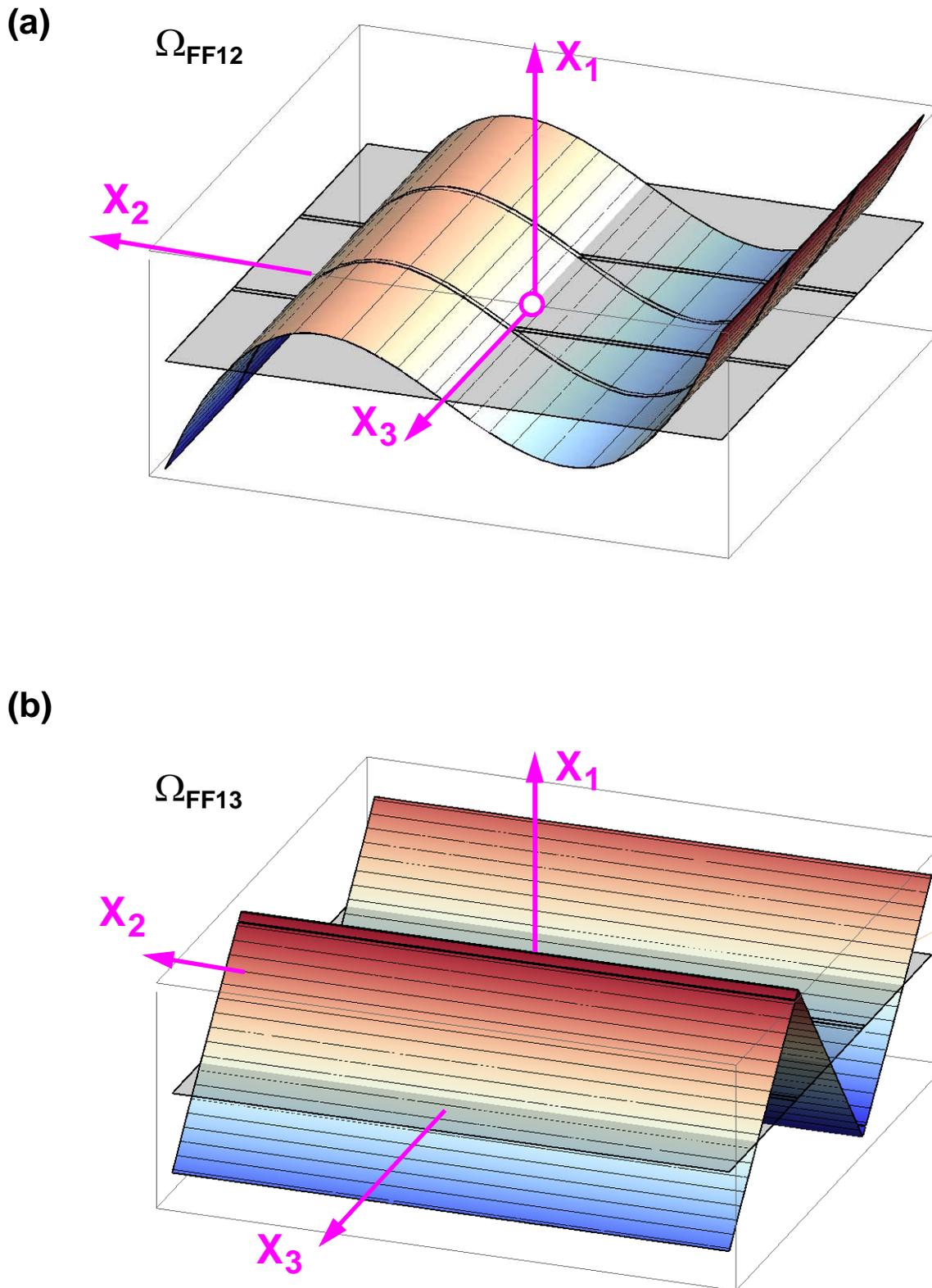


Abb.8.86: Freiefeldlösungen der QS-Verwölbungen für (a)  $V_2$  und für (b)  $V_3$ ;

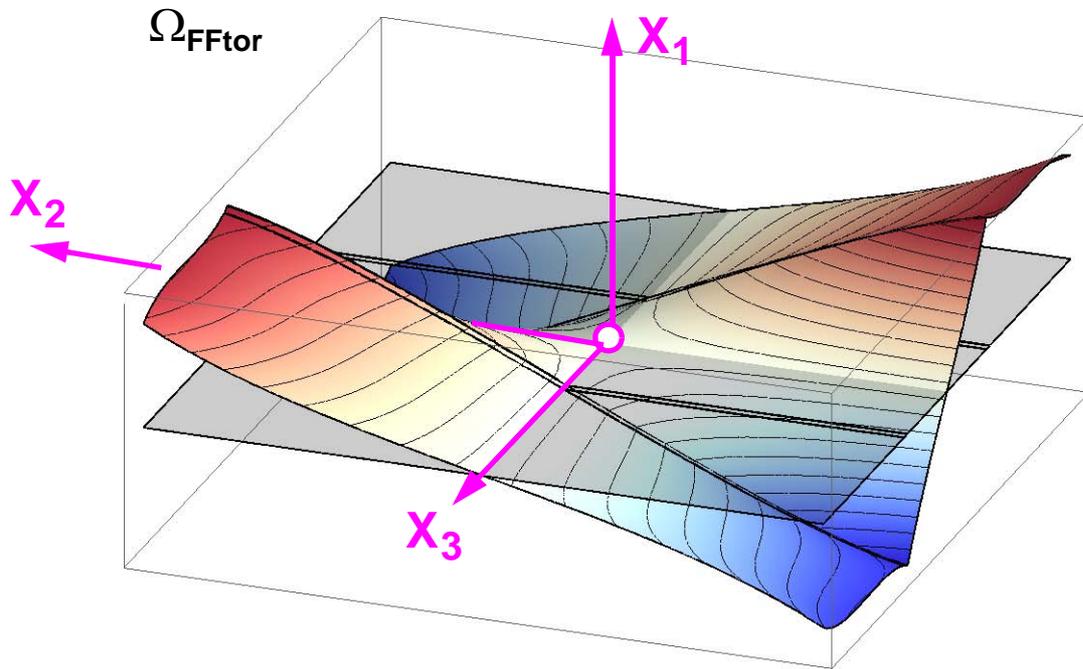


Abb.8.87: Freifeldlösung der QS-Verwölbungen für  $M_1$

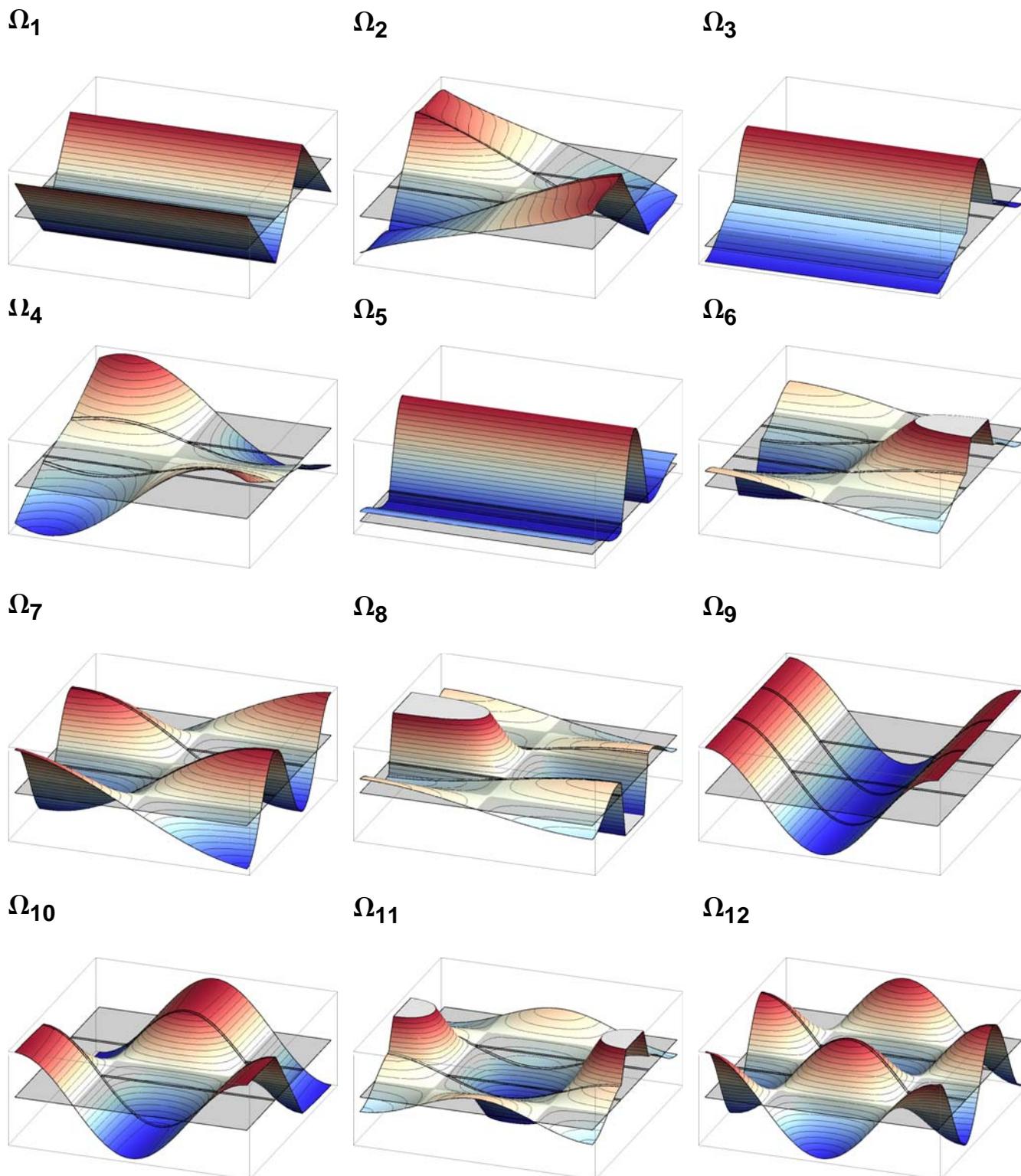


Abb.8.88: 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=1$  bis 12) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens

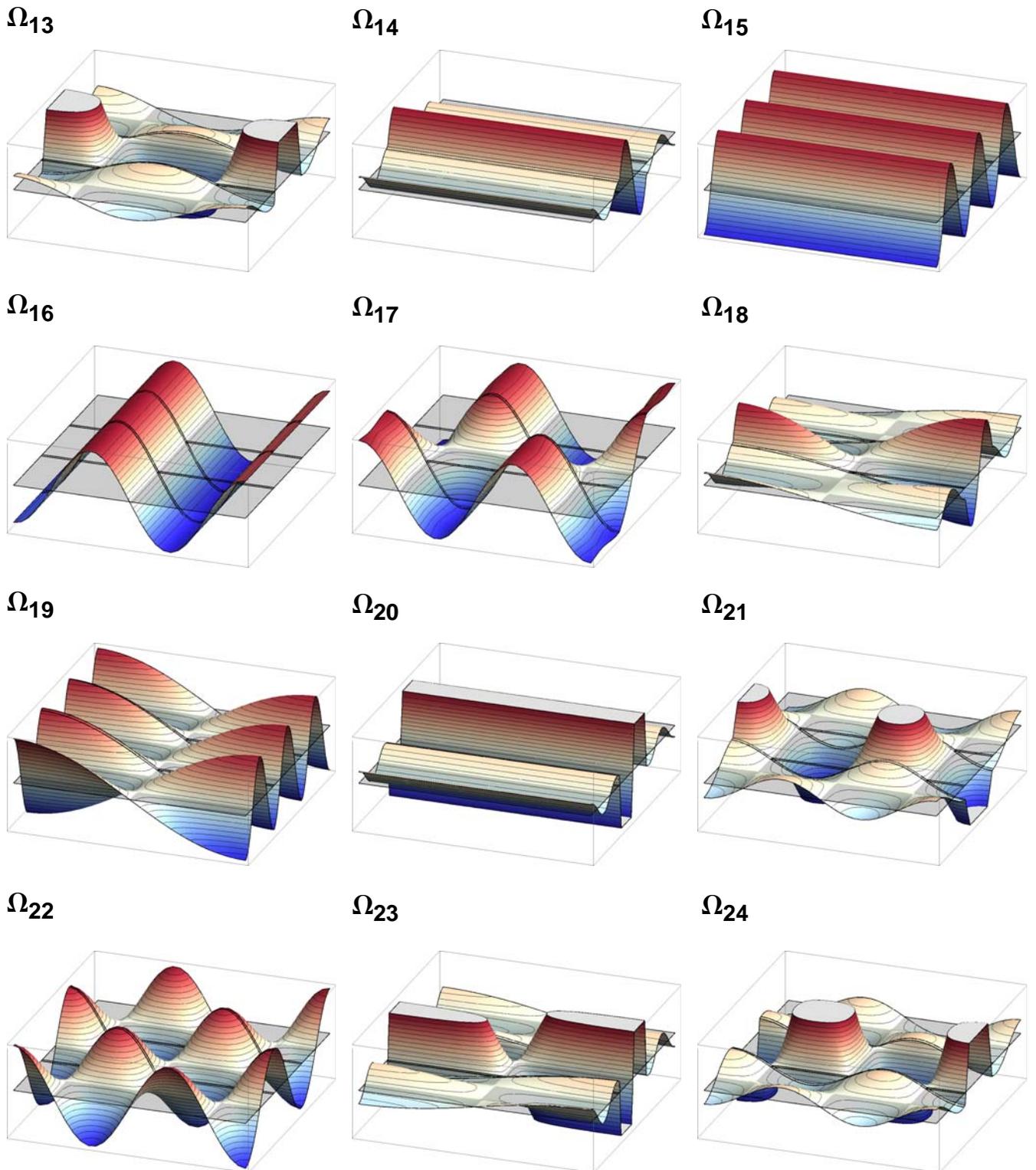


Abb.8.89: 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=1$  bis 12) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens

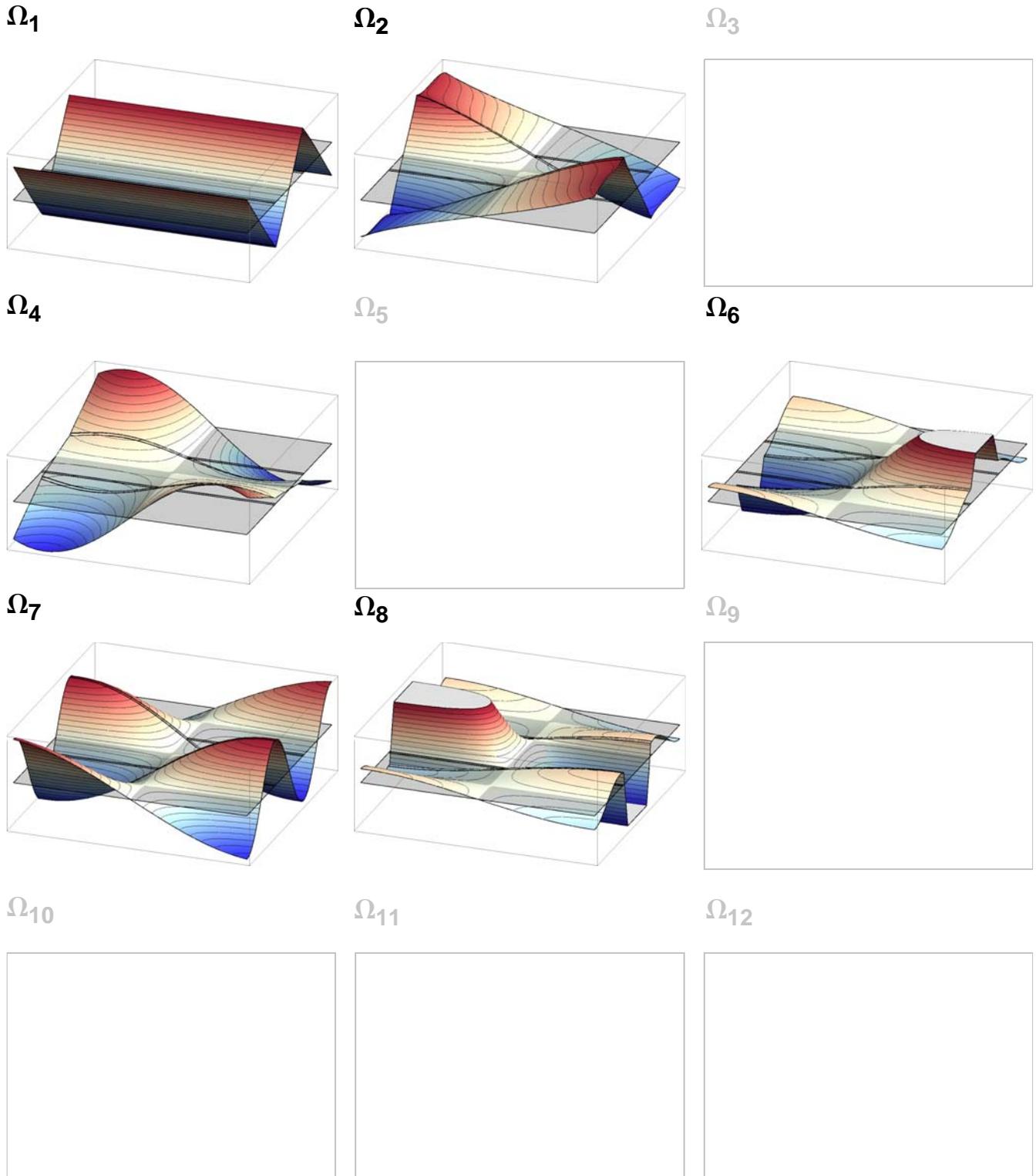


Abb.8.90: Wirksame 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=1$  bis 12) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens mit Beachtung der Anteilsfaktoren zur Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

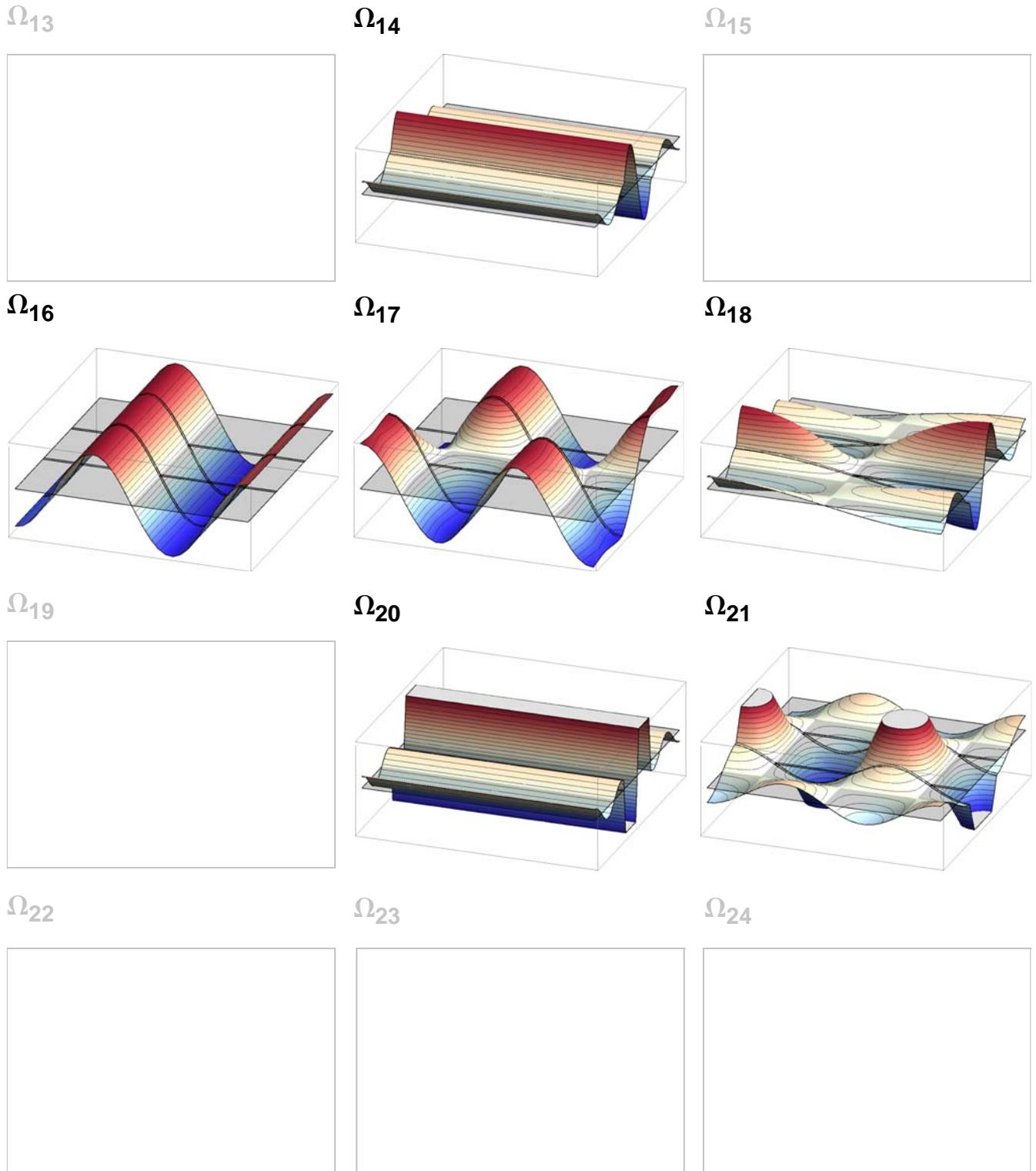


Abb.8.91: Wirksame 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=13$  bis  $24$ ) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens mit Beachtung der Anteilsfaktoren zur Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

Tab. 8.2: Abkling-QS-Wölbfunktionen mit zugehörigen Abklingzahlen für das Stablängsverhalten und Anteilsfaktoren für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösungen

	Wölbfunktion	Abklingzahl	Anteilsfaktoren		
	$\Omega_i$	$\lambda_i$	$a_{V2,i}$	$a_{V3,i}$	$a_{M1,i}$
Freifeld-Lösungen	$\Omega_{FF,V2}$	0	1	-	-
	$\Omega_{FF,V3}$	0	-	1	-
	$\Omega_{FF,M1}$	0	-	-	1
Abkling-Wölbfunktionen 1-12	1	1,4867	0	-1,4641	0
	2	1,7434	0	0	-5,8177
	4	6,4331	0	0	0,4157
	6	7,5094	-0,0034	0	0
	7	8,0112	0	0	0,1081
	8	8,6651	0,0010	0	0
	14	12,7117	0	0,0005	0
	16	13,3082	0,1699	0	0
	17	13,3937	0	0	-0,0121
	18	13,4445	0	0	0,0008
	20	14,2463	0	0,0037	0
	21	14,5587	-0,0005	0	0

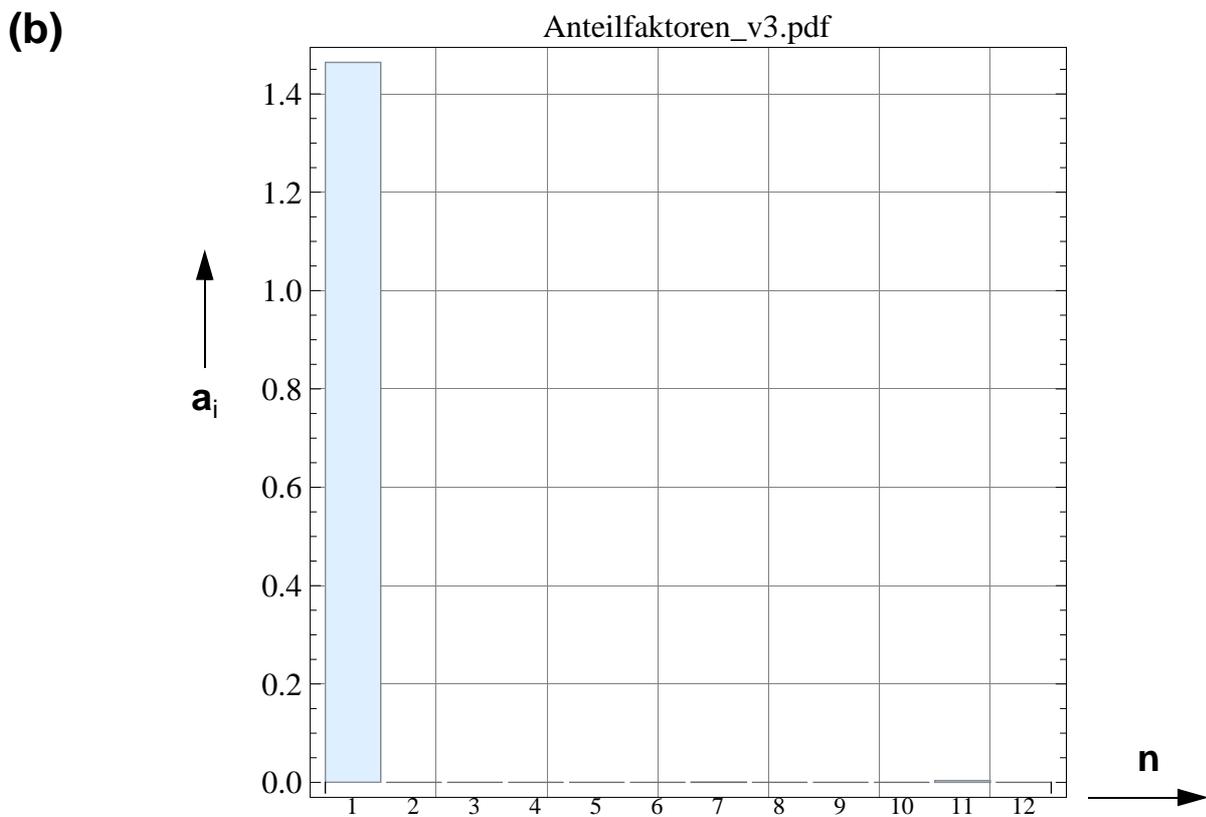
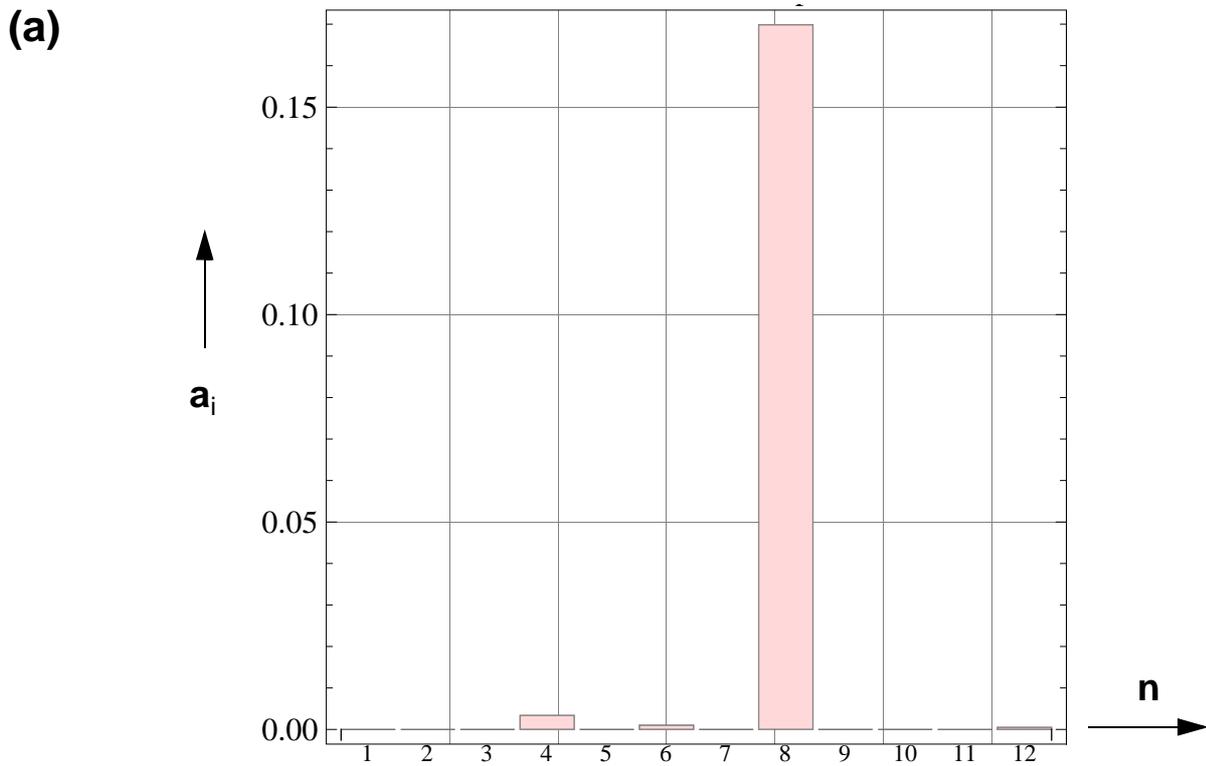


Abb.8.92: Anteilsfaktoren  $a_i$  der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freiefeldlösung der QS-Verwölbung mit  $N=12$  wirksamen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für (a):  $V_2$ , (b)  $V_3$

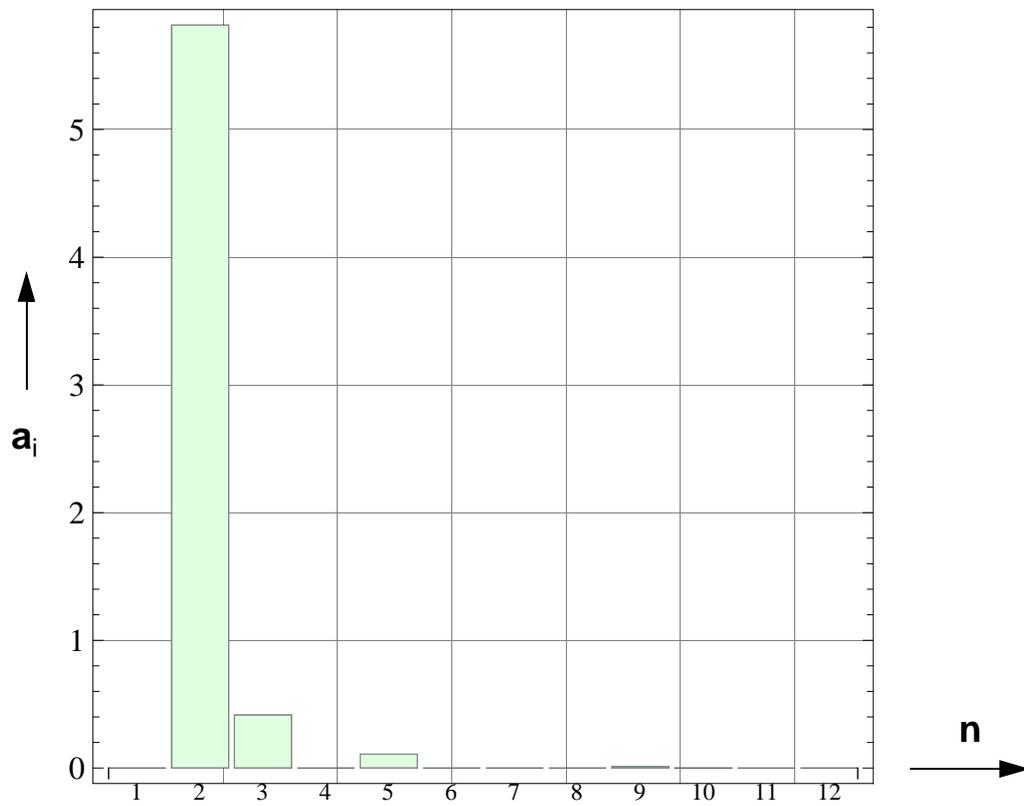
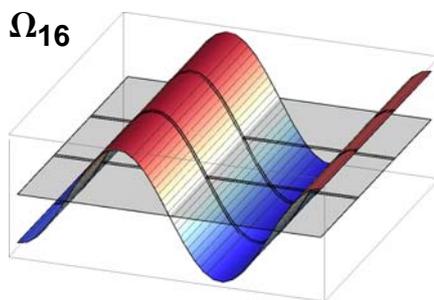
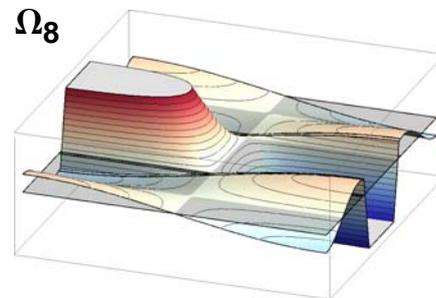
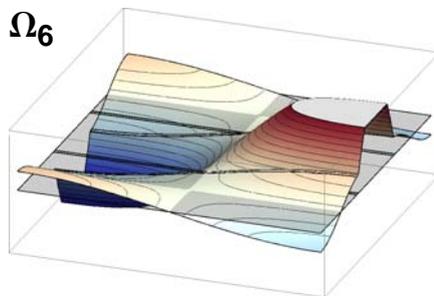


Abb.8.93: Anteilsfaktoren  $a_i$  der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit  $N=12$  wirksamen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für  $M_1$

(a)



(b)

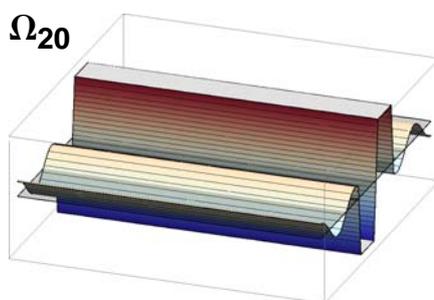
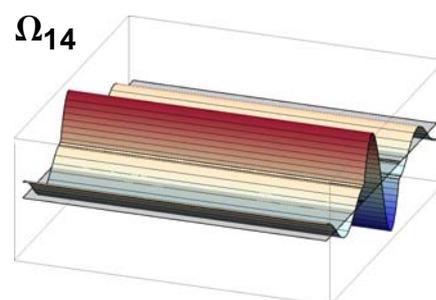
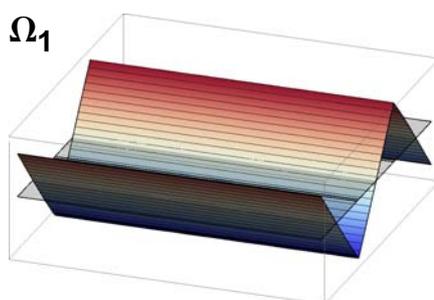


Abb.8.94: Wirksame Abkling-QS-Wölbfunktionen für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung für (a)  $V_2$  und (b)  $V_3$

**(c)**

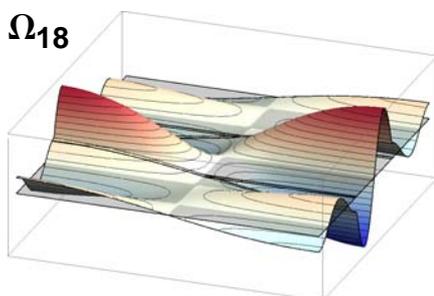
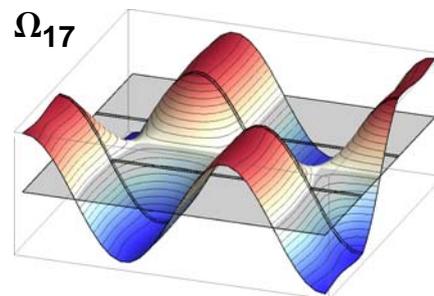
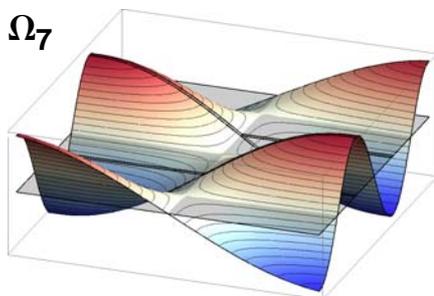
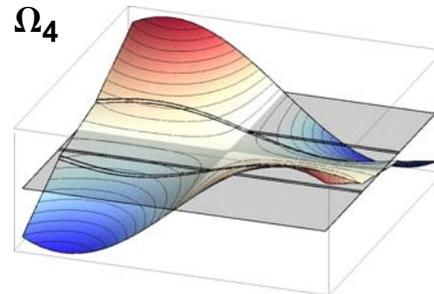
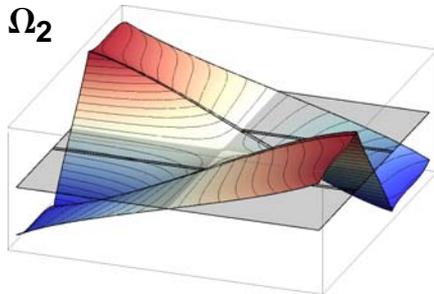
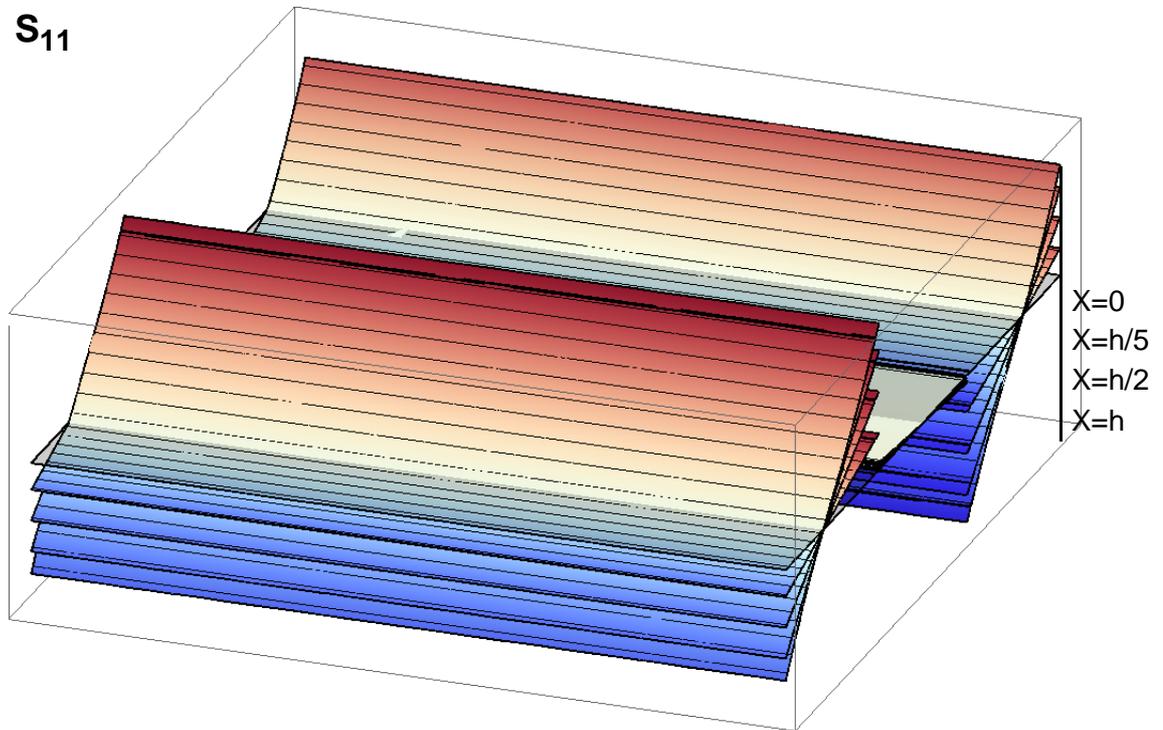


Abb.8.95: Wirksame Abkling-QS-Wölbfunktionen für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung für (a)  $M_1$

(a)



(b)

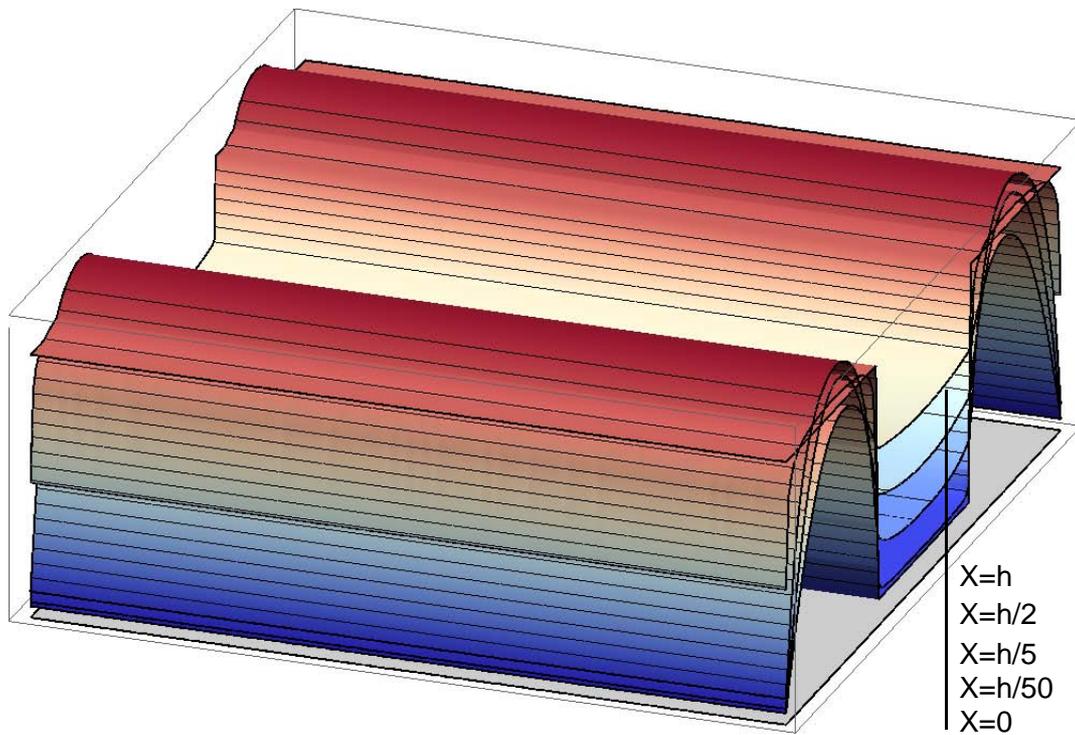


Abb.8.96: (a) Wölbnormalspannung, (b) gesamte Schubspannung:  $V_3$

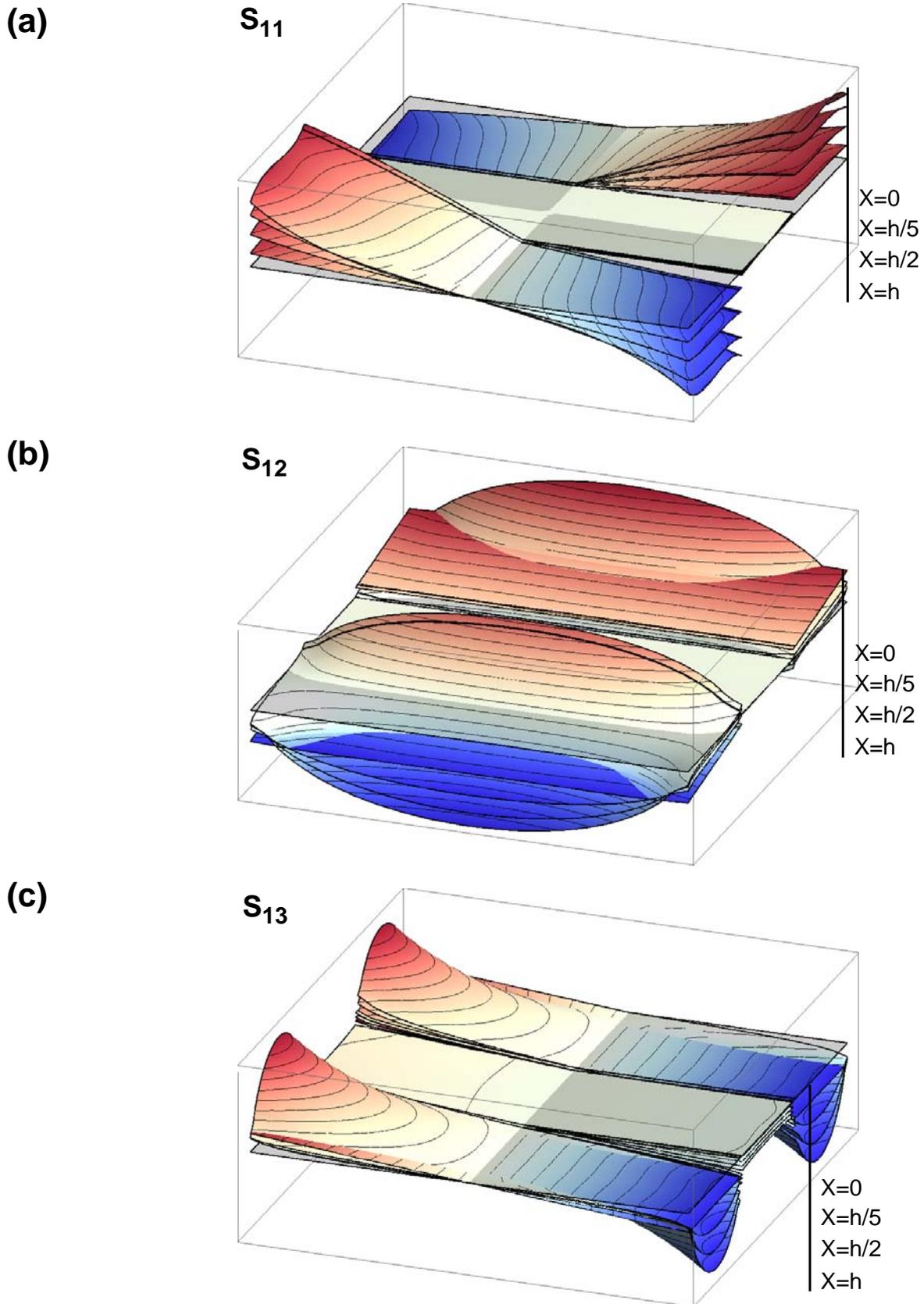
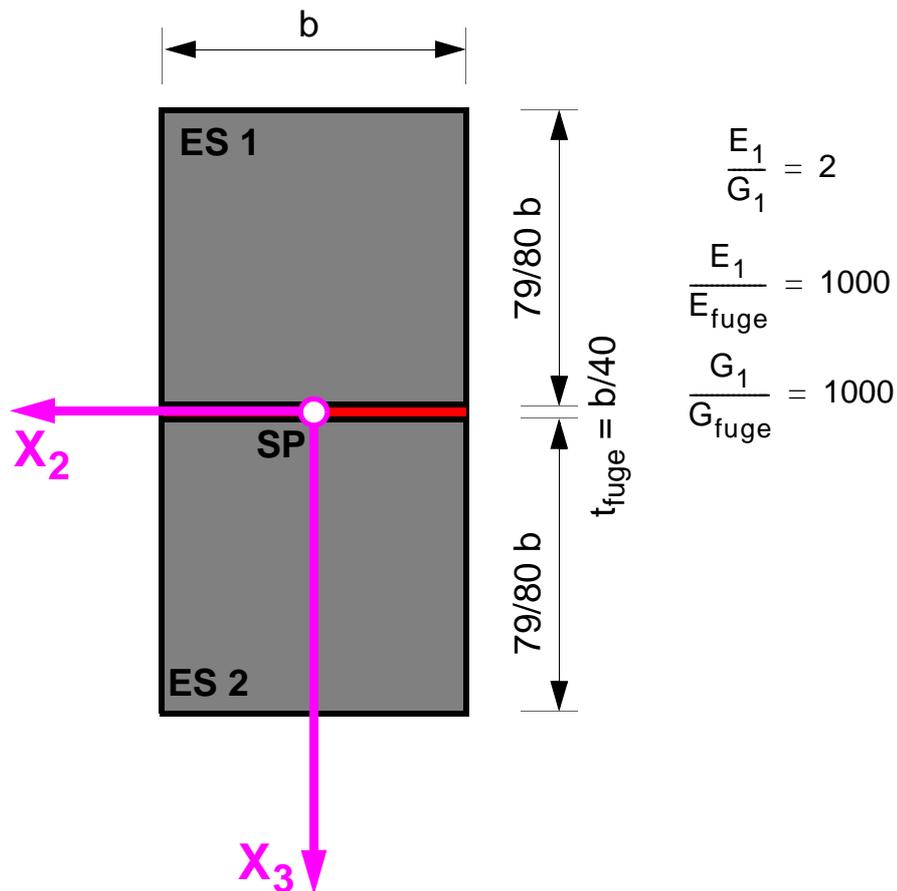


Abb.8.97: (a) Wölbnormalspannung, (b und c) resultierende gesamte Schubspannungen:  $M_1$

## 8.5.3 Zweiteiliger Rechteckquerschnitt mit nachgiebiger Verbundfuge



## Schubkorrekturfaktorenmatrix

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0,8343 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2543 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3757 \end{bmatrix}$$

Abb.8.98: Beispiel 7: Zweiteiliger rechteckiger Stabquerschnitt mit elastischer nachgiebiger Verbundfuge mit 3D-Stabkinematik – Geometrische Abmessungen und Materialdefinitionen und Matrix der Schubkorrekturfaktoren

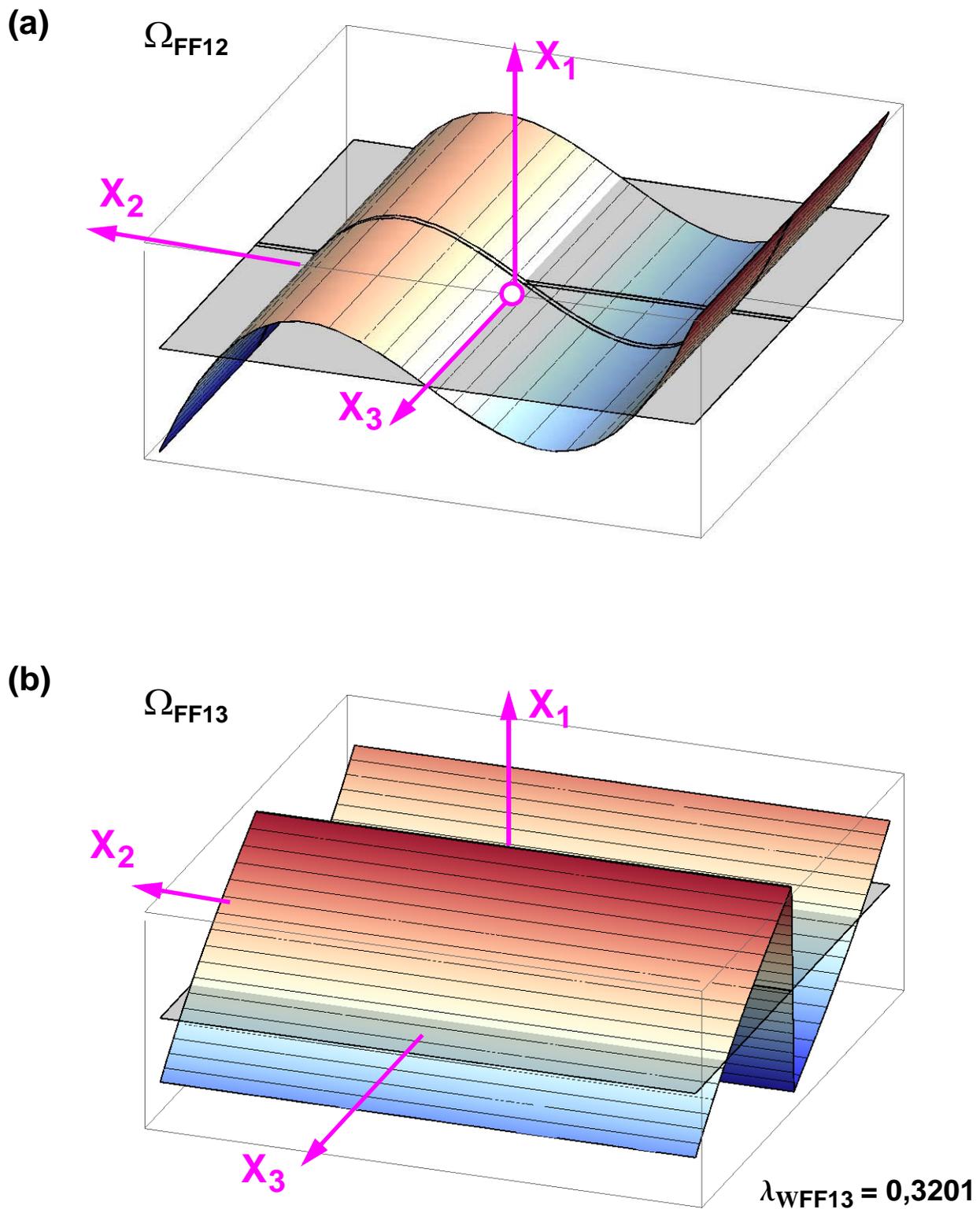


Abb.8.99: Freifeldlösungen der QS-Verwölbungen für (a)  $V_2$  und für (b)  $V_3$ ;

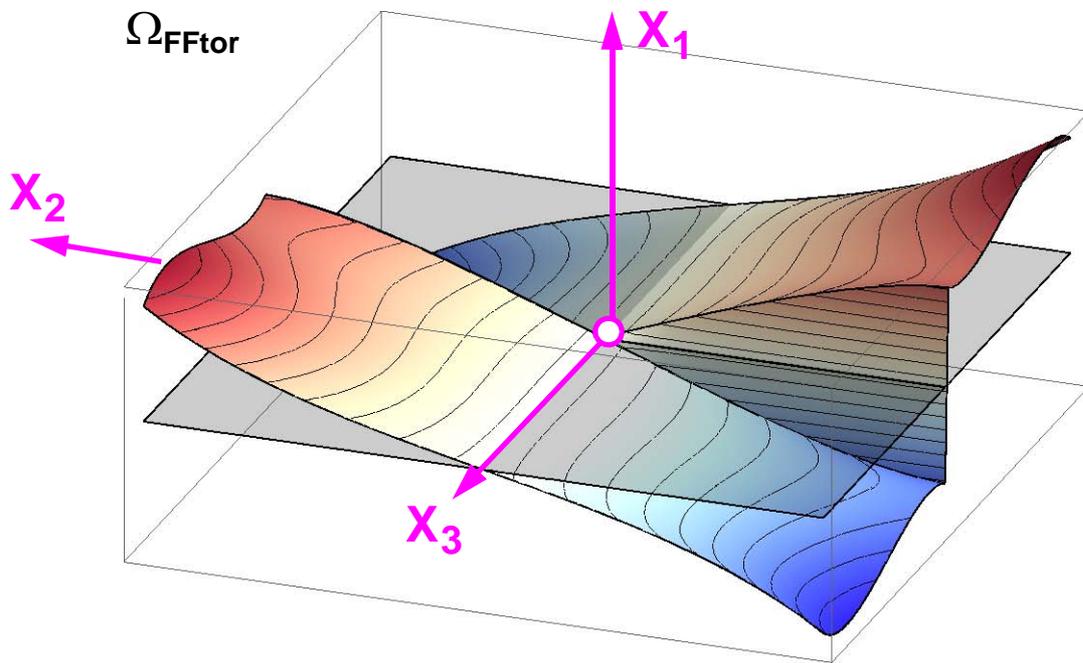


Abb.8.100: Freifeldlösung der QS-Verwölbungen für  $M_1$ ;

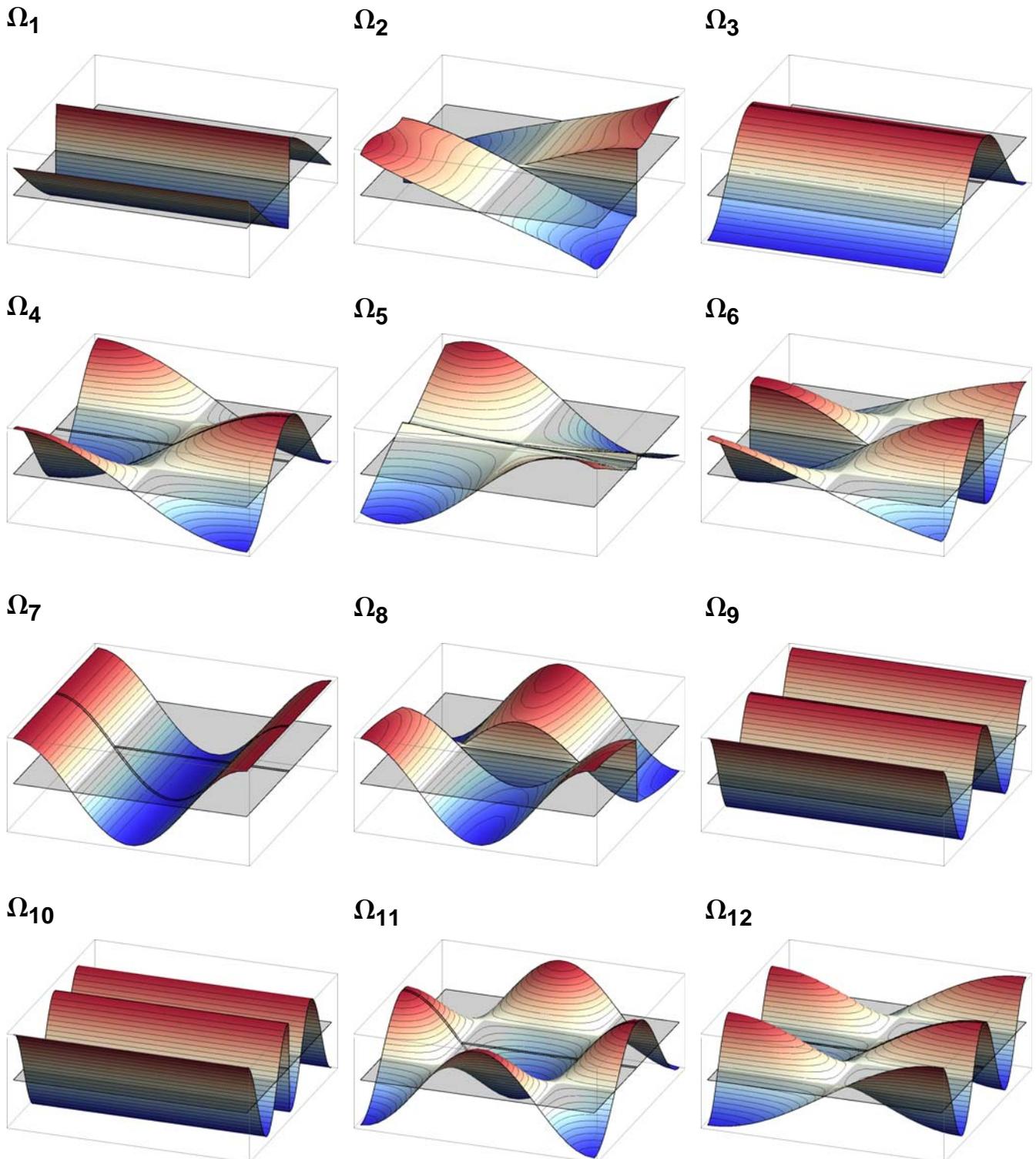


Abb.8.101: 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=1$  bis 12) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens

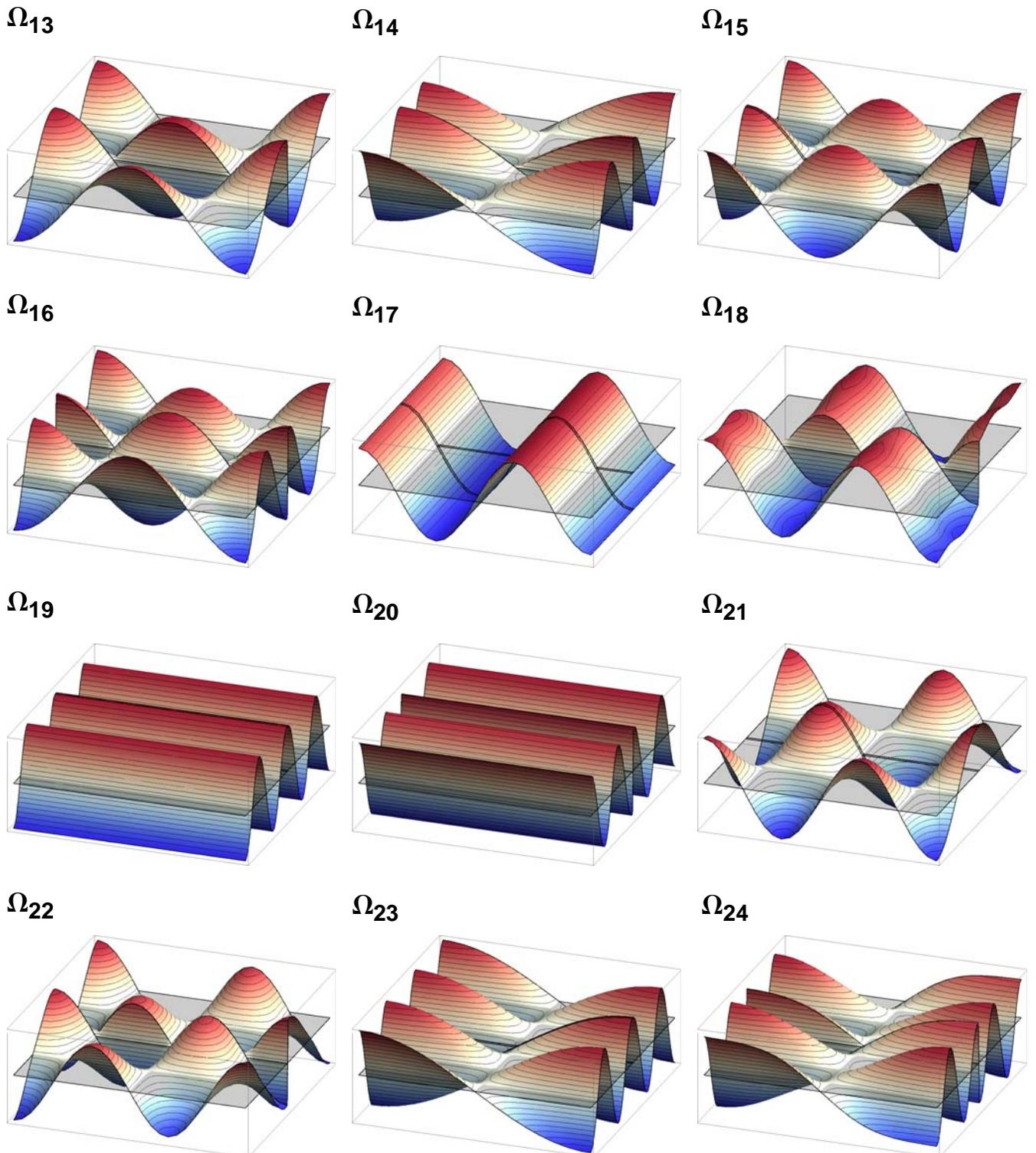


Abb.8.102: 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=13$  bis  $24$ ) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens

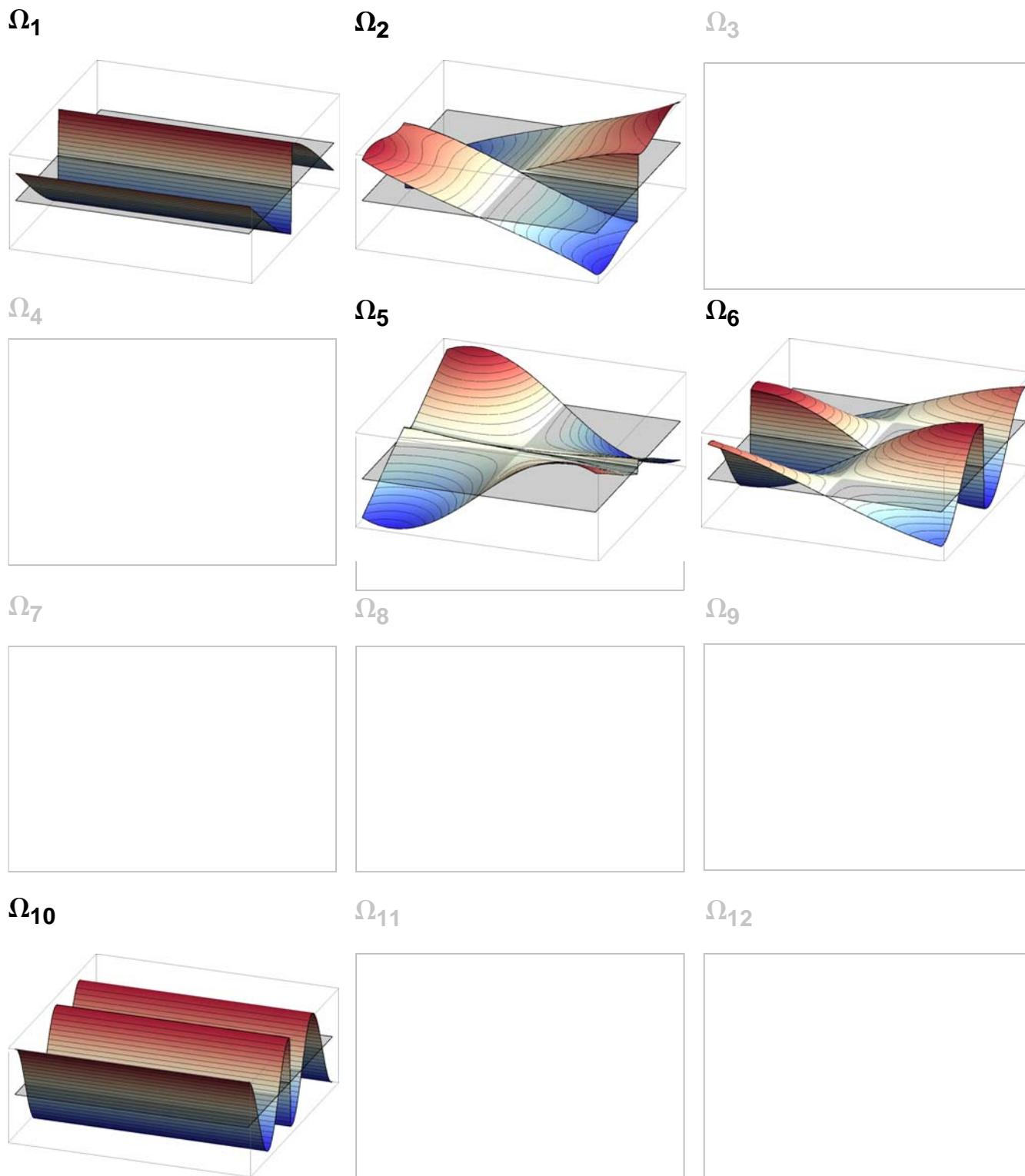
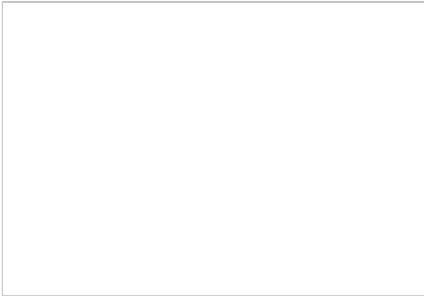
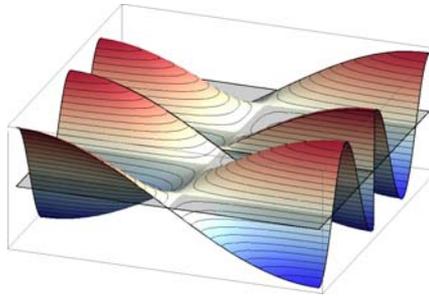


Abb.8.103: Wirksame 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=1$  bis  $12$ ) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens mit Beachtung der Anteilsfaktoren zur Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

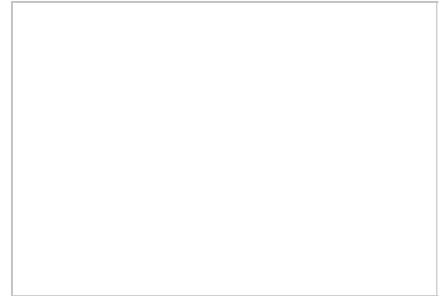
$\Omega_{13}$



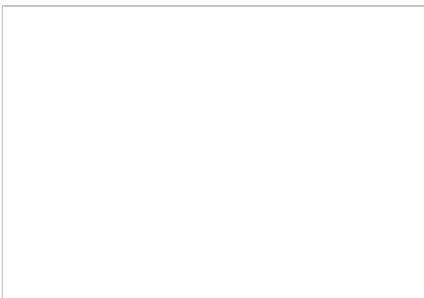
$\Omega_{14}$



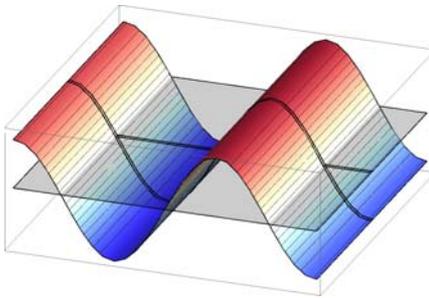
$\Omega_{15}$



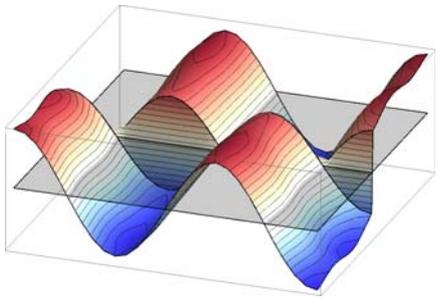
$\Omega_{16}$



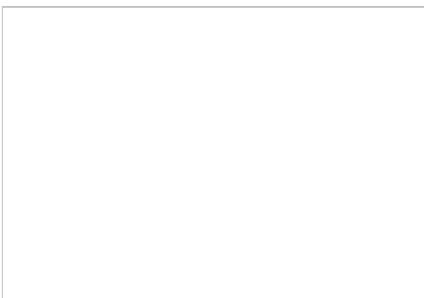
$\Omega_{17}$



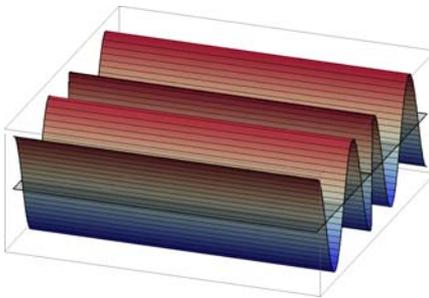
$\Omega_{18}$



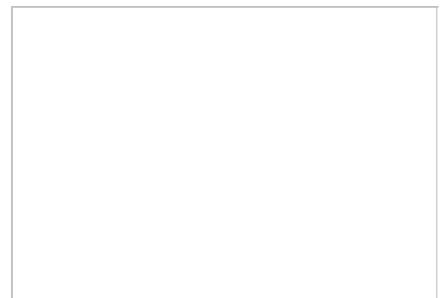
$\Omega_{19}$



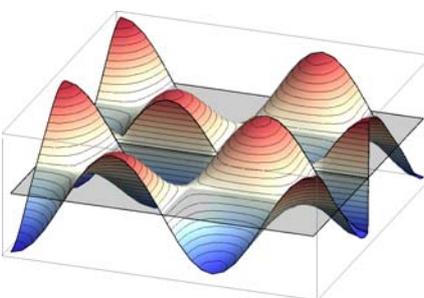
$\Omega_{20}$



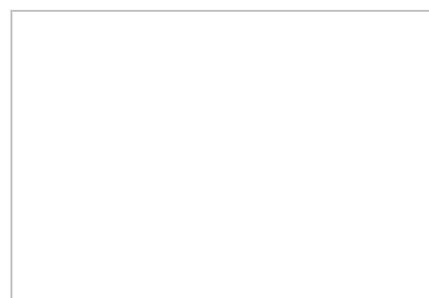
$\Omega_{21}$



$\Omega_{22}$



$\Omega_{23}$



$\Omega_{24}$

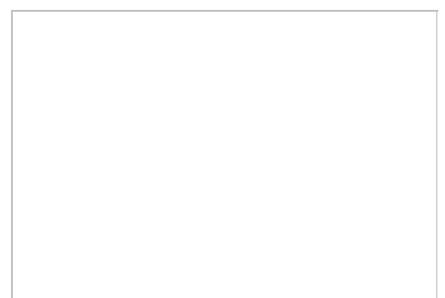


Abb.8.104: Wirksame 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=13$  bis  $24$ ) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens mit Beachtung der Anteilsfaktoren zur Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

Tab. 8.3: Abkling-QS-Wölbfunktionen mit zugehörigen Abklingzahlen für das Stablängsverhalten und Anteilsfaktoren für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösungen

	Wölbfunktion	Abklingzahl	Anteilsfaktoren		
	$\Omega_i$	$\lambda_i$	$a_{V2,i}$	$a_{V3,i}$	$a_{M1,i}$
Freifeld-Lösungen	$\Omega_{FF,V2}$	0	1	-	-
	$\Omega_{FF,V3}$	0	-	1	-
	$\Omega_{FF,M1}$	0	-	-	1
Abkling-Wölbfunktionen 1-12	1	1,9494	0	-1,8487	0
	2	2,4645	0	0	4,8529
	5	6,3458	0	0	0,8425
	6	6,5955	0	0	0,3983
	10	9,1742	0	0,0027	0
	14	10,1735	0	0	0,0005
	17	13,2928	-0,1709	0	0
	18	13,3892	0	0	-0,0222
	20	13,6716	0	-0,0250	0
	22	14,0932	0	0	0,0092
	26	14,2719	0	0	0,0123
29	16,1438	0	-0,0746	0	

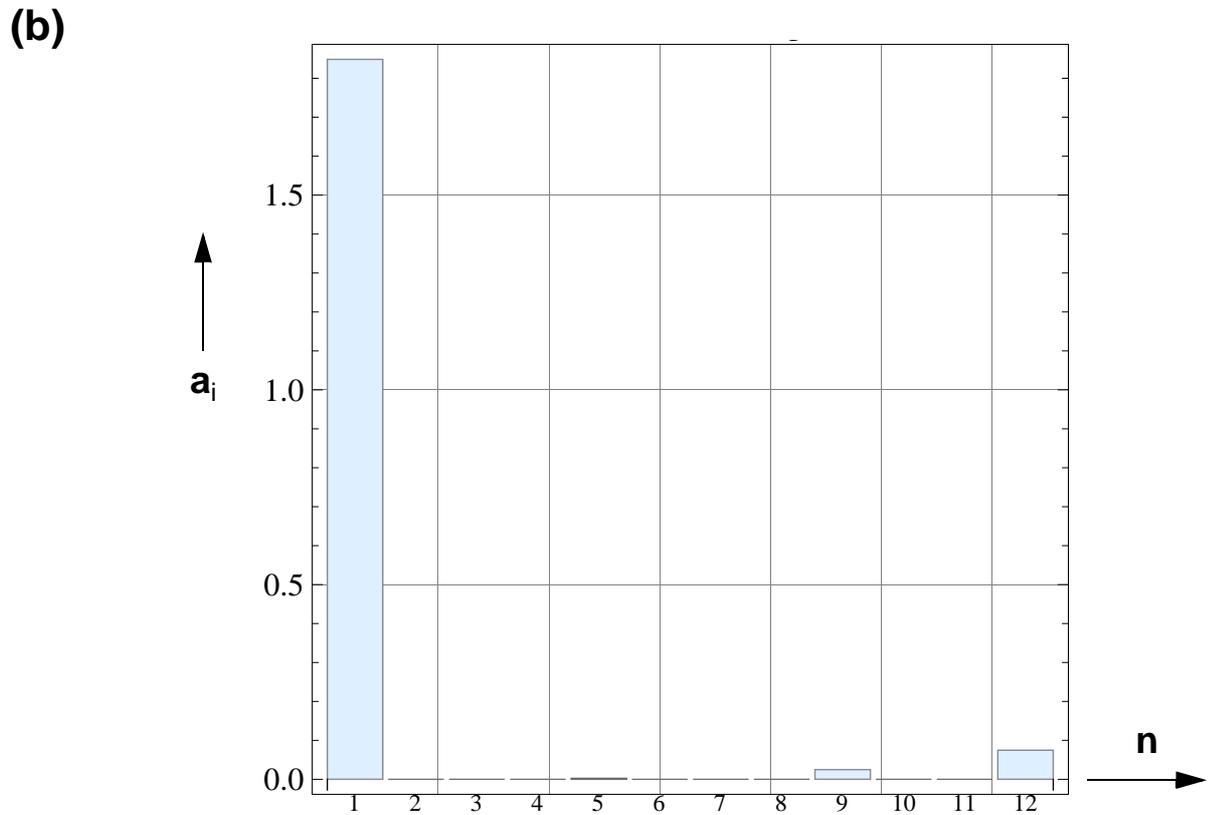
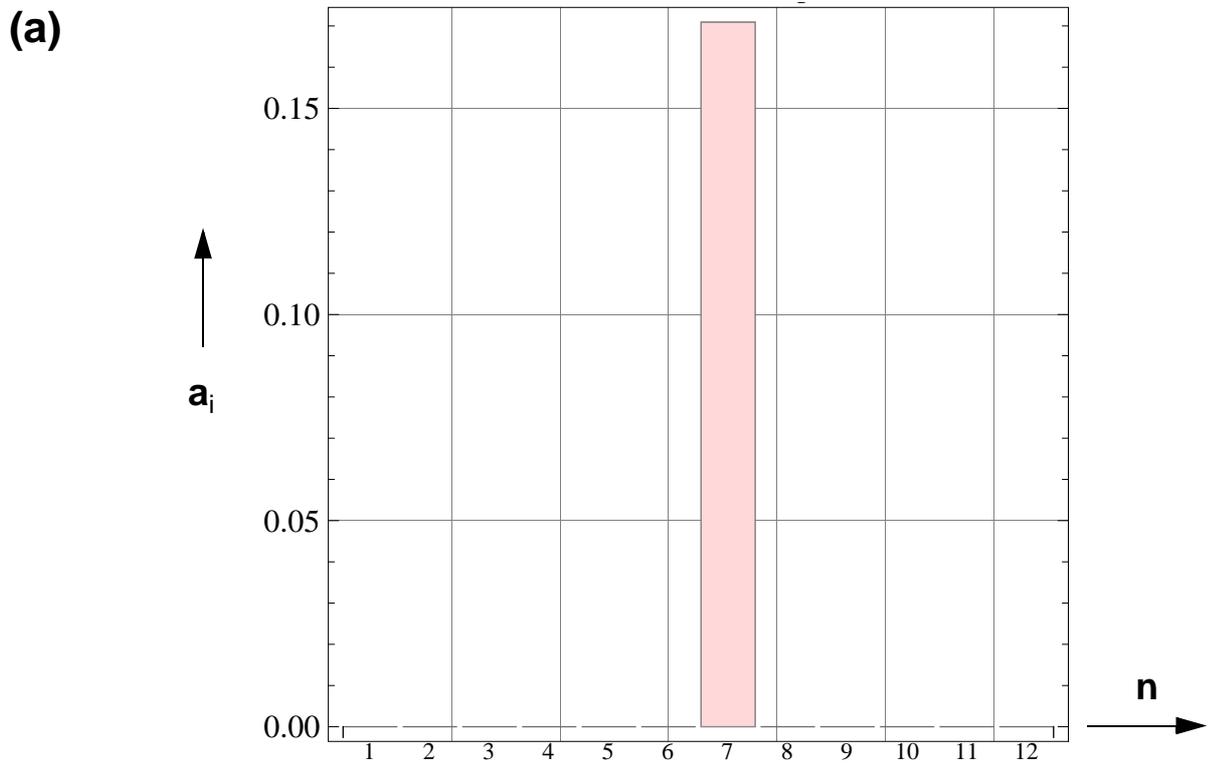


Abb.8.105: Anteilsfaktoren  $a_i$  der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit  $N=12$  wirksamen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für (a):  $V_2$ , (b)  $V_3$

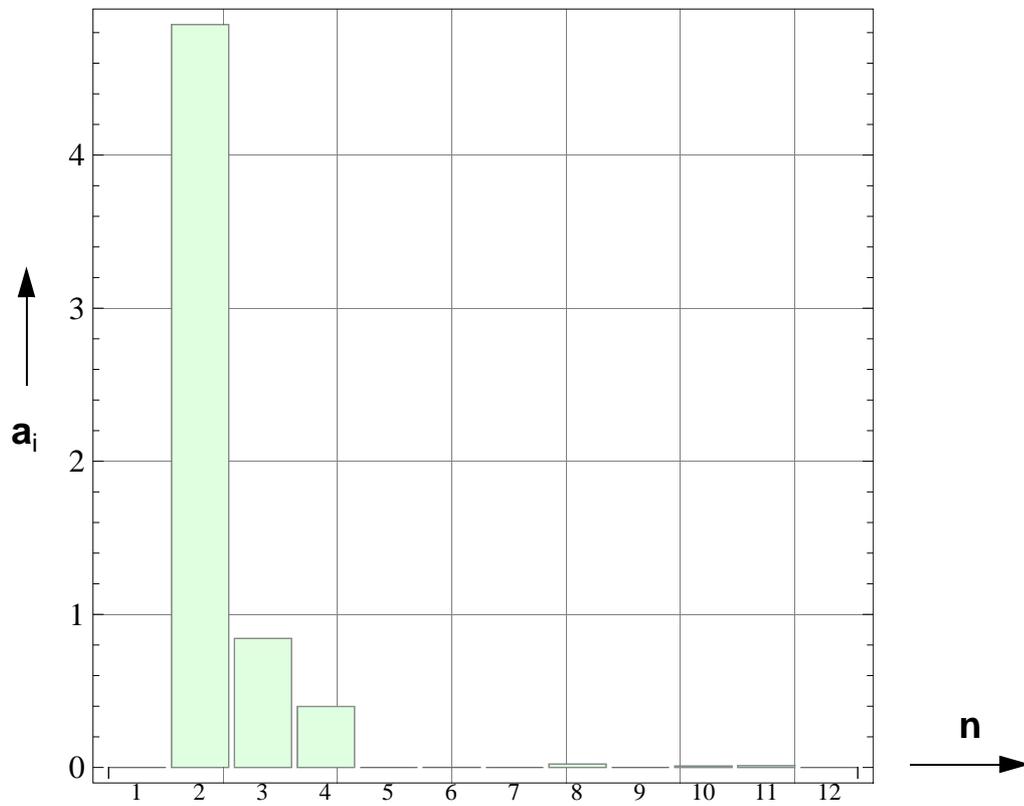
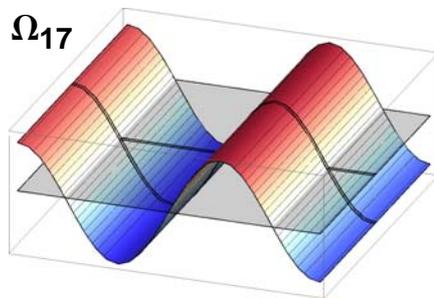


Abb.8.106: Anteilfaktoren  $a_i$  der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit  $N=12$  wirksamen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für  $M_1$

(a)



(b)

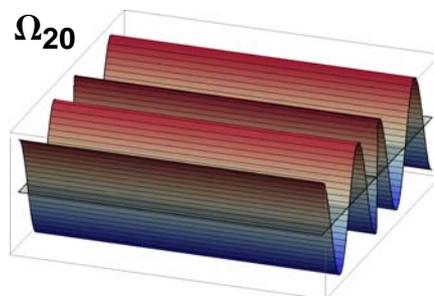
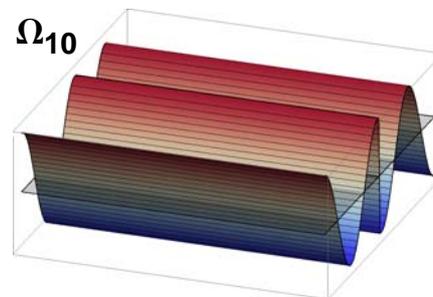
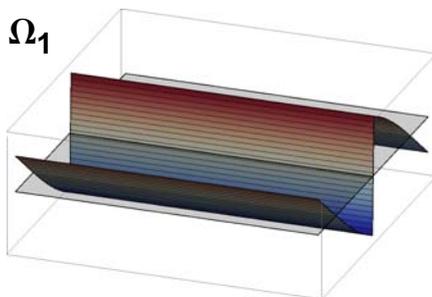


Abb.8.107: Wirksame Abkling-QS-Wölbfunktionen für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung für (a)  $V_2$  und (b)  $V_3$

(c)

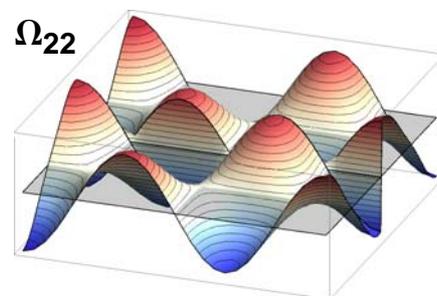
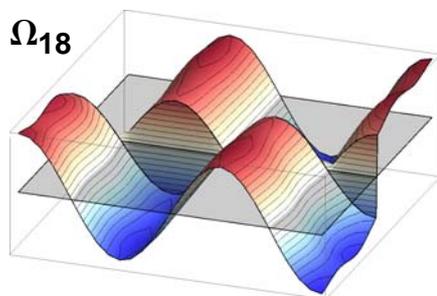
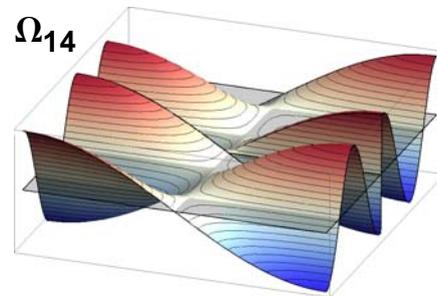
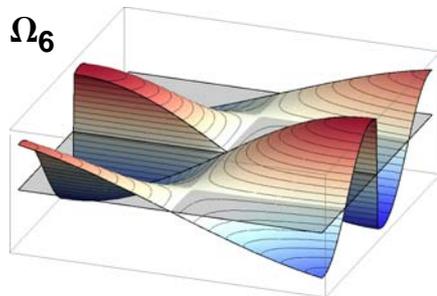
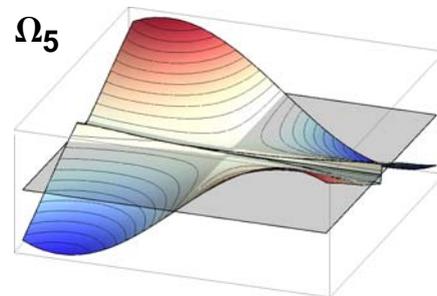
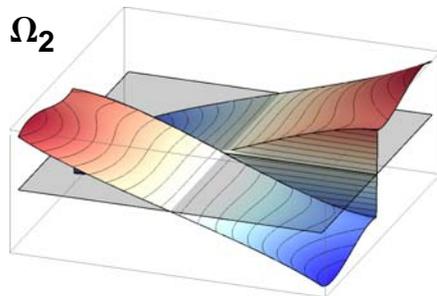
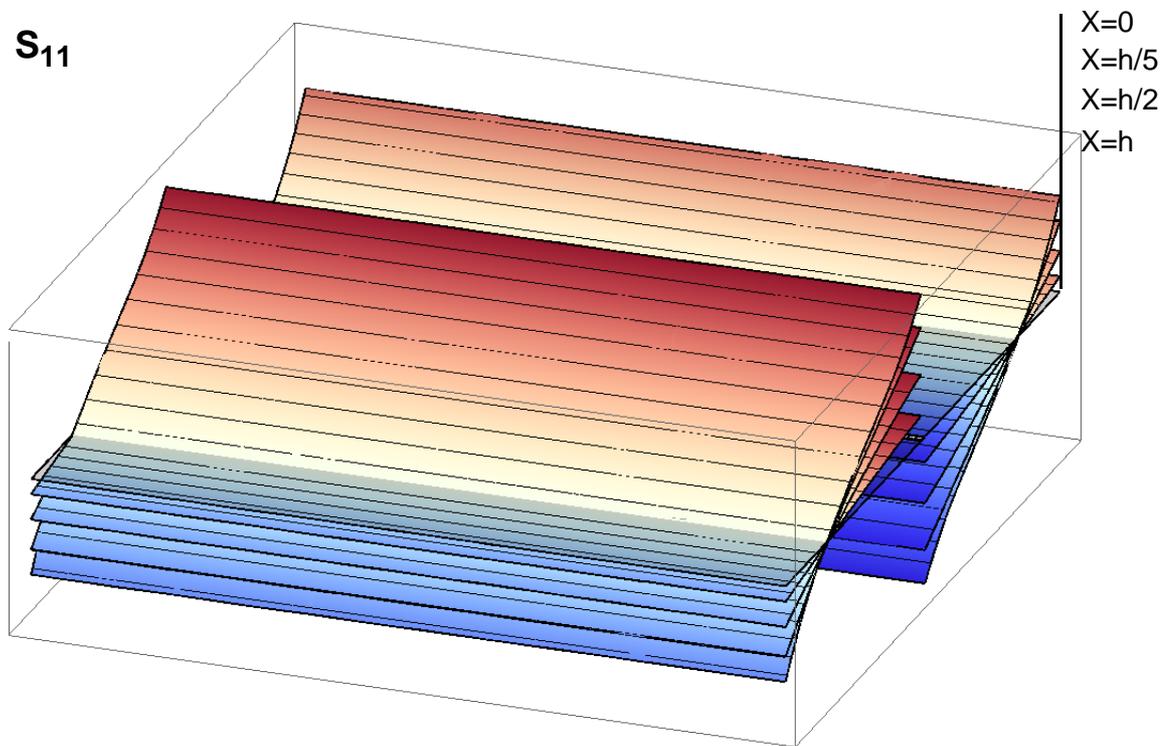


Abb.8.108: Wirksame Abkling-QS-Wölbfunktionen für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung für (c)  $M_1$

(a)



(b)

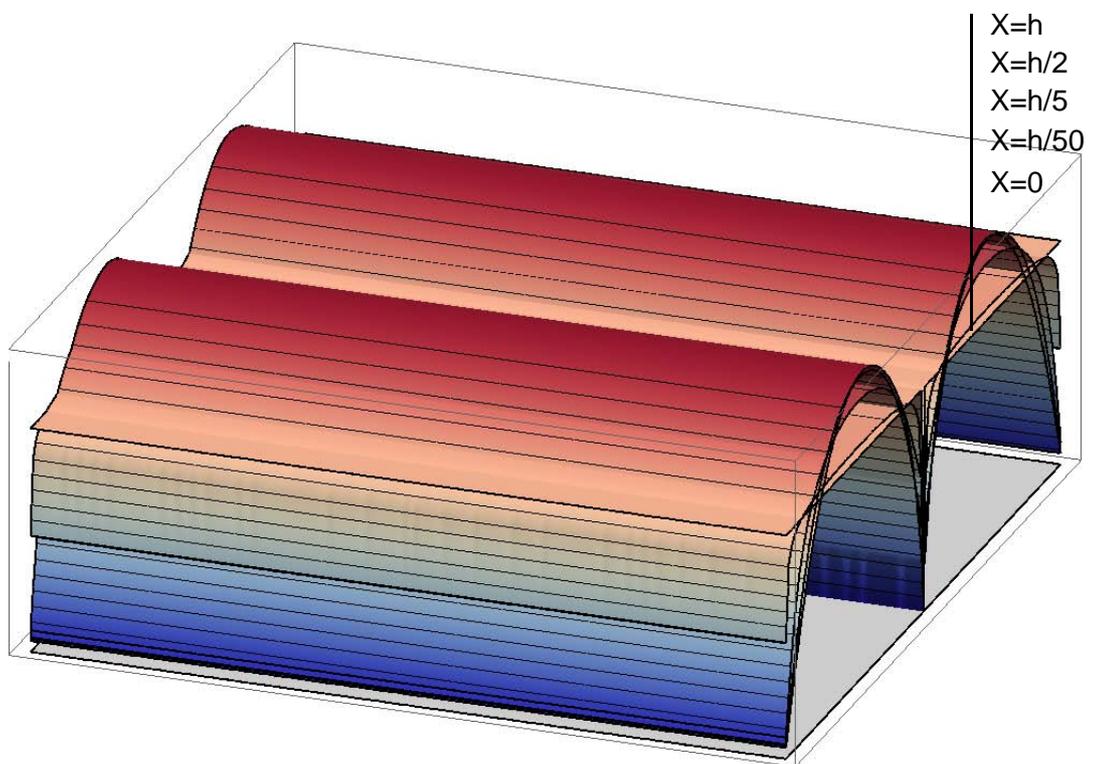


Abb.8.109: (a) Wölbnormalspannung, (b) gesamte Schubspannung:  $V_3$

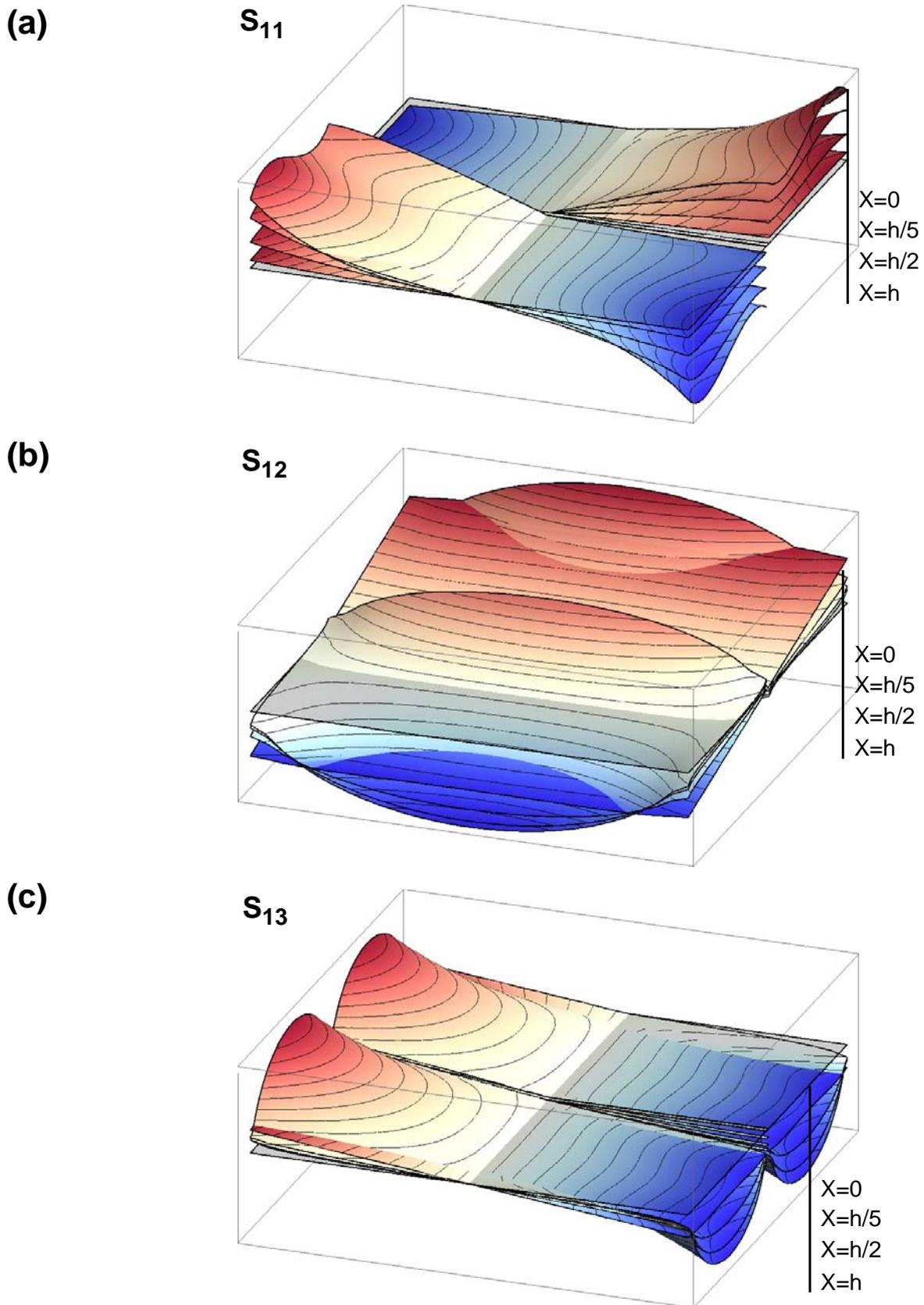
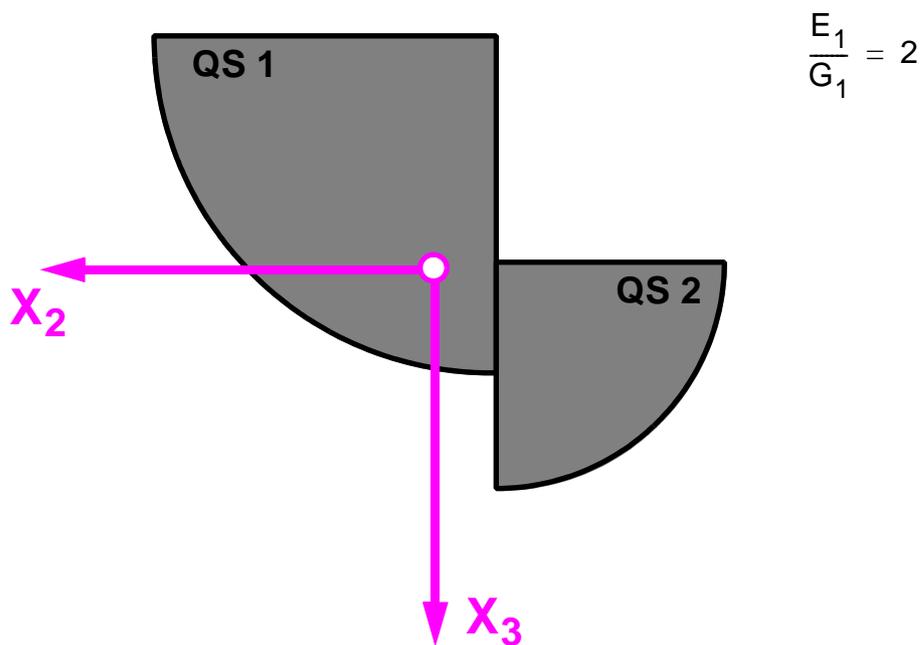


Abb.8.110: (a) Wölbnormalspannung, (b und c) resultierende gesamte Schubspannungen:  $M_1$

## 8.5.4 Allgemeine Querschnittsberandung: Zwei QS-Teile

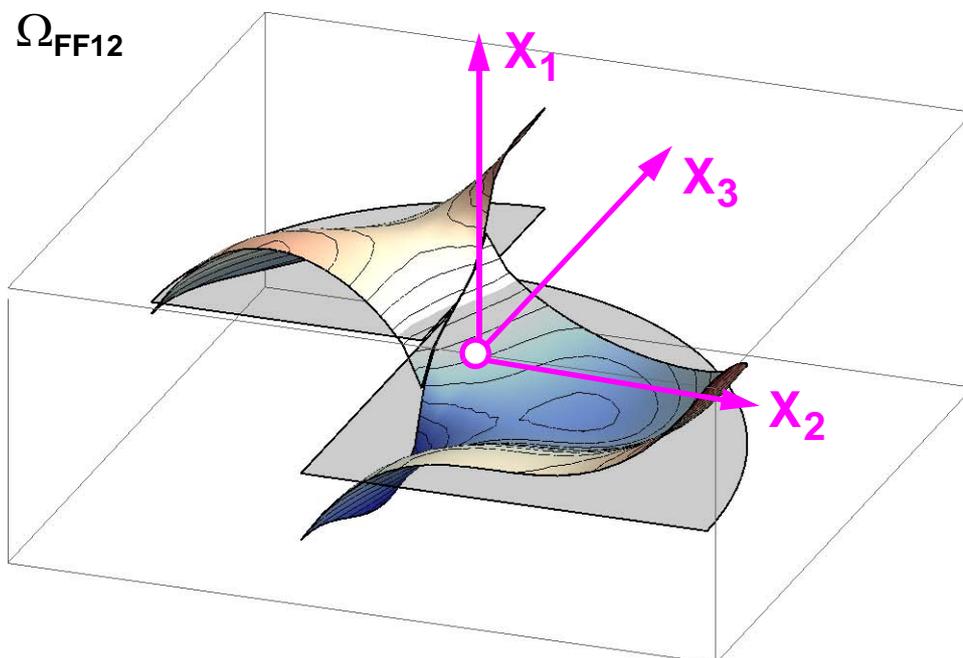


## Schubkorrekturfaktorenmatrix

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0,7689 & 0,0871 & 0,0748 \\ 0,0871 & 0,6875 & -0,1111 \\ 0,0748 & -0,1111 & 0,3522 \end{bmatrix}$$

Abb.8.111: Beispiel 9: Stabquerschnitt aus zwei Viertelkreissektoren mit starrer Verbundfuge und 3D-Stabkinematik – Geometrische Abmessungen und Materialdefinitionen und Matrix der Schubkorrekturfaktoren

(a)



(b)

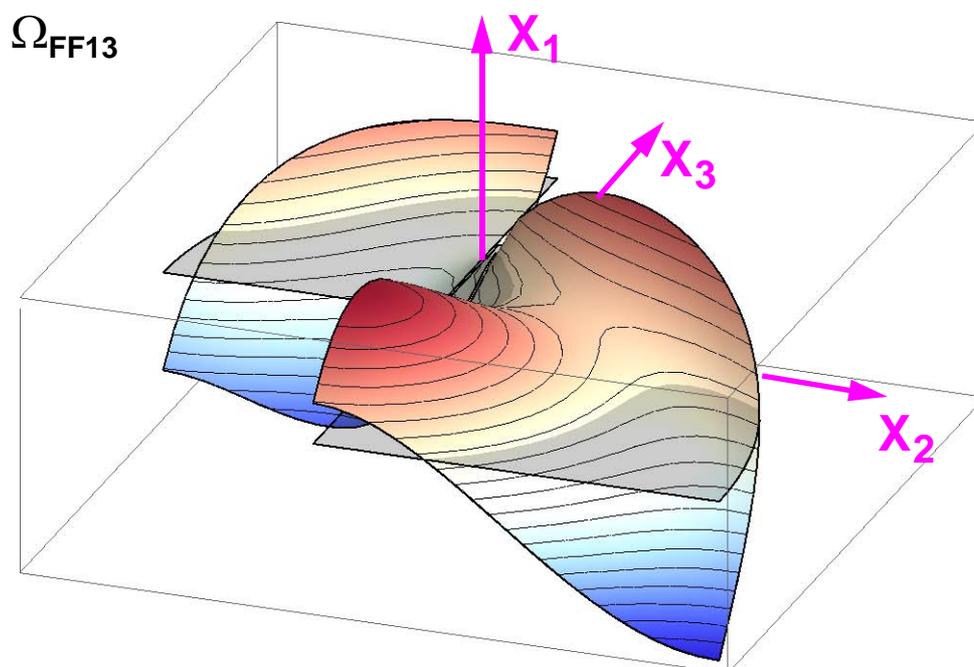


Abb.8.112: Freiefeldlösungen der QS-Verwölbungen für (a)  $V_2$  und für (b)  $V_3$ ;

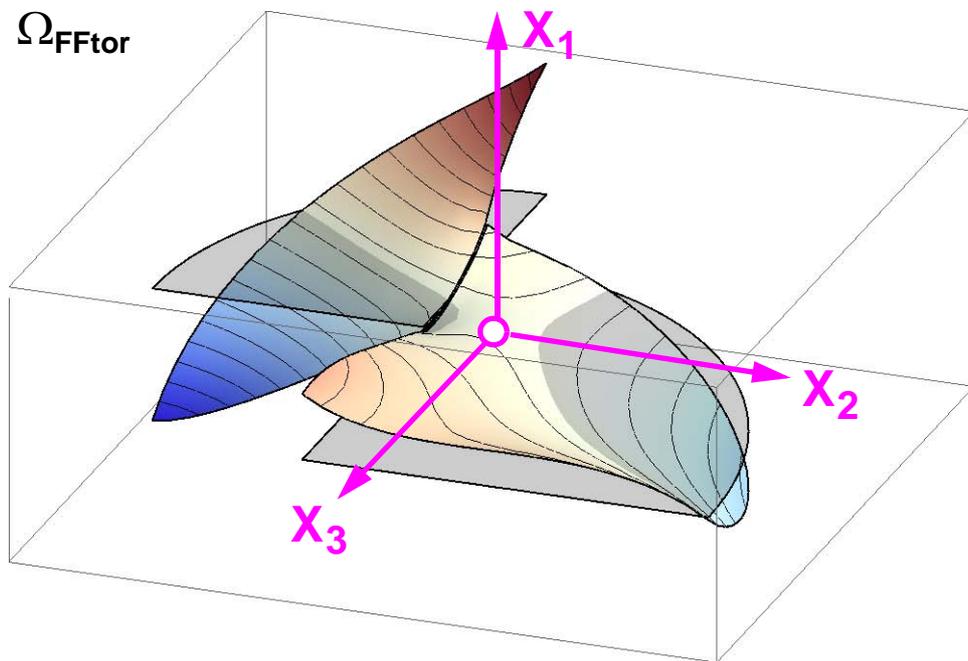


Abb.8.113: Freiefeldlösung der QS-Verwölbungen für  $M_1$

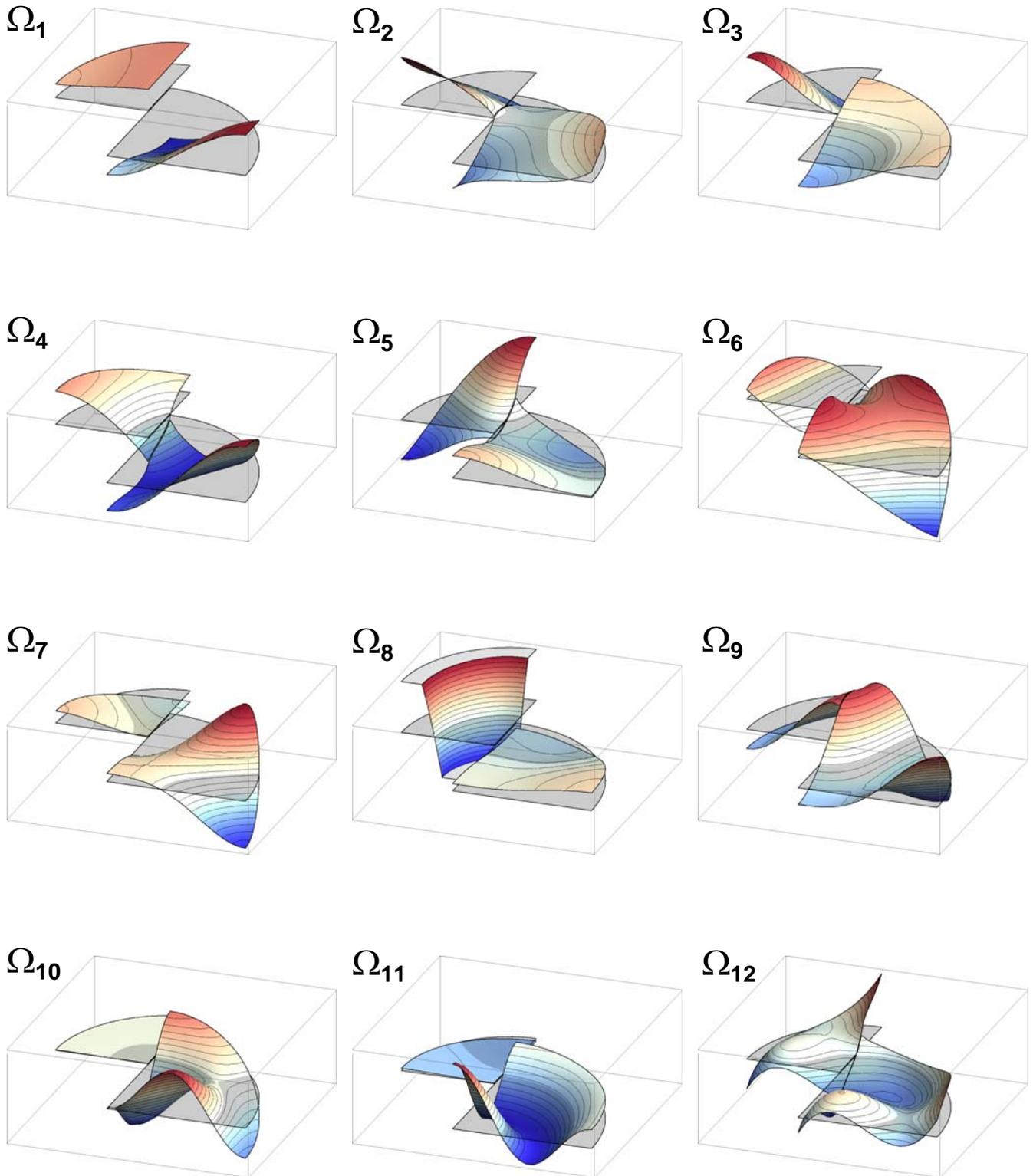


Abb.8.114: 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=1$  bis 12) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens mit Beachtung der Anteilsfaktoren zur Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

Tab. 8.4: Abkling-QS-Wölbfunktionen mit zugehörigen Abklingzahlen für das Stablängsverhalten und Anteilsfaktoren für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösungen

	Wölbfunktion	Abklingzahl	Anteilsfaktoren		
	$\Omega_i$	$\lambda_i$	$a_{V2,i}$	$a_{V3,i}$	$a_{M1,i}$
Freifeld- Lösungen	$\Omega_{FF,V2}$	0	1	-	-
	$\Omega_{FF,V3}$	0	-	1	-
	$\Omega_{FF,M1}$	0	-	-	1
Abkling-Wölbfunktionen 1-12	1	0,7586	0,0020	-0,0036	-0,0021
	2	1,3647	0,1491	-0,2390	-0,6479
	3	1,5330	-0,0028	0,0199	-0,0192
	4	1,5540	-0,0242	0,0217	0,0064
	5	1,6902	-0,0142	0,0249	-0,0377
	6	2,2863	-0,3987	0,6246	-0,2029
	7	2,4295	-0,0071	0,0258	-0,0182
	8	2,4477	-0,0016	0,0086	-0,0109
	9	2,5156	-0,0063	0,0227	-0,0148
	10	3,1631	-0,0012	0,0016	-0,0012
	11	3,2985	-0,0014	-0,0005	0,0000
	12	4,2217	0,7002	0,4460	0,0018

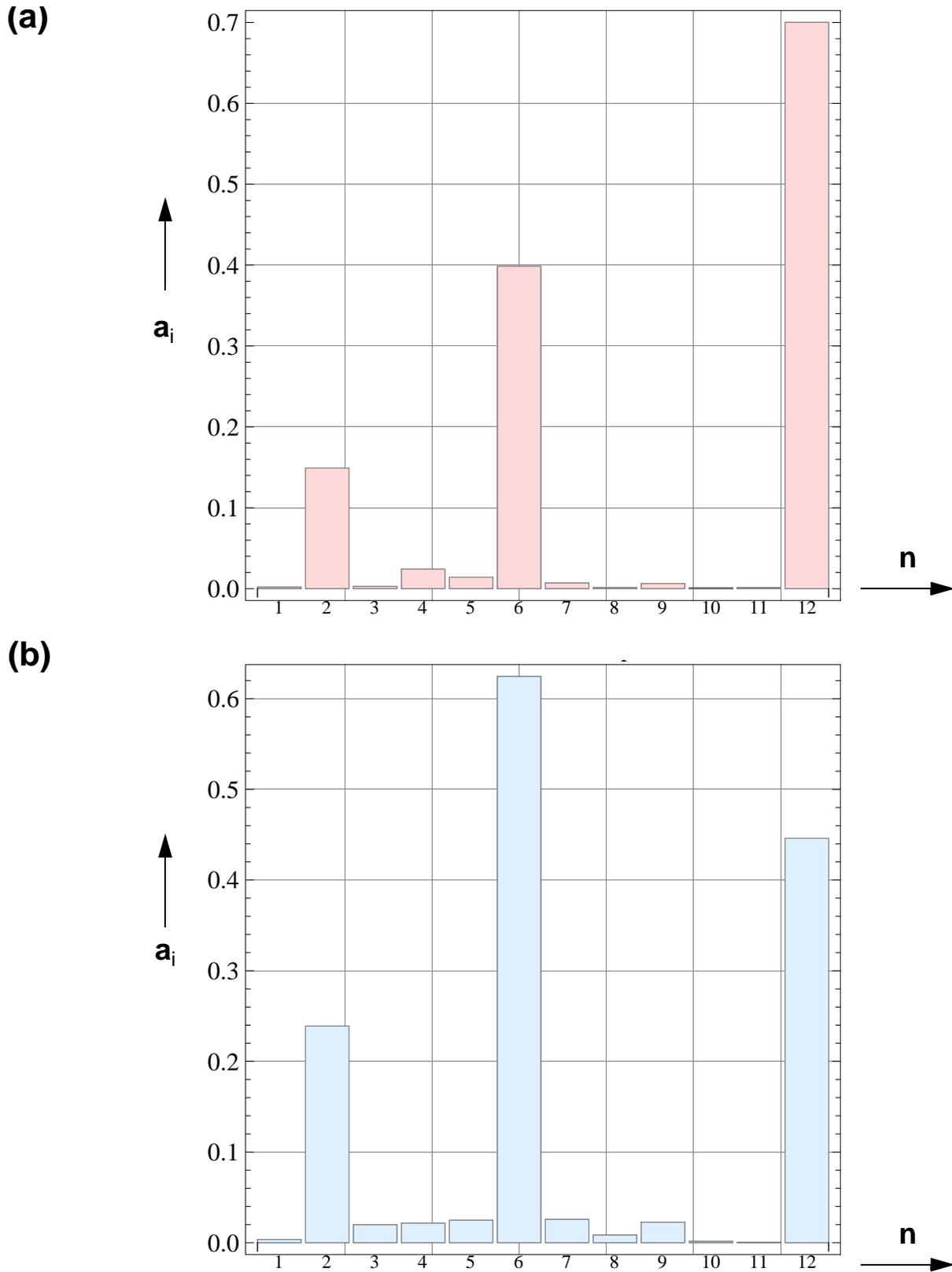


Abb.8.115: Anteilsfaktoren  $a_i$  der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit  $N=12$  wirksamen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für (a):  $V_2$ , (b)  $V_3$

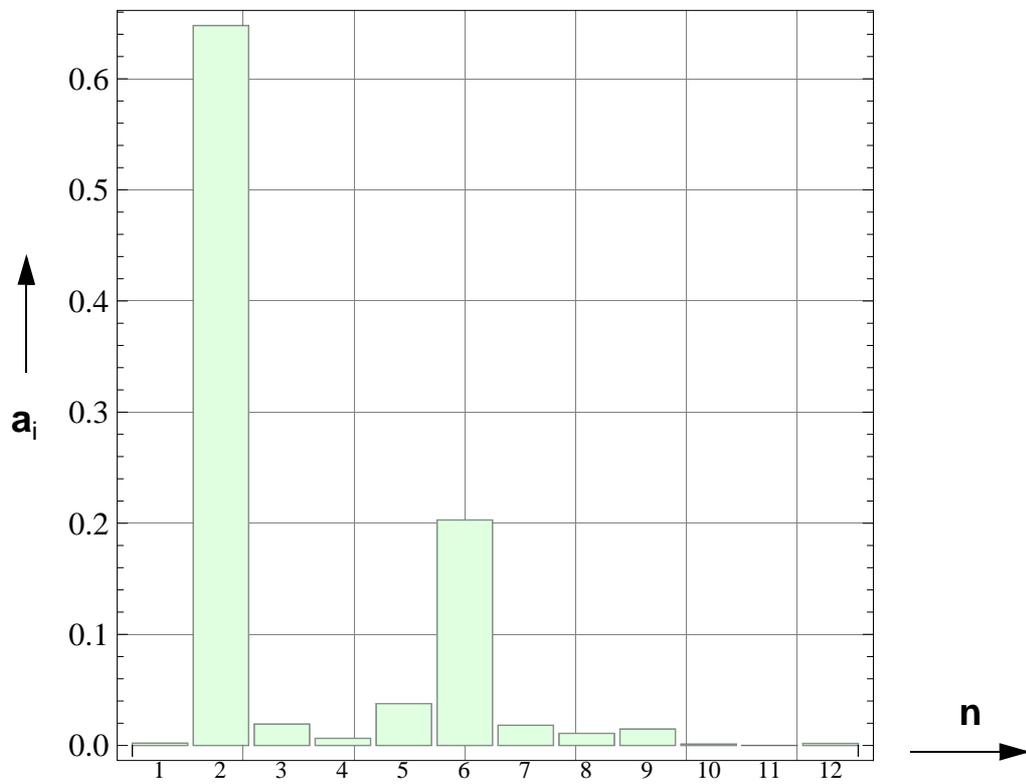
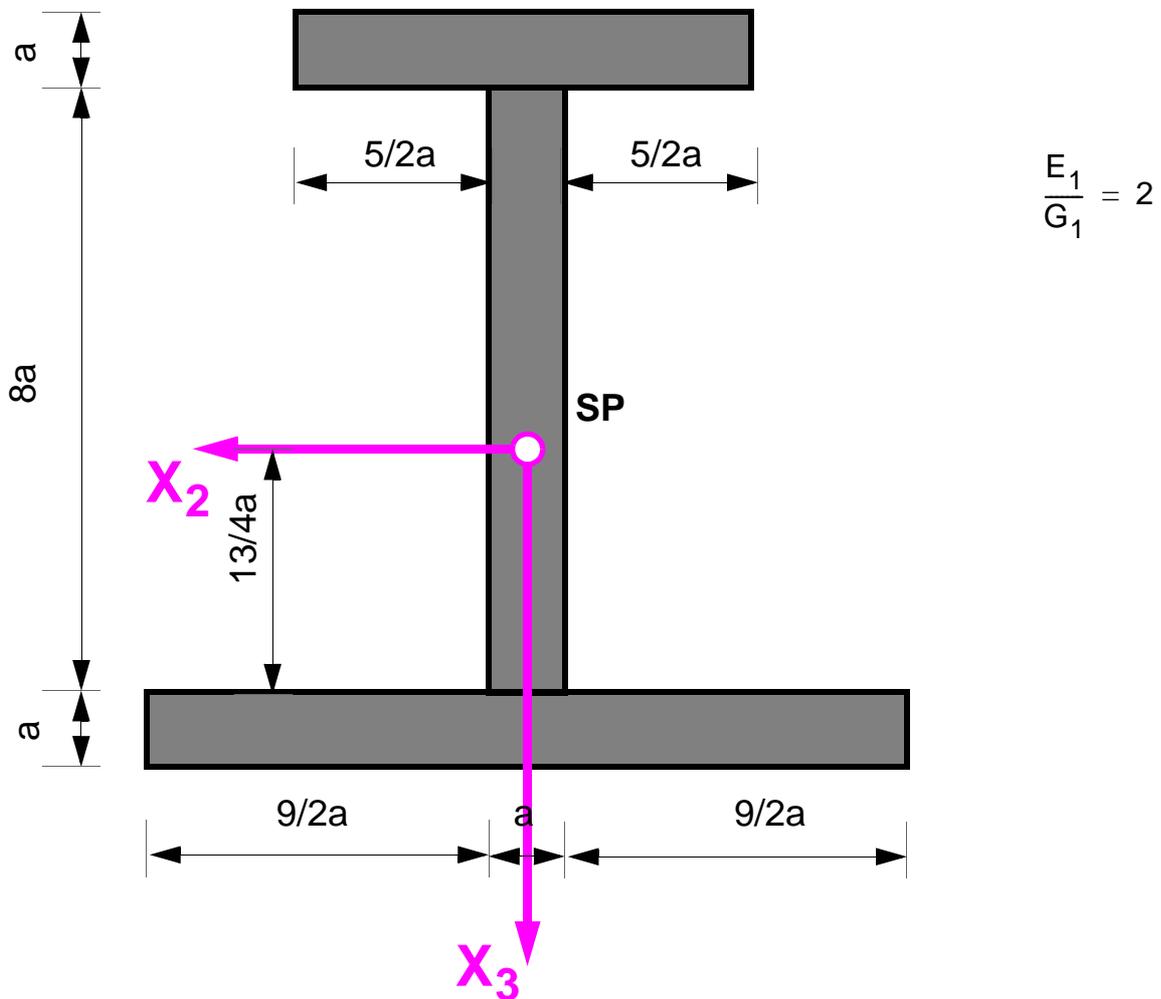


Abb.8.116: Anteilsfaktoren  $a_i$  der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit  $N=12$  wirksamen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für  $M_1$



## 8.5.5 Monosymmetrischer I-Querschnitt mit starren Verbundfugen



## Schubkorrekturfaktorenmatrix

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0,4995 & 0 & 0,0555 \\ 0 & 0,3590 & 0 \\ 0,0555 & 0 & 0,1354 \end{bmatrix}$$

Abb.8.117: Beispiel 11: I-förmiger Stabquerschnitt mit starren Verbundfugen und 3D-Stabkinematik – Geometrische Abmessungen und Materialdefinitionen und Matrix der Schubkorrekturfaktoren

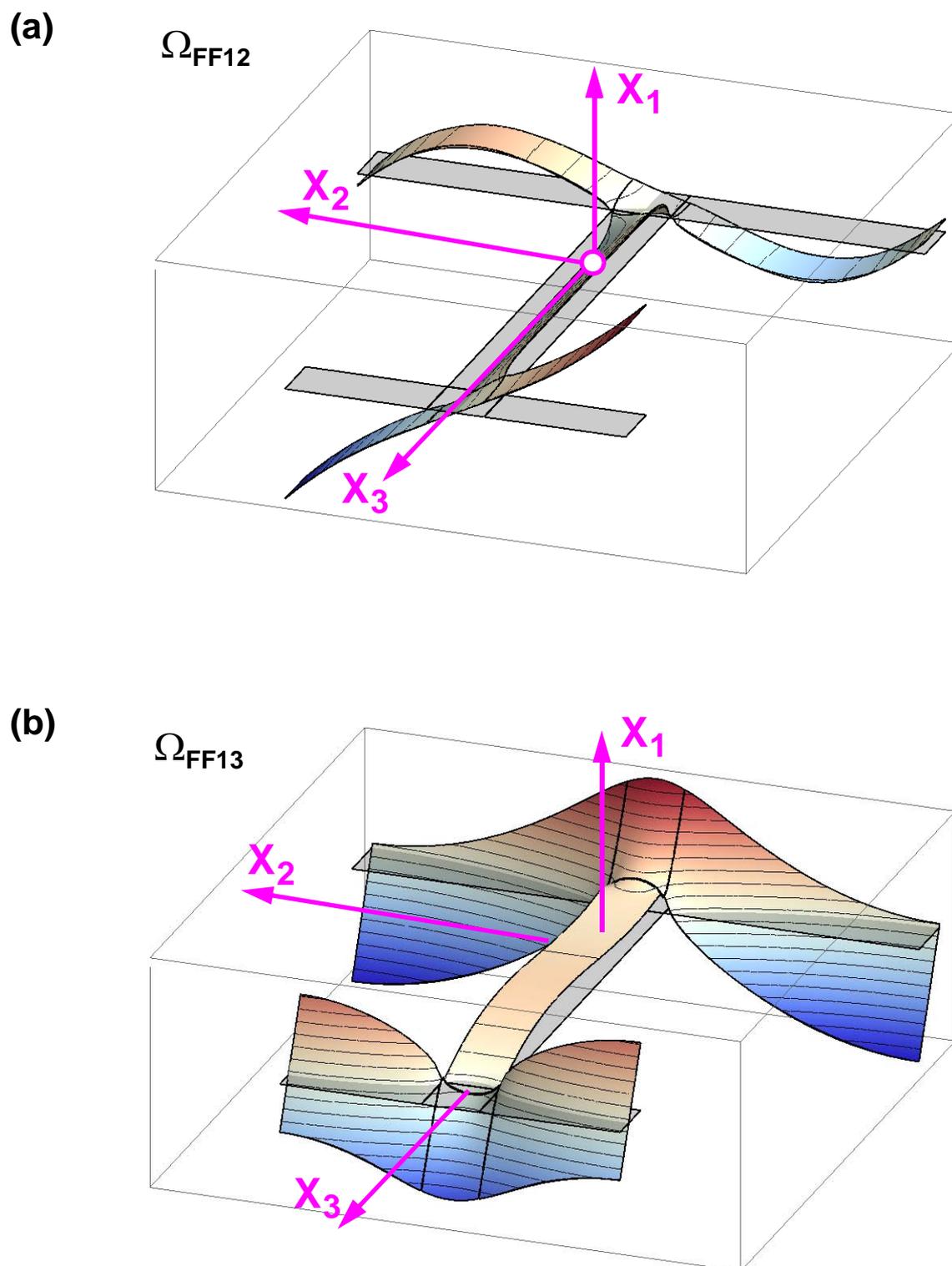


Abb.8.118: Freiefeldlösungen der QS-Verwölbungen für (a)  $V_2$  und für (b)  $V_3$ ;

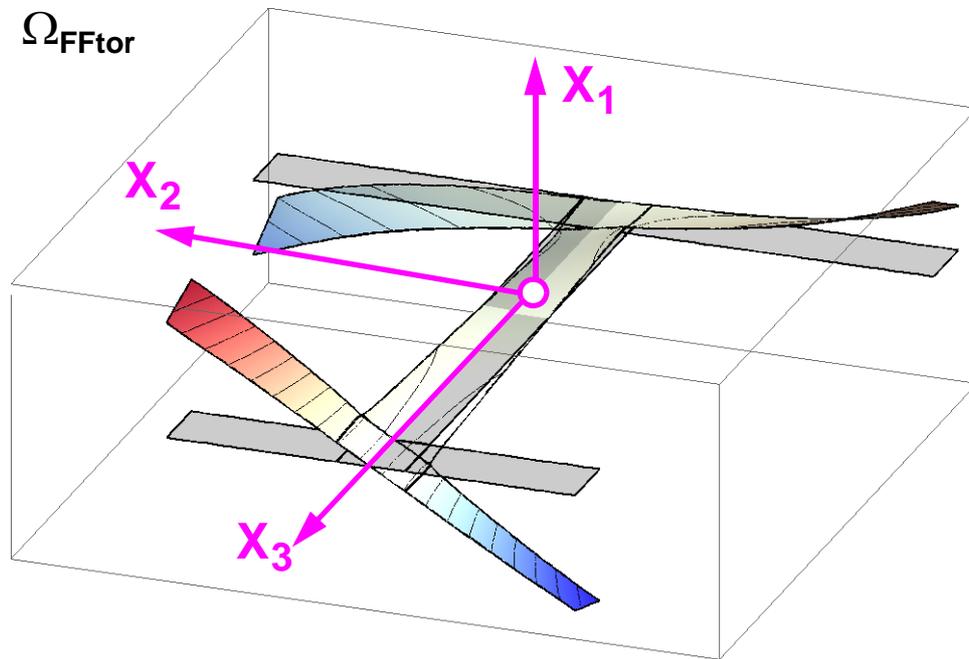


Abb.8.119: Freiefeldlösungen der QS-Verwölbungen für  $V_1$

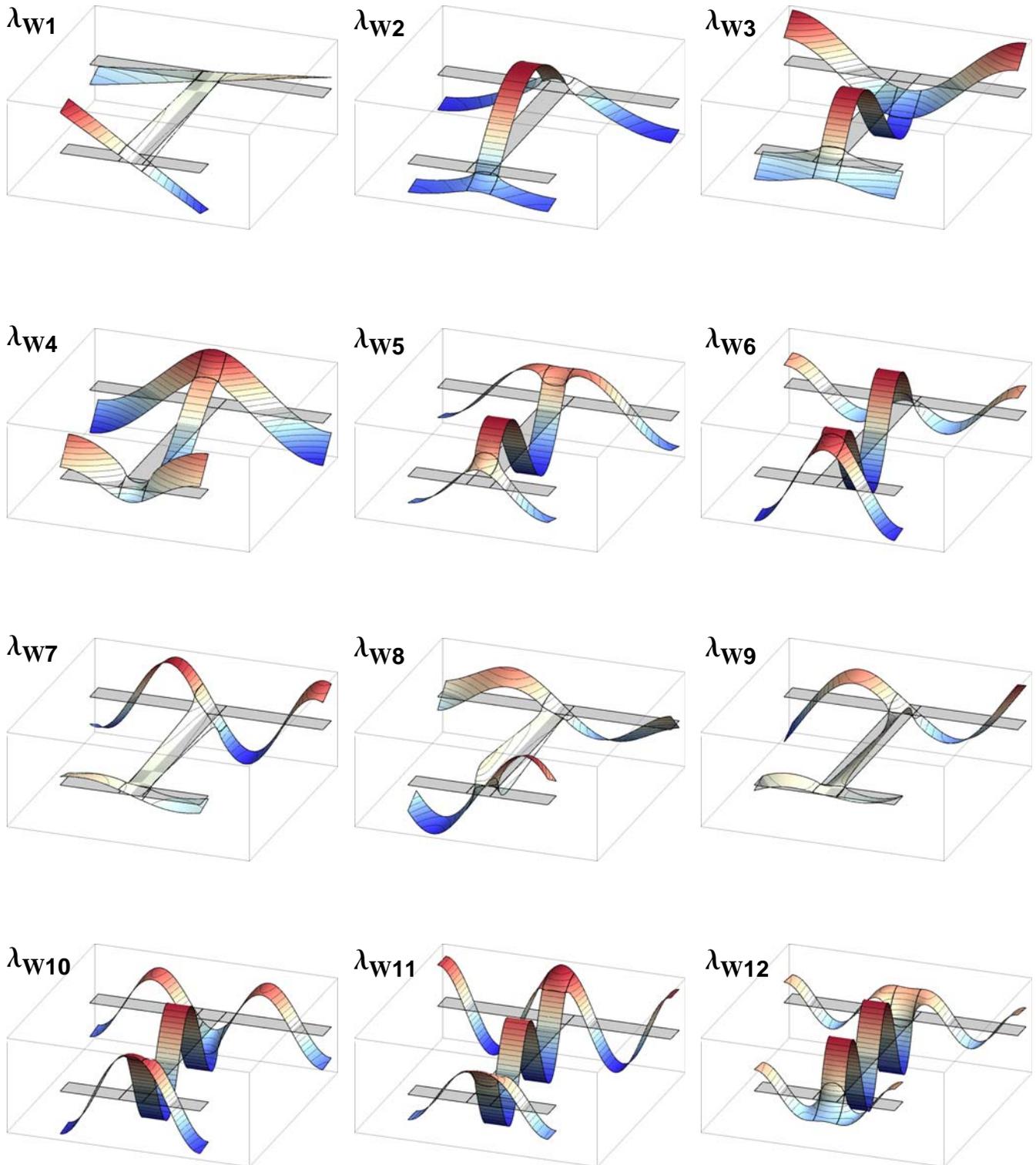


Abb.8.120: 3D-Einzelverschiebungsfelder ( $n=1$  bis 12) sortiert nach steigender Abklingzahl des Stablängsverhaltens mit Beachtung der Anteilsfaktoren zur Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösung

Tab. 8.5: Abkling-QS-Wölbfunktionen mit zugehörigen Abklingzahlen für das Stablängsverhalten und Anteilsfaktoren für die Approximation der QS-Verwölbung der Freifeldlösungen

	Wölbfunktion	Abklingzahl	Anteilsfaktoren		
	$\Omega_i$	$\lambda_i$	$a_{V2,i}$	$a_{V3,i}$	$a_{M1,i}$
Freifeld-Lösungen	$\Omega_{FF,V2}$	0	1	-	-
	$\Omega_{FF,V3}$	0	-	1	-
	$\Omega_{FF,M1}$	0	-	-	1
Abkling-Wölbfunktionen 1-12	1	0,0580	-2,0037	0	18,9828
	2	0,2740	0	0,6187	0
	3	0,5068	0	0,7275	0
	4	0,5328	0	1,2652	0
	5	0,5597	0	-0,1705	0
	6	0,7099	0	0,0614	0
	7	0,7144	-0,3711	0	-0,8316
	8	0,7146	-0,0852	0	-0,0912
	9	0,8233	1,3349	0	2,8941
	10	0,8333	0	0,0319	0
	11	0,9351	0	-0,0034	0
	12	1,0894	0	-0,0153	0

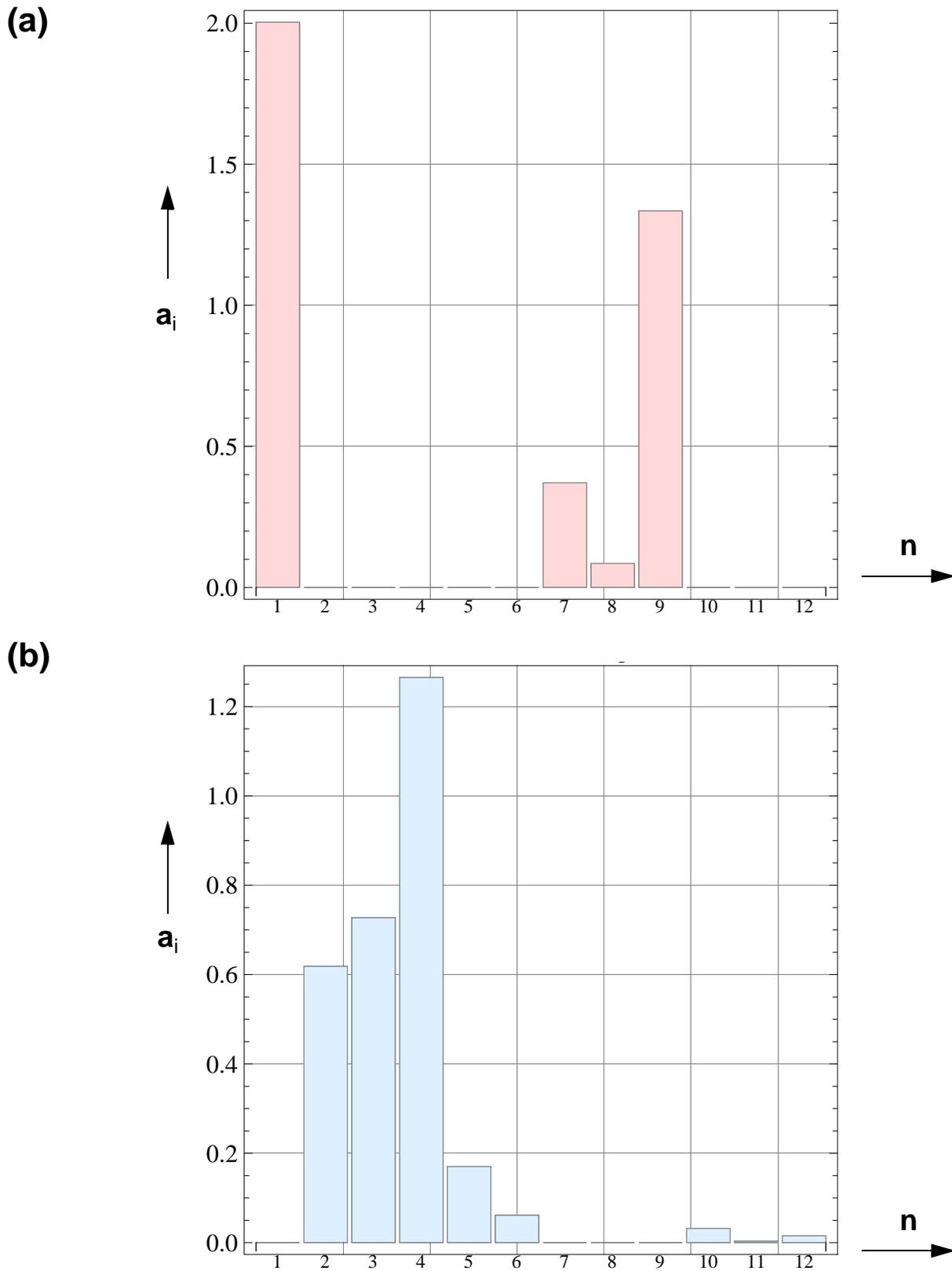


Abb.8.121: Anteilsfaktoren  $a_i$  der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit  $N=12$  wirksamen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für (a):  $V_2$ , (b)  $V_3$

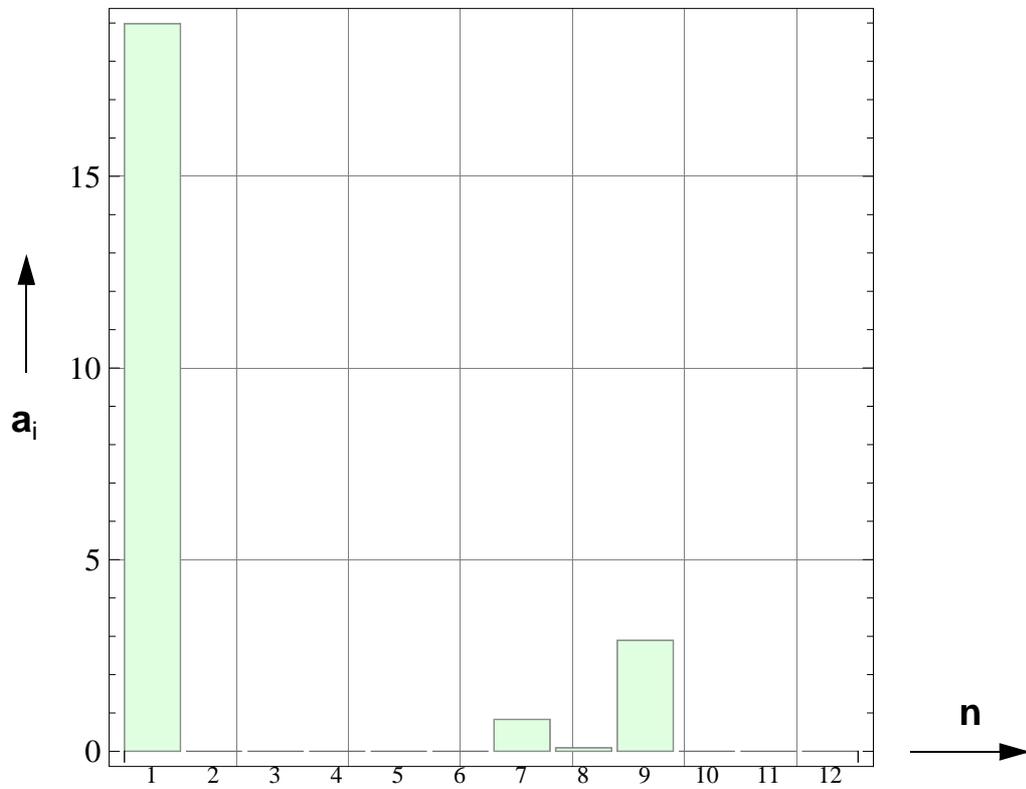


Abb.8.122: Anteilfaktoren  $a_i$  der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Approximation der Freifeldlösung der QS-Verwölbung mit  $N=12$  wirksamen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für  $M_1$



# 9

## **Zusammenfassung und Ausblick**

## 9.1 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein 3D-Stabmodell für Stäbe mit komplexem Querschnittsaufbau und verallgemeinerter Querschnittskinematik erarbeitet. Im folgenden Abschnitt werden die wesentlichen Schritte der gesamten Herleitung im Überblick zusammengefasst. Auf verschiedene Themen, wie z. B. den Schubkorrekturfaktor, die Wölbkrafttorsion, wird im Abschluss eingegangen.

### 9.1.1 Herleitung, Lösung und Anwendung des etablierten Stabmodells

- **Grundlagen des prismatischen Stabmodells**

In den Kapiteln 2-5 wurden die Grundlagen für das neu etablierte Stabmodell im Detail dargestellt. Wie in Kapitel 5 erwähnt, liegen diesem erweiterten Stabmodell keinerlei Einschränkungen und Restriktionen zugrunde. Als einzige Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Stabtheorie gilt die absolute Prismaticität des Stabkörpers in geometrischer und materieller Sicht. Der geometrische Aufbau des Stabquerschnitts ist durch eine beliebige Querschnittsberandung begrenzt und besteht aus einer beliebigen Anzahl an Einzelquerschnittsteilen. Die Einzelquerschnittsteile weisen ihrerseits konstante Materialeigenschaften auf.

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Querschnittsgeometrie sowie die zugrunde gelegte Querschnittskinematik keinen Einschränkungen unterliegen.

Es ist gelungen, die strengen Annahmen und Restriktionen der erweiterten Querschnittskinematik für das erweiterte Stabmodell ohne Verletzung durch die gesamte Herleitung der Grundgleichungen und deren Lösung durchzuziehen.

- **Herleitung der Grundgleichungen**

Die durchgängige Herleitung und die nahtlose Einbettung in die 3D-Kontinuumsmechanik führt zu den erforderlichen 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungen des Stabes. Die Herleitung wurde basierend auf dem Produktansatz für das gesamte 3D-Verschiebungsfeld gezeigt. Der verwendete Produktansatz spaltet in diesem Zusammenhang das gesamte 3D-Verschiebungsfeld produktartig in die beiden Anteile des Querschnittsverhaltens und des Stablängsrichtungsverhaltens auf.

Neben der produktartigen Aufspaltung des gesamten 3D-Verschiebungsfeldes ist die strikte Trennung des gesamten 3D-Verschiebungsfeldes in ein globales und in ein lokales 3D-Teilverschiebungsfeld in durchgängiger Form umgesetzt worden. Diese Vorgehensweise ermöglicht die additive Erweiterung des transversal schubnachgiebigen Biege-Torsions-Stabes um die axialen Querschnittsverwölbungen und um die echten Querschnittsverformungen.

Als Bindeglied zwischen den 3D-Verzerrungen und den 3D-Spannungen wurde die Materialsteifigkeitsmatrix für um die Stabachse ( $X_1$ ) gedrehtes orthotropes Materialverhalten, isotropes Materialverhalten und isotropes Materialverhalten unter Vernachlässigung der Querkontraktionseffekte verwendet.

In Kapitel 6 wurde die detaillierte Herleitung des gesamten Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems gezeigt, wobei der Übersichtlichkeit halber eine separierte blockartige Darstellung des axialen Querschnittsverwölbungszustands sowie des echten Querschnittsverformungszustands verwendet wurde. Diese Darstellungsform ermöglicht die direkte Darstellung der Koppelungseffekte zwischen diesen beiden in der Literatur meist getrennt dargestellten und behandelten Einzelzuständen.

Das gesamte beschreibende Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem des erweiterten Stabmodells wurde für die drei beschriebenen Materialeigenschaften in übersichtlicher vollständiger Weise dargestellt.

Alle Gleichgewichtsdifferentialgleichungen sind in originaler Differential- und Integraldarstellung wie auch in umgewandelter Integraldarstellung hergeleitet worden. Diese notwendigen Darstellungsformen ergeben sich aus den Erfordernissen der Gleichungslösung des Gesamtproblems. Vervollständigt werden die Gleichgewichtsdifferentialgleichungen durch die zugehörigen Kräfte- und Verschiebungsrandbedingungen, die ebenfalls in den entsprechenden Darstellungsformen vorliegen müssen.

Für die numerische Berechnung wurden zusätzlich die diskretisierten Darstellungsformen der Gleichgewichtsdifferentialgleichungen und der Randbedingungen angeführt.

### • Lösung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems

In Kapitel 7 wurde ausgehend von dem hergeleiteten Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem die exakte Lösung des Querschnittproblems mit anschließender analytischer Lösung des Stablängsproblems mit einer strukturierten Lösungsmethodik gezeigt. Die verwendete Lösungsmethodik stellt eine universelle mathematisch strukturierte baustatische Vorgangsweise dar. Die Gesamtlösung wurde basierend auf der Freifeldlösung des in Stablängsrichtung konstant schubspannungsbelasteten Stabes und den Abklinglösungen in Stablängsrichtung gezeigt. Die beiden Teillösungen wurden, voneinander isoliert betrachtet, ermittelt. Die Teillösung I beschreibt dabei das Verhalten des konstant querkraft- und torsionsbelasteten Stabes, diese ist auch als Lösung des Timoshenko-Stabes bekannt.

Die kinematische Beschreibung für schubnachgiebige Querschnittsteile und für nachgiebige Verbundfugen wurde in identer Weise durchgeführt, was im Grundsatz zu einem identen mechanischen Verhalten dieser beiden Querschnittsbauweise führt. Nachgiebige Verbundfugen stellen demnach schubnachgiebige Querschnittsteile mit sehr geringer Dicke dar.

Als wesentlicher Schritt im Rahmen der Lösung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems ist die Orthogonalisierung der globalen und der lokalen 3D-Einzelverschiebungsfelder zu sehen. Die Orthogonalisierung führt zur vollständigen Entkoppelung aller 3D-Einzelverschiebungsfelder, die in diesem Zusammenhang in mechanischer Form durchzuführen ist. Eine rein geometrische Orthogonalisierung ist ausschließlich für homogene Querschnitte möglich, für materiell heterogene Querschnitte hat die Orthogonalisierung in mechanischer Form, d. h. auf Basis der Schnittgrößen, zu erfolgen.

Die beiden Teillösungen I und II werden basierend auf der Deformationsmethode, einer systematischen Methode der Baustatik, zur Gesamtstabsteifigkeitsmatrix des homogen belasteten Stabes zusammengeführt.

Die Lösung des gesamten Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems führt zur Stabsteifigkeitsmatrix des prismatischen Stabes mit verallgemeinerter Querschnittskinetik. Auf Grund der allgemeinen Problemformulierung mit beliebiger Drehachse für alle Einheitsverformungszustände, beschreiben die Gleichgewichtsdifferentialgleichungen alle Interaktionen zwischen den sechs globalen Starrkörperfreiheitsgraden.

Entgegen vielen vorangegangenen Arbeiten zu diesem Thema wurde in dieser Arbeit keine separierte Lösung für einzelne Einheitsverformungszustände erarbeitet, sondern eine vollständig gekoppelte Darstellung aller Einheitsverformungszustände hergeleitet. Somit lassen sich allgemeine homogene kombinierte Belastungszustände für Stäbe mit Verformungen um beliebige Stabachsen vollständig darstellen. Effekte aus exzentrischen Belastungen des Stabes (Schwerpunkt, natürliche Drehachse Schubmittelpunkt) sind exakt dargestellt.

Für die Implementierung in kommerziellen FE-Programmen wurde neben der vollständigen analytischen Systemlösung in Stablängsrichtung, basierend auf den analytischen Lösungsverläufen, ein FE-Element erarbeitet.

### ● Berechnung charakteristischer Beispiele

In Kapitel 8 wurden unter Verwendung der ermittelten Stabsteifigkeitsmatrix charakteristische Beispiele von Stäben mit verschiedenen Querschnitten gezeigt. Dabei wurde das Querschnittsverhalten und das zugehörige Stablängsrichtungsverhalten untersucht.

Die Beispiele mit 1D- und 2D-Kinematik umfassen ein- und mehrteilige Stäbe. Die homogene Belastungssituation ist durch den einseitig eingespannten Kragträger mit Stabendbelastung realisiert. Im Stabanfangsquerschnitt sind ausnahmslos alle globalen und lokalen axialen 3D-Verschiebungsfelder in ihrer Verformbarkeit unterdrückt. Verformungen im Stabquerschnitt sind durch die Bedingung  $v=0$  vollständig unterdrückt.

Für die einzelnen Querschnittsgeometrien wurden für die konstante homogene Querkraftbeanspruchung die folgenden Ergebnisse dargestellt:

- 3D-Verschiebungsfelder der Freifeldlösung mit dem zugehörigem Abklingverhalten in Stablängsrichtung
- 3D-Verschiebungsfelder der Abklinglösung mit dem zugehörigen Abklingverhalten und den zugehörigen Anteilsfaktoren zur Approximation der Freifeldlösung
- 3D-Normal- und Schubspannungsverteilungen über den Querschnitt
- Darstellung der Ergebnisse bei Approximation der Freifeldlösung durch die Abklinglösungen

Durch die Bestimmung der 3D-Einzelverschiebungsfelder in Form von den über den gesamten Querschnitt definierten 3D-Gesamtquerschnittsverschiebungsfeldern kann eine beliebig gewählte Auswahl an relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern für die Systemberechnung verwendet werden. Bereits mit einer geringen Anzahl an 3D-Einzelverschiebungsfeldern zur Bestimmung der Stabsteifigkeitsmatrix kann für eine Vielzahl an Stabquerschnittsgeometrien eine ausreichende Ergebnisgenauigkeit erreicht werden.

Als Sonderfall kann auch nur eine ausgewählte Abklinglösung in Form des vorab bestimmten 3D-Einzelverschiebungsfeldes der Freifeldlösung verwendet werden. Dadurch werden bereits sehr gute Näherungslösungen für die gesuchten Ergebnissen erzielt, wobei eine deutliche Verringerung des Rechenaufwandes möglich ist. Wie die Beispiele gezeigt haben, reihen sich das 3D-Einzelverschiebungsfeld der Freifeldlösungen mit deren Form und deren Steifigkeitszahlen stets unter die ersten paar relativen 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösungen. Dies gilt insbesondere für Querschnitte mit nachgiebigen Verbundfugen zwischen benachbarten Einzelquerschnittsteilen.

Der Rechenaufwand zur Berechnung von nahezu exakten Lösungen für komplexe Querschnittsgeometrien lässt sich durch gezielte Verwendung einer ausgewählten Anzahl an relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern als Abklinglösungen deutlich reduzieren.

Durch die vorgenommene Sortierung der 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösung nach ihrer Steifigkeit wird deren Wichtigkeit für die Querschnittsdiskretisierung erkennbar. Geringe Steifigkeitszahlen weisen auf eine leichte Ausbildbarkeit der zugehörigen 3D-Einzelverschiebungsfelder unter Belastung hin. Relative 3D-Einzelverschiebungsfelder mit geringer Steifigkeit sind somit vorrangig für die Systemberechnung zu verwenden.

Im Gegensatz dazu kann bei der klassischen FE-Diskretisierung auf keine einzige ins Spiel gebrachte Ansatzfunktion verzichtet werden, was einen hohen Rechenaufwand in Abhängigkeit der Diskretisierungsfeinheit mit sich bringt.

### 9.1.2 Diskussion klassischer Stabphänomene

- **Längenabhängigkeit der verschiedenen Stabmodelle**

Die klassischen Stabmodelle nach Bernoulli und Timoshenko weisen auf Grund der restriktiven kinematischen Einschränkungen eine nicht unwesentliche Abhängigkeit vom Verhältnis der Stablänge zur Querschnittsabmessung auf. Für eine Vielzahl an Ingenieur Anwendungen treten durch diese Abhängigkeit von der Stablänge keine relevanten Einflüsse auf die Ergebnisgenauigkeiten auf. Besonders für gedrungene Stäbe liegen allerdings deutliche Abweichungen von der exakten Lösung vor, da mit zunehmend geringer werdendem Verhältnis der Stablänge zur Querschnittsabmessung die in den erwähnten klassischen Theorien nur näherungsweise abgebildeten Schubtragmechanismen zum Tragen kommen. Durch die vollständige Erfüllungen der 3D-Gleichgewichtsgleichungen tritt für das etablierte Stabmodell diese Abhängigkeit von der Stablänge explizit nicht auf, da alle Schubtragmechanismen exakt inkludiert sind. Somit kann dieses Stabmodell für alle Verhältnisse der Stablänge zur Querschnittsabmessung ohne Beeinträchtigung der Ergebnisqualität Anwendung finden.

- **Der beliebige Verbundquerschnitt**

Wie oben erwähnt wurden schubnachgiebige Querschnittsteile und nachgiebige Verbundfugen in identer Weise formuliert. Werden die Ergebnisse von mehrteiligen Querschnitten mit nachgiebigen und starren Verbundfugen gegenübergestellt, dann zeigt sich, dass grundsätzlich identes Verhalten vorliegt. Nachgiebige Verbundfugen mit üblichen Nachgiebigkeitszahlen führen im Vergleich zu schubnachgiebigen Einzelquerschnitten zu deutlich geringeren Abklingzahlen zur Beschreibung des Abklingverhaltens in Stablängsrichtung. Somit pflanzen sich bei Querschnitten mit nachgiebig verbunden Einzelquerschnittsteilen Randstörungen, z. B. in Form von Randeinspannungen oder lokalen Lastenleitungen, wesentlich weiter in das Stabinnere fort.

- **Schubkorrekturfaktoren im klassischen Sinn**

Die klassischen in der Literatur definierten Schubkorrekturfaktoren sind durch das Verhältnis der Steifigkeiten zwischen dem wölb nachgiebigen und dem wölb starren Stabquerschnitt definiert, wobei die Schubsteifigkeiten für den wölb nachgiebigen Querschnitt, basierend auf den vorab bestimmten relativen 3D-Einzelverschiebungsfeldern der Freifeldlösung aller Einheitsverschiebungszustände, ermittelt werden. Auf Grund der vorliegenden 2D-Querschnittskinematik liegt für die zwei Querkräfte und für das Torsionsmoment insgesamt eine 3x3-Schubkorrekturfaktorenmatrix vor. Somit treten in Summe neun unabhängige Schubkorrekturfaktoren auf.

Entsprechend der Definition gilt, dass die Schubkorrekturfaktoren nur für konstante Schub- und Torsionsbeanspruchungsverhältnisse entlang der gesamten Stabachse volle Gültigkeit haben. Unter Anwendung der querschnittsabhängigen Schubkorrekturfaktoren lassen sich somit ausschließlich Stäbe mit konstanter Schub- und Torsionsbeanspruchung und unbehinderter Querschnittsverwölbung und Querschnittsverformung exakt berechnen. Die Schubkorrekturfaktoren weisen eine Abhängigkeit von der Querschnittsgeometrie und den Materialeigenschaften auf.

Für die Herleitung der Grundgleichungen dieser Arbeit treten die Schubkorrekturfaktoren nicht explizit in Erscheinung, da die Steifigkeitsglieder stets direkt auf Basis der erweiterten Querschnittskinematik ermittelt werden.

- **Wölbkrafttorsion bei Betrachtung als Teil des gekoppelten Gesamtstabproblems**

Die Wölbkrafttorsion wurde in der Vergangenheit meist als isoliertes Einzelstabproblem behandelt, was bei Verwendung der natürlichen Drehachse möglich ist. Wird als Drehachse eine beliebig gewählte Drehachse verwendet, entstehen, wie in dieser Arbeit gezeigt, bei reiner Torsionsbeanspruchung direkte Koppelungen zu allen Verformungszuständen. Neben dem von der Wahl der Drehachse unabhängigen

relativen 3D-Einzelverschiebungsfeld der Torsionsbeanspruchung treten bei Drehungen um beliebige Drehachsen zusätzliche kräftefreie Abscherzustände auf. Auf Grund des vorliegenden vollständig formulierten Gesamtproblems lassen sich die gegenseitigen Interaktionen darstellen.

## 9.2 Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die 3D-Gleichgewichtsgleichungen zur Beschreibung des Querschnittsverformungsverhaltens und des axialen Stabverformungsverhaltens für den Stab mit komplexem Querschnittsaufbau und verallgemeinerter Querschnittskinematik in vollständiger Form hergeleitet und in übersichtlicher Form dargestellt.

Über die Lösung des homogen belasteten Stabes für den isotropen Fall ohne Berücksichtigung der Querkontraktionseffekte hinaus sind die folgenden wesentlichen Punkte künftig zu diskutieren:

- **Ermittlung von partikulären Lösungen für Belastungen im Stabinneren des Stabkörpers**

Für Belastungen im Stabinneren, d. h. z. B. in Form von Flächenlasten auf der Staboberfläche und in Form von Volumenlasten innerhalb des Stabkörpers, mit konstanten oder beliebig veränderlichen Verläufen, sind partikuläre Lösungsverläufe zu ermitteln. Derzeit lassen sich solche Belastungszustände nur über den Umweg der Stabteilung zur Erlangung der prismatischen Eigenschaften mit den zugehörigen homogenen Belastungssituationen erreichen. Durch die Bestimmung von partikulären Stablösungen lässt sich der durch die Stabteilung entstehende Rechenaufwand verringern.

- **Elastische Bettung an der Stabmantelfläche**

Für die Definition von Verschiebungs- und Kräfte- und Momentenrandbedingungen an den Staboberflächen erscheint eine Erweiterung des vorhandenen Stabmodells um die elastischen Bettungen im Stabinneren sinnvoll.

- **Exakte Lösung für den dünnwandigen Querschnitt**

Für Stäbe mit einer 2D-Querschnittskinematik (dickwandige Querschnitte) liegt eine partielle 3D-Querschnittsdifferentialgleichung mit einer Abhängigkeit von beiden Querschnittskordinaten vor. Für Stäbe mit einer 1D-Querschnittskinematik (dünnwandige Querschnitte) liegt eine partielle 3D-Querschnittsdifferentialgleichung mit einer Abhängigkeit von nur einer Querschnittskordinate vor.

Für diese dünnwandigen Querschnitte lässt sich das 3D-Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystem in exakter analytischer Form lösen. Auf Grund der Reduktion der Differentialgleichungen auf eine partielle Differentialgleichung mit einer Abhängigkeit von einer Querschnittskordinate und der Stablängskordinate entsteht ein Differentialgleichungssystem, das mit einer komplexen Lösung lösbar ist. Dabei entstehen Eigenvektoren in Form von Sinus-Cosinus-Lösungsfunktionen, die den relativen Einzelverschiebungsfeldern der Abklinglösung entsprechen, sowie die zugehörigen Abklingzahlen in Form der Eigenwerte für das Abklingverhalten in Stablängsrichtung. Unter Verwendung der  $1D^+$  Kinematik lassen sich für den dünnwandigen Querschnitt singuläre Steifigkeitsmatrizen unterbinden.

- **Querschnittsprünge bei Stabzügen und damit zusammenhänge Stablängskoppelungen**

Stabzüge mit gerader Stabachse, bestehend aus einzelnen Stäben mit identem oder verschiedenem Querschnittsaufbau, sind im Sinne der Baustatik nachgiebig bzw. starr an benachbarten Stabendquerschnitten zu koppeln. Für das erarbeitete Stabmodell betrifft dies neben den klassischen Starrkörperfreiheitsgraden der Querschnittskinematik vor allem die relativen 3D-Verschiebungsfelder der Querschnittskinematik. Randstöreffekte, ausgehend von den lokalen Unstetigkeitsstellen, lassen sich in Form von in das Stabinnere hinein exponentiell abklingenden Lösungsfunktionen darstellen.

Durch die Koppelung in der Stablängsrichtung lassen sich beispielsweise Effekte aus Dickensprüngen von Flanschlamellen an Stahl-I-Profilen abbilden. Weitere Anwendungsfälle liegen bei hohen rechteckigen Brettschichtholzträgern mit Ausklinkungen im Auflagerbereich sowie mit Durchbrüchen im Trägerinneren.

- **Lösung des DGL-Systems unter Berücksichtigung der Querkontraktionseffekte**

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Darstellung der Lösung des Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems auf den isotropen Fall unter Vernachlässigung sämtlicher Querkontraktionseffekte erarbeitet. Wie in den Kapiteln 6 und 7 bereits erwähnt, treten unter Berücksichtigung der Querkontraktionseffekte Wechselwirkungen zwischen dem Balkenverformungszustand und dem echten Querschnittsverformungszustand auf.

Eine Lösung des in Kapitel 6 gezeigten vollständigen Gleichgewichtsdifferentialgleichungssystems zur Untersuchung der erwähnten Wechselwirkungen zwischen dem Balkenverformungszustand und dem echten Querschnittsverformungszustand wird empfohlen.

- **FE-Programmierung für die Implementierung in kommerziellen FE-Programmen**

Für die Verbreitung und die Verwendung des gezeigten erweiterten Stabmodells ist eine Implementierung in kommerziellen FE- und Stabwerksprogrammen anzustreben. Unter Verwendung dieses erweiterten Stabmodells lassen sich Stäbe mit stark reduziertem Rechenaufwand unter Ausnutzung aller Vorteile des klassischen Stabes mit beliebiger Stabgeometrie, jedoch bei exakter Erfüllung aller 3D-Randbedingungen, berechnen. Eine Längenabhängigkeit ist auf Grund der getroffenen Annahmen nicht mehr vorhanden. Für den Fall der Isotropie unter Vernachlässigung der Querkontraktionseffekte ist die Bestimmung der Stabsteifigkeitsmatrix in Kapitel 7 gezeigt worden.

- **Erweiterung auf materielle Nichtlinearität**

Die Erweiterung um nicht lineare materielle Eigenschaften stellt den notwendigen Schritt für die Berechnung von Traglastschnittgrößen dar. Dem kommt die bereits erarbeitete konsequent durchgezogene Separation des 3D-Verschiebungsfeldes in die globalen und in die lokalen 3D-Verschiebungsfelder entgegen.

- **Erweiterung auf geometrisch nicht lineare (große) Verformungen zur Betrachtung von Stabilitätsproblemen**

Für die Untersuchungen von lokalen Stabilitätsproblemen im Querschnitt sowie von globalen Stabilitätsproblemen von gesamten Stäben ist die Erweiterung der Stabsteifigkeitsmatrix um die Abtriebskomponenten vorzunehmen.

- **Verifikationsberechnungen für andere, meist approximative, Stabmodelle**

Bis dato wurden die vorhandenen Stabtheorien großteils untereinander verglichen, ohne eine exakte mechanische, in Stablängsrichtung analytische Referenzlösung mit in den Vergleich einzubeziehen. Unter Verwendung dieser neu etablierten erweiterten Stabtheorie lassen sich diese approximativen Stabtheorien mit einer exakten 3D-Lösung vergleichen und dieser gegenüberstellen.

- **Gekrümmte Stabachsen des Stabkörpers**

Im Rahmen dieser Arbeit wurden ausschließlich Stabgeometrien mit geraden Stabachsen untersucht. Gekrümmte Stabachsen lassen sich, im Sinne der geforderten strikten Prismaticität, durch Adaptierungen in der Beschreibung der 3D-Querschnittskinematik umsetzen und einer analytischen Lösung zuführen.

## 9.3 Literaturverzeichnis

### 9.3.1 Bücher

- Bartsch, H.-J. (1999). *Taschenbuch mathematischer Formeln* (18. verbesserte Auflage). Leipzig: Carl Hanser Verlag.
- Bathe, J.-M. (2002). *Finite-Elemente-Methoden* (2., vollständig neu bearbeitete und erweiterte Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Blass, H. J., Görlacher, R. (2002). Bemessung im Holzbau, Brettspertholz-Berechnungsgrundlagen. In: Ehlbeck, J. (Hrsg.). *Holzbau Kalender 2003* (S. 580 ff). Karlsruhe: Bruderverlag.
- Bogensperger, T. (2002). *Erweiterte Stabtheorie und der gevoutete Träger im Brückenbau*. Dissertation am Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke. Technische Universität Graz.
- Boyce, W. E. & DiPrima, R. C. (1995). *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung, Aufgaben, Lösungen*. Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.
- Bronson, R. & Costa, G. (2006). *Schaum's outlines of Differential Equations* (Third Edition). New York: McGraw-Hill.
- Camotim, D., Silvestre, N., Gonçalves, R. & Dinis, P. B. (2004). GBT-Based Analysis and Design of Thin-Walled Metal and FRP: Recent Developments. In: D. Dubina & D. Grecea (Editors). *Recent Advances and New Trends in Structural Design*. Colloquium dedicated to Professor Victor Gioncu's 70th Anniversary (S. 123-134). Timisoara: Editura Orizonturi Universitare.
- Farlow, S. J. (1993). *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. New York: Dover Publications Inc..
- Dankert, J. & Dankert, H. (2006). *Technische Mechanik – Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik* (4. Auflage). Wiesbaden: Teubner Verlag.
- Diebels, S. (2011). *Technische Mechanik: Elastomechanik*. Vorlesungsskriptum am Lehrstuhl für Technische Mechanik. Universität des Saarlandes.
- Göldner, H. (1979). *Lehrbuch der höheren Festigkeitslehre*. Band 1. Fachbuchverlag Leipzig.
- Gross, D., Hauger, W., Schnell, W. & Schröder, J. (1989). *Technische Mechanik 2. Elastomechanik*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Guggenberger, W. (2007). *Flächentragwerke*. Skriptum am Institut für Stahlbau und Flächentragwerke. Technische Universität Graz.
- Guggenberger, W. (2008). *Festigkeitslehre*. Skriptum am Institut für Stahlbau und Flächentragwerke. Technische Universität Graz.
- Guggenberger, W. & Moosbrugger, T. (2006). *Mechanics of Cross-Laminated Timber Plates under Uniaxial Bending*. WCTE 2006, 9th World Conference on Timber Engineering.

- Haakh, U. (2004). *Die Erweiterung der VTB für allgemeine dünnwandige Querschnitte sowie die Lösung des Gleichungssystems mittels Potenzreihen*. Dissertation im Fachbereich für Bauingenieurwesen und Geodäsie. Technische Universität Darmstadt.
- Hanf, M. (1989). *Die geschlossene Lösung der linearen Differentialgleichungssysteme der Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie mit einer Anwendung auf die Ermittlung plastischer Grenzlasten*. Dissertation im Fachbereich 14 – Konstruktiver Ingenieurbau. Technische Hochschule Darmstadt.
- Hahn, H. G. (1985). *Elastizitätstheorie*. Stuttgart: B. G. Teubner.
- Hofmann, T. J. (1992). *Beitrag zur erweiterten Stabtheorie*. Dissertation am Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Jakobs, A. (2005). *Zur Berechnung von Brettlagenholz mit starrem und nachgiebigem Verbund unter plattenartiger Belastung*. Dissertation an der Professur Konstruktive Gestaltung und Holzbau. Universität der Bundeswehr München.
- Konrad, A. (2012). *Festigkeitslehre – 7. Torsion gerader Stäbe*. Skriptum FH München. Verfügbar unter: [ftp://www.bauwesen.fhmuenchen.de/Bauwesen/Konrad/Baustatik\\_1/Festigkeitslehre/kap07.pdf](ftp://www.bauwesen.fhmuenchen.de/Bauwesen/Konrad/Baustatik_1/Festigkeitslehre/kap07.pdf) [02.07.2012].
- Koschade, R. & Hupe, G. (2000-2006). *Von Galileos Biegetheorie zur Sandwichtheorie*. Verfügbar unter: <http://www.sandwichbau.com/German/library/biegetheorie.htm> [23.07.2011].
- Kraus, M. (2005). *Computerorientierte Berechnungsmethoden für beliebige Stabquerschnitte des Stahlbaues*. Dissertation an der Fakultät für Bauingenieurwesen. Ruhr-Universität Bochum.
- Lekhnitskii, S. G. (1981). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body* (English translation). Moscow: Mir Publisher.
- Linder, C. (2001). *Theorie der allgemeinen Rotationsschale und Entwicklung eines Kreisringträger-Analogiemodells zur Berechnung axialsymmetrischer Biege- und Randstörungen*, Diplomarbeit am Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerk. Technische Universität Graz.
- Mang, H. & Hofstetter, G. (2004). *Festigkeitslehre* (2., aktualisierte Auflage). Wien, New York: Springer.
- Möller, R. (1982). *Zur Berechnung prismatischer Strukturen mit beliebig nicht formtreuen Querschnitten*. Dissertation am Institut für Statik. Technische Hochschule Darmstadt.
- Moosbrugger, T. & Guggenberger, W. (2008). *Multi-layer composite timber beams: Kinematical modeling and analytical solutions*. IASS-2008, Ithaca.
- Pilkey, W. D. & Wunderlich, W. (1994). *Mechanics of Structures – Variational and Computational Methods*. Florida: CRC Press Inc..
- Pischl, R. (1966). *Die Berechnung zusammengesetzter hölzerner Biegeträger auf Grund der elastischen Verbundtheorie*. Dissertation. Technische Hochschule Graz.
- Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells – Theory and Analysis*. (2. Auflage). Florida: CRC Press LLC.
- Rill, G. (2010). *Technische Mechanik II*. Vorlesungsskriptum. Hochschule Regensburg.

- 
- Salzgeber, G. (2000). *Nichtlineare Berechnungen von räumlichen Stabtragwerken aus Stahl*. Dissertation am Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz.
- Sattler, K. (1974). *Lehrbuch der Statik. Theorie und Anwendung*. Zweiter Band, Teil A. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Schardt, R. (1989). *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Scheid, F. (1988). *Schaum's outlines of Numerical Analysis* (Second Edition). New York: McGraw-Hill.
- Silvestre, N. & Camotim, D. (2004). Generalised beam theory to analyse the vibration behaviour of orthotropic thin-walled members. In: *Thin-walled structures: advances in research, design and manufacturing technology. ICTWS 2004, Loughborough, 22.-24.06.2004* (S. 919-926). Bristol: Institute of Physics Publishing.
- Szabo, I. (1987). *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen* (3., korrigierte und erweiterte Auflage). Basel: Birkhäuser Verlag.
- Timoshenko, S. P., Goodier, N. J. (1970). *Theory of Elasticity* (Third Edition). Auckland: McGraw-Hill Book Company.
- Wagner, H. (1929). *Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Festschrift 25 Jahre TU Danzig*. Danzig.
- Wagner, W. & Erhof, G. (1977). *Praktische Baustatik 2* (12., neubearb. und erw. Auflage). Stuttgart: G. B. Teubner.
- Wlassov, W. S. (1958). *Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik* (deutsche Übersetzung). Berlin: Akademie-Verlag.
- Wlassov, W. S. (1964). *Dünnwandige elastische Stäbe Band I* (aus dem russischen übersetzt). Berlin: VEB Verlag für Bauwesen.
- Wlassov, W. S. (1965). *Dünnwandige elastische Stäbe Band II* (aus dem russischen übersetzt). Berlin: VEB Verlag für Bauwesen.
- Scholz, A. (2004). *Ein Beitrag zur Berechnung von Flächentragwerken aus Holz*. Dissertation am Institut für Baustoffe und Konstruktion, Fachbereich Holzbau. Technische Universität München.
- Schickhofer, G., Bogensperger, T., Moosbrugger, T. (Hrg., 2010). *BSPhandbuch – Holz-Massivbauweise in Brettsperrholz* (2. Auflage). Verlag der Technischen Universität Graz.
- Zachmann, D. W. & DuChateau, P. (1986). *Schaum's outlines of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.
- Zotter, J. (2007). *Automatisierte Modellbildung und Berechnung komplexer Metallsilikonstruktionen*. Dissertation am Institut für Stahlbau und Flächentragwerke. Technische Universität Graz.

### 9.3.2 Artikel

- Altenbach, J. (1986). Theoretische Ableitung und Bewertung unterschiedlicher quasi-eindimensionaler Modelle für die statische Strukturanalyse dünnwandiger komplexer Konstruktionen. *Technische Mechanik* 7(1986)Heft 3, 52-64.
- Baláz, I. (1999). Dünnwandige Stäbe mit offenem oder geschlossenem deformierbarem Querschnitt. *Stahlbau*, 68(1), 70-77.
- Basaglia, C., Camotim, D. & Silvestre, N. (2007). Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT. *Thin-Walled Structures* 46, 2008, 79-101.
- Bornscheuer, F. W. (1952). Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. *Der Stahlbau*, 21(1), 1-9.
- Cowper, G. R. (1966). The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theorie. *Journal of Applied Mechanics*, June 1966, 335-340.
- Cowper, G. R. (1968). On the Accuracy of Timoshenko's Beam Theorie. *Journal of the Engineering Mechanics. Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 94(EM6), Dezember 1968, 1447-1453.
- Flügge, W. & Marquerre, K. (1950). Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben. *Ingenieur-Archiv*, XVIII. Band, 1950, 23-38.
- Davies, J. M. & Leach, P. (1994). First Order Generalised Beam Theorie. *J. Construct. Steel Research* 31, 1994, 187-220.
- Davies, J. M., Leach, P. & Heinz, D. (1994). Second Order Generalised Beam Theorie. *J. Construct. Steel Research*, 31, 1994, 221-241.
- Dinis, P. B., Camotim, D. & Silvestre, N. (2005). GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily 'branched' open cross-sections. *Thin-Walled Structures*, 44, 2006, 20-38.
- Gruttmann, F. & Wagner, W. (2000). St. Venantsche Torsion prismatischer Stäbe mit elastoplastischem Werkstoffverhalten. *Der Bauingenieur*, 75( 2), 53-59.
- Gruttmann, F. & Wagner, W. (2001). Ein Weggrößenverfahren zur Berechnung von Querkraftschub in dünnwandigen Querschnitten. *Der Bauingenieur*, 76(10), 474-480.
- Gruttmann, F., Sauer, R., & Wagner, W. (1999). Shear Stresses in Prismatic Beams with arbitrary cross-section. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 45, 1999, 865-889.
- Hanf, M. (2010). Eine Erweiterung der verallgemeinerten technischen Biegetheorie zur Erfassung von Scheibenschubverzerrungen. *Stahlbau*, 79(2), 109-125.
- Heilig, R. (1961a). Beitrag zur Theorie der Kastenstäger beliebiger Querschnittsformen. *Stahlbau*, 30(11), 333-349.
- Heilig, R. (1961b). Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenen Profil. *Stahlbau*, 30(4), 97-103.

- 
- Kozcyk, S. (1994). Wölbkrafttorsion und Querkraftschubspannungen in einem Balken bei FE-Diskretisierung seines Querschnittes. *Technische Mechanik*, 14(1), 3-14.
- Kreuzinger, H. (1974). Der Einfluss der Querverformung auf die Berechnung gerader dünnwandiger Stäbe. *Stahlbau*, 43(2), 46-52.
- Kreuzinger, H. (1999). Platten, Scheiben und Schalen. Ein Berechnungsmodell für gängige Statikprogramme. *Bauen mit Holz*, 1(1999), 34-39.
- Mindlin, R. D. (1951). Influence of Rotatory Inertia and Shear of Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME*, 18, 31-38.
- Reissner, E. (1944). On the Theory Bending of Elastic Plates. *Journal of Mathematical Physics*, 23, 184-191.
- Reissner, E. (1945). The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12, 67-77.
- Roik, K. & Sedlacek, G. (1966). Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubspannungen – Analogiebetrachtung zur Berechnung des querbelasteten Zugstabes. *Stahlbau*, 35(2), 43-52.
- Roik, K. & Sedlacek, G.; Erweiterung der technischen Biege- und Verdrehtheorie unter Berücksichtigung von Schubverformungen. *Die Bautechnik*, 1, 1970, 20-32.
- Salzgeber, G. (1999). Modellierung von Konstruktionsdetails in räumlichen Stabberechnungen mittel geometrischer Zwangsgleichungen. *Baustatik-Baupraxis*, 7, 1999.
- Sapountzakis, E. J. & Mokos, V. G. (2003). Warping shear stresses in nonuniform torsion of composite bars by BEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192, 2003, 4337-4353.
- Sapountzakis, E. J. & Mokos, V. G. (2007). 3-D beam element of composite cross section including warping and shear deformation effects. *Computers and Structures*, 85, 2007, 102-116.
- Schardt R. (1966). Eine Erweiterung der technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer Faltwerke. *Stahlbau*, 35(6), 161-171.
- Sedlacek, G. (1966). Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges für prismatische Stäbe mit dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Profilverformung. *Fortschrittsberichte VDI Zeitschrift, Reihe 4, Nr. 8*: Düsseldorf, VDI-Verlag.
- Sedlacek, G. (1971). Berechnung prismatischer Faltwerke nach der erweiterten technischen Biegetheorie. *Der Bauingenieur*, 46(11), 405-409.
- Shuguang, Li. (2003). The centre of twist for a prismatic bar under free torsion. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 31/3, 226-232.
- Silvestre, N. & Camotim D. (2002a). First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, 40, 2002, 755-789.
- Silvestre, N. & Camotim D. (2002b). Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, 40, 2002, 791-820.

- Silvestre, N. & Camotim, D. (2003). Non-linear generalised beam theory for coldformed steel members. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 3(4), 461-490.
- Silvestre, N. & Camotim, D. (2004b). Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members. Part I: Derivation. *Thin-Wall Structures*, 42(11), 1567-1597.
- Silvestre, N. & Camotim, D. (2004c). Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members. Part II: Validation and Application. *Thin-Wall Structures*, 42(11), 1599-1629.
- Strehl, C. (2010). Verallgemeinerte technische Biegetheorie – Einordnung in die Entwicklungsgeschichte statischer Berechnungsmethoden. *Stahlbau*, 79(2), 106-108.
- Wagner, W. & Gruttmann, F. (2003). Ein einheitliches Modell zur Berechnung der Schubspannungen aus St. Venant'scher Torsion in beliebigen Querschnitten prismatischer Stäbe. *Technische Mechanik*, 23(2-4), 251-264.
- Weber, C. (1926). Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 6(2), 85-87.

### 9.3.3 Programmdokumentationen

Wolfram Mathematica 7 Documentation Centre. (1988-2009).

Matlab Version 7.7.0.471 (R2008b) Help. 2008.

Abaqus 6.10 Online Documentation. (2010). Generated: Wed April 28, 2010 at 12:31:09, Build ID: 2010\_04\_27-15.17.36 37133. © Dassault Systèmes.

# Anhang A

## Integralidentitäten

### A.1 Definitionen für die Differentialoperator-Matrixnotation

Die der gesamten Arbeit zugrunde gelegte Matrixschreibweise (Matrixnotation) wird im Folgenden in aller Kürze erläutert. Ausgehend von den Definitionen der Darstellung von Vektoren und Matrizen wird im Speziellen auf die für die Abhandlung essentielle Differentialoperatorschreibweise eingegangen.

- **Skalare Größen**

Skalare Größen werden in dieser Arbeit mit regulären Klein- oder Großbuchstaben bezeichnet.

- **Vektorielle Größen (Vektoren)**

Vektoren werden in dieser Arbeit mit fett gedruckten Kleinbuchstaben bezeichnet, wobei keine Unterscheidung für konstante Vektoren oder für Vektorfelder getroffen wird.

**a** stellt beispielsweise ein 3D-Vektorfeld mit drei Einzelkomponenten dar, die allesamt eine Abhängigkeit von den drei Raumkoordinaten zeigen.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_1(X_1;X_2;X_3) \\ A_2(X_1;X_2;X_3) \\ A_3(X_1;X_2;X_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{A-1}$$

**v** bezeichnet beispielsweise den Normalenvektor auf die Staboberfläche für einen bestimmten Punkt. Die Vektorkomponenten stellen dabei konstante Größen dar.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\alpha_1) \\ \text{Cos}(\alpha_2) \\ \text{Cos}(\alpha_3) \end{bmatrix}_i \tag{A-2}$$

- **Matrizen**

Matrizen werden in dieser Arbeit mit fett gedruckten Großbuchstaben bezeichnet, wobei keine Unterscheidung für Matrizen mit konstanten oder funktionalen Einträgen getroffen wird.

- **Differentialoperator am Beispiel der Divergenz**

Als Differentialoperator wird in diesem Zusammenhang eine Ableitungsvorschrift nach einer beliebigen Raumkoordinate verstanden. Im Sinne der Differentialoperatorschreibweise sind Differentialoperatoren auch als Komponenten von Vektoren und Matrizen verwendbar. Die Differentialoperatoren sind unter voller Gültigkeit der Rechenregeln der Matrizenrechnung zu behandeln und auf die betreffenden Argumente sinngemäß anzuwenden. Zum Beispiel gilt für die Divergenz nach **a**:

$$\text{diva} = (\text{grad}^T) \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \frac{\partial A_2}{\partial X_2} + \frac{\partial A_3}{\partial X_3} \tag{A-3}$$

## A.2 Überführung eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral

### A.2.1 Grundlagen

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial X_i} dV = \iiint_V \frac{\partial A}{\partial X_i} dX_1 dX_2 dX_3 = \oint_{\Gamma} A \cdot N_i d\Gamma \quad [\text{A-4.a}]$$

$$\int_V \text{grad}(\mathbf{a}) dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial \mathbf{X}} dV = \oint_{\Gamma} A \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad [\text{A-4.b}]$$

$$\int_V \text{div}(\mathbf{a}) dV = \int_V \frac{\partial A_i}{\partial X_i} dV = \oint_{\Gamma} \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad [\text{A-4.c}]$$

### A.2.2 Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes auf die Gleichgewichtsgleichung

#### Querschnittsintegral für die Ableitungen der Schubspannungen

$$\int_A \left( \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial X_3} \right) dA = \int_A \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} dA + \int_A \frac{\partial S_{13}}{\partial X_3} dA \quad [\text{A-5.a}]$$

#### Querschnittsintegral für die Schubspannungen $S_{12}$

$$\int_A \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} dA = \int_{X_3} \int_{X_2} \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} dX_2 dX_3 = \oint \underbrace{S_{12}|_{re}^{li}}_{\boxed{S_{12,li}} - \boxed{S_{12,re}}} \cdot \frac{\boxed{\text{Cos}(\alpha_{li}) \cdot dS_{li}}}{\boxed{-\text{Cos}(\alpha_{re}) \cdot dS_{re}}} \quad [\text{A-5.b}]$$

$$\int_A \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} dA = \oint_{\Gamma} S_{12} \cdot \text{Cos}(\alpha) \cdot d\Gamma \quad [\text{A-5.c}]$$

#### Querschnittsintegral für die Schubspannungen $S_{13}$

$$\int_A \frac{\partial S_{13}}{\partial X_3} dA = \int_{X_2} \int_{X_3} \frac{\partial S_{13}}{\partial X_3} dX_3 dX_2 = \oint \underbrace{S_{13}|_o^u}_{\boxed{S_{13,u}} - \boxed{S_{13,o}}} \cdot \frac{\boxed{\text{Sin}(\alpha_u) \cdot dS_u}}{\boxed{-\text{Sin}(\alpha_o) \cdot dS_o}} \quad [\text{A-5.d}]$$

$$\int_A \frac{\partial S_{13}}{\partial X_3} dA = \oint_{\Gamma} S_{13} \cdot \text{Sin}(\alpha) \cdot d\Gamma \quad [\text{A-5.e}]$$

Aus der Zusammenfassung der Einzelteile ergibt sich das gesamte äquivalente Randintegral

$$\int_A \left( \frac{\partial S_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial X_3} \right) dA = \oint_{\Gamma} (S_{12} \cdot \cos(\alpha) + S_{13} \cdot \sin(\alpha)) d\Gamma = \oint_{\Gamma} \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad [A-5.f]$$

mit  $\mathbf{s}^T = \begin{bmatrix} S_{12} & S_{13} \end{bmatrix}$        $\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix}$

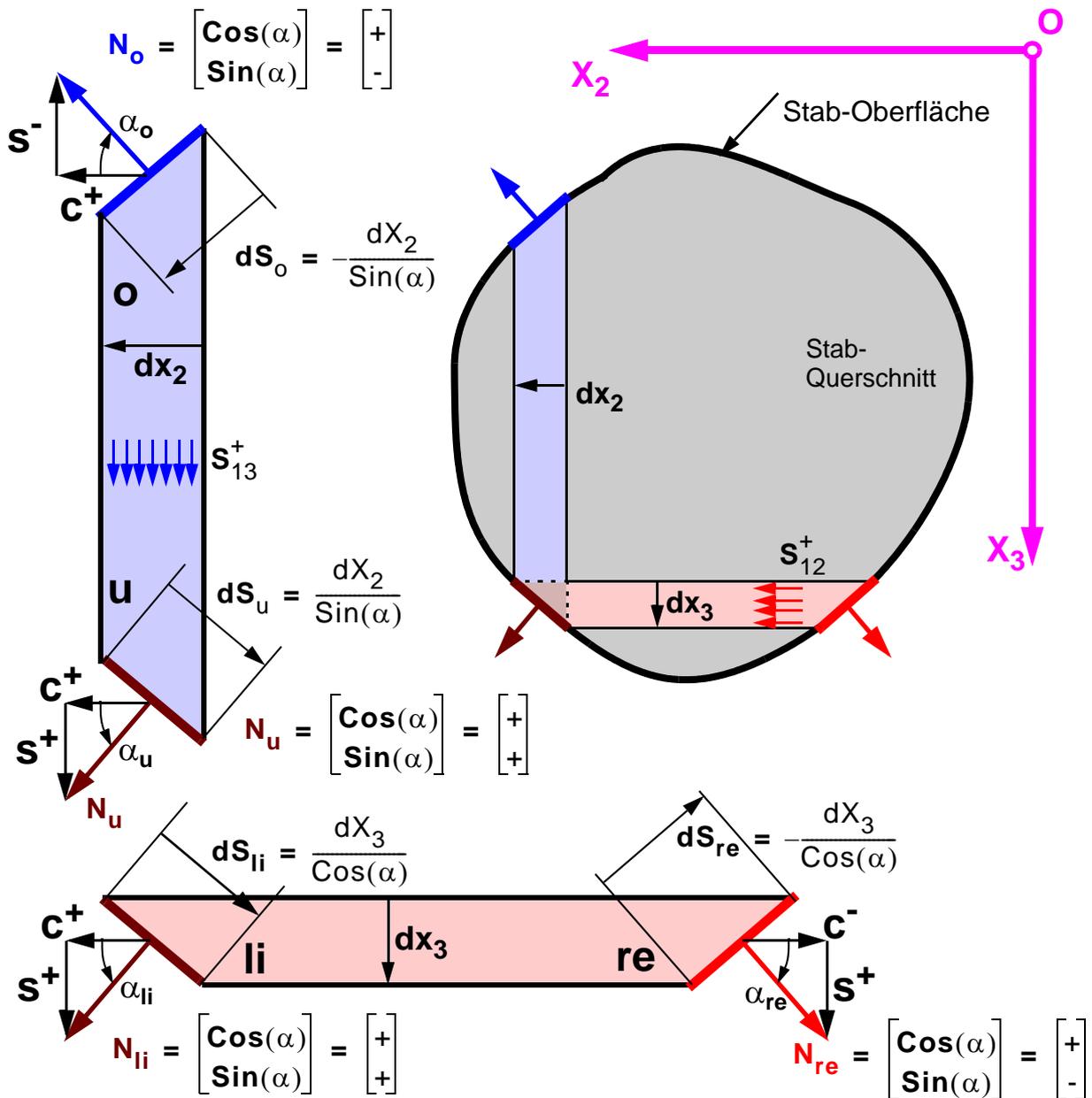


Abb. A.1: Gauß'sches Randintegral – Definitionen: Winkel definiert durch den Normalenvektor

### A.3 Partielle Integration

Die Rechenregeln der Differentialrechnung für die Ableitung eines Produktes sind sinngemäß auch für die partielle Integration anzuwenden.

#### Anwendung der Rechenregeln der Differentialrechnung auf die partielle Integration

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad \int u' \cdot v \cdot dX = -\int u \cdot v' \cdot dX + \int (u \cdot v)' \cdot dX \quad [\text{A-6}]$$

Durch die partielle Integration wechselt die Ableitungsvorschrift auf das zweite beteiligte Integralargument und es entsteht ein zusätzlicher Randterm.

Für das folgende zusätzlich auftretende abgeleitete Integralargument  $\hat{f}(X) = u \cdot v$  gilt:

$$\int_A^E \hat{f}'(X) \cdot dX = \int_A^E \frac{\partial}{\partial X} \hat{f}(X) \cdot dX = \hat{f}(X) \Big|_A^E = \hat{f}_E - \hat{f}_A \quad [\text{A-7.a}]$$

$$\int_A^E (u \cdot v)' \cdot dX = (u \cdot v) \Big|_A^E \quad [\text{A-7.b}]$$

Der Zusammenhang zwischen den Funktionswerten an den Integrationsgrenzen der Funktion  $\hat{f}(X) = u \cdot v$  kann wie folgt dargestellt werden:

$$\hat{f}_E = \hat{f}_A + \int_A^E \hat{f}'(X) \cdot dX \quad [\text{A-7.c}]$$

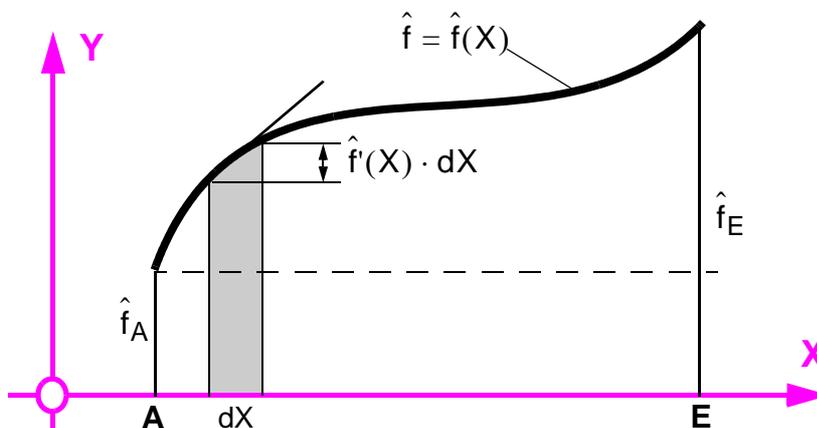


Abb.A.1: Zusammenhang der Funktion  $\hat{f}(X)$  mit den Funktionswerten an den Integrationsrändern

Wird die oben genannte Beziehung nach Glg. A-4.a auf das folgende Argument angewendet, gilt:

$$\int_V \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial X_i} \cdot dV = \int_V \left( \frac{\partial}{\partial X_i} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial X_i} \cdot \mathbf{A} \right) \cdot dV = \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_i \cdot A \cdot d\Gamma - \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial X_i} \cdot \mathbf{A} \cdot dV \quad [\text{A-8}]$$



# Anhang B

Detaillierte  
Herleitungen für die  
GLG-Gleichungen

## B.1 Einleitung

Der Übersichtlichkeit halber wird auf die detaillierte Erläuterung der Rechenschritte in 6.5.4 bis 6.5.6 verzichtet. In den Punkten B.2 bis B.5 werden die Herleitungsschritte für die Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen für die originale und die umgewandelte Integraldarstellung im Detail gezeigt. Die Aufbereitung erfolgt sowohl für die Querschnittsgleichgewichtsgleichungen als auch für die Gleichgewichtsgleichungen an den Staboberflächen in Form der Stabmantelfläche und der Stabendquerschnitte.

Als Grundlage für die detaillierte Herleitung der Bestandteile der Gleichgewichtsgleichungen werden die in den obigen Kapiteln hergeleiteten Beziehungen für die Differentialoperatormatrizen, für die Querschnittsinterpolationsmatrizen und für die 3D-Spannungen vorausgesetzt.

Die durch die Zusammenfassung der Teilergebnisse resultierenden Gleichgewichtsgleichungen werden an dieser Stelle nicht dargestellt. Die zusammengefasste Darstellung der resultierenden Gleichgewichtsgleichungen erfolgt direkt in Kapitel 6 im Rahmen der Herleitung dieser.

Die detaillierten Herleitungen der Teilergebnisse der Gleichgewichtsgleichungen werden für die folgenden Problemstellungen gezeigt:

- **$\Omega$ -Problem in originaler Integralform**
- **$\Omega$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform**
- **0-Problem in umgewandelter Integralform**
- **$\Psi$ -Problem in umgewandelter Integralform**

## B.2 $\Omega$ -Problem in originaler Integralform

In diesem Abschnitt werden die detaillierten Rechenschritte für die Aufbereitung der Gleichgewichtsgleichungen aus Punkt 6.5.4.1 für das  $\Omega$ -Problem in originaler Darstellung gezeigt.

### B.2.1 Aufbereitung von $\mathbf{G}_{\Omega, u}$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u} = \mathbf{B}_{3D}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} = \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} + \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{s}_{3D} = \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} + \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \quad [\text{B-1}]$$

Für die 3D-Spannungen gilt nach Glg. 6-33.i und Glg. 6-33.j die folgende Darstellung in allgemeiner Form:

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \right) \quad [\text{B-2.a}]$$

$$\mathbf{s}_{3D, \perp} = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \quad [\text{B-2.b}]$$

Werden die dargestellten 3D-Spannungen in die Gleichgewichtsgleichungen eingearbeitet, treten die Systemunbekannten in Form der relativen 3D-Verschiebungsfelder  $\Omega$  und der globalen Starrkörperverzerrungen  $\mathbf{e}_0$  in Erscheinung.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\Omega, u} = \frac{\partial}{\partial X_1} & \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \right) \right) \\ & + \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \left( \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \right) \right) \end{aligned} \quad [\text{B-2.c}]$$

Bei genauer Betrachtung des obigen Ausdrucks ist erkennbar, dass sowohl Anteile mit Abhängigkeit von den Starrkörperverzerrungen  $\mathbf{e}_0$  als auch Anteile mit Abhängigkeit von den relativen 3D-Verschiebungsfeldern  $\Omega$  in Erscheinung treten.

Die relativen 3D-Verschiebungsfeldern  $\Omega$  stellen im Rahmen der Lösung der Querschnittsdifferentialgleichung die unbekannt Systemgrößen dar. Aus diesem Grund werden die den relativen 3D-Verschiebungsfeldern  $\Omega$  zugeordneten Gleichungsbestandteile im Folgenden als Systemanteil bezeichnet.

Alle Vorfaktoren der Gleichgewichtsgleichung mit einer Abhängigkeit von den Starrkörperverzerrungen  $\mathbf{e}_0$  stellen im Rahmen der Lösung der Querschnittsdifferentialgleichung Lastterme dar. Aus diesem Grund werden alle den Starrkörperverzerrungen  $\mathbf{e}_0$  zugeordneten Gleichungsbestandteile im Folgenden als Lastterme bezeichnet.

Durch die strikte Trennung der beiden Anteile lässt sich die Gleichgewichtsgleichung wie folgt darstellen:

$$\mathbf{G}_{\Omega, u} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \Omega} + \mathbf{G}_{\Omega, u, q} \quad [\text{B-2.d}]$$

Unter Beachtung der oben genannten Kriterien gilt für den Systemanteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\Omega, u, \Omega} &= \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi' + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi'') \cdot \Omega \\ &+ \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \end{aligned} \quad [\text{B-2.e}]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\Omega, u, \Omega} &= \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \\ &+ \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} + \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \right) \cdot \Psi' + \\ &+ \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi'' \end{aligned} \right\} \cdot \Omega \end{aligned} \quad [\text{B-2.f}]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \Omega} = \left\{ \mathbf{K}_{\Omega, \Psi} \cdot \Psi + \mathbf{K}_{\Omega, \Psi'} \cdot \Psi' + \mathbf{K}_{\Omega, \Psi''} \cdot \Psi'' \right\} \cdot \Omega \quad [\text{B-2.g}]$$

Die einzelnen Vorfaktormatrizen für den Systemanteil werden dabei getrennt nach den Ableitungsordnungen der Wölbamplituden dargestellt. Dadurch entstehen die folgenden drei Vorfaktormatrizen:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \Psi} = \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \quad [\text{B-2.h}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, \Psi'} = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} + \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \quad [\text{B-2.i}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, \Psi''} = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \quad [\text{B-2.j}]$$

Unter Beachtung der oben genannten Kriterien gilt für den Lastanteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\Omega, u, q} &= \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0' \\ &+ \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \end{aligned} \quad [\text{B-2.k}]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, q} = \mathbf{F}_{\Omega, e_0} \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{F}_{\Omega, e_0'} \cdot \mathbf{e}_0' \quad [\text{B-2.l}]$$

Die einzelnen Vorfaktormatrizen für den Lastanteil werden dabei getrennt nach den Ableitungsordnungen des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters dargestellt. Dadurch entstehen die folgenden beiden Vorfaktormatrizen:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e_0} = \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [\text{B-2.m}]$$

$$\mathbf{F}_{\Omega, e_0'} = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [\text{B-2.n}]$$

### B.2.2 Aufbereitung von $\mathbf{G}_{\Omega, q, \gamma}$

Der Anteil an den Gleichgewichtsgleichungen aus den äußeren Volumenlasten lässt sich in einfacher Weise direkt darstellen, wobei entsprechend der Darstellung des Verschiebungsansatzes auch für die Belastungen die Produktdarstellung verwendet wird. Mit der „Tilde“ gekennzeichnete Anteile weisen somit nur mehr eine Abhängigkeit von den Querschnittskordinaten auf.

$$\mathbf{G}_{\Omega, q, \gamma} = \mathbf{q}_{3D, \gamma} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \gamma} \cdot \Psi_q \quad [\text{B-3.a}]$$

Für die Darstellung der Belastungsverteilung über den Stabquerschnitt mit einer Abhängigkeit von den Querschnittskordinaten gilt:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{3D, \gamma} = \begin{bmatrix} q_{3D, 1} \\ q_{3D, 2} \\ q_{3D, 3} \end{bmatrix} \cdot \gamma \quad [\text{B-3.b}]$$

### B.2.3 Aufbereitung von $\mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma}$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma} = -\mathbf{s}_v = -\mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \quad [\text{B-4.a}]$$

Werden die 3D-Spannungen nach Glg. 6-33.i und Glg. 6-33.j eingearbeitet, treten die Systemunbekannten in Form der relativen 3D-Verschiebungsfelder  $\Omega$  in Erscheinung.

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \right) \quad [\text{B-4.b}]$$

Die für die Querschnittsgleichgewichtsgleichungen durchgeführte Aufspaltung in den System- und in den Lastanteil wird für die Oberflächenrandbedingungen in gleicher Weise durchgeführt.

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma, \Omega} + \mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma, q} \quad [\text{B-4.c}]$$

Unter Beachtung der oben genannten Kriterien gilt für den Systemanteil:

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma, \Omega} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \quad [\text{B-4.d}]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \Gamma, \Omega} = \left\{ \mathbf{K}_{\Omega, \Psi, \Gamma} \cdot \Psi + \mathbf{K}_{\Omega, \Psi', \Gamma} \cdot \Psi' \right\} \cdot \Omega \quad [\text{B-4.e}]$$

Die einzelnen Vorfaktormatrizen für den Systemanteil werden dabei getrennt nach den Ableitungsordnungen der Wölbamplituden dargestellt. Dadurch entstehen die folgenden beiden Vorfaktormatrizen:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \Gamma} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \quad [\text{B-4.f}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \Gamma} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \quad [\text{B-4.g}]$$

Unter Beachtung der oben genannten Kriterien gilt für den Lastanteil:

$$\mathbf{G}_{\Omega, \mathbf{u}, \Gamma, \mathbf{q}} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{F}_{\Omega, \mathbf{e}_0, \Gamma} \cdot \mathbf{e}_0 \quad [\text{B-4.h}]$$

Die einzelnen Vorfaktormatrizen für den Lastanteil werden dabei getrennt nach den Ableitungsordnungen des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters dargestellt. Dadurch entsteht die folgende Vorfaktormatrix:

$$\mathbf{F}_{\Omega, \mathbf{e}_0, \Gamma} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [\text{B-4.i}]$$

#### B.2.4 Aufbereitung von $\mathbf{G}_{\Omega, \mathbf{q}, \Gamma}$

Für die Darstellung der Oberflächenlasten auf der Stabmantelfläche wird gleich den Volumenlasten ebenfalls die Produktdarstellung verwendet.

$$\mathbf{G}_{\Omega, \mathbf{q}, \Gamma} = \mathbf{q}_{3D, \Gamma} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-5.a}]$$

Für die Darstellung der Belastungsverteilung entlang der Querschnittsberandung des Querschnitts gilt:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} = \begin{bmatrix} q_{1N} \\ q_{2N} \\ q_{3N} \end{bmatrix}_{\Gamma} \quad [\text{B-5.b}]$$

#### B.2.5 Aufbereitung von $\mathbf{G}_{\Omega, \mathbf{u}, \frac{A}{E}}$

$$\mathbf{G}_{\Omega, \mathbf{u}, \frac{A}{E}} = \pm \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} = -N_1 \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} \quad [\text{B-6.a}]$$

Werden die 3D-Spannungen nach Glg. 6-33.i und Glg. 6-33.j eingearbeitet, treten die Systemunbekannten in Form der relativen 3D-Verschiebungsfelder  $\Omega$  in Erscheinung.

$$\mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, \frac{A}{E}} \quad [\text{B-6.b}]$$

$$\mathbf{s}_{3D, \frac{A}{E}} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + \left( \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \psi_{\frac{A}{E}} + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}} \right) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\frac{A}{E}} \right) \quad [\text{B-6.c}]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} &= -N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, \frac{A}{E}} \\ &= -N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + \left( \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \psi_{\frac{A}{E}} + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}} \right) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\frac{A}{E}} \right) \end{aligned} \quad [\text{B-6.d}]$$

Die für die Querschnittsgleichgewichtsgleichungen durchgeführte Aufspaltung in den System- und in den Lastanteil wird für die Oberflächenrandbedingungen an den Stabendquerschnitten in gleicher Weise vorgenommen.

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} = \mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, \Omega} + \mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} \quad [\text{B-6.e}]$$

Unter Beachtung der oben genannten Kriterien gilt für den Systemanteil:

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, \Omega} = -N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \psi_{\frac{A}{E}} + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}} \right) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\frac{A}{E}} \quad [\text{B-6.f}]$$

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, \Omega} = \left\{ \mathbf{K}_{\Omega, \psi, \frac{A}{E}} \cdot \psi_{\frac{A}{E}} + \mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}} \right\} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\frac{A}{E}} \quad [\text{B-6.g}]$$

Die einzelnen Vorfaktormatrizen für den Systemanteil werden dabei getrennt nach den Ableitungsordnungen der Wölbamplituden dargestellt. Dadurch entstehen die folgenden beiden Vorfaktormatrizen:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \frac{A}{E}} = -N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \quad [\text{B-6.h}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} = -N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \quad [\text{B-6.i}]$$

Unter Beachtung der oben genannten Kriterien gilt für den Lastanteil:

$$\mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} = -N_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} = \mathbf{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} \quad [\text{B-6.j}]$$

Die einzelnen Vorfaktormatrizen für den Lastanteil werden dabei getrennt nach den Ableitungsordnungen des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters dargestellt. Dadurch entsteht die folgende Vorfaktormatrix:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} = -\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [\text{B-6.k}]$$

### B.2.6 Aufbereitung von $\mathbf{G}_{\Omega, q, \frac{A}{E}}$

Für die Darstellung der Oberflächenlasten auf den Stabendquerschnitten wird gleich den Volumenlasten ebenfalls die Produktdarstellung verwendet, wobei der Längsrichtungsverlauf dabei auf die Amplitudenwerte in den Stabendquerschnitten reduziert ist.

$$\mathbf{G}_{\Omega, q, \frac{A}{E}} = \mathbf{q}_{3D, \Gamma, \frac{A}{E}} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \Psi_{q, \frac{A}{E}} \quad [\text{B-7.a}]$$

Für die Darstellung der Belastungsverteilung über den Querschnitt gilt:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} = \begin{bmatrix} q_{1N} \\ q_{2N} \\ q_{3N} \end{bmatrix}_{\Gamma} \quad [\text{B-7.b}]$$

### B.3 $\Omega$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform

In diesem Abschnitt werden die detaillierten Rechenschritte für die Aufbereitung der Gleichgewichtsgleichungen aus Punkt 6.5.4.2 für das  $\Omega$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform gezeigt.

#### B.3.1 Aufbereitung von $\delta\tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u}$

$$\delta\tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u} = \int_A \delta\boldsymbol{\Omega}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} - \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \delta\boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA \quad [\text{B-8.a}]$$

Für die 3D-Spannungen gilt nach Glg. 6-33.i und Glg. 6-33.j die folgende Darstellung in allgemeiner Darstellung:

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \boldsymbol{\Omega} \right) \quad [\text{B-8.b}]$$

$$\mathbf{s}_{3D, \perp} = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \quad [\text{B-8.c}]$$

Werden die dargestellten 3D-Spannungen in die Gleichgewichtsgleichungen eingearbeitet, treten die Abhängigkeiten von den Systemunbekannten in Form der relativen 3D-Verschiebungsfelder  $\boldsymbol{\Omega}$  und in Form der Starrkörperverzerrungen  $\mathbf{e}_0$  in Erscheinung.

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u} &= \int_A \delta\boldsymbol{\Omega}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA - \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \delta\boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA = \\ &= \int_A \delta\boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0' + (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi' + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi'') \cdot \boldsymbol{\Omega} \right) \, dA - \\ &\quad - \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \delta\boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \boldsymbol{\Omega} \right) \, dA \end{aligned} \quad [\text{B-8.d}]$$

Für die Aufspaltung in den System- und in den Lastanteil gilt:

$$\delta\mathbf{G}_{\Omega, u} = \delta\tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} + \delta\tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} \quad [\text{B-8.e}]$$

Unter Beachtung der oben genannten Kriterien gilt für den Systemanteil:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} &= \int_A \delta\boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi' + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi'') \cdot \boldsymbol{\Omega} \, dA - \\ &\quad - \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \delta\boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \boldsymbol{\Omega} \, dA \end{aligned} \quad [\text{B-8.f}]$$

Für die Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen in diskretisierter Form sind die in Punkt 7.1.2 dargestellten diskretisierten Systemunbekannten für  $\hat{\Omega}$  einzuführen. Alle in weiterer Folge auftretenden Querschnittsintegrale, die eine Abhängigkeit von den Ansatzfunktionen aufweisen, werden mit einem „ $\hat{\cdot}$ “ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} = & \int_A (\delta \hat{\Omega}^T \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \psi' + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \psi'') \cdot (\mathbf{H}^T \cdot \hat{\Omega}) \, dA - \\ & - \int_A \delta \hat{\Omega}^T \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \mathbf{H}^T)^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \psi') \cdot (\mathbf{H}^T \cdot \hat{\Omega}) \, dA \end{aligned} \quad [\text{B-8.g}]$$

$$\begin{aligned} \delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} = & \delta \hat{\Omega}^T \cdot \left\{ - \int_A \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} \, dA \cdot \psi \right. \\ & + \left( \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} \, dA - \right. \\ & \left. - \int_A \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \right) \cdot \psi' \\ & \left. + \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \cdot \psi'' \right\} \cdot \hat{\Omega} \end{aligned} \quad [\text{B-8.h}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} = \delta \hat{\Omega}^T \cdot \left\{ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi} \cdot \psi + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'} \cdot \psi' + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} \cdot \psi'' \right\} \cdot \hat{\Omega} \quad [\text{B-8.i}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} = \delta \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} \quad [\text{B-8.j}]$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \Omega} = \left\{ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi} \cdot \psi + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'} \cdot \psi' + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} \cdot \psi'' \right\} \cdot \hat{\Omega} \quad [\text{B-8.k}]$$

Die einzelnen Vorfaktormatrizen für den Systemanteil werden dabei getrennt nach den Ableitungsordnungen der Wölbamplituden dargestellt. Dadurch entstehen die folgenden drei Vorfaktormatrizen:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi} = - \int_A \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} \, dA \quad [\text{B-8.l}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'} = \int_A (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} - \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T) \, dA \quad [\text{B-8.m}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} = \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \quad [\text{B-8.n}]$$

Unter Beachtung der oben genannten Kriterien gilt für den Lastanteil:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} = & \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0' \, dA - \\ & - \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \, dA \end{aligned} \quad [\text{B-8.o}]$$

Werden die diskretisierten relativen 3D-Verschiebungsfelder in die Gleichungen eingesetzt, entsteht die gesuchte diskretisierte Darstellung der umgewandelten Integralform.

$$\begin{aligned} \delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} = & \delta \hat{\Omega}^T \cdot \left\{ \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0' \, dA - \right. \\ & \left. - \int_A \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \, dA \right\} \end{aligned} \quad [\text{B-8.p}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} = \delta \hat{\Omega}^T \cdot (\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0} \cdot \mathbf{e}_0 + \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'} \cdot \mathbf{e}_0') \quad [\text{B-8.q}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} = \delta \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} \quad [\text{B-8.r}]$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, q} = \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0} \cdot \mathbf{e}_0 + \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'} \cdot \mathbf{e}_0' \quad [\text{B-8.s}]$$

Die einzelnen Vorfaktormatrizen für den Lastanteil werden dabei getrennt nach den Ableitungsordnungen des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters dargestellt. Dadurch entstehen die folgenden zwei Vorfaktormatrizen:

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0} = - \int_A \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [\text{B-8.t}]$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'} = \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [\text{B-8.u}]$$

### B.3.2 Aufbereitung von $\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \gamma}$

Der Anteil an den Gleichgewichtsgleichungen aus den äußeren Volumenlasten lässt sich in einfacher Weise in der Produktdarstellung anschreiben.

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \gamma} = \int_A \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \gamma} \, dA = \int_A \delta \Omega^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \gamma} \, dA \cdot \psi_q \quad [\text{B-9.a}]$$

Für die Darstellung der Belastungsverteilung über den Stabquerschnitt gilt eine Abhängigkeit von den Querschnittskoordinaten wie folgt:

$$\mathbf{q}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} q_{3D, 1} \\ q_{3D, 2} \\ q_{3D, 3} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\gamma}} \quad [\text{B-9.b}]$$

Werden die diskretisierten relativen 3D-Verschiebungsfelder in die Gleichungen eingesetzt, entsteht die gesuchte diskretisierte Darstellung der umgewandelten Integralform.

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, \mathbf{q}, \boldsymbol{\gamma}} = \delta \hat{\Omega}^T \cdot \int_A \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} \, dA \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-9.c}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, \mathbf{q}, \boldsymbol{\gamma}} = \delta \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, \mathbf{q}, \boldsymbol{\gamma}} \quad [\text{B-9.d}]$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, \mathbf{q}, \boldsymbol{\gamma}} = \int_A \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} \, dA \cdot \Psi_{\mathbf{q}} = \int_A \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} q_{3D, 1} \\ q_{3D, 2} \\ q_{3D, 3} \end{bmatrix} \, dA \cdot \Psi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \hat{q}_{\Omega, 1, \boldsymbol{\gamma}} \\ \hat{q}_{\Omega, 2, \boldsymbol{\gamma}} \\ \hat{q}_{\Omega, 3, \boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-9.e}]$$

### B.3.3 Aufbereitung von $\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, \mathbf{q}, \Gamma}$

Für die Darstellung der Oberflächenlasten auf der Stabmantelfläche wird gleich den Volumenlasten ebenfalls die Produktdarstellung verwendet.

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, \mathbf{q}, \Gamma} = \int_s \delta \Omega^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \, ds = \int_s \delta \Omega^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \, ds \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-10.a}]$$

$$\mathbf{q}_{3D, \Gamma} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-10.b}]$$

Für die Darstellung der Belastungsverteilung entlang der Querschnittsberandung des Querschnitts gilt:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} = \begin{bmatrix} q_{1N} \\ q_{2N} \\ q_{3N} \end{bmatrix}_{\Gamma} \quad [\text{B-10.c}]$$

Werden die diskretisierten relativen 3D-Verschiebungsfelder in die Gleichungen eingesetzt, entsteht die gesuchte diskretisierte Darstellung der umgewandelten Integralform.

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, \mathbf{q}, \Gamma} = \delta \hat{\Omega}^T \cdot \int_s \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \, ds \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-10.d}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma} = \delta \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma} \quad [\text{B-10.e}]$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, q, \Gamma} = \int_s \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \, ds \cdot \Psi_q = \int_s \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} q_{1N} \\ q_{2N} \\ q_{3N} \end{bmatrix}_{\Gamma} \, ds \cdot \Psi_q = \begin{bmatrix} \hat{q}_{\Omega, 1, \Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega, 2, \Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega, 3, \Gamma} \end{bmatrix} \cdot \Psi_q \quad [\text{B-10.f}]$$

### B.3.4 Aufbereitung von $\delta \mathbf{G}_{\Omega, u, \frac{A}{E}}$

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} = \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \left( -\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} \right) dA = \pm \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} dA \quad [\text{B-11.a}]$$

**Anmerkung:** Es gilt  $\mathbf{N}_1 = -1$  für den A-Querschnitt und  $\mathbf{N}_1 = 1$  für den E-Querschnitt.

Für die 3D-Spannungen gilt nach Glg. 6-33.i und Glg. 6-33.j die folgende Darstellung in allgemeiner Darstellung:

$$\mathbf{s}_{3D, \perp, \frac{A}{E}} = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, \frac{A}{E}} \quad [\text{B-11.b}]$$

$$\mathbf{s}_{3D, \frac{A}{E}} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} + \left( \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi_{\frac{A}{E}} + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi_{\frac{A}{E}}' \right) \cdot \Omega_{\frac{A}{E}} \right) \quad [\text{B-11.c}]$$

Werden die 3D-Spannungen in die Gleichgewichtsbeziehungen eingesetzt, entstehen die folgenden Gleichungsanteile:

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} = \pm \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, \frac{A}{E}} dA = \quad [\text{B-11.d}]$$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}} = & \pm \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} dA \pm \\ & \pm \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi_{\frac{A}{E}} + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi_{\frac{A}{E}}' \right) \cdot \Omega_{\frac{A}{E}} dA \end{aligned} \quad [\text{B-11.e}]$$

Die für die Querschnittsgleichgewichtsgleichungen durchgeführte Aufspaltung in den System- und in den Lastanteil wird für die Oberflächenrandbedingungen an den Stabendquerschnitten in gleicher Weise vorgenommen.

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, E} = \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, E, \Omega} + \delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, E, q} \quad [\text{B-11.f}]$$

Unter Beachtung der oben genannten Kriterien gilt für den Systemanteil:

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, E, \Omega} = \pm \int_{\Gamma_{\hat{A}_E}} \delta \hat{\Omega}_A^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \psi_{A, E} + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \psi_{A, E}' \right) \cdot \hat{\Omega}_{A, E} \, dA \quad [\text{B-11.g}]$$

Werden die diskretisierten relativen 3D-Verschiebungsfelder in die Gleichungen eingesetzt, entsteht die gesuchte diskretisierte Darstellung der umgewandelten Integralform.

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, E, \Omega} = \pm \int_{\Gamma_{\hat{A}_E}} \delta \hat{\Omega}_A^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \psi_{A, E} + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \psi_{A, E}' \right) \cdot \mathbf{H}^T \cdot \hat{\Omega}_{A, E} \, dA \quad [\text{B-11.h}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, E, \Omega} = \delta \hat{\Omega}_A^T \cdot \left\{ \pm \int_{\Gamma_{\hat{A}_E}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \cdot \psi_{A, E} \pm \int_{\Gamma_{\hat{A}_E}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \cdot \psi_{A, E}' \right\} \cdot \hat{\Omega}_{A, E} \quad [\text{B-11.i}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, E, \Omega} = \delta \hat{\Omega}_A^T \cdot \left\{ \pm \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, A, E} \cdot \psi_{A, E} \pm \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', A, E} \cdot \psi_{A, E}' \right\} \cdot \hat{\Omega}_{A, E} \quad [\text{B-11.j}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, E, \Omega} = \delta \hat{\Omega}_A^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, E, \Omega} \quad [\text{B-11.k}]$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, A, E, \Omega} = \left\{ \pm \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, A, E} \cdot \psi_{A, E} \pm \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', A, E} \cdot \psi_{A, E}' \right\} \cdot \hat{\Omega}_{A, E} \quad [\text{B-11.l}]$$

Die einzelnen Vorfaktormatrizen für den Systemanteil werden dabei getrennt nach den Ableitungsordnungen der Wölbamplituden dargestellt. Dadurch entstehen die folgenden beiden Vorfaktormatrizen:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, A, E} = \int_{\Gamma_{\hat{A}_E}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} \, dA \quad [\text{B-11.m}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} = \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \quad [\text{B-11.n}]$$

Unter Beachtung der oben genannten Kriterien gilt für den Lastanteil: [B-11.o]

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} = \pm \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} \, dA \quad [\text{B-11.p}]$$

Werden die diskretisierten relativen 3D-Verschiebungsfelder in die Gleichungen eingesetzt, entsteht die gesuchte diskretisierte Darstellung der umgewandelten Integralform.

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} = \pm \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \delta \hat{\Omega}_{\frac{A}{E}}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \left( \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} \right) \, dA \quad [\text{B-11.q}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} = \delta \hat{\Omega}_{\frac{A}{E}}^T \cdot \left\{ \pm \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \right\} \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} \quad [\text{B-11.r}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} = \delta \hat{\Omega}_{\frac{A}{E}}^T \cdot \left\{ \pm \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} \right\} \quad [\text{B-11.s}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} = \delta \hat{\Omega}_{\frac{A}{E}}^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} \quad [\text{B-11.t}]$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, u, \frac{A}{E}, q} = \left\{ \pm \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} \right\} \quad [\text{B-11.u}]$$

Die einzelnen Vorfaktormatrizen für den Lastanteil werden dabei getrennt nach den Ableitungsordnungen des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters dargestellt. Dadurch entsteht die folgende Vorfaktormatrix:

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} = \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [\text{B-11.v}]$$

### B.3.5 Aufbereitung von $\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, A, q, E}$

Für die Darstellung der Oberflächenlasten auf den Stabendquerschnitten wird gleich den Volumenlasten ebenfalls die Produktdarstellung verwendet, wobei der Längsrichtungsverlauf dabei auf die Amplitudenwerte in den Stabendquerschnitten reduziert wird.

$$\delta \tilde{\mathbf{G}}_{\Omega, A, q, E} = \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma, A, E} \, dA = \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \delta \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \, dA \cdot \boldsymbol{\psi}_{q, A, E} \quad [\text{B-12.a}]$$

Für die Darstellung der Belastungsverteilung über den Querschnitt gilt:

$$\mathbf{q}_{3D, \Gamma} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \boldsymbol{\psi}_{q, A, E} \quad [\text{B-12.b}]$$

Werden die diskretisierten relativen 3D-Verschiebungsfelder in die Gleichungen eingesetzt, entsteht die gesuchte diskretisierte Darstellung der umgewandelten Integralform.

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, A, q, E} = \delta \hat{\boldsymbol{\Omega}}^T \cdot \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \, dA \cdot \boldsymbol{\psi}_{q, A, E} \quad [\text{B-12.c}]$$

$$\delta \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, A, q, E} = \delta \hat{\boldsymbol{\Omega}}^T \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega, A, q, E} \quad [\text{B-12.d}]$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\Omega, A, q, E} = \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \, dA \cdot \boldsymbol{\psi}_{q, A, E} \quad [\text{B-12.e}]$$

## B.4 0-Problem in umgewandelter Integralform

In diesem Abschnitt werden die detaillierten Rechenschritte für die Aufbereitung der Gleichgewichtsgleichungen aus Punkt 6.5.5.2 für das 0-Problem in umgewandelter Integralform gezeigt.

### B.4.1 Aufbereitung von $\tilde{\mathbf{G}}_{0,u}$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,u} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D,\perp} - \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA \quad [\text{B-13.a}]$$

Wird für den ersten Gleichungsanteil die Ableitungsvorschrift vor das Querschnittsintegral gezogen, dann beschreibt das verbleibende Querschnittsintegral den Schnittkraftvektor der globalen Stabschnittsgrößen des Starrkörperverschiebungszustands.

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,u} = \frac{\partial}{\partial X_1} \underbrace{\int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp} \cdot dA}_{\mathbf{n}_0} - \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA \quad [\text{B-13.b}]$$

Für den globalen Stabschnittsgrößenvektor gilt bei Einarbeitung der Querschnittsinterpolationsmatrix der folgende Zusammenhang zwischen den 3D-Spannungen und den Schnittgrößen.

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 &= \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp} \cdot dA = \\ &= \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X_3 & 0 & 0 \\ -X_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -X_3 & X_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} dA = \int_A \begin{bmatrix} S_{11} \\ X_3 \cdot S_{11} \\ -X_2 \cdot S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ -X_3 \cdot S_{12} + X_2 \cdot S_{13} \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [\text{B-13.c}]$$

Für den zweiten Gleichungsanteil von Glg. B-13.b gilt:

$$\int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA = \mathbf{I}_{0,2+3} \cdot \int_A \mathbf{s}_{3D} \, dA = \begin{bmatrix} 0 \\ V_3 \\ -V_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\text{B-13.d}]$$

Die Vorfaktormatrix des Spannungsvektors kann als Schnittgrößenextraktionsmatrix definiert werden, deren Besetzung unter der Beachtung der Einstein'schen Summenkonvention wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{0,2+3} &= \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T = \\
 &= \frac{\partial}{\partial X_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X_3 & 0 & 0 \\ -X_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -X_3 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial X_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X_3 & 0 & 0 \\ -X_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -X_3 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

[B-13.e]

Alternativ erscheint es sinnvoll, die Schnittgrößenextraktionsmatrix nicht auf das Querschnittsintegral der 3D-Spannungen, sondern auf den Schnittkraftvektor der globalen Stabschnittgrößen des Starrkörperverschiebungszustands zu beziehen, es gilt:

$$\mathbf{I}_{0,2+3} \cdot \int_A \mathbf{s}_{3D} \, dA \stackrel{!}{=} \mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \mathbf{n}_0 \longrightarrow \mathbf{I}^*_{0,2+3}$$

[B-13.f]

$$\mathbf{I}^*_{0,2+3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[B-13.g]

Werden die beiden Anteile der Gleichgewichtsgleichungen zusammengeführt, dann entsteht die folgende Beziehung für die Stabschnittgrößen:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,u} = \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{n}_0 - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \mathbf{n}_0 = \left( \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{\partial}{\partial X_1} \begin{bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \end{bmatrix} - \mathbf{I}^*_{0,2+3} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \end{bmatrix}$$

[B-13.h]

Zusammenfassend kann der Schnittkraftvektor der globalen Stabschnittgrößen des Starrkörperverschiebungszustands wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{n}_0 = \begin{bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \end{bmatrix} \quad [\text{B-13.i}]$$

Die Einzelanteile des Schnittkraftvektors sind durch die Normalkraft, die beiden Biegemomente, die beiden Querkräfte und durch das Torsionsmoment definiert, es gilt:

#### Normalkraft

$$N = \int_A S_{11} \, dA \quad [\text{B-13.j}]$$

#### Biegemomente

$$M_2 = \int_A X_3 S_{11} \, dA ; M_3 = - \int_A X_2 S_{11} \, dA \quad [\text{B-13.k}]$$

#### Querkräfte

$$V_2 = \int_A S_{12} \, dA ; V_3 = \int_A S_{13} \, dA \quad [\text{B-13.l}]$$

#### Torsionsmoment

$$M_1 = \int_A (-X_3 S_{12} + X_2 S_{13}) \, dA \quad [\text{B-13.m}]$$

### B.4.2 Aufbereitung von $\tilde{\mathbf{G}}_{0,q,\boldsymbol{\gamma}}$ und $\tilde{\mathbf{G}}_{0,q,\Gamma}$

Für den Gleichgewichtsanteil aus den Lasten im Inneren des Stabkörpers gilt:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,q,\boldsymbol{\gamma}} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D,\boldsymbol{\gamma}} \, dA = \underbrace{\int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D,\boldsymbol{\gamma}} \, dA}_{\tilde{\mathbf{q}}_{0,\boldsymbol{\gamma}}} \cdot \psi_q = \tilde{\mathbf{q}}_{0,\boldsymbol{\gamma}} \cdot \psi_q \quad [\text{B-14.a}]$$

Der Anteil an den Gleichgewichtsgleichungen aus den äußeren Volumenlasten lässt sich in einfacher Weise direkt darstellen, wobei entsprechend der Darstellung des Verschiebungsansatzes auch für die

Belastungen die Produktdarstellung verwendet wird.

$$\mathbf{q}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-14.b}]$$

Für die Darstellung der Belastungsverteilung über den Stabquerschnitt mit der Abhängigkeit von den Querschnittskoordinaten gilt:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} q_{3D, 1} \\ q_{3D, 2} \\ q_{3D, 3} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\gamma}} \quad [\text{B-14.c}]$$

Aus Glg. B-14.a wird der Belastungsschnittgrößenvektor für das Stabinnere wie folgt bestimmt. Dabei entstehen, entsprechend den globalen Stabschnittgrößen, affine Belastungsglieder.

$$\tilde{\mathbf{q}}_{0, \boldsymbol{\gamma}} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} \cdot dA = \int_A \begin{bmatrix} q_{3D, 1} \\ X_3 \cdot q_{3D, 1} \\ -X_2 \cdot q_{3D, 1} \\ q_{3D, 2} \\ q_{3D, 2} \\ -X_3 \cdot q_{3D, 2} + X_2 \cdot q_{3D, 3} \end{bmatrix}_{0, \boldsymbol{\gamma}} dA = \begin{bmatrix} q_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ q_2 \\ q_3 \\ m_1 \end{bmatrix}_{0, \boldsymbol{\gamma}} \quad [\text{B-14.d}]$$

Für die Lasten an der Stabmantelfläche des Stabes gilt:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0, \mathbf{q}, \Gamma} = \int_s \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \cdot ds = \underbrace{\int_s \mathbf{A}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot ds}_{\tilde{\mathbf{q}}_{0, \Gamma}} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}_{0, \Gamma} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-14.e}]$$

Der Anteil an den Gleichgewichtsgleichungen aus den äußeren Oberflächenlasten auf der Stabmantelfläche lässt sich in einfacher Weise direkt darstellen, wobei entsprechend der Darstellung des Verschiebungsansatzes auch für die Belastungen die Produktdarstellung verwendet wird:

$$\mathbf{q}_{3D, \Gamma} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-14.f}]$$

Für die Darstellung der Belastungsverteilung über den Querschnittsrand des Stabquerschnitts gilt:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} = \begin{bmatrix} q_{1N} \\ q_{2N} \\ q_{3N} \end{bmatrix}_{\Gamma} \quad [\text{B-14.g}]$$

Aus Glg. B-14.e wird der Belastungsschnittgrößenvektor für die Stabmantelfläche wie folgt bestimmt, dabei entstehen entsprechend den globalen Stabschnittgrößen affine Belastungsglieder:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{0,\Gamma} = \int_{\mathbf{s}} \mathbf{A}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{s}} \begin{bmatrix} q_{1N} \\ X_3 \cdot q_{1N} \\ -X_2 \cdot q_{1N} \\ q_{2N} \\ q_{3N} \\ -X_3 \cdot q_{2N} + X_2 \cdot q_{3N} \end{bmatrix}_{0,\Gamma} d\mathbf{s} = \begin{bmatrix} q_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ q_2 \\ q_3 \\ m_1 \end{bmatrix}_{0,\Gamma} \quad [\text{B-14.h}]$$

Werden die Belastungsanteile aus Glg. B-14.d und Glg. B-14.h zusammengeführt, dann entsteht der resultierende Stabbelastungsvektor für das Stabinnere, es gilt:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,q} = \tilde{\mathbf{G}}_{0,q,\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{G}}_{0,q,\Gamma} = \tilde{\mathbf{q}}_{0,\mathbf{r}} \cdot \Psi_q + \tilde{\mathbf{q}}_{0,\Gamma} \cdot \Psi_q = (\tilde{\mathbf{q}}_{0,\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{q}}_{0,\Gamma}) \cdot \Psi_q = \tilde{\mathbf{q}}_0 \cdot \Psi_q \quad [\text{B-14.i}]$$

Zusammenfasst gilt bei Verwendung einer Belastungsamplitude:

$$\tilde{\mathbf{q}}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_{0,\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{q}}_{0,\Gamma} \quad [\text{B-14.j}]$$

### B.4.3 Aufbereitung von $\tilde{\mathbf{G}}_{0,A,E,u}$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,A,E,u} = \int_{A,E} \mathbf{A}_0^T \cdot (-N_1 \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp}) dA = \pm \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp,A,E} dA = \pm \mathbf{n}_{0,A,E} \quad [\text{B-15.a}]$$

mit

$$\pm \mathbf{n}_{0,A,E} = \pm \int_{A,E} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp,A,E} \cdot dA = \pm \begin{bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \end{bmatrix}_{0,A,E,u} \quad [\text{B-15.b}]$$

#### B.4.4 Aufbereitung von $\tilde{\mathbf{G}}_{0, \frac{A}{E}, q}$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0, \frac{A}{E}, q} = \int_{A, E} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \, dA = \int_{A, E} \mathbf{A}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot dA \cdot \psi_{q, \frac{A}{E}} = \tilde{\mathbf{r}}_{0, \frac{A}{E}} \cdot \psi_{q, \frac{A}{E}} = \mathbf{r}_{0, \frac{A}{E}} \quad [\text{B-16.a}]$$

$$\mathbf{q}_{3D, \Gamma} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \psi_q \quad [\text{B-16.b}]$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{0, \frac{A}{E}} = \int_{A, E} \mathbf{A}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot dA = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_{\beta 2} \\ R_{\beta 3} \\ R_2 \\ R_3 \\ R_{\beta 1} \end{bmatrix}_{0, \frac{A}{E}, q} \quad [\text{B-16.c}]$$

$$\mathbf{r}_{0, \frac{A}{E}} = \tilde{\mathbf{r}}_{0, \frac{A}{E}} \cdot \psi_{q, \frac{A}{E}} \quad [\text{B-16.d}]$$

## B.5 $\Psi$ -Problem in umgewandelter Integralform

In diesem Abschnitt werden die detaillierten Rechenschritte für die Aufbereitung der Gleichgewichtsgleichungen aus Punkt 6.5.6.2 für das  $\Psi$ -Problem in umgewandelter Integralform gezeigt.

### B.5.1 Aufbereitung von $\tilde{G}_{\Psi, u}$

$$\tilde{G}_{\Psi, u} = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{s}_{3D, \perp} - \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \, dA \quad [\text{B-17.a}]$$

Entsprechend Glg. B-13.a treten auch für das  $\Psi$ -Problem die Schnittkräfte in folgender Form auf:

$$\tilde{G}_{\Psi, u} = \frac{\partial}{\partial X_1} \underbrace{\int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp} \cdot dA}_{M_\Psi} - \underbrace{\int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA}_{V_\Psi} \quad [\text{B-17.b}]$$

$$\tilde{G}_{\Psi, u} = \frac{\partial}{\partial X_1} M_\Psi - V_\Psi = \left( \mathbf{l}_{\Psi, 1} \frac{\partial}{\partial X_1} - \mathbf{l}_{\Psi, 2+3} \right) \cdot \mathbf{n}_\Psi \quad [\text{B-17.c}]$$

Dabei gelten für das Wölbmoment sowie für die Wölbquerkraft die folgenden Darstellungsformen:

$$M_\Psi = \mathbf{l}_{\Psi, 1} \cdot \mathbf{n}_\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_\Psi \\ V_\Psi \end{bmatrix} \quad [\text{B-17.d}]$$

$$V_\Psi = \mathbf{l}_{\Psi, 2+3} \cdot \mathbf{n}_\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_\Psi \\ V_\Psi \end{bmatrix} \quad [\text{B-17.e}]$$

Für die Schnittgrößenextraktionsvektoren sowie für den Vektor der Wölbschnittgrößen gilt:

$$\mathbf{l}_{\Psi, 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{l}_{\Psi, 2+3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{B-17.f}]$$

$$\mathbf{n}_\Psi = \begin{bmatrix} M_\Psi \\ V_\Psi \end{bmatrix} \quad [\text{B-17.g}]$$

Für das Wölbmoment aus Glg. B-17.b ergibt sich bei detaillierter Betrachtung:

$$M_\Psi = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp} \cdot dA \quad [\text{B-17.h}]$$

$$M_{\Psi} = \int_A \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} dA = \int_A \Omega_1 S_{11} + \Omega_2 S_{12} + \Omega_3 S_{13} dA \quad [\text{B-17.i}]$$

$$M_{\Psi} = \int_A \Omega_1 S_{11} + \Omega_2 S_{12} + \Omega_3 S_{13} dA \quad [\text{B-17.j}]$$

Für die Wölbquerkraft aus Glg. B-17.b ergibt sich bei detaillierter Betrachtung:

$$V_{\Psi} = \int_A \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA \quad [\text{B-17.k}]$$

$$V_{\Psi} = \int_A \left( \frac{\partial}{\partial X_2} \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial X_3} \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA \quad [\text{B-17.l}]$$

$$V_{\Psi} = \int_A \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \cdot S_{12} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \cdot S_{13} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} \cdot S_{22} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} \cdot S_{23} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \cdot S_{23} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \cdot S_{33} \cdot dA \quad [\text{B-17.m}]$$

In alternativer Darstellung gilt für die Wölbquerkraft in Abhängigkeit der 3D-Verzerrungen:

$$V_{\Omega} = \int_A \underbrace{\frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \cdot S_{12}}_{E_{12, \Omega}} + \underbrace{\frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \cdot S_{13}}_{E_{13, \Omega}} + \underbrace{\frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} \cdot S_{22}}_{E_{22, \Omega}} + \underbrace{\frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} \cdot S_{23}}_{E_{23, \Omega}} + \underbrace{\frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \cdot S_{23}}_{E_{32, \Omega}} + \underbrace{\frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \cdot S_{33}}_{E_{33, \Omega}} \cdot dA \quad [\text{B-17.n}]$$

$$V_{\Omega} = \int_A \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & E_{12, \Omega} & E_{13, \Omega} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\Omega, \perp}^{*T}} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} E_{22, \Omega} & E_{33, \Omega} & \gamma_{23, \Omega} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\Omega, \parallel}^{*T}} \cdot \begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \end{bmatrix} \cdot dA \quad [\text{B-17.o}]$$

$$V_{\Omega} = \int_A (\mathbf{a}_{\Omega, \perp}^{*T} \cdot \mathbf{s}_{3D, \perp} + \mathbf{a}_{\Omega, \parallel}^{*T} \cdot \mathbf{s}_{3D, \parallel}) \cdot dA \quad [\text{B-17.p}]$$

mit

$$\mathbf{a}_{\Omega, \perp}^{*T} = \left( \mathbf{a}_{\perp, \Omega} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \quad ; \quad \mathbf{a}_{\Omega, \parallel}^{*T} = \left( \mathbf{a}_{\parallel, \Omega} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \quad [\text{B-17.q}]$$

**B.5.2 Aufbereitung von  $\tilde{\mathbf{G}}_{\Psi, \mathbf{q}, \boldsymbol{\gamma}}$  und  $\tilde{\mathbf{G}}_{\Psi, \mathbf{q}, \Gamma}$** 

Für den Gleichgewichtsanteil aus den Lasten im Stabinneren des Stabkörpers gilt:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\Psi, \mathbf{q}, \boldsymbol{\gamma}} = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} \, dA = \underbrace{\int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} \cdot dA}_{\tilde{\mathbf{q}}_{\Psi, \boldsymbol{\gamma}}} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}_{\Psi, \boldsymbol{\gamma}} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-18.a}]$$

Bei Verwendung der Produktdarstellung und der Darstellung der Belastungsverteilung gilt:

$$\mathbf{q}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} q_{3D, 1} \\ q_{3D, 2} \\ q_{3D, 3} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\gamma}} \quad [\text{B-18.b}]$$

Für die Wölbbelastungen im Stabkörper gilt:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\Psi, \boldsymbol{\gamma}} = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \boldsymbol{\gamma}} \cdot dA = \int_A \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{3D, 1} \\ q_{3D, 2} \\ q_{3D, 3} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\gamma}} \cdot dA \quad [\text{B-18.c}]$$

Für den Gleichgewichtsanteil aus den Lasten auf der Stabmantelfläche des Stabkörpers gilt:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\Psi, \mathbf{q}, \Gamma} = \int_s \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3D, \Gamma} \, ds = \underbrace{\int_s \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot ds}_{\tilde{\mathbf{q}}_{\Psi, \Gamma}} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}_{\Psi, \Gamma} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-18.d}]$$

Bei Verwendung der Produktdarstellung gilt für die Darstellung der Belastungsverteilung:

$$\mathbf{q}_{3D, \Gamma} = \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot \Psi_{\mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} = \begin{bmatrix} q_{1N} \\ q_{2N} \\ q_{3N} \end{bmatrix}_{\Gamma} \quad [\text{B-18.e}]$$

Für die Wölbbelastungen auf der Stabmantelfläche gilt:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\Psi, \Gamma} = \int_s \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot ds = \int_s \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{1N} \\ q_{2N} \\ q_{3N} \end{bmatrix}_{\Gamma} \cdot ds \quad [\text{B-18.f}]$$

Zusammenfasst gilt bei Verwendung einer Belastungsamplitude:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\psi, \mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{G}}_{\psi, \mathbf{q}, \mathcal{V}} + \tilde{\mathbf{G}}_{\psi, \mathbf{q}, \Gamma} = \underbrace{(\tilde{\mathbf{q}}_{\psi, \mathcal{V}} + \tilde{\mathbf{q}}_{\psi, \Gamma})}_{\tilde{\mathbf{q}}_{\psi}} \cdot \psi_{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}_{\psi} \cdot \psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-18.g}]$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\psi} = \tilde{\mathbf{q}}_{\psi} \cdot \psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-18.h}]$$

### B.5.3 Aufbereitung von $\mathbf{G}_{\psi, \mathbf{A}, \mathbf{u}}$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\psi, \mathbf{A}, \mathbf{u}} = \int_{\Gamma_{\hat{\mathbf{e}}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot (-\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{s}_{3\text{D}, \perp}) \, dA = \pm \int_{\Gamma_{\hat{\mathbf{e}}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{s}_{3\text{D}, \perp, \mathbf{A}} \, dA = \pm M_{\psi, \mathbf{A}} \quad [\text{B-19.a}]$$

mit

$$\pm M_{\psi, \mathbf{A}} = \pm \int_{\Gamma_{\hat{\mathbf{e}}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{s}_{3\text{D}, \perp, \mathbf{A}} \cdot dA = \quad [\text{B-19.b}]$$

### B.5.4 Aufbereitung von $\mathbf{G}_{\psi, \mathbf{A}, \mathbf{q}}$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\psi, \mathbf{A}, \mathbf{q}} = \int_{\Gamma_{\hat{\mathbf{e}}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{q}_{3\text{D}, \Gamma} \, dA = \int_{\Gamma_{\hat{\mathbf{e}}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3\text{D}, \Gamma} \cdot dA \cdot \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{r}}_{\psi, \mathbf{A}} \cdot \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{A}} = \mathbf{r}_{\psi, \mathbf{A}} \quad [\text{B-20.a}]$$

mit

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\psi, \mathbf{A}} = \int_{\Gamma_{\hat{\mathbf{e}}}} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{3\text{D}, \Gamma} \cdot dA \quad [\text{B-20.b}]$$

$$\mathbf{q}_{3\text{D}, \Gamma} = \tilde{\mathbf{q}}_{3\text{D}, \Gamma} \cdot \psi_{\mathbf{q}} \quad [\text{B-20.c}]$$

$$\mathbf{r}_{\psi, \mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{r}}_{\psi, \mathbf{A}} \cdot \psi_{\mathbf{q}, \mathbf{A}} \quad [\text{B-20.d}]$$

# Anhang C

**Schnittgrößen in  
Abhängigkeit der  
Stab-Verzerrungs-  
Parameter**

### C.1 Zusammenfassung der Schnittgrößen

Die in Glg. B-13.c und Glg. B-17.g hergeleiteten Schnittgrößen werden im Folgenden in Abhängigkeit der stabachsenbezogenen Verzerrungsparameter dargestellt. Für den Vektor der Stabschnittgrößen gilt:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{n}_\psi \end{bmatrix} \quad [C-1]$$

Die Ermittlung der Stabschnittgrößen in Abhängigkeit der 3D-Spannungen wurde im Anhang B im Detail gezeigt. Diese Darstellungen werden für die Darstellung der Stabschnittgrößen in Abhängigkeit der stabachsenbezogenen Verzerrungsparameter als Ausgangsbasis verwendet.

$$\mathbf{n}_0 = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp} \cdot dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X_3 & 0 & 0 \\ -X_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -X_3 & X_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ V_2 \\ V_3 \\ M_1 \end{bmatrix} \quad [C-2.a]$$

$$\mathbf{n}_\psi = \begin{bmatrix} M_\psi \\ V_\psi \end{bmatrix} \quad [C-2.b]$$

mit

$$N = \int_A S_{11} dA \quad [C-3.a]$$

$$M_2 = \int_A X_3 S_{11} dA \quad \text{und} \quad M_3 = -\int_A X_2 S_{11} dA \quad [C-3.b]$$

$$V_2 = \int_A S_{12} dA \quad \text{und} \quad V_3 = \int_A S_{13} dA \quad [C-3.c]$$

$$M_1 = \int_A (-X_3 S_{12} + X_2 S_{13}) dA \quad [C-3.d]$$

$$M_\psi = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp} dA \quad \text{und} \quad V_\psi = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA \quad [C-3.e]$$

## C.2 Darstellung der 3D-Spannungen separiert nach den 0- und $\Omega$ -Anteilen

Die 3D-Spannungen nach Glg. 6-33.i weisen die in die 0- und  $\Omega$ -Anteile separierte Darstellungsform auf, es gilt:

$$\mathbf{s}_{3D} = \mathbf{s}_{3D,0} + \mathbf{s}_{3D,\Omega} = \underbrace{\mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0}_{\mathbf{s}_{3D,0}} + \underbrace{\mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \Psi')}_{\mathbf{s}_{3D,\Omega}} \cdot \Omega \quad [\text{C-4.a}]$$

Die 3D-Spannungen für den 0-Anteil sowie für den  $\Omega$ -Anteil sind in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters wie folgt definiert:

$$\mathbf{s}_{3D,0} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \quad [\text{C-4.b}]$$

$$\mathbf{s}_{3D,\Omega} = \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \quad [\text{C-4.c}]$$

Unter Verwendung von Glg. 6-33.j gilt für den „ $\perp$ “-Anteil der 3D-Spannungen (Balkenzustand):

$$\mathbf{s}_{3D,\perp} = \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \quad [\text{C-4.d}]$$

Wird der „ $\perp$ “-Anteil der Spannungen in der nach den 0- und  $\Omega$ -Anteilen separierten Darstellungsform dargestellt, gilt:

$$\mathbf{s}_{3D,\perp,0} = \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D,0} = \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \quad [\text{C-4.e}]$$

$$\mathbf{s}_{3D,\perp,\Omega} = \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\Omega} = \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \quad [\text{C-4.f}]$$

### C.3 Berechnung der Schnittgrößen $\mathbf{n}_0$ :

Die den Starrkörperverformungsfreiheitsgraden zugeordneten Stabschnittgrößen  $\mathbf{n}_0$  lassen sich durch Einsetzen der separierten 3D-Spannungen ebenfalls in den 0 und den  $\Omega$ -Anteil gliedern. Die Schnittgrößen ergeben sich aus dem Querschnittsintegral des Produktes der Querschnittsinterpolationsmatrix nach Glg. 6-2.b mit den 3D-Spannungen für den „ $\perp$ “-Anteil nach Glg. 6-33.j. Für die Bezeichnung der Stabschnittgrößen gilt die Indexschreibweise nach 7.1.7.

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_{0,0} + \mathbf{n}_{0,\Omega} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp} \cdot dA = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot (\mathbf{s}_{3D,\perp,0} + \mathbf{s}_{3D,\perp,\Omega}) \cdot dA \quad [\text{C-5.a}]$$

Für die beiden Anteile der Stabschnittgrößen gilt in Abhängigkeit vom stabachsenbezogenen Verzerrungsparameter:

$$\mathbf{n}_{0,0} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp,0} \cdot dA = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dA \cdot \mathbf{e}_0 \quad [\text{C-5.b}]$$

$$\mathbf{n}_{0,\Omega} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot (\mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \Psi')) \cdot \Omega \cdot dA \quad [\text{C-5.c}]$$

#### Kompakte Darstellung der Schnittgrößen $\mathbf{n}_0$

Die Stabschnittgrößen lassen sich in Abhängigkeit des separierten stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters und den zugehörigen Vorfaktormatrizen, wie folgt, definieren:

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_{0,0} + \mathbf{n}_{0,\Omega} = \mathbf{K}_{0,0} \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{k}_{0,\Psi} \cdot \Psi + \mathbf{k}_{0,\Psi'} \cdot \Psi' \quad [\text{C-5.d}]$$

$$\mathbf{K}_{0,0} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dA \quad [\text{C-5.e}]$$

$$\mathbf{k}_{0,\Psi} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Omega \cdot dA \quad [\text{C-5.f}]$$

$$\mathbf{k}_{0,\Psi'} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \Omega \cdot dA \quad [\text{C-5.g}]$$

#### C.3.1 Für die Schnittgrößen $\mathbf{n}_{0,0}$ gilt:

Für die Schnittgrößen des Starrkörperanteils gilt in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters  $\mathbf{e}_0$ :

$$\mathbf{n}_{0,0} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp,0} \cdot dA = \underbrace{\int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dA}_{\mathbf{K}_{0,0}} \cdot \mathbf{e}_0 \quad [\text{C-6.a}]$$

$$\mathbf{n}_{0,0} = \mathbf{K}_{0,0} \cdot \mathbf{e}_0 \quad [\text{C-6.b}]$$

**Materialsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{0,0}$** 

Werden die Querschnittsinterpolationsmatrizen mit der Materialsteifigkeitsmatrix multipliziert, entsteht die folgende Steifigkeitsmatrix für den orthotropen Fall:

$$\mathbf{K}_{0,0} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X_3 & 0 & 0 \\ -X_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -X_3 & X_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & D_{45} \\ 0 & D_{54} & D_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & X_3 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 \end{bmatrix} \cdot dA \quad [\text{C-7.a}]$$

In Abhängigkeit der Materialsteifigkeitsmatrix nach 6-25.b gilt für die Stabschnittgrößen  $\mathbf{n}_{0,0}$  die folgende detaillierte Darstellung:

$$\mathbf{K}_{0,0} = \int_A \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11} \cdot X_3 & -D_{11} X_2 \\ D_{11} \cdot X_3 & D_{11} \cdot X_3^2 & -D_{11} X_2 X_3 \\ -D_{11} \cdot X_2 & -D_{11} X_2 X_3 & D_{11} X_2^2 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} & D_{45} X_2 - D_{44} X_3 \\ D_{45} & D_{55} & D_{55} X_2 - D_{45} X_3 \\ D_{45} X_2 - D_{44} X_3 & D_{55} X_2 - D_{45} X_3 & D_{55} X_2^2 + D_{44} X_3^2 - 2D_{45} X_2 X_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} dA \quad [\text{C-7.b}]$$

Im Folgenden werden für die Materialeigenschaften der

- Orthotropie
- Isotropie mit  $\nu \neq 0$
- Isotropie mit  $\nu = 0$

die formalen Zusammensetzungen für die einzelnen Einträge der Materialsteifigkeitsmatrix angeführt.

### C.3.1.1 Orthotropes Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\mathbf{K}_{0,0} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{0,11} & K_{0,12} & K_{0,13} \\ K_{0,12} & K_{0,22} & K_{0,23} \\ K_{0,13} & K_{0,23} & K_{0,33} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} S_{0,22} & S_{0,23} & S_{0,21} \\ S_{0,23} & S_{0,33} & S_{0,31} \\ S_{0,21} & S_{0,31} & S_{0,11} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad [\text{C-8.a}]$$

$$K_{0,11} = \int_A D_{11} \, dA \quad [\text{C-8.b}]$$

$$K_{0,22} = \int_A D_{11} \cdot X_3^2 \, dA \quad [\text{C-8.c}]$$

$$K_{0,33} = \int_A D_{11} \cdot X_2^2 \, dA \quad [\text{C-8.d}]$$

$$K_{0,12} = \int_A D_{11} \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-8.e}]$$

$$K_{0,13} = \int_A -D_{11} \cdot X_2 \, dA \quad [\text{C-8.f}]$$

$$K_{0,23} = \int_A -D_{11} \cdot X_2 X_3 \, dA \quad [\text{C-8.g}]$$

$$S_{0,22} = \int_A D_{44} \, dA \quad [\text{C-8.h}]$$

$$S_{0,33} = \int_A D_{55} \, dA \quad [\text{C-8.i}]$$

$$S_{0,11} = \int_A D_{55} \cdot X_2^2 + D_{44} \cdot X_3^2 - 2D_{45} \cdot X_2 X_3 \, dA \quad [\text{C-8.j}]$$

$$S_{0,23} = \int_A D_{45} \, dA \quad [\text{C-8.k}]$$

$$S_{0,21} = \int_A D_{45} \cdot X_2 - D_{44} \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-8.l}]$$

$$S_{0,31} = \int_A D_{55} \cdot X_2 - D_{45} \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-8.m}]$$

**C.3.1.2 Isotropes Materialverhalten  $\nu \neq 0$** 

Für das isotrope Materialverhalten ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\mathbf{K}_{0,0} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{0,11} & K_{0,12} & K_{0,13} \\ K_{0,12} & K_{0,22} & K_{0,23} \\ K_{0,13} & K_{0,23} & K_{0,33} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} S_{0,22} & S_{0,23} & S_{0,21} \\ S_{0,23} & S_{0,33} & S_{0,31} \\ S_{0,21} & S_{0,31} & S_{0,11} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad [\text{C-9.a}]$$

$$K_{0,11} = \int_A D_{11} \, dA \quad [\text{C-9.b}]$$

$$K_{0,22} = \int_A D_{11} \cdot X_3^2 \, dA \quad [\text{C-9.c}]$$

$$K_{0,33} = \int_A D_{11} \cdot X_2^2 \, dA \quad [\text{C-9.d}]$$

$$K_{0,12} = \int_A D_{11} \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-9.e}]$$

$$K_{0,13} = \int_A -D_{11} \cdot X_2 \, dA \quad [\text{C-9.f}]$$

$$K_{0,23} = \int_A -D_{11} \cdot X_2 X_3 \, dA \quad [\text{C-9.g}]$$

$$S_{0,22} = S_{0,33} = \int_A D_{44} \, dA \quad [\text{C-9.h}]$$

$$S_{0,23} = 0 \quad [\text{C-9.i}]$$

$$S_{0,11} = \int_A D_{44} \cdot (X_2^2 + X_3^2) \, dA \quad [\text{C-9.j}]$$

$$S_{0,21} = \int_A -D_{44} \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-9.k}]$$

$$S_{0,31} = \int_A D_{44} \cdot X_2 \, dA \quad [\text{C-9.l}]$$

### C.3.1.3 Isotropes Materialverhalten $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\mathbf{K}_{0,0} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{0,11} & K_{0,12} & K_{0,13} \\ K_{0,12} & K_{0,22} & K_{0,23} \\ K_{0,13} & K_{0,23} & K_{0,33} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} S_{0,22} & S_{0,23} & S_{0,21} \\ S_{0,23} & S_{0,33} & S_{0,31} \\ S_{0,21} & S_{0,31} & S_{0,11} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad [\text{C-10.a}]$$

$$K_{0,11} = \int_A E \, dA \quad [\text{C-10.b}]$$

$$K_{0,22} = \int_A E \cdot X_3^2 \, dA \quad [\text{C-10.c}]$$

$$K_{0,33} = \int_A E \cdot X_2^2 \, dA \quad [\text{C-10.d}]$$

$$K_{0,12} = \int_A E \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-10.e}]$$

$$K_{0,13} = \int_A -E \cdot X_2 \, dA \quad [\text{C-10.f}]$$

$$K_{0,23} = \int_A -E \cdot X_2 X_3 \, dA \quad [\text{C-10.g}]$$

$$S_{0,22} = S_{0,33} = \int_A G \, dA \quad [\text{C-10.h}]$$

$$S_{0,23} = 0 \quad [\text{C-10.i}]$$

$$S_{0,11} = \int_A G \cdot (X_2^2 + X_3^2) \, dA \quad [\text{C-10.j}]$$

$$S_{0,21} = \int_A -G \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-10.k}]$$

$$S_{0,31} = \int_A G \cdot X_2 \, dA \quad [\text{C-10.l}]$$

### C.3.2 Für die Schnittgrößen $n_{0,\Omega}$ gilt:

Für die Schnittgrößen des Starrkörperanteils gilt in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters für den  $\Omega$ -Anteil:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_{0,\Omega} &= \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot (\mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \Psi')) \cdot \Omega \cdot dA \\
 &= \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Omega \cdot dA \cdot \Psi \\
 &\quad + \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \Omega \cdot dA \cdot \Psi' \\
 &= \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Omega \cdot dA \cdot \Psi \\
 &\quad + \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \Omega \cdot dA \cdot \Psi'
 \end{aligned} \tag{C-11.a}$$

Die Stabschnittgrößen lassen sich in Abhängigkeit des separierten stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters  $\Psi$  und der zugehörigen Vorfaktorvektoren in kompakter Form, wie folgt, definieren:

$$\mathbf{n}_{0,\Omega} = \mathbf{k}_{0,\Psi} \cdot \Psi + \mathbf{k}_{0,\Psi'} \cdot \Psi' \tag{C-11.b}$$

Für die Materialsteifigkeitsvektoren mit Zugehörigkeit zu den verschiedenen Ableitungsordnungen von  $\Psi$  gilt:

$$\mathbf{k}_{0,\Psi} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Omega \cdot dA \tag{C-11.c}$$

$$\mathbf{k}_{0,\Psi'} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \Omega \cdot dA \tag{C-11.d}$$

**Vorfaktorvektor  $\mathbf{k}_{0, \psi}$  für die Ableitungsordnung Null**

$$\mathbf{k}_{0, \psi} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot dA \quad [\text{C-12.a}]$$

$$\mathbf{k}_{0, \psi} = \int_A \begin{bmatrix} D_{12} \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} + D_{13} \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} + D_{16} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \right) \\ D_{12} \cdot X_3 \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} + D_{13} \cdot X_3 \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} + D_{16} \cdot X_3 \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \right) \\ -D_{12} \cdot X_2 \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} - D_{13} \cdot X_2 \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} - D_{16} \cdot X_2 \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \right) \\ D_{44} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + D_{45} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \\ D_{45} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + D_{55} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \\ (D_{45} \cdot X_2 - D_{44} \cdot X_3) \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + (D_{55} \cdot X_2 - D_{45} \cdot X_3) \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \end{bmatrix} \cdot dA \quad [\text{C-12.b}]$$

**Vorfaktorvektor  $\mathbf{k}_{0, \psi'}$  für die Ableitungsordnung Eins**

$$\mathbf{k}_{0, \psi'} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot dA \quad [\text{C-12.c}]$$

$$\mathbf{k}_{0, \psi'} = \int_A \begin{bmatrix} D_{11} \cdot \Omega_1 \\ D_{11} \cdot X_3 \cdot \Omega_1 \\ -D_{11} \cdot X_2 \cdot \Omega_1 \\ D_{44} \cdot \Omega_2 + D_{45} \cdot \Omega_3 \\ D_{45} \cdot \Omega_2 + D_{55} \cdot \Omega_3 \\ (D_{45} \cdot X_2 - D_{44} \cdot X_3) \cdot \Omega_2 + (D_{55} \cdot X_2 - D_{45} \cdot X_3) \cdot \Omega_3 \end{bmatrix} dA \quad [\text{C-12.d}]$$

Für die Materialeigenschaften der Orthotropie und der Isotropie gelten die formalen Zusammensetzungen für die einzelnen Einträge in den Materialsteifigkeitsvektoren.

### C.3.2.1 Orthotropes Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten ist der Materialsteifigkeitsvektor  $\mathbf{k}_{0, \psi}$  durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\mathbf{k}_{0, \psi} = \begin{bmatrix} K_{0, \psi, 1} \\ K_{0, \psi, 2} \\ K_{0, \psi, 3} \\ S_{0, \psi, 2} \\ S_{0, \psi, 3} \\ S_{0, \psi, 1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-13.a}]$$

$$K_{0, \psi, 1} = \int_A D_{12} \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} + D_{13} \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} + D_{16} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \right) dA \quad [\text{C-13.b}]$$

$$K_{0, \psi, 2} = \int_A D_{12} \cdot X_3 \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} + D_{13} \cdot X_3 \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} + D_{16} \cdot X_3 \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \right) dA \quad [\text{C-13.c}]$$

$$K_{0, \psi, 3} = \int_A -D_{12} \cdot X_2 \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} - D_{13} \cdot X_2 \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} - D_{16} \cdot X_2 \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \right) dA \quad [\text{C-13.d}]$$

$$S_{0, \psi, 2} = \int_A D_{44} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + D_{45} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} dA \quad [\text{C-13.e}]$$

$$S_{0, \psi, 3} = \int_A D_{45} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + D_{55} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} dA \quad [\text{C-13.f}]$$

$$S_{0, \psi, 1} = \int_A (D_{45} \cdot X_2 - D_{44} \cdot X_3) \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + (D_{55} \cdot X_2 - D_{45} \cdot X_3) \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} dA \quad [\text{C-13.g}]$$

Für das orthotrope Materialverhalten ist der Materialsteifigkeitsvektor  $\mathbf{k}_{0, \psi'}$  durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\mathbf{k}_{0, \psi'} = \begin{bmatrix} K_{0, \psi', 1} \\ K_{0, \psi', 2} \\ K_{0, \psi', 3} \\ S_{0, \psi', 2} \\ S_{0, \psi', 3} \\ S_{0, \psi', 1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-14.a}]$$

$$K_{0, \psi', 1} = \int_A D_{11} \cdot \Omega_1 \, dA \quad [\text{C-14.b}]$$

$$K_{0, \psi', 2} = \int_A D_{11} \cdot X_3 \cdot \Omega_1 \, dA \quad [\text{C-14.c}]$$

$$K_{0, \psi', 3} = \int_A -D_{11} \cdot X_2 \cdot \Omega_1 \, dA \quad [\text{C-14.d}]$$

$$S_{0, \psi', 2} = \int_A D_{44} \cdot \Omega_2 + D_{45} \cdot \Omega_3 \, dA \quad [\text{C-14.e}]$$

$$S_{0, \psi', 3} = \int_A D_{45} \cdot \Omega_2 + D_{55} \cdot \Omega_3 \, dA \quad [\text{C-14.f}]$$

$$S_{0, \psi', 1} = \int_A (D_{45} \cdot X_2 - D_{44} \cdot X_3) \cdot \Omega_2 + (D_{55} \cdot X_2 - D_{45} \cdot X_3) \cdot \Omega_3 \, dA \quad [\text{C-14.g}]$$

**C.3.2.2 Isotropes Materialverhalten  $\nu \neq 0$** 

Für das isotrope Materialverhalten ist der Materialsteifigkeitsvektor  $\mathbf{k}_{0, \psi}$  durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\mathbf{k}_{0, \psi} = \begin{bmatrix} K_{0, \psi, 1} \\ K_{0, \psi, 2} \\ K_{0, \psi, 3} \\ S_{0, \psi, 2} \\ S_{0, \psi, 3} \\ S_{0, \psi, 1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-15.a}]$$

$$K_{0, \psi, 1} = \int_A D_{12} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \right) dA \quad [\text{C-15.b}]$$

$$K_{0, \psi, 2} = \int_A D_{12} \cdot X_3 \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \right) dA \quad [\text{C-15.c}]$$

$$K_{0, \psi, 3} = \int_A -D_{12} \cdot X_2 \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \right) dA \quad [\text{C-15.d}]$$

$$S_{0, \psi, 2} = \int_A \left( D_{44} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \right) dA \quad [\text{C-15.e}]$$

$$S_{0, \psi, 3} = \int_A D_{44} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} dA \quad [\text{C-15.f}]$$

$$S_{0, \psi, 1} = \int_A D_{44} \cdot \left( X_2 \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} - X_3 \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \right) dA \quad [\text{C-15.g}]$$

Für das isotrope Materialverhalten ist der Materialsteifigkeitsvektor  $\mathbf{k}_{0, \psi'}$  durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\mathbf{k}_{0, \psi'} = \begin{bmatrix} K_{0, \psi', 1} \\ K_{0, \psi', 2} \\ K_{0, \psi', 3} \\ S_{0, \psi', 2} \\ S_{0, \psi', 3} \\ S_{0, \psi', 1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-16.a}]$$

$$K_{0, \psi', 1} = \int_A D_{11} \cdot \Omega_1 \, dA \quad [\text{C-16.b}]$$

$$K_{0, \psi', 2} = \int_A D_{11} \cdot X_3 \cdot \Omega_1 \, dA \quad [\text{C-16.c}]$$

$$K_{0, \psi', 3} = \int_A -D_{11} \cdot X_2 \cdot \Omega_1 \, dA \quad [\text{C-16.d}]$$

$$S_{0, \psi', 2} = \int_A D_{44} \cdot \Omega_2 \, dA \quad [\text{C-16.e}]$$

$$S_{0, \psi', 3} = \int_A D_{55} \cdot \Omega_3 \, dA \quad [\text{C-16.f}]$$

$$S_{0, \psi', 1} = \int_A D_{44} \cdot (X_2 \cdot \Omega_3 - X_3 \cdot \Omega_2) \, dA \quad [\text{C-16.g}]$$

**C.3.2.3 Isotropes Materialverhalten  $\nu = 0$** 

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  ist der Materialsteifigkeitsvektor  $\mathbf{k}_{0,\psi}$  durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\mathbf{k}_{0,\psi} = \begin{bmatrix} K_{0,\psi,1} \\ K_{0,\psi,2} \\ K_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,2} \\ S_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_{0,\psi,2} \\ S_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-17.a}]$$

$$K_{0,\psi,1} = 0 \quad [\text{C-17.b}]$$

$$K_{0,\psi,2} = 0 \quad [\text{C-17.c}]$$

$$K_{0,\psi,3} = 0 \quad [\text{C-17.d}]$$

$$S_{0,\psi,2} = \int_A \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \, dA \quad [\text{C-17.e}]$$

$$S_{0,\psi,3} = \int_A \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \, dA \quad [\text{C-17.f}]$$

$$S_{0,\psi,1} = \int_A \mathbf{G} \cdot \left( X_2 \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} - X_3 \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \right) \, dA \quad [\text{C-17.g}]$$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  ist der Materialsteifigkeitsvektor  $\mathbf{k}_{0, \psi'}$  durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\mathbf{k}_{0, \psi'} = \begin{bmatrix} K_{0, \psi', 1} \\ K_{0, \psi', 2} \\ K_{0, \psi', 3} \\ S_{0, \psi', 2} \\ S_{0, \psi', 3} \\ S_{0, \psi', 1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-18.a}]$$

$$K_{0, \psi', 1} = \int_A E \cdot \Omega_1 \, dA \quad [\text{C-18.b}]$$

$$K_{0, \psi', 2} = \int_A E \cdot X_3 \cdot \Omega_1 \, dA \quad [\text{C-18.c}]$$

$$K_{0, \psi', 3} = \int_A -E \cdot X_2 \cdot \Omega_1 \, dA \quad [\text{C-18.d}]$$

$$S_{0, \psi', 2} = \int_A G \cdot \Omega_2 \, dA \quad [\text{C-18.e}]$$

$$S_{0, \psi', 3} = \int_A G \cdot \Omega_3 \, dA \quad [\text{C-18.f}]$$

$$S_{0, \psi', 1} = \int_A G \cdot (X_2 \cdot \Omega_3 - X_3 \cdot \Omega_2) \, dA \quad [\text{C-18.g}]$$

### C.3.3 Für die Schnittgrößen $n_{0,\Omega}$ gilt in der diskretisierten Darstellung:

Ausgehend von den in Punkt C.3.2 hergeleiteten Schnittgrößenbeziehungen wird die diskretisierte Form der Schnittgrößen dargestellt:

Werden die unter Punkt 7.1.2.3 dargestellten formalen Zusammenhänge zwischen der analytischen und der diskretisierten Darstellung der relativen 3D-Verschiebungsfelder in die oben gezeigten Schnittkraftbeziehungen eingearbeitet, so gilt:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T & & \\ & \mathbf{h}^T & \\ & & \mathbf{h}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\Omega}}_1 \\ \hat{\mathbf{\Omega}}_2 \\ \hat{\mathbf{\Omega}}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T \cdot \hat{\mathbf{\Omega}} \quad [\text{C-19.a}]$$

Für die nach den Querschnittskoordinaten abgeleiteten Ansatzfunktionen gilt:

$$\mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \hat{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{B}_{3D,H,2+3} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{h}_2^T & 0 & 0 \\ \mathbf{h}_3^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_2^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{h}_3^T \\ 0 & \mathbf{h}_3^T & \mathbf{h}_2^T \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}} \quad [\text{C-19.b}]$$

Die Materialsteifigkeitsvektoren für die verschiedenen Ableitungsordnungen von  $\Psi$  werden unter Berücksichtigung der Diskretisierung mit einem „ $\hat{\cdot}$ “ bezeichnet. Die Ansatzfunktionen sind über den Stabquerschnitt integrierbar und dadurch die Materialsteifigkeitsvektoren bestimmbar. Die Querschnittsamplitudenwerte  $\hat{\mathbf{\Omega}}$  treten als neue Systemunbekannte in Erscheinung, es gilt:

$$\mathbf{n}_{0,\Omega} = \mathbf{k}_{0,\psi} \cdot \psi + \mathbf{k}_{0,\psi'} \cdot \psi' = \hat{\mathbf{k}}_{0,\psi} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}} \cdot \psi + \hat{\mathbf{k}}_{0,\psi'} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}} \cdot \psi' \quad [\text{C-20}]$$

Für die Materialsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_{0, \psi}$  gilt

$$\mathbf{k}_{0, \psi} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot dA \quad [\text{C-21.a}]$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi} &= \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot dA \\ &= \underbrace{\int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} \cdot dA}_{\hat{\mathbf{K}}_{0, \psi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} \end{aligned} \quad [\text{C-21.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{0, \psi} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} \cdot dA \quad [\text{C-21.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{0, \psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 12} & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 13} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 22} & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 23} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 32} & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 33} \\ \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 41} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 51} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 61} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [\text{C-21.d}]$$

Unter Berücksichtigung des Materialverhaltens lassen sich die Steifigkeitsterme für den orthotropen und den isotropen Fall bestimmen.

**C.3.3.1 Orthotropes Materialverhalten**

Für das orthotrope Materialverhalten ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 12} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-22.a}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 13} = \int_A \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-22.b}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 22} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{D}_{16} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-22.c}]$$

$$\mathbf{k}_{0, \psi, 23} = \int_A \mathbf{D}_{16} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{D}_{13} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-22.d}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 32} = \int_A -(\mathbf{D}_{12} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{D}_{16} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}_3^T) \, dA \quad [\text{C-22.e}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 33} = \int_A -(\mathbf{D}_{16} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{D}_{13} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}_3^T) \, dA \quad [\text{C-22.f}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 41} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-22.g}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 51} = \int_A \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-22.h}]$$

$$\mathbf{k}_{0, \psi, 61} = \int_A \mathbf{h}_2^T \cdot (X_2 \cdot \mathbf{D}_{45} - X_3 \cdot \mathbf{D}_{44}) + \mathbf{h}_3^T \cdot (X_2 \cdot \mathbf{D}_{55} - X_3 \cdot \mathbf{D}_{45}) \, dA \quad [\text{C-22.i}]$$

### C.3.3.2 Isotropes Materialverhalten $\nu \neq 0$

Für das isotrope Materialverhalten ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 12} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-23.a}]$$

$$\mathbf{k}_{0, \psi, 13} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-23.b}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 22} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-23.c}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 23} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-23.d}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 32} = \int_A -\mathbf{D}_{12} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-23.e}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 33} = \int_A -\mathbf{D}_{12} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-23.f}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 41} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-23.g}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 51} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-23.h}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 61} = \int_A -\mathbf{h}_2^T \cdot X_3 \cdot \mathbf{D}_{44} + \mathbf{h}_3^T \cdot X_2 \cdot \mathbf{D}_{44} \, dA \quad [\text{C-23.i}]$$

### C.3.3.3 Isotropes Materialverhalten $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 12} = \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 13} = \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 22} = \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 23} = \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 33} = 0 \quad [\text{C-24.a}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 41} = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-24.b}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 51} = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-24.c}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 61} = \int_A -\mathbf{h}_2^T \cdot X_3 \cdot \mathbf{G} + \mathbf{h}_3^T \cdot X_2 \cdot \mathbf{G} \, dA \quad [\text{C-24.d}]$$

Für die Materialsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_{0, \psi'}$  gilt

Unter Berücksichtigung des Materialverhaltens lassen sich die Steifigkeitsterme für den orthotropen und den isotropen Fall bestimmen:

$$\mathbf{k}_{0, \psi'} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot dA \quad [\text{C-25.a}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi'} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot dA = \underbrace{\int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{H}^T \cdot dA}_{\hat{\mathbf{K}}_{0, \psi'}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} \quad [\text{C-25.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{0, \psi'} = \int_A \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{H}^T \cdot dA \quad [\text{C-25.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{0, \psi'} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 11} & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 21} & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 31} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 42} & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 43} \\ 0 & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 52} & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 53} \\ 0 & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 62} & \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 63} \end{bmatrix} \quad [\text{C-25.d}]$$

### C.3.3.4 Orthotropes Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 11} = \int_A \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-26.a}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 21} = \int_A \mathbf{D}_{11} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-26.b}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 31} = \int_A -\mathbf{D}_{11} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-26.c}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 42} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-26.d}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 43} = \hat{\mathbf{K}}_{0, \psi, 52} = \int_A \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-26.e}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 53} = \int_A \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-26.f}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 62} = \int_A \mathbf{h}^T \cdot (X_2 \cdot \mathbf{D}_{45} - X_3 \cdot \mathbf{D}_{44}) dA \quad [\text{C-26.g}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 63} = \int_A \mathbf{h}^T \cdot (X_2 \cdot \mathbf{D}_{55} - X_3 \cdot \mathbf{D}_{45}) dA \quad [\text{C-26.h}]$$

**C.3.3.5 Isotropes Materialverhalten  $\nu \neq 0$** 

Für das isotrope Materialverhalten ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 11} = \int_A \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-27.a}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 21} = \int_A \mathbf{D}_{11} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-27.b}]$$

$$\mathbf{k}_{0, \psi, 31} = \int_A -\mathbf{D}_{11} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-27.c}]$$

$$\mathbf{k}_{0, \psi, 42} = \hat{\mathbf{K}}_{0, \psi, 53} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-27.d}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 43} = \hat{\mathbf{K}}_{0, \psi, 52} = 0 \quad [\text{C-27.e}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 62} = \int_A -\mathbf{h}^T \cdot X_3 \cdot \mathbf{D}_{44} dA \quad [\text{C-27.f}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 63} = \int_A \mathbf{h}^T \cdot X_2 \cdot \mathbf{D}_{44} dA \quad [\text{C-27.g}]$$

**C.3.3.6 Isotropes Materialverhalten  $\nu = 0$** 

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 11} = \int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-28.a}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 21} = \int_A \mathbf{E} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-28.b}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 31} = \int_A -\mathbf{E} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-28.c}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 42} = \hat{\mathbf{K}}_{0, \psi, 53} = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{C-28.d}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 43} = \hat{\mathbf{K}}_{0, \psi, 52} = 0 \quad [\text{C-28.e}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 62} = \int_A -\mathbf{h}^T \cdot X_3 \cdot \mathbf{G} dA \quad [\text{C-28.f}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 63} = \int_A \mathbf{h}^T \cdot X_2 \cdot \mathbf{G} dA \quad [\text{C-28.g}]$$

### C.4 Berechnung der Schnittgröße $M_\psi$ :

Das Wölbmoment  $M_\psi$  wird auf Grundlage der separierten Darstellung der 3D-Spannungen, nach Punkt C.2, dargestellt. Die Separation nach den beiden Anteilen  $\mathbf{0}$  und  $\Omega$  wird gleich den Schnittgrößen  $\mathbf{n}_0$  durchgeführt.

$$M_\psi = M_{\psi,0} + M_{\psi,\Omega} = \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp} \, dA = \int_A \Omega^T \cdot (\mathbf{s}_{3D,\perp,0} + \mathbf{s}_{3D,\perp,\Omega}) \, dA \quad [\text{C-29.a}]$$

Die Wölbchnittgrößenanteile  $M_{\psi,0}$  und  $M_{\psi,\Omega}$  sind aus Glg. C-29.a, wie folgt, definiert:

$$M_{\psi,0} = \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp,0} \, dA = \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \cdot \mathbf{e}_0 \quad [\text{C-29.b}]$$

$$M_{\psi,\Omega} = \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \psi + \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \psi') \cdot \Omega \, dA \quad [\text{C-29.c}]$$

#### Kompakte Darstellung des Wölbmoments $M_\psi$

Das Wölbmoment lässt sich in Abhängigkeit des separierten stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters und der zugehörigen Vorfaktormatrizen, wie folgt, definieren:

$$M_\psi = M_{\psi,0} + M_{\psi,\Omega} = \mathbf{k}_{\psi,0} \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{K}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot \psi + \mathbf{K}_{\psi,\Omega,\psi'} \cdot \psi' \quad [\text{C-30.a}]$$

$$\mathbf{k}_{\psi,0} = \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [\text{C-30.b}]$$

$$\mathbf{K}_{\psi,\Omega,\psi} = \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Omega \, dA \quad [\text{C-30.c}]$$

$$\mathbf{K}_{\psi,\Omega,\psi'} = \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \Omega \, dA \quad [\text{C-30.d}]$$

#### C.4.1 Für die Schnittgröße $M_{\psi,0}$ gilt:

Für das Wölbmoment mit Zuordnung zu den sechs Verformungsfreiheitsgraden des Starrkörperanteils in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters für den Starrkörperanteil gilt:

$$M_{\psi,0} = \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{s}_{3D,\perp,0} \cdot dA = \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \cdot \mathbf{e}_0 \quad [\text{C-31.a}]$$

$$M_{\psi,0} = \mathbf{k}_{\psi,0} \cdot \mathbf{e}_0 \quad [\text{C-31.b}]$$

Die Vorfaktormatrix  $\mathbf{k}_{\psi,0}$  ist dabei, wie folgt, definiert:

$$\mathbf{k}_{\psi,0} = \int_A \Omega^T \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [\text{C-31.c}]$$

Bei Betrachtung des Vorfaktorvektors  $\mathbf{k}_{0, \psi'}$  nach Glg. C-12.c ergibt sich die folgende Äquivalenz:

$$\mathbf{k}_{\psi, 0}^T = \mathbf{k}_{0, \psi'} \quad [\text{C-31.d}]$$

Wird die Beziehung nach Glg. C-31.c ausmultipliziert, dann ergeben sich die folgenden Steifigkeitseinträge für den Vorfaktorenvektor  $\mathbf{k}_{\psi, 0}$ :

$$\mathbf{k}_{\psi, 0}^T = \int_A \begin{bmatrix} D_{11} \cdot \Omega_1 \\ D_{11} \cdot X_3 \cdot \Omega_1 \\ -D_{11} \cdot X_2 \cdot \Omega_1 \\ D_{44} \cdot \Omega_2 + D_{45} \cdot \Omega_3 \\ D_{45} \cdot \Omega_2 + D_{55} \cdot \Omega_3 \\ (D_{45} \cdot X_2 - D_{44} \cdot X_3) \cdot \Omega_2 + (D_{55} \cdot X_2 - D_{45} \cdot X_3) \cdot \Omega_3 \end{bmatrix} dA \quad [\text{C-31.e}]$$

#### C.4.1.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten ist der Materialsteifigkeitsvektor durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert, es gilt die Äquivalenz zu Glg. C-14.a:

$$\mathbf{k}_{\psi, 0}^T = \begin{bmatrix} K_{\psi, 0, M, 1} \\ K_{\psi, 0, M, 2} \\ K_{\psi, 0, M, 3} \\ S_{\psi, 0, M, 2} \\ S_{\psi, 0, M, 3} \\ S_{\psi, 0, M, 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{0, \psi', 1} \\ K_{0, \psi', 2} \\ K_{0, \psi', 3} \\ S_{0, \psi', 2} \\ S_{0, \psi', 3} \\ S_{0, \psi', 1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-32}]$$

#### C.4.1.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten ist der Materialsteifigkeitsvektor durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert, es gilt die Äquivalenz zu Glg. C-16.a:

$$\mathbf{k}_{\psi, 0}^T = \begin{bmatrix} K_{\psi, 0, M, 1} \\ K_{\psi, 0, M, 2} \\ K_{\psi, 0, M, 3} \\ S_{\psi, 0, M, 2} \\ S_{\psi, 0, M, 3} \\ S_{\psi, 0, M, 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{0, \psi', 1} \\ K_{0, \psi', 2} \\ K_{0, \psi', 3} \\ S_{0, \psi', 2} \\ S_{0, \psi', 3} \\ S_{0, \psi', 1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-33}]$$

### C.4.1.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten ist der Materialsteifigkeitsvektor durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert, es gilt die Äquivalenz zu Glg. C-18.a:

$$\mathbf{k}_{\Psi, 0}^T = \begin{bmatrix} K_{\Psi, 0, M, 1} \\ K_{\Psi, 0, M, 2} \\ K_{\Psi, 0, M, 3} \\ S_{\Psi, 0, M, 2} \\ S_{\Psi, 0, M, 3} \\ S_{\Psi, 0, M, 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{0, \Psi', 1} \\ K_{0, \Psi', 2} \\ K_{0, \Psi', 3} \\ S_{0, \Psi', 2} \\ S_{0, \Psi', 3} \\ S_{0, \Psi', 1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-34}]$$

### C.4.2 Für die Schnittgröße $M_{\Psi, \Omega}$ gilt:

Für das Wölbmoment mit Zuordnung zu den Verformungsfreiheitsgraden des Starrkörperanteils in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters für den  $\Omega$ -Anteil gilt:

$$\begin{aligned} M_{\Psi, \Omega} &= \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot (\mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi')) \cdot \boldsymbol{\Omega} \, dA = \\ &= \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, dA \cdot \Psi + \\ &+ \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, dA \cdot \Psi' \end{aligned} \quad [\text{C-35.a}]$$

Das Wölbmoment lässt sich in Abhängigkeit des separierten stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters  $\Psi$  und den zugehörigen Vorfaktoren in kompakter Form, wie folgt, definieren:

$$M_{\Psi, \Omega} = K_{\Psi, \Omega, \Psi} \cdot \Psi + K_{\Psi, \Omega, \Psi'} \cdot \Psi' \quad [\text{C-35.b}]$$

Für die Materialsteifigkeit mit Zugehörigkeit zu den verschiedenen Ableitungsordnungen von  $\Psi$  gilt:

$$K_{\Psi, \Omega, \Psi} = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, dA \quad [\text{C-35.c}]$$

$$K_{\Psi, \Omega, \Psi'} = \int_A \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, dA \quad [\text{C-35.d}]$$

**C.4.2.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten**

Für das orthotrope Materialverhalten ist der Vorfaktor  $K_{\psi, \Omega, \psi}$ , wie folgt, definiert:

$$K_{\psi, \Omega, \psi} = \int_A \left\{ D_{44} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \cdot \Omega_2 + D_{45} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \cdot \Omega_2 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \cdot \Omega_3 \right) + D_{12} \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} \cdot \Omega_1 + \right. \\ \left. + D_{16} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \cdot \Omega_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} \cdot \Omega_1 \right) + D_{13} \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \cdot \Omega_1 + D_{55} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \cdot \Omega_3 \right\} dA \quad [C-36.a]$$

Der Vorfaktor  $K_{\psi, \Omega, \psi'}$  ergibt sich, wie folgt:

$$K_{\psi, \Omega, \psi'} = \int_A D_{11} \cdot \Omega_1^2 + D_{44} \cdot \Omega_2^2 + D_{55} \cdot \Omega_3^2 + 2 \cdot D_{45} \cdot \Omega_2 \cdot \Omega_3 \quad dA \quad [C-36.b]$$

**C.4.2.2 Isotropes 3D-Materialverhalten**

Für das isotrope Materialverhalten ist der Vorfaktor  $K_{\psi, \Omega, \psi}$ , wie folgt, definiert:

$$K_{\psi, \Omega, \psi} = \int_A D_{44} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \cdot \Omega_2 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \cdot \Omega_3 \right) + D_{12} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} \cdot \Omega_1 + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \cdot \Omega_1 \right) \quad dA \quad [C-37.a]$$

Der Vorfaktor  $K_{\psi, \Omega, \psi'}$  ergibt sich wie folgt.

$$K_{\psi, \Omega, \psi'} = \int_A D_{11} \cdot \Omega_1^2 + D_{44} \cdot (\Omega_2^2 + \Omega_3^2) \quad dA \quad [C-37.b]$$

**C.4.2.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall  $\nu = 0$** 

Für das isotrope Materialverhalten ist der Vorfaktor  $K_{\psi, \Omega, \psi}$ , wie folgt, definiert:

$$K_{\psi, \Omega, \psi} = \int_A G \cdot \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \cdot \Omega_2 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \cdot \Omega_3 \right) \quad dA \quad [C-38.a]$$

Der Vorfaktor  $K_{\psi, \Omega, \psi'}$  ergibt sich, wie folgt:

$$K_{\psi, \Omega, \psi'} = \int_A E \cdot \Omega_1^2 + G \cdot (\Omega_2^2 + \Omega_3^2) \quad dA \quad [C-38.b]$$

### C.4.3 Berechnung der Schnittgrößen $M_\psi$ in diskretisierter Darstellung:

Entsprechend C.3.3 unter Betrachtung Glg. C-19.a und Glg. C-19.b gilt für die diskretisierte Darstellung des Wölbmoments folgende Beziehung:

$$M_\psi = M_{\psi,0} + M_{\psi,\Omega} = \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\psi,0} \cdot \mathbf{e}_0 + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi' \quad [\text{C-39.a}]$$

Dabei sind die einzelnen Vorfaktoren, wie folgt, definiert:

Für die Materialsteifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\psi,0}$  gilt:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi,0} = \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}_{3D,\perp} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [\text{C-39.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi,0} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_{\psi,0,11} & \hat{\mathbf{k}}_{\psi,0,12} & \hat{\mathbf{k}}_{\psi,0,13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{k}}_{\psi,0,24} & \hat{\mathbf{k}}_{\psi,0,25} & \hat{\mathbf{k}}_{\psi,0,26} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{k}}_{\psi,0,34} & \hat{\mathbf{k}}_{\psi,0,35} & \hat{\mathbf{k}}_{\psi,0,36} \end{bmatrix} \quad [\text{C-39.c}]$$

Für die Materialsteifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi}$  gilt:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi} = \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,H,2+3} \, dA \quad [\text{C-39.d}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi,12} & \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi,13} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi,21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi,31} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [\text{C-39.e}]$$

Für die Materialsteifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'}$  gilt:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'} = \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \quad [\text{C-39.f}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi'} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi',11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi',22} & \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi',23} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi',32} & \hat{\mathbf{K}}_{\psi,\Omega,\psi',33} \end{bmatrix} \quad [\text{C-39.g}]$$

Für die Materialeigenschaften der Orthotropie und der Isotropie gelten die formalen Zusammensetzungen für die einzelnen Einträge in den Materialsteifigkeitsmatrizen.

**C.4.3.1 Orthotropes Materialverhalten**

Für das orthotrope Materialverhalten ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 11} = \int_A \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-40.a}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 12} = \int_A \mathbf{D}_{11} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-40.b}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 13} = -\int_A \mathbf{D}_{11} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-40.c}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 24} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-40.d}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 25} = \hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 34} = \int_A \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-40.e}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 26} = \int_A \mathbf{D}_{45} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} - \mathbf{D}_{44} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-40.f}]$$

$$\mathbf{k}_{\psi, 0, 35} = \int_A \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-40.g}]$$

$$\mathbf{k}_{\psi, 0, 36} = \int_A \mathbf{D}_{55} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} - \mathbf{D}_{45} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-40.h}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 12} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-40.i}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 13} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-40.j}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 21} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-40.k}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 31} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-40.l}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 11} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-40.m}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 22} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-40.n}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 23} = \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 32} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-40.o}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 33} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-40.p}]$$

### C.4.3.2 Isotropes Materialverhalten $\nu \neq 0$

Für das isotrope Materialverhalten ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 11} = \int_A D_{11} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-41.a}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 12} = \int_A D_{11} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-41.b}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 13} = -\int_A D_{11} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-41.c}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 24} = \int_A D_{44} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-41.d}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 25} = \hat{\mathbf{K}}_{\psi, 0, 34} = 0 \quad [\text{C-41.e}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 26} = \int_A -D_{44} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-41.f}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 35} = \int_A D_{44} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-41.g}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 36} = \int_A D_{44} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-41.h}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 12} = \int_A \mathbf{h} \cdot D_{12} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-41.i}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 13} = \int_A \mathbf{h} \cdot D_{12} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-41.j}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 21} = \int_A \mathbf{h} \cdot D_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-41.k}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 31} = \int_A \mathbf{h} \cdot D_{44} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-41.l}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 11} = \int_A \mathbf{h} \cdot D_{11} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-41.m}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 22} = \int_A \mathbf{h} \cdot D_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-41.n}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 23} = \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 32} = 0 \quad [\text{C-41.o}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 33} = \int_A \mathbf{h} \cdot D_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-41.p}]$$

**C.4.3.3 Isotropes Materialverhalten  $\nu = 0$** 

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 11} = \int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-42.a}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 12} = \int_A \mathbf{E} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-42.b}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 13} = -\int_A \mathbf{E} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-42.c}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 24} = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-42.d}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 25} = \hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 34} = \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 12} = \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 13} = \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 23} = \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 32} = \mathbf{0} \quad [\text{C-42.e}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 26} = -\int_A \mathbf{G} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-42.f}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 35} = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-42.g}]$$

$$\hat{\mathbf{k}}_{\psi, 0, 36} = \int_A \mathbf{G} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{C-42.h}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 21} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-42.i}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi, 31} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-42.j}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 11} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-42.k}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 22} = \hat{\mathbf{K}}_{\psi, \Omega, \psi', 33} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-42.l}]$$

## C.5 Berechnung der Schnittgrößen $V_\psi$ :

Die Wölbquerkraft  $V_\psi$  wird auf Grundlage der separierten Darstellung der 3D-Spannungen, nach Punkt C.2, dargestellt. Die Separation nach den beiden Anteilen  $\mathbf{0}$  und  $\Omega$  wird gleich den Schnittgrößen  $\mathbf{n}_0$  durchgeführt.

$$\begin{aligned} V_\psi &= V_{\psi,0} + V_{\psi,\Omega} = \\ &= \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{s}_{3D} \cdot dA = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot (\mathbf{s}_{3D,0} + \mathbf{s}_{3D,\Omega}) \cdot dA \end{aligned} \quad [C-43.a]$$

Die Wölbchnittgrößenanteile  $V_{\psi,0}$  und  $V_{\psi,\Omega}$  sind nach Glg. C-29.a, wie folgt, definiert.

$$V_{\psi,0} = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dA \cdot \mathbf{e}_0 \quad [C-43.b]$$

$$V_{\psi,\Omega} = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \psi + \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \psi') \cdot \Omega \cdot dA = \quad [C-43.c]$$

### Kompakte Darstellung der Querkraft $V_\psi$

Die Wölbquerkraft lässt sich in Abhängigkeit des separierten stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters und der zugehörigen Vorfaktormatrizen wie folgt definieren:

$$V_\psi = V_{\psi,0} + V_{\psi,\Omega} = \mathbf{s}_{\psi,0} \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{S}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot \psi + \mathbf{S}_{\psi,\Omega,\psi'} \cdot \psi' \quad [C-44.a]$$

Für die Vorfaktorvektoren in Glg. C-44.a gelten dabei die folgenden formalen Zusammenhänge:

$$\mathbf{s}_{\psi,0} = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dA \quad [C-44.b]$$

$$\mathbf{S}_{\psi,\Omega,\psi} = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,2+3} \cdot \Omega \cdot dA \quad [C-44.c]$$

$$\mathbf{S}_{\psi,\Omega,\psi'} = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \Omega \cdot dA \quad [C-44.d]$$

### C.5.1 Für die Schnittgröße $V_{\psi,0}$ gilt:

Für die Wölbquerkraft mit Zuordnung zu den sechs Verformungsfreiheitsgraden des Starrkörperanteils in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters für den Starrkörperanteil gilt:

$$V_{\psi,0} = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D,\alpha,0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dA \cdot \mathbf{e}_0 \quad [C-45.a]$$

$$V_{\psi, 0} = \mathbf{s}_{\psi, 0} \cdot \mathbf{e}_0 \quad [\text{C-45.b}]$$

Der Vorfaktorvektor  $\mathbf{s}_{\psi, 0}$  ist dabei, wie folgt, definiert.

$$\mathbf{s}_{\psi, 0} = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dA \quad [\text{C-45.c}]$$

Bei Betrachtung des Vorfaktorvektors  $\mathbf{k}_{0, \psi}$  nach Glg. C-12.b ergibt sich die folgende Äquivalenz:

$$\mathbf{s}_{\psi, 0} = \mathbf{k}_{0, \psi}^T \quad [\text{C-45.d}]$$

Wird die Beziehung nach Glg. C-45.c ausmultipliziert, dann ergeben sich die folgenden Steifigkeitseinträge für den Vorfaktorenvektor  $\mathbf{s}_{\psi, 0}$ :

$$\mathbf{s}_{\psi, 0}^T = \mathbf{k}_{0, \psi} = \int_A \begin{bmatrix} D_{12} \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} + D_{13} \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} + D_{16} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \right) \\ D_{12} \cdot X_3 \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} + D_{13} \cdot X_3 \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} + D_{16} \cdot X_3 \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \right) \\ -D_{12} \cdot X_2 \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} - D_{13} \cdot X_2 \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} - D_{16} \cdot X_2 \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \right) \\ D_{44} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + D_{45} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \\ D_{45} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + D_{55} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \\ (D_{45} \cdot X_2 - D_{44} \cdot X_3) \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} + (D_{55} \cdot X_2 - D_{45} \cdot X_3) \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \end{bmatrix} \cdot dA \quad [\text{C-45.e}]$$

$$\mathbf{s}_{\psi, 0}^T = \begin{bmatrix} K_{\psi, 0, V, 1} \\ K_{\psi, 0, V, 2} \\ K_{\psi, 0, V, 3} \\ S_{\psi, 0, V, 2} \\ S_{\psi, 0, V, 3} \\ S_{\psi, 0, V, 1} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{0, \psi} = \begin{bmatrix} K_{0, \psi, 1} \\ K_{0, \psi, 2} \\ K_{0, \psi, 3} \\ S_{0, \psi, 2} \\ S_{0, \psi, 3} \\ S_{0, \psi, 1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-45.f}]$$

### C.5.1.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten ist der Materialsteifigkeitsvektor durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert, es gilt die Äquivalenz zu Glg. C-13.a.

$$\mathbf{s}_{\psi,0}^T = \begin{bmatrix} K_{\psi,0,V,1} \\ K_{\psi,0,V,2} \\ K_{\psi,0,V,3} \\ S_{\psi,0,V,2} \\ S_{\psi,0,V,3} \\ S_{\psi,0,V,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{0,\psi,1} \\ K_{0,\psi,2} \\ K_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,2} \\ S_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-46}]$$

### C.5.1.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten ist der Materialsteifigkeitsvektor durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert, es gilt die Äquivalenz zu Glg. C-15.a.

$$\mathbf{s}_{\psi,0}^T = \begin{bmatrix} K_{\psi,0,V,1} \\ K_{\psi,0,V,2} \\ K_{\psi,0,V,3} \\ S_{\psi,0,V,2} \\ S_{\psi,0,V,3} \\ S_{\psi,0,V,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{0,\psi,1} \\ K_{0,\psi,2} \\ K_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,2} \\ S_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-47}]$$

### C.5.1.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  ist der Materialsteifigkeitsvektor durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert, es gilt die Äquivalenz zu Glg. C-17.a.

$$\mathbf{s}_{\psi,0}^T = \begin{bmatrix} K_{\psi,0,V,1} \\ K_{\psi,0,V,2} \\ K_{\psi,0,V,3} \\ S_{\psi,0,V,2} \\ S_{\psi,0,V,3} \\ S_{\psi,0,V,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{0,\psi,1} \\ K_{0,\psi,2} \\ K_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,2} \\ S_{0,\psi,3} \\ S_{0,\psi,1} \end{bmatrix} \quad [\text{C-48}]$$

### C.5.2 Für die Schnittgröße $V_{\Psi, \Omega}$ gilt:

Für die Wölbquerkraft mit Zuordnung zu den Verformungsfreiheitsgraden des Starrkörperanteils in Abhängigkeit des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters für den  $\Omega$ -Anteil gilt:

$$\begin{aligned}
 V_{\Psi, \Omega} &= \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot (\mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Psi + \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Psi') \cdot \Omega \cdot dA = \\
 &= \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Omega \cdot dA \cdot \Psi + \\
 &+ \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Omega \cdot dA \cdot \Psi'
 \end{aligned} \tag{C-49.a}$$

Die Wölbquerkraft lässt sich in Abhängigkeit des separierten stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters  $\Psi$  und der zugehörigen Vorfaktoren in kompakter Form, wie folgt, definieren:

$$V_{\Psi, \Omega} = \mathbf{S}_{\Psi, \Omega, \Psi} \cdot \Psi + \mathbf{S}_{\Psi, \Omega, \Psi'} \cdot \Psi' \tag{C-49.b}$$

Für die Materialsteifigkeit mit Zugehörigkeit zu den verschiedenen Ableitungsordnungen von  $\Psi$  gilt:

$$\mathbf{S}_{\Psi, \Omega, \Psi} = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \cdot \Omega \cdot dA \tag{C-49.c}$$

$$\mathbf{S}_{\Psi, \Omega, \Psi'} = \int_A \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \Omega^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \alpha, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \Omega \cdot dA \tag{C-49.d}$$

#### C.5.2.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten ist der Vorfaktor  $\mathbf{S}_{\Psi, \Omega, \Psi}$ , wie folgt, definiert:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{\Psi, \Omega, \Psi} &= \int_A \left\{ \mathbf{D}_{44} \cdot \frac{\partial \Omega_1 \partial \Omega_1}{\partial X_2 \partial X_2} + 2\mathbf{D}_{45} \cdot \frac{\partial \Omega_1 \partial \Omega_1}{\partial X_2 \partial X_3} + \mathbf{D}_{55} \cdot \frac{\partial \Omega_1 \partial \Omega_1}{\partial X_3 \partial X_3} + \mathbf{D}_{22} \cdot \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_2}{\partial X_2 \partial X_2} + \right. \\
 &+ 2\mathbf{D}_{26} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_2}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_3}{\partial X_2 \partial X_2} \right) + \mathbf{D}_{66} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_2}{\partial X_3 \partial X_3} + 2 \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_3}{\partial X_3 \partial X_2} + \frac{\partial \Omega_3 \partial \Omega_3}{\partial X_2 \partial X_2} \right) + \\
 &+ 2\mathbf{D}_{23} \cdot \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_3}{\partial X_2 \partial X_3} + 2\mathbf{D}_{36} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_3}{\partial X_3 \partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3 \partial \Omega_3}{\partial X_2 \partial X_3} \right) + \left. \mathbf{D}_{33} \cdot \frac{\partial \Omega_3 \partial \Omega_3}{\partial X_3 \partial X_3} \right\} dA
 \end{aligned} \tag{C-50.a}$$

Der Vorfaktor  $\mathbf{S}_{\Psi, \Omega, \Psi'}$  ergibt sich wie folgt.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{\Psi, \Omega, \Psi'} &= \int_A \left\{ \mathbf{D}_{44} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \cdot \Omega_2 + \mathbf{D}_{45} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \cdot \Omega_2 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \cdot \Omega_3 \right) + \mathbf{D}_{12} \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} \cdot \Omega_1 + \right. \\
 &+ \left. \mathbf{D}_{16} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_2} \cdot \Omega_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_3} \cdot \Omega_1 \right) + \mathbf{D}_{13} \cdot \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \cdot \Omega_1 + \mathbf{D}_{55} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \cdot \Omega_3 \right\} dA
 \end{aligned} \tag{C-50.b}$$

### C.5.2.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten ist der Vorfaktor  $\mathbf{S}_{\psi, \Omega, \psi}$ , wie folgt, definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\psi, \Omega, \psi} = \int_A \left\{ \mathbf{D}_{44} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_1 \partial \Omega_1}{\partial X_2 \partial X_2} + \frac{\partial \Omega_1 \partial \Omega_1}{\partial X_3 \partial X_3} \right) + \mathbf{D}_{22} \cdot \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_2}{\partial X_2 \partial X_2} + \right. \\ \left. + 2\mathbf{D}_{26} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_2}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_3}{\partial X_2 \partial X_2} \right) + \mathbf{D}_{66} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_2}{\partial X_3 \partial X_3} + 2 \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_3}{\partial X_3 \partial X_2} + \frac{\partial \Omega_3 \partial \Omega_3}{\partial X_2 \partial X_2} \right) + \right. \\ \left. + 2\mathbf{D}_{23} \cdot \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_3}{\partial X_2 \partial X_3} + 2\mathbf{D}_{36} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_3}{\partial X_3 \partial X_3} + \frac{\partial \Omega_3 \partial \Omega_3}{\partial X_2 \partial X_3} \right) + \mathbf{D}_{33} \cdot \frac{\partial \Omega_3 \partial \Omega_3}{\partial X_3 \partial X_3} \right\} dA \end{aligned} \quad [\text{C-51.a}]$$

Der Vorfaktor  $\mathbf{S}_{\psi, \Omega, \psi}$  ergibt sich, wie folgt:

$$\mathbf{S}_{\psi, \Omega, \psi} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \cdot \Omega_2 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \cdot \Omega_3 \right) + \mathbf{D}_{12} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial X_2} \cdot \Omega_1 + \frac{\partial \Omega_3}{\partial X_3} \cdot \Omega_1 \right) dA \quad [\text{C-51.b}]$$

### C.5.2.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  ist der Vorfaktor  $\mathbf{S}_{\psi, \Omega, \psi}$ , wie folgt, definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\psi, \Omega, \psi} = \int_A \left\{ \mathbf{E} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_2}{\partial X_2 \partial X_2} + \frac{\partial \Omega_3 \partial \Omega_3}{\partial X_3 \partial X_3} \right) + \right. \\ \left. + \mathbf{G} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_1 \partial \Omega_1}{\partial X_2 \partial X_2} + \frac{\partial \Omega_1 \partial \Omega_1}{\partial X_3 \partial X_3} + \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_2}{\partial X_3 \partial X_3} + 2 \frac{\partial \Omega_2 \partial \Omega_3}{\partial X_3 \partial X_2} + \frac{\partial \Omega_3 \partial \Omega_3}{\partial X_2 \partial X_2} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad [\text{C-52.a}]$$

Der Vorfaktor  $\mathbf{S}_{\psi, \Omega, \psi}$  ergibt sich, wie folgt:

$$\mathbf{S}_{\psi, \Omega, \psi} = \int_A \mathbf{G} \cdot \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_2} \cdot \Omega_2 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial X_3} \cdot \Omega_3 \right) dA \quad [\text{C-52.b}]$$

## C.6 Berechnung der Schnittgrößen $V_\psi$ in diskretisierter Darstellung

Entsprechend C.3.3 unter Betrachtung Glg. C-19.a und Glg. C-19.b gilt für die diskretisierte Darstellung des Wölbmoments folgende Beziehung:

$$V_\psi = V_{\psi,0} + V_{\psi,\Omega} = \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\psi,0} \cdot \mathbf{e}_0 + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi'} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi' \quad [\text{C-53.a}]$$

Dabei sind die einzelnen Vorfaktoren ,wie folgt, definiert:

**Für die Materialsteifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{S}}_{\psi,0}$  gilt:**

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi,0} = \int_A \mathbf{B}_{3D,H,2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dA \quad [\text{C-53.b}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{s}_{\psi,0,14} & \hat{s}_{\psi,0,15} & \hat{s}_{\psi,0,16} \\ \hat{s}_{\psi,0,21} & \hat{s}_{\psi,0,22} & \hat{s}_{\psi,0,23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{s}_{\psi,0,31} & \hat{s}_{\psi,0,32} & \hat{s}_{\psi,0,33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [\text{C-53.c}]$$

**Für die Materialsteifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi}$  gilt:**

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi} = \int_A \mathbf{B}_{3D,H,2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,H,2+3} \cdot dA \quad [\text{C-53.d}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi} = \begin{bmatrix} \hat{s}_{\psi,\Omega,\psi,11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{s}_{\psi,\Omega,\psi,22} & \hat{s}_{\psi,\Omega,\psi,23} \\ \mathbf{0} & \hat{s}_{\psi,\Omega,\psi,32} & \hat{s}_{\psi,\Omega,\psi,33} \end{bmatrix} \quad [\text{C-53.e}]$$

**Für die Materialsteifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi'}$  gilt:**

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi'} = \int_A \mathbf{B}_{3D,H,2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D,1,0} \cdot \mathbf{H}^T \cdot dA \quad [\text{C-53.f}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi,\Omega,\psi'} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{s}_{\psi,\Omega,\psi',12} & \hat{s}_{\psi,\Omega,\psi',13} \\ \hat{s}_{\psi,\Omega,\psi',21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{s}_{\psi,\Omega,\psi',31} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [\text{C-53.g}]$$

Für die Materialeigenschaften der Orthotropie und der Isotropie gelten die formalen Zusammensetzungen für die einzelnen Einträge in den Materialsteifigkeitsmatrizen.

### C.6.1 Orthotropes Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0, 14} = \int_A D_{44} \cdot \mathbf{h}_2 + D_{45} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{C-54.a}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0, 15} = \int_A D_{45} \cdot \mathbf{h}_2 + D_{55} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{C-54.b}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0, 16} = \int_A (D_{45} \cdot \mathbf{h}_2 + D_{55} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_2 - (D_{44} \cdot \mathbf{h}_2 + D_{45} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-54.c}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0, 21} = \int_A D_{12} \cdot \mathbf{h}_2 + D_{16} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{C-54.d}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0, 22} = \int_A (D_{12} \cdot \mathbf{h}_2 + D_{16} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-54.e}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0, 23} = -\int_A (D_{12} \cdot \mathbf{h}_2 + D_{16} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_2 \, dA \quad [\text{C-54.f}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0, 31} = \int_A D_{16} \cdot \mathbf{h}_2 + D_{13} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{C-54.g}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0, 32} = \int_A (D_{16} \cdot \mathbf{h}_2 + D_{13} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-54.h}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, 0, 33} = -\int_A (D_{16} \cdot \mathbf{h}_2 + D_{13} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_2 \, dA \quad [\text{C-54.i}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi, 11} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot D_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{45} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot D_{45} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{55} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-54.j}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi, 22} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot D_{22} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot D_{26} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{66} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-54.k}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi, 23} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot D_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{66} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot D_{23} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-54.l}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi, 32} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot D_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{23} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot D_{66} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-54.m}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi, 33} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot D_{66} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{36} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot D_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{33} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-54.n}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi', 12} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot D_{44} \cdot \mathbf{h}^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{45} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-54.o}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\psi, \Omega, \psi', 13} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot D_{45} \cdot \mathbf{h}^T + \mathbf{h}_3 \cdot D_{55} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-54.p}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 21} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-54.q}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 31} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-54.r}]$$

### C.6.2 Isotropes Materialverhalten $\nu \neq 0$

Für das isotrope Materialverhalten ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 14} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2 \, dA \quad [\text{C-55.a}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 15} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{C-55.b}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 16} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_3 \cdot X_2 - \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2 \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-55.c}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 21} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2 \, dA \quad [\text{C-55.d}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 22} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2 \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-55.e}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 23} = -\int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2 \cdot X_2 \, dA \quad [\text{C-55.f}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 31} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{C-55.g}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 32} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_3 \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-55.h}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 33} = -\int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_3 \cdot X_2 \, dA \quad [\text{C-55.i}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 11} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-55.j}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 22} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{22} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-55.k}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 23} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{23} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-55.l}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 32} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{23} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-55.m}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 33} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{33} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-55.n}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 12} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-55.o}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 13} = \int_A \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-55.p}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 21} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-55.q}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 31} = \int_A \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-55.r}]$$

### C.6.3 Isotropes Materialverhalten $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  ist die Materialsteifigkeitsmatrix durch die folgenden Steifigkeitsglieder definiert:

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 14} = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2 \, dA \quad [\text{C-56.a}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 15} = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{C-56.b}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 16} = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3 \cdot X_2 - \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2 \cdot X_3 \, dA \quad [\text{C-56.c}]$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 21} = \hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 22} = \hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 23} = \hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 31} = \hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 32} = \hat{\mathbf{s}}_{\Psi, 0, 33} = \mathbf{0} \quad [\text{C-56.d}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 11} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-56.e}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 22} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-56.f}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 23} = \int_A \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-56.g}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 32} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{C-56.h}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 33} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{C-56.i}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 12} = \int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-56.j}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 13} = \int_A \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{C-56.k}]$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 21} = \hat{\mathbf{S}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 31} = \mathbf{0} \quad [\text{C-56.l}]$$

**C.7 Zusammengefasst gilt für das Moment  $M_{\psi,AE}$ :**

Ausgehend von Glg. C-30.a gilt für die Stabendwölbmomente die folgende Beziehung zu den diskreten Werten des stabachsenbezogenen Verzerrungsparameters an den Stabenden

$$M_{\psi, \frac{A}{E}} = M_{\psi, 0, \frac{A}{E}} + M_{\psi, \Omega, \frac{A}{E}} = \mathbf{K}_{\psi, 0} \cdot \mathbf{e}_{0, \frac{A}{E}} + K_{\psi, \Omega, \psi} \cdot \psi_{\frac{A}{E}} + K_{\psi, \Omega, \psi'} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}} \quad [\text{C-57}]$$

Die Vorfaktoren für die obige Gleichungen sind in Glg. C-31.c, Glg. C-35.c und Glg. C-35.d im Detail definiert.



# Anhang D

**Vorfaktormatrizen  
des originalen DGL-  
Systems**

## D.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die Vorfaktormatrizen für die Differentialgleichungen in originaler Darstellung, die in Anhang B angegeben wurden, im Detail berechnet. Als Grundlagen werden dafür die folgenden Differentialoperatormatrizen sowie die Materialsteifigkeitsmatrix verwendet.

### Differentialoperatormatrizen für die weiteren Herleitungen:

Die Differentialoperatormatrizen werden nach Glg. 4-6.c und Glg. 6-6.f verwendet.

$$\mathbf{B}_{3D, 1, 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [\text{D-1.a}]$$

$$\mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad [\text{D-1.b}]$$

### Materialsteifigkeitsmatrix für die weiteren Herleitungen

Die Materialsteifigkeitsmatrix ist dabei nach Glg. 6-26.a definiert:

$$\mathbf{D}_{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \quad [\text{D-1.c}]$$

## D.2 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\mathbf{K}_{\Omega, \psi}$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{K}_{\Omega, \psi}$  nach Glg. B-2.h gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{\Omega, \psi} &= \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} = \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3}^T & \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \\ \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3} \end{bmatrix} = \\
 &= \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} + \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D, \parallel} \cdot \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3} + \\
 &+ \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D, c}^T \cdot \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} + \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D, c} \cdot \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3} \quad [\text{D-2.a}]
 \end{aligned}$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi} = \begin{bmatrix} K_{\Omega, 11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega, 22} & K_{\Omega, 23} \\ 0 & K_{\Omega, 23} & K_{\Omega, 33} \end{bmatrix} \quad [\text{D-2.b}]$$

### D.2.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-2.b:

$$K_{\Omega, 11} = D_{44} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + 2D_{45} \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} + D_{55} \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \quad [\text{D-3.a}]$$

$$K_{\Omega, 22} = D_{22} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \quad [\text{D-3.b}]$$

$$K_{\Omega, 33} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + 2D_{36} \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} + D_{33} \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \quad [\text{D-3.c}]$$

$$K_{\Omega, 23} = D_{26} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + (D_{23} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} + D_{36} \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \quad [\text{D-3.d}]$$

### D.2.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-2.b

$$K_{\Omega, 11} = D_{44} \left( \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) \quad [D-4.a]$$

$$K_{\Omega, 22} = D_{22} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \quad [D-4.b]$$

$$K_{\Omega, 33} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + 2D_{36} \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} + D_{33} \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \quad [D-4.c]$$

$$K_{\Omega, 23} = D_{26} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + (D_{23} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} + D_{36} \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \quad [D-4.d]$$

### D.2.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-2.b

$$K_{\Omega, 11} = G \left( \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) \quad [D-5.a]$$

$$K_{\Omega, 22} = E \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + G \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \quad [D-5.b]$$

$$K_{\Omega, 33} = G \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + E \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \quad [D-5.c]$$

$$K_{\Omega, 23} = G \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_3} \quad [D-5.d]$$

### D.3 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\mathbf{K}_{\Omega, \psi'}$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{K}_{\Omega, \psi'}$  nach Glg. B-2.i gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\Omega, \psi'} &= \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} + \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \\ \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3}^T \\ \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} + \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D, \perp}) + (\mathbf{D}_{3D, c} \cdot \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3} + \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D, c}^T) \end{aligned} \quad [\text{D-6.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi'} = \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega, 12} & K_{\Omega, 13} \\ K_{\Omega, 12} & 0 & 0 \\ K_{\Omega, 13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{D-6.b}]$$

#### D.3.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-6.b:

$$K_{\Omega, 12} = (\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{44}) \frac{\partial}{\partial X_2} + (\mathbf{D}_{16} + \mathbf{D}_{45}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-7.a}]$$

$$K_{\Omega, 13} = (\mathbf{D}_{16} + \mathbf{D}_{45}) \frac{\partial}{\partial X_2} + (\mathbf{D}_{13} + \mathbf{D}_{55}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-7.b}]$$

#### D.3.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-6.b:

$$K_{\Omega, 12} = (\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{44}) \frac{\partial}{\partial X_2} \quad [\text{D-8.a}]$$

$$K_{\Omega, 13} = (\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{44}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-8.b}]$$

### D.3.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-6.b:

$$K_{\Omega, 12} = \mathbf{G} \frac{\partial}{\partial X_2} \quad [\text{D-9.a}]$$

$$K_{\Omega, 13} = \mathbf{G} \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-9.b}]$$

## D.4 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\mathbf{K}_{\Omega, \psi''}$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{K}_{\Omega, \psi''}$  nach Glg. B-2.j gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi''} = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{3D, \perp} \quad [\text{D-10.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi''} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & D_{45} \\ 0 & D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \quad [\text{D-10.b}]$$

### D.4.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-10.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi''} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & D_{45} \\ 0 & D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \quad [\text{D-10.c}]$$

### D.4.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-10.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi''} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \quad [\text{D-10.d}]$$

### D.4.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das orthotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-10.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi''} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad [\text{D-10.e}]$$

## D.5 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \Gamma}$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \Gamma}$  nach Glg. B-4.f gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \Gamma} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \quad [\text{D-11.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega, 11, \Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\Omega, 22, \Gamma} & \mathbf{K}_{\Omega, 23, \Gamma} \\ 0 & \mathbf{K}_{\Omega, 32, \Gamma} & \mathbf{K}_{\Omega, 33, \Gamma} \end{bmatrix} \quad [\text{D-11.b}]$$

### D.5.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-11.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, 11, \Gamma} = -(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{44} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{45}) \frac{\partial}{\partial X_2} - (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{45} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{55}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-12.a}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 22, \Gamma} = -(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{22} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{26}) \frac{\partial}{\partial X_2} - (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{66}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-12.b}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 33, \Gamma} = -(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{66} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{36}) \frac{\partial}{\partial X_2} - (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{36} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{33}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-12.c}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 23, \Gamma} = -(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{66}) \frac{\partial}{\partial X_2} - (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{23} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{36}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-12.d}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 32, \Gamma} = -(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{23}) \frac{\partial}{\partial X_2} - (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{66} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{36}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-12.e}]$$

### D.5.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-11.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, 11, \Gamma} = -\mathbf{D}_{44} \cdot \left( \mathbf{N}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} + \mathbf{N}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \right) \quad [\text{D-13.a}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 22, \Gamma} = -(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{22} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{26}) \frac{\partial}{\partial X_2} - (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{66}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-13.b}]$$

$$K_{\Omega, 33, \Gamma} = -(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{66} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{36}) \frac{\partial}{\partial X_2} - (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{36} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{33}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-13.c}]$$

$$K_{\Omega, 23, \Gamma} = -(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{66}) \frac{\partial}{\partial X_2} - (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{23} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{36}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-13.d}]$$

$$K_{\Omega, 32, \Gamma} = -(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{23}) \frac{\partial}{\partial X_2} - (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{66} + \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{36}) \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-13.e}]$$

### D.5.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-11.b:

$$K_{\Omega, 11, \Gamma} = -\mathbf{G} \cdot \left( \mathbf{N}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} + \mathbf{N}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \right) \quad [\text{D-14.a}]$$

$$K_{\Omega, 22, \Gamma} = -\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} - \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-14.b}]$$

$$K_{\Omega, 33, \Gamma} = -\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} - \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-14.c}]$$

$$K_{\Omega, 23, \Gamma} = -\mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} \quad [\text{D-14.d}]$$

$$K_{\Omega, 32, \Gamma} = -\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-14.e}]$$

## D.6 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \Gamma}$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \Gamma}$  nach Glg. B-4.g gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \Gamma} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \quad [\text{D-15.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{\Omega, 12, \Gamma} & \mathbf{K}_{\Omega, 13, \Gamma} \\ \mathbf{K}_{\Omega, 21, \Gamma} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{\Omega, 31, \Gamma} & & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{D-15.b}]$$

### D.6.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-15.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, 12, \Gamma} = -\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{44} - \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{45} \quad [\text{D-16.a}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 13, \Gamma} = -\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{45} - \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{55} \quad [\text{D-16.b}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 21, \Gamma} = -\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{12} - \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{16} \quad [\text{D-16.c}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 31, \Gamma} = -\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{16} - \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{13} \quad [\text{D-16.d}]$$

### D.6.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-15.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, 12, \Gamma} = -\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{44} \quad [\text{D-17.a}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 13, \Gamma} = -\mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{44} \quad [\text{D-17.b}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 21, \Gamma} = -\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{D}_{12} \quad [\text{D-17.c}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 31, \Gamma} = -\mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{D}_{12} \quad [\text{D-17.d}]$$

**D.6.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall  $\nu = 0$** 

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-15.b:

$$K_{\Omega, 12, \Gamma} = -N_2 \cdot G \quad [D-18.a]$$

$$K_{\Omega, 13, \Gamma} = -N_3 \cdot G \quad [D-18.b]$$

$$K_{\Omega, 21, \Gamma} = 0 \quad [D-18.c]$$

$$K_{\Omega, 31, \Gamma} = 0 \quad [D-18.d]$$

## D.7 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \underline{A}}^E$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \underline{A}}^E$  nach Glg. B-6.h gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \underline{A}}^E = -\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 2+3} \quad [\text{D-19.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi, \underline{A}}^E = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{\Omega, 12, \underline{A}}^E & \mathbf{K}_{\Omega, 13, \underline{A}}^E \\ \mathbf{K}_{\Omega, 21, \underline{A}}^E & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{\Omega, 31, \underline{A}}^E & & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{D-19.b}]$$

### D.7.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-19.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, 12, \underline{A}}^E = -\mathbf{N}_1 \cdot \left( \mathbf{D}_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} + \mathbf{D}_{16} \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \right) \quad [\text{D-20.a}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 13, \underline{A}}^E = -\mathbf{N}_1 \cdot \left( \mathbf{D}_{16} \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} + \mathbf{D}_{13} \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \right) \quad [\text{D-20.b}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 21, \underline{A}}^E = -\mathbf{N}_1 \cdot \left( \mathbf{D}_{44} \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} + \mathbf{D}_{45} \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \right) \quad [\text{D-20.c}]$$

$$\mathbf{K}_{\Omega, 12, \underline{A}}^E = -\mathbf{N}_1 \cdot \left( \mathbf{D}_{45} \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} + \mathbf{D}_{55} \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \right) \quad [\text{D-20.d}]$$

**D.7.2 Isotropes 3D-Materialverhalten**

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-19.b:

$$K_{\Omega, 12, \frac{A}{E}} = -N_1 \cdot D_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} \quad [\text{D-21.a}]$$

$$K_{\Omega, 13, \frac{A}{E}} = -N_1 \cdot D_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-21.b}]$$

$$K_{\Omega, 21, \frac{A}{E}} = -N_1 \cdot D_{44} \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} \quad [\text{D-21.c}]$$

$$K_{\Omega, 12, \frac{A}{E}} = -N_1 \cdot D_{44} \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-21.d}]$$

**D.7.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall  $\nu = 0$** 

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-19.b:

$$K_{\Omega, 12, \frac{A}{E}} = 0 \quad [\text{D-22.a}]$$

$$K_{\Omega, 13, \frac{A}{E}} = 0 \quad [\text{D-22.b}]$$

$$K_{\Omega, 21, \frac{A}{E}} = -N_1 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial X_2} \quad [\text{D-22.c}]$$

$$K_{\Omega, 12, \frac{A}{E}} = -N_1 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial X_3} \quad [\text{D-22.d}]$$

## D.8 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}}$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}}$  nach Glg. B-6.i gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} = -\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \quad [\text{D-23.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} = -\mathbf{N}_1 \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & D_{45} \\ 0 & D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \quad [\text{D-23.b}]$$

### D.8.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-23.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} = -\mathbf{N}_1 \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & D_{45} \\ 0 & D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \quad [\text{D-24}]$$

### D.8.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-23.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} = -\mathbf{N}_1 \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \quad [\text{D-25}]$$

### D.8.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-23.b:

$$\mathbf{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} = -\mathbf{N}_1 \cdot \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad [\text{D-26}]$$

## D.9 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der Lastterme: $\mathbf{F}_{\Omega, e0}$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{F}_{\Omega, e0}$  nach Glg. B-2.m gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\Omega, e0} &= \mathbf{B}_{3D, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1,0} \cdot \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3} \\ \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_0 \\ &= (\mathbf{B}_{3D, \perp, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D, \perp} + \mathbf{B}_{3D, \parallel, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D, c}^T) \cdot \mathbf{A}_0 \end{aligned} \quad [\text{D-27.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, gilt:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{16} & -D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{13} & -D_{16} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{D-27.b}]$$

### D.9.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-27.b:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{16} & -D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{13} & -D_{16} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{D-28}]$$

### D.9.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-27.b:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{D-29}]$$

### D.9.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-27.b:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{D-30}]$$

## D.10 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der Lastterme: $\mathbf{F}_{\Omega, e0'}$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{F}_{\Omega, e0'}$  nach Glg. B-2.n gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0'} = \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3D, \perp} & \mathbf{D}_{3D, c} \\ \mathbf{D}_{3D, c}^T & \mathbf{D}_{3D, \parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_0 = \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [\text{D-31.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt gilt:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0'} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11}X_3 & -D_{11}X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & D_{45}X_2 - D_{44}X_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_{45} & D_{55} & D_{55}X_2 - D_{45}X_3 \end{bmatrix} \quad [\text{D-31.b}]$$

### D.10.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-31.b:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0'} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11}X_3 & -D_{11}X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & D_{45}X_2 - D_{44}X_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_{45} & D_{55} & D_{55}X_2 - D_{45}X_3 \end{bmatrix} \quad [\text{D-32}]$$

### D.10.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-31.b:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0'} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11}X_3 & -D_{11}X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & -D_{44}X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{44}X_2 \end{bmatrix} \quad [\text{D-33}]$$

### D.10.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-31.b:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0'} = \begin{bmatrix} E & EX_3 & -EX_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & -GX_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & GX_2 \end{bmatrix} \quad [\text{D-34}]$$

## D.11 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der Lastterme: $\mathbf{F}_{\Omega, e0, \Gamma}$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{F}_{\Omega, e0, \Gamma}$  nach Glg. B-4.i gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0, \Gamma} = -\mathbf{V}_{2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [\text{D-35.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0, \Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{\Omega, e0, 14} & F_{\Omega, e0, 15} & F_{\Omega, e0, 16} \\ F_{\Omega, e0, 21} & F_{\Omega, e0, 22} & F_{\Omega, e0, 23} & 0 & 0 & 0 \\ F_{\Omega, e0, 31} & F_{\Omega, e0, 32} & F_{\Omega, e0, 33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{D-35.b}]$$

### D.11.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-35.b:

$$F_{\Omega, e0, 14} = -N_2 \cdot D_{44} - N_3 \cdot D_{45} \quad [\text{D-36.a}]$$

$$F_{\Omega, e0, 15} = -N_2 \cdot D_{45} - N_3 \cdot D_{55} \quad [\text{D-36.b}]$$

$$F_{\Omega, e0, 16} = X_3 \cdot (N_2 \cdot D_{44} + N_3 \cdot D_{45}) - X_2 \cdot (N_2 \cdot D_{45} + N_3 \cdot D_{55}) \quad [\text{D-36.c}]$$

$$F_{\Omega, e0, 21} = -N_2 \cdot D_{12} - N_3 \cdot D_{16} \quad [\text{D-36.d}]$$

$$F_{\Omega, e0, 22} = -X_3 \cdot (N_2 \cdot D_{12} + N_3 \cdot D_{16}) \quad [\text{D-36.e}]$$

$$F_{\Omega, e0, 23} = X_2 \cdot (N_2 \cdot D_{12} + N_3 \cdot D_{16}) \quad [\text{D-36.f}]$$

$$F_{\Omega, e0, 31} = -N_2 \cdot D_{16} - N_3 \cdot D_{13} \quad [\text{D-36.g}]$$

$$F_{\Omega, e0, 32} = -X_3 \cdot (N_2 \cdot D_{16} + N_3 \cdot D_{13}) \quad [\text{D-36.h}]$$

$$F_{\Omega, e0, 33} = X_2 \cdot (N_2 \cdot D_{16} + N_3 \cdot D_{13}) \quad [\text{D-36.i}]$$

### D.11.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-35.b:

$$F_{\Omega, e0, 14} = -N_2 \cdot D_{44} \quad [\text{D-37.a}]$$

$$F_{\Omega, e0, 15} = -N_3 \cdot D_{44} \quad [D-37.b]$$

$$F_{\Omega, e0, 16} = D_{44} \cdot (X_3 \cdot N_2 - X_2 \cdot N_3) \quad [D-37.c]$$

$$F_{\Omega, e0, 21} = -N_2 \cdot D_{12} \quad [D-37.d]$$

$$F_{\Omega, e0, 22} = -X_3 \cdot N_2 \cdot D_{12} \quad [D-37.e]$$

$$F_{\Omega, e0, 23} = X_2 \cdot N_2 \cdot D_{12} \quad [D-37.f]$$

$$F_{\Omega, e0, 31} = -N_3 \cdot D_{12} \quad [D-37.g]$$

$$F_{\Omega, e0, 32} = -X_3 \cdot N_3 \cdot D_{12} \quad [D-37.h]$$

$$F_{\Omega, e0, 33} = X_2 \cdot N_3 \cdot D_{12} \quad [D-37.i]$$

### D.11.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-35.b:

$$F_{\Omega, e0, 14} = -N_2 \cdot G \quad [D-38.a]$$

$$F_{\Omega, e0, 15} = -N_3 \cdot G \quad [D-38.b]$$

$$F_{\Omega, e0, 16} = G \cdot (X_3 \cdot N_2 - X_2 \cdot N_3) \quad [D-38.c]$$

$$F_{\Omega, e0, 21} = 0 \quad [D-38.d]$$

$$F_{\Omega, e0, 22} = 0 \quad [D-38.e]$$

$$F_{\Omega, e0, 23} = 0 \quad [D-38.f]$$

$$F_{\Omega, e0, 31} = 0 \quad [D-38.g]$$

$$F_{\Omega, e0, 32} = 0 \quad [D-38.h]$$

$$F_{\Omega, e0, 33} = 0 \quad [D-38.i]$$

## D.12 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der Lastterme: $\mathbf{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}}$

Für die Vorfaktormatrix  $\mathbf{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}}$  nach Glg. B-6.k gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} = -\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 = -\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{D}_{3D, \perp} \cdot \mathbf{A}_0 \quad [\text{D-39.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, gilt:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} = \begin{bmatrix} F_{\Omega, e0, 11} & F_{\Omega, e0, 12} & F_{\Omega, e0, 13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{\Omega, e0, 24} & F_{\Omega, e0, 25} & F_{\Omega, e0, 26} \\ 0 & 0 & 0 & F_{\Omega, e0, 34} & F_{\Omega, e0, 35} & F_{\Omega, e0, 36} \end{bmatrix} \quad [\text{D-39.b}]$$

### D.12.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-39.b:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} = -\mathbf{N}_1 \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11} \cdot X_3 & -D_{11} \cdot X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & D_{45} \cdot X_2 - D_{44} \cdot X_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_{45} & D_{55} & D_{55} \cdot X_2 - D_{45} \cdot X_3 \end{bmatrix} \quad [\text{D-40}]$$

### D.12.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-39.b:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} = -\mathbf{N}_1 \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11} \cdot X_3 & -D_{11} \cdot X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & -D_{44} \cdot X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{44} \cdot X_2 \end{bmatrix} \quad [\text{D-41}]$$

### D.12.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. D-39.b:

$$\mathbf{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} = -\mathbf{N}_1 \cdot \begin{bmatrix} E & E \cdot X_3 & -E \cdot X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & -G \cdot X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & G \cdot X_2 \end{bmatrix} \quad [\text{D-42}]$$



# Anhang E

**Vorfaktormatrizen  
des umgewandelten  
diskretisierten DGL-  
Systems**

## E.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die Vorfaktormatrizen für die Differentialgleichungen in umgewandelter diskretisierter Darstellung, die in Anhang B angegeben wurden, im Detail berechnet. Als Grundlagen werden dafür die folgenden Differentialoperatormatrizen, die Ansatzfunktionen sowie die Materialsteifigkeitsmatrix verwendet.

### Ansatzfunktionen für die Querschnittsdiskretisierung

Die Ansatzfunktionen werden nach Glg. 7-1.b definiert

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}^T \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad [\text{E-1}]$$

$\mathbf{h}$  stellt dabei den Vektor ( $N \times 1$ ) der  $N$  Ansatzfunktionen dar.

### Differentialoperatormatrizen für die weiteren Herleitungen:

Die Differentialoperatormatrizen werden nach Glg. 4-6.c und Glg. 7-3.e verwendet.

$$\mathbf{B}_{3D, 1, 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [\text{E-2.a}]$$

$$\mathbf{B}_{3D, H, 2+3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_3^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_3^T & \mathbf{h}_2^T \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{h}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_3 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \quad [\text{E-2.b}]$$

## E.2 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi}$

Für die Vorfaktormatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi}$  nach Glg. B-8.1 gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi} = -\int_A \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} \, dA \quad [\text{E-3.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 22} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 23} \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 32} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 33} \end{bmatrix} \quad [\text{E-3.b}]$$

### E.2.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-3.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 11} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-4.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 22} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{22} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-4.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 23} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{23} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-4.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 32} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{23} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-4.d}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 33} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{33} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-4.e}]$$

### E.2.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-3.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 11} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-5.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 22} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{22} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-5.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 23} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{23} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-5.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 32} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{26} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{23} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-5.d}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 33} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{66} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{36} \cdot \mathbf{h}_3^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{33} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-5.e}]$$

### E.2.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-3.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 11} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-6.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 22} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-6.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 23} = -\int_A \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{E-6.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 32} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-6.d}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 33} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-6.e}]$$

### E.3 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'}$

Für die Vorfaktormatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'}$  nach Glg. B-8.m gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'} = \int_A (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} - \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T) dA \quad [\text{E-7.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 12} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 13} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 21} & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{E-7.b}]$$

#### E.3.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-7.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 12} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_3^T - \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T - \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{E-8.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 13} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{h}_3^T - \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}^T - \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{E-8.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 21} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_3^T - \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}^T - \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{E-8.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 31} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}_3^T - \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}^T - \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{E-8.d}]$$

#### E.3.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-7.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 12} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2^T - \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{E-9.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 13} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_3^T - \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{E-9.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 21} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T - \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{E-9.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 31} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_3^T - \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{E-9.d}]$$

### E.3.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-7.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 12} = -\int_A \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-10.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 13} = -\int_A \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-10.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 21} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{E-10.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', 31} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-10.d}]$$

## E.4 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''}$

Für die Vorfaktormatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''}$  nach Glg. B-8.n gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} = \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \quad [\text{E-11.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 22} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 23} \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 23} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 33} \end{bmatrix} \quad [\text{E-11.b}]$$

### E.4.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-11.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-12.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 22} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-12.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 23} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-12.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 33} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-12.d}]$$

### E.4.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-11.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-13.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 22} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-13.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 23} = 0 \quad [\text{E-13.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 33} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-13.d}]$$

### E.4.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-11.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-14.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 22} = \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 33} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-14.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 23} = 0 \quad [\text{E-14.c}]$$

## E.5 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, \underline{\mathbf{A}}_E}$

Für die Vorfaktormatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, \underline{\mathbf{A}}_E}$  nach Glg. B-11.m gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, \underline{\mathbf{A}}_E} = \int_{\Gamma_{\underline{\mathbf{A}}_E}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, H, 2+3} \, dA \quad [\text{E-15.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, \underline{\mathbf{A}}_E} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 12, \underline{\mathbf{A}}_E} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 13, \underline{\mathbf{A}}_E} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 21, \underline{\mathbf{A}}_E} & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 31, \underline{\mathbf{A}}_E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{E-15.b}]$$

### E.5.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-15.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 12, \underline{\mathbf{A}}_E} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-16.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 13, \underline{\mathbf{A}}_E} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-16.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 21, \underline{\mathbf{A}}_E} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-16.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 31, \underline{\mathbf{A}}_E} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-16.d}]$$

### E.5.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-15.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 12, \frac{A}{E}} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{E-17.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 13, \frac{A}{E}} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-17.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 21, \frac{A}{E}} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-17.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 31, \frac{A}{E}} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-17.d}]$$

### E.5.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-15.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 12, \frac{A}{E}} = \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 13, \frac{A}{E}} = 0 \quad [\text{E-18.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 21, \frac{A}{E}} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T \, dA \quad [\text{E-18.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, 31, \frac{A}{E}} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T \, dA \quad [\text{E-18.c}]$$

## E.6 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der DGL: $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}}$

Für die Vorfaktormatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}}$  nach Glg. B-11.n gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} = \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} = \int_{\Gamma_{\hat{\mathbf{E}}}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{H}^T \, dA \quad [\text{E-19.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, folgt eine quadratische Steifigkeitsmatrix mit der folgenden Besetzung:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} = \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi''} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 22} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 23} \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 23} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 33} \end{bmatrix} \quad [\text{E-19.b}]$$

### E.6.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-19.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-20.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 22} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-20.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 23} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-20.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 33} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-20.d}]$$

### E.6.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-19.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-21.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 22} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-21.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 23} = 0 \quad [\text{E-21.c}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 33} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-21.d}]$$

### E.6.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-19.b:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-22.a}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 22} = \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 33} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}^T \, dA \quad [\text{E-22.b}]$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 23} = 0 \quad [\text{E-22.c}]$$

## E.7 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der Lastterme: $\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0}$

Für die Vorfaktormatrix  $\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0}$  nach Glg. B-8.t gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0} = - \int_A \mathbf{B}_{3D, H, 2+3}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [\text{E-23.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, gilt:

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 14} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 15} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 16} \\ \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 21} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 22} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 23} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 31} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 32} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{E-23.b}]$$

### E.7.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-23.b:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 14} = - \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{E-24.a}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 15} = - \int_A \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{E-24.b}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 16} = \int_A (\mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_3 - (\mathbf{D}_{45} \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{55} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_2 \, dA \quad [\text{E-24.c}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 21} = - \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{E-24.d}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 22} = - \int_A (\mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_3 \, dA \quad [\text{E-24.e}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 23} = \int_A (\mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_2 \, dA \quad [\text{E-24.f}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 31} = - \int_A \mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{E-24.g}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 32} = - \int_A (\mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_3 \, dA \quad [\text{E-24.h}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 33} = \int_A (\mathbf{D}_{16} \cdot \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{h}_3) \cdot X_2 \, dA \quad [\text{E-24.i}]$$

### E.7.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-23.b:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 14} = -\int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2 \, dA \quad [\text{E-25.a}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 15} = -\int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{E-25.b}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 16} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_2 \cdot X_3 - \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h}_3 \cdot X_2 \, dA \quad [\text{E-25.c}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 21} = -\int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2 \, dA \quad [\text{E-25.d}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 22} = -\int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2 \cdot X_3 \, dA \quad [\text{E-25.e}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 23} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_2 \cdot X_2 \, dA \quad [\text{E-25.f}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 31} = -\int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{E-25.g}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 32} = -\int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_3 \cdot X_3 \, dA \quad [\text{E-25.h}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 33} = \int_A \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{h}_3 \cdot X_2 \, dA \quad [\text{E-25.i}]$$

### E.7.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-23.b:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 14} = -\int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2 \, dA \quad [\text{E-26.a}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 15} = -\int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3 \, dA \quad [\text{E-26.b}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 16} = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2 \cdot X_3 - \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3 \cdot X_2 \, dA \quad [\text{E-26.c}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 21} = \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 22} = \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 23} = \mathbf{0} \quad [\text{E-26.d}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 31} = \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 32} = \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 33} = \mathbf{0} \quad [\text{E-26.e}]$$

## E.8 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der Lastterme: $\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'}$

Für die Vorfaktormatrix  $\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'}$  nach Glg. B-8.u gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'} = \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [\text{E-27.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, gilt:

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0'} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 11} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 12} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 24} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 25} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 26} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 34} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 35} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 36} \end{bmatrix} \quad [\text{E-27.b}]$$

### E.8.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Für das orthotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-27.b:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 11} = \int_A D_{11} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-28.a}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 12} = \int_A D_{11} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-28.b}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 13} = -\int_A D_{11} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-28.c}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 24} = \int_A D_{44} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-28.d}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 25} = \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 34} = \int_A D_{45} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-28.e}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 26} = \int_A D_{45} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} - D_{44} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-28.f}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 35} = \int_A D_{55} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-28.g}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 36} = \int_A D_{55} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} - D_{45} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-28.h}]$$

**E.8.2 Isotropes 3D-Materialverhalten**

Für das isotrope Materialverhalten gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-27.b:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 11} = \int_A \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-29.a}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 12} = \int_A \mathbf{D}_{11} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-29.b}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 13} = -\int_A \mathbf{D}_{11} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-29.c}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 24} = \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 35} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-29.d}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 25} = \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 34} = 0 \quad [\text{E-29.e}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 26} = -\int_A \mathbf{D}_{44} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-29.f}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 36} = \int_A \mathbf{D}_{44} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-29.g}]$$

**E.8.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall  $\nu = 0$** 

Für das isotrope Materialverhalten mit  $\nu = 0$  gilt für die einzelnen Matrixglieder in Glg. E-27.b:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 11} = \int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-30.a}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 12} = \int_A \mathbf{E} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-30.b}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 13} = -\int_A \mathbf{E} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-30.c}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 24} = \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 35} = \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-30.d}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 25} = \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 34} = 0 \quad [\text{E-30.e}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 26} = -\int_A \mathbf{G} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-30.f}]$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 36} = \int_A \mathbf{G} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h} \, dA \quad [\text{E-30.g}]$$

## E.9 Aufbereitung der Vorfaktormatrizen der Lastterme: $\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}}$

Für die Vorfaktormatrix  $\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}}$  nach Glg. B-11.v gilt bei Einarbeitung der Differentialoperatormatrix und der Materialsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} = \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0} = \int_{\Gamma_{\frac{A}{E}}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0}^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{B}_{3D, 1, 0} \cdot \mathbf{A}_0 \, dA \quad [\text{E-31.a}]$$

Werden die angeführten Matrizenoperationen durchgeführt, gilt:

$$\hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 11} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 12} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 24} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 25} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 26} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 34} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 35} & \hat{\mathbf{f}}_{\Omega, e0, 36} \end{bmatrix} \quad [\text{E-31.b}]$$

### E.9.1 Orthotropes 3D-Materialverhalten

Konstanten siehe Punkt E.8 in den Glg. E-28.a bis Glg. E-28.h.

### E.9.2 Isotropes 3D-Materialverhalten

Konstanten siehe Punkt E.8 in den Glg. E-29.a bis Glg. E-29.g.

### E.9.3 Isotropes 3D-Materialverhalten – Sonderfall $\nu = 0$

Konstanten siehe Punkt E.8 in den Glg. E-30.a bis Glg. E-30.g.



# Anhang F

Darstellung der  
Gleichgewichts-  
Differential-  
Gleichungen

## F.1 DGL-System für den prismatischen Stab:

Es folgt die Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen in vollständiger Form für die erforderlichen Herleitungsschritte, es gilt:

- **DGL-System für den prismatischen Stab: (Zeile 1-7: Stab-Gleichgewichtsgleichungen in  $X_1$ )**
- **Gleichgewichtsgleichungssystem für den prismatischen Stab, d. h. Stab-Gleichgewichtsgleichungen (Zeile 1-7: Gleichgewichtsgleichungen in  $\xi$ ) und Querschnittsdifferentialgleichungen (Zeile 8-10)**

Zudem werden neben den Gleichgewichtsgleichungen auch die zugehörigen Randbedingungen dargestellt.

**DGL-System für den prismatischen Stab: (Zeile 1-7: Stab-Gleichgewichtsgleichungen in X1)**

$K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	0	0	$K_{0,\psi,1} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1}$
$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-S_{0,23}$	$-S_{0,33}$	$-S_{0,31}$	$K_{0,\psi,2} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{0,\psi,3}$	$K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{0,\psi',3}$
$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,22}$	$S_{0,23}$	$S_{0,21}$	$K_{0,\psi,3} \frac{\partial}{\partial X_1} + S_{0,\psi,2}$	$K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} + S_{0,\psi',2}$
0	0	0	$S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,\psi,2} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1}$
0	0	0	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,\psi,3} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1}$
0	0	0	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,\psi,1} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1}$
$K_{0,\psi,1} \frac{\partial}{\partial X_1} - K_{0,\psi,1}$	$K_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} - K_{0,\psi,2}$	$K_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} - K_{0,\psi,3}$	$S_{0,\psi',2} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{0,\psi,2}$	$S_{0,\psi',3} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{0,\psi,3}$	$S_{0,\psi',1} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{0,\psi,1}$	$K_{\psi,\Omega} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{\psi,\Omega,\psi}$	$K_{\psi,\Omega,\psi} \frac{\partial}{\partial X_1} - S_{\psi,\Omega,\psi'}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_\Omega \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_0 \\ \bar{\mathbf{q}}_\psi \end{bmatrix} \cdot \psi_q$$

**Kräfte-RB für die Stab-Gleichgewichtsgleichungen des 0-Problems**

$$\pm n_{0,A} \mathbf{e}_E = - \bar{\mathbf{r}}_{0,A} \cdot \psi_{q,A} \mathbf{e}_E$$

**Kräfte-RB für die Stab-Gleichgewichtsgleichungen des Ψ-Problems**

$$\pm M_{\psi,A} \mathbf{e}_E = - \bar{\mathbf{r}}_{\psi,A} \cdot \psi_{q,A} \mathbf{e}_E$$

**Verformungs-RB für die Gleichgewichtsgleichungen des 0 und Ψ-Problems**

$$\mathbf{g}_{\Gamma,u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u$$

**QS-DGL-System für den prismatischen Stab:**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{16} & -D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{13} & -D_{16} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0 + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11}X_3 & -D_{11}X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & D_{45}X_2 - D_{44}X_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_{45} & D_{55} & D_{55}X_2 - D_{45}X_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0 + \left\{ \begin{bmatrix} K_{\Omega,11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega,22} & K_{\Omega,23} \\ 0 & K_{\Omega,23} & K_{\Omega,33} \end{bmatrix} \cdot \psi + \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12} & K_{\Omega,13} \\ K_{\Omega,12} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \psi' + \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & D_{45} \\ 0 & D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \cdot \psi'' \right\} \cdot \Omega = - \bar{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot \psi_q$$

**Kräfte-RB QS-DGL für die Stabmantelfläche**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{\Omega,e0,14} & F_{\Omega,e0,15} & F_{\Omega,e0,16} \\ F_{\Omega,e0,21} & F_{\Omega,e0,22} & F_{\Omega,e0,23} & 0 & 0 & 0 \\ F_{\Omega,e0,31} & F_{\Omega,e0,32} & F_{\Omega,e0,33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_0 + \left\{ \begin{bmatrix} K_{\Omega,11,\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\Omega,22,\Gamma} & K_{\Omega,23,\Gamma} \\ 0 & K_{\Omega,23,\Gamma} & K_{\Omega,33,\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi + \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12,\Gamma} & K_{\Omega,13,\Gamma} \\ K_{\Omega,21,\Gamma} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,31,\Gamma} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \psi' \right\} \cdot \Omega = - \bar{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot \psi_q$$

**Normierungsgleichungen für die Wölbfunktionen**

$$\int_A \begin{bmatrix} W_1 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_1 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,1} \\ -W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_2 \cdot \Omega_{i,2} \\ W_3 \cdot \Omega_{i,3} \\ -W_2 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,2} + W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,3} \end{bmatrix} \cdot dA = \mathbf{0}$$

**Kräfte-RB QS-DGL für Stab-A-QS und Stab-E-QS**

$$\begin{bmatrix} F_{\Omega,e0,11} & F_{\Omega,e0,12} & F_{\Omega,e0,13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{\Omega,e0,24} & F_{\Omega,e0,25} & F_{\Omega,e0,26} \\ 0 & 0 & 0 & F_{\Omega,e0,34} & F_{\Omega,e0,35} & F_{\Omega,e0,36} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_{0,E} + \left\{ \begin{bmatrix} 0 & K_{\Omega,12,A} & K_{\Omega,13,A} \\ K_{\Omega,21,A} & 0 & 0 \\ K_{\Omega,31,A} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \psi_{A,E} + \left( -N_1 \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & D_{45} \\ 0 & D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \right) \cdot \psi'_{A,E} \right\} \cdot \Omega_{A,E} = - \bar{\mathbf{q}}_{3D,\Gamma} \cdot \psi_{q,A,E}$$



## **F.2 GLG-Gleichungen für das 0-Problem und $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform**

Es folgt die Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen in vollständiger Form, es gilt:

- **GLG-Gleichungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform: Übersicht**
- **GLG-Gleichungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform: Detaildarstellung**
- **GLG-Gleichungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform: Detaildarstellung für Isotropie mit  $\nu = 0$**
- **Randbedingungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform: Übersicht**
- **Randbedingungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform: Detaildarstellung**
- **Randbedingungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform: Detaildarstellung für Isotropie mit  $\nu = 0$**
- **GLG-Gleichungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform: Übersicht mit Integration der Zeilen 4, 5 und 6**

Zudem werden neben den Gleichgewichtsgleichungen auch die zugehörigen Randbedingungen dargestellt.

:

---

GLG-Gleichungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform

$  \begin{bmatrix}  K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 \\  K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & -S_{0,23} & -S_{0,33} & -S_{0,31} \\  K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,22} & S_{0,23} & S_{0,21} \\  0 & 0 & 0 & S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1} \\  0 & 0 & 0 & S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1} \\  0 & 0 & 0 & S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}  \end{bmatrix}  $	$  \begin{bmatrix}  \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  -\hat{k}_{0,\psi,51} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \hat{k}_{0,\psi,41} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}  \end{bmatrix} \cdot \Psi +  $	$  \begin{bmatrix}  \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,12} & \hat{k}_{0,\psi,13} \\  \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,22}^- & \hat{k}_{0,\psi,23}^- \\  \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,32}^+ & \hat{k}_{0,\psi,33}^+ \\  \hat{k}_{0,\psi,41} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \hat{k}_{0,\psi,51} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \hat{k}_{0,\psi,61} & \mathbf{0} & \mathbf{0}  \end{bmatrix} \cdot \Psi' +  $	$  \begin{bmatrix}  \hat{k}_{0,\psi,11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \hat{k}_{0,\psi,21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \hat{k}_{0,\psi,31} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,42} & \hat{k}_{0,\psi,43} \\  \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,52} & \hat{k}_{0,\psi,53} \\  \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,62} & \hat{k}_{0,\psi,63}  \end{bmatrix} \cdot \Psi''  $	$  \begin{bmatrix}  q_{1,0,\Psi} + q_{1,0,\Gamma} \\  m_{2,0,\Psi} + m_{2,0,\Gamma} \\  m_{3,0,\Psi} + m_{3,0,\Gamma} \\  q_{2,0,\Psi} + q_{2,0,\Gamma} \\  q_{3,0,\Psi} + q_{3,0,\Gamma} \\  m_{1,0,\Psi} + m_{1,0,\Gamma} \\  \hat{q}_{\Omega,1,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,1,\Gamma} \\  \hat{q}_{\Omega,2,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,2,\Gamma} \\  \hat{q}_{\Omega,3,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,3,\Gamma}  \end{bmatrix} \cdot \Psi_q  $	
$  \begin{bmatrix}  \mathbf{e}_0 \\  \hat{\Omega}  \end{bmatrix} = -  $					
$  \hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix}  \hat{f}_{\Omega,e0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,14} & \hat{f}_{\Omega,e0,15} & \hat{f}_{\Omega,e0,16} \\  \hat{f}_{\Omega,e0,21} & \hat{f}_{\Omega,e0,22} & \hat{f}_{\Omega,e0,23} & \hat{f}_{\Omega,e0,24} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,25} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,26} \frac{\partial}{\partial X_1} \\  \hat{f}_{\Omega,e0,31} & \hat{f}_{\Omega,e0,32} & \hat{f}_{\Omega,e0,33} & \hat{f}_{\Omega,e0,34} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,35} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,36} \frac{\partial}{\partial X_1}  \end{bmatrix}  $	$  \hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix}  \hat{K}_{\Omega,\psi,11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \mathbf{0} & \hat{K}_{\Omega,\psi,22} & \hat{K}_{\Omega,\psi,23} \\  \mathbf{0} & \hat{K}_{\Omega,\psi,32} & \hat{K}_{\Omega,\psi,33}  \end{bmatrix} \cdot \Psi + \hat{\Omega}^T \cdot  $	$  \begin{bmatrix}  \mathbf{0} & \hat{K}_{\Omega,\psi',12} & \hat{K}_{\Omega,\psi',13} \\  \hat{K}_{\Omega,\psi',21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \hat{K}_{\Omega,\psi',31} & \mathbf{0} & \mathbf{0}  \end{bmatrix} \cdot \Psi' + \hat{\Omega}^T \cdot  $	$  \begin{bmatrix}  \hat{K}_{\Omega,\psi'',11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\  \mathbf{0} & \hat{K}_{\Omega,\psi'',22} & \hat{K}_{\Omega,\psi'',23} \\  \mathbf{0} & \hat{K}_{\Omega,\psi'',23} & \hat{K}_{\Omega,\psi'',33}  \end{bmatrix} \cdot \Psi''  $		

**GLG-Gleichungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform**

$\begin{bmatrix} K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 \\ K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & -S_{0,23} & -S_{0,33} & -S_{0,31} \\ K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,22} & S_{0,23} & S_{0,21} \\ 0 & 0 & 0 & S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ 0 & 0 & 0 & S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ 0 & 0 & 0 & S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\hat{k}_{0,\psi,51} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{k}_{0,\psi,41} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} +$		$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,12} & \hat{k}_{0,\psi,13} \\ \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,22}^- & \hat{k}_{0,\psi,23}^- \\ \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,32}^+ & \hat{k}_{0,\psi,33}^+ \\ \hat{k}_{0,\psi,41} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{k}_{0,\psi,51} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{k}_{0,\psi,61} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} +$		$\begin{bmatrix} \hat{k}_{0,\psi,11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{k}_{0,\psi,21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{k}_{0,\psi,31} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,42} & \hat{k}_{0,\psi,43} \\ \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,52} & \hat{k}_{0,\psi,53} \\ \mathbf{0} & \hat{k}_{0,\psi,62} & \hat{k}_{0,\psi,63} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$		$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\Omega} \cdot \Psi \end{bmatrix} = -$		$\begin{bmatrix} q_{1,0,\Psi} + q_{1,0,\Gamma} \\ m_{2,0,\Psi} + m_{2,0,\Gamma} \\ m_{3,0,\Psi} + m_{3,0,\Gamma} \\ q_{2,0,\Psi} + q_{2,0,\Gamma} \\ q_{3,0,\Psi} + q_{3,0,\Gamma} \\ m_{1,0,\Psi} + m_{1,0,\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \Psi_q$
$\hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{f}_{\Omega,e0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,14} & \hat{f}_{\Omega,e0,15} & \hat{f}_{\Omega,e0,16} \\ \hat{f}_{\Omega,e0,21} & \hat{f}_{\Omega,e0,22} & \hat{f}_{\Omega,e0,23} & \hat{f}_{\Omega,e0,24} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,25} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,26} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \hat{f}_{\Omega,e0,31} & \hat{f}_{\Omega,e0,32} & \hat{f}_{\Omega,e0,33} & \hat{f}_{\Omega,e0,34} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,35} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,36} \frac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix}$		$\hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{K}_{\Omega,\psi,11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{K}_{\Omega,\psi,22} & \hat{K}_{\Omega,\psi,23} \\ \mathbf{0} & \hat{K}_{\Omega,\psi,32} & \hat{K}_{\Omega,\psi,33} \end{bmatrix} +$		$\hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{K}_{\Omega,\psi',12} & \hat{K}_{\Omega,\psi',13} \\ \hat{K}_{\Omega,\psi',21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{K}_{\Omega,\psi',31} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} +$		$\hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{K}_{\Omega,\psi'',11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{K}_{\Omega,\psi'',22} & \hat{K}_{\Omega,\psi'',23} \\ \mathbf{0} & \hat{K}_{\Omega,\psi'',23} & \hat{K}_{\Omega,\psi'',33} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$		$\hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{q}_{\Omega,1,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,1,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,2,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,2,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,3,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,3,\Gamma} \end{bmatrix}$		

# GLG-Gleichungen für das 0-Problem und $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform

	$K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	0	0	$\hat{k}_{0,\psi,11} \cdot \Psi''$	$\hat{k}_{0,\psi,12} \cdot \Psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,13} \cdot \Psi'$
	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-S_{0,23}$	$-S_{0,33}$	$-S_{0,31}$	$-\hat{k}_{0,\psi,51} \cdot \Psi + \hat{k}_{0,\psi,21} \cdot \Psi''$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,22-} \\ -\hat{k}_{0,\psi,52} \end{pmatrix} \cdot \Psi'$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,23-} \\ -\hat{k}_{0,\psi,53} \end{pmatrix} \cdot \Psi'$
	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,22}$	$S_{0,23}$	$S_{0,21}$	$\hat{k}_{0,\psi,41} \cdot \Psi + \hat{k}_{0,\psi,31} \cdot \Psi''$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,32+} \\ +\hat{k}_{0,\psi,42} \end{pmatrix} \cdot \Psi'$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,33+} \\ +\hat{k}_{0,\psi,43} \end{pmatrix} \cdot \Psi'$
	0	0	0	$S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{k}_{0,\psi,41} \cdot \Psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,42} \cdot \Psi''$	$\hat{k}_{0,\psi,43} \cdot \Psi''$
	0	0	0	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{k}_{0,\psi,51} \cdot \Psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,52} \cdot \Psi''$	$\hat{k}_{0,\psi,53} \cdot \Psi''$
	0	0	0	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{k}_{0,\psi,61} \cdot \Psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,62} \cdot \Psi''$	$\hat{k}_{0,\psi,63} \cdot \Psi''$
	(6;6)						(6;N)		
$\hat{\Omega}^T$	$\hat{f}_{\Omega,e0,11} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,12} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,13} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,14}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,15}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,16}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,11} \cdot \Psi + \hat{K}_{\Omega,\psi,11} \cdot \Psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,12} \cdot \Psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,13} \cdot \Psi'$
	$\hat{f}_{\Omega,e0,21}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,22}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,23}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,24} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,25} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,26} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,21} \cdot \Psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,22} \cdot \Psi + \hat{K}_{\Omega,\psi,22} \cdot \Psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,23} \cdot \Psi + \hat{K}_{\Omega,\psi,23} \cdot \Psi''$
	$\hat{f}_{\Omega,e0,31}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,32}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,33}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,34} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,35} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,36} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,31} \cdot \Psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,32} \cdot \Psi + \hat{K}_{\Omega,\psi,32} \cdot \Psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,33} \cdot \Psi + \hat{K}_{\Omega,\psi,33} \cdot \Psi''$
	(N;6)						(N;N)		

$\cdot \begin{bmatrix} e_0 \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = -$

$q_{1,0,\Psi} + q_{1,0,\Gamma}$	$m_{2,0,\Psi} + m_{2,0,\Gamma}$	$m_{3,0,\Psi} + m_{3,0,\Gamma}$	$q_{2,0,\Psi} + q_{2,0,\Gamma}$	$q_{3,0,\Psi} + q_{3,0,\Gamma}$	$m_{1,0,\Psi} + m_{1,0,\Gamma}$
$\hat{q}_{\Omega,1,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,1,\Gamma}$	$\hat{q}_{\Omega,2,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,2,\Gamma}$	$\hat{q}_{\Omega,3,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,3,\Gamma}$			

$\cdot \Psi_q$

(6+N;6+N)

GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform

$K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	0	0	$\int_A D_{11} \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$\int_A D_{12} \cdot h_2^T + D_{16} \cdot h_3^T dA \cdot \psi'$	$\int_A D_{16} \cdot h_2^T + D_{13} \cdot h_3^T dA \cdot \psi'$
$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-S_{0,23}$	$-S_{0,33}$	$-S_{0,31}$	$-\int_A D_{45} \cdot h_2^T + D_{55} \cdot h_3^T dA \cdot \psi$ $+\int_A D_{11} \cdot X_3 \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} \int_A D_{12} X_3 h_2^T dA \\ + \int_A D_{16} X_3 h_3^T dA \\ - \int_A D_{45} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} \int_A D_{16} X_3 h_2^T dA \\ + \int_A D_{13} X_3 h_3^T dA \\ - \int_A D_{55} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$
$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,22}$	$S_{0,23}$	$S_{0,21}$	$\int_A D_{44} \cdot h_2^T + D_{45} \cdot h_3^T dA \cdot \psi$ $-\int_A D_{11} \cdot X_2 \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} -\int_A D_{12} X_2 h_2^T dA \\ - \int_A D_{16} X_2 h_3^T dA \\ + \int_A D_{44} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} -\int_A D_{16} X_2 h_2^T dA \\ - \int_A D_{13} X_2 h_3^T dA \\ + \int_A D_{45} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$
0	0	0	$S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{44} \cdot h_2^T + D_{45} \cdot h_3^T dA \cdot \psi'$	$\int_A D_{44} \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$\int_A D_{45} \cdot h^T dA \cdot \psi''$
0	0	0	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{45} \cdot h_2^T + D_{55} \cdot h_3^T dA \cdot \psi'$	$\int_A D_{45} \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$\int_A D_{55} \cdot h^T dA \cdot \psi''$
0	0	0	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\begin{pmatrix} \int_A h_2^T \cdot (X_2 \cdot D_{45} - X_3 \cdot D_{44}) dA \\ + \int_A h_3^T \cdot (X_2 \cdot D_{55} - X_3 \cdot D_{45}) dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\int_A h^T \cdot (X_2 \cdot D_{45} - X_3 \cdot D_{44}) dA \cdot \psi''$	$\int_A h^T \cdot (X_2 \cdot D_{55} - X_3 \cdot D_{45}) dA \cdot \psi''$

(6:6)

(6:N)

$$\begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \hat{\Omega}_1 \\ \hat{\Omega}_2 \\ \hat{\Omega}_3 \end{bmatrix} = -$$

$q_{1,0,\Upsilon} + q_{1,0,\Gamma}$	
$m_{2,0,\Upsilon} + m_{2,0,\Gamma}$	
$m_{3,0,\Upsilon} + m_{3,0,\Gamma}$	
$q_{2,0,\Upsilon} + q_{2,0,\Gamma}$	
$q_{3,0,\Upsilon} + q_{3,0,\Gamma}$	
$m_{1,0,\Upsilon} + m_{1,0,\Gamma}$	

$\cdot \psi_q$

$\int_A D_{11} h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{11} X_3 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-\int_A D_{11} X_2 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-\int_A D_{44} h_2 dA$ $-\int_A D_{45} h_3 dA$	$-\int_A D_{45} h_2 dA$ $-\int_A D_{55} h_3 dA$	$\int_A D_{44} h_2 X_3 dA$ $+\int_A D_{45} h_3 X_3 dA$ $-\int_A D_{45} h_2 X_2 dA$ $-\int_A D_{55} h_3 X_2 dA$	$\begin{pmatrix} -\int_A h_2 D_{44} h_2^T dA \\ - \int_A h_3 D_{45} h_2^T dA \\ - \int_A h_2 D_{45} h_3^T dA \\ - \int_A h_3 D_{55} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi + \int_A h D_{11} h^T dA \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{12} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{16} h_3^T dA \\ - \int_A h_2 D_{44} h^T dA \\ - \int_A h_3 D_{45} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{16} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{13} h_3^T dA \\ - \int_A h_2 D_{45} h^T dA \\ - \int_A h_3 D_{55} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$
$-\int_A D_{12} h_2 dA$ $-\int_A D_{16} h_3 dA$	$-\int_A D_{12} h_2 X_3 dA$ $-\int_A D_{16} h_3 X_3 dA$	$\int_A D_{12} h_2 X_2 dA$ $+\int_A D_{16} h_3 X_2 dA$	$\int_A D_{44} h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{45} h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{45} X_2 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$ $-\int_A D_{44} X_3 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{44} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{45} h_3^T dA \\ - \int_A h_2 D_{12} h^T dA \\ - \int_A h_3 D_{16} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} -\int_A h_2 D_{22} h_2^T dA \\ - \int_A h_3 D_{26} h_2^T dA \\ - \int_A h_2 D_{26} h_3^T dA \\ - \int_A h_3 D_{66} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi + \int_A h D_{44} h^T dA \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} -\int_A h_2 D_{26} h_2^T dA \\ - \int_A h_3 D_{66} h_2^T dA \\ - \int_A h_2 D_{23} h_3^T dA \\ - \int_A h_3 D_{36} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi + \int_A h D_{45} h^T dA \cdot \psi''$
$-\int_A D_{16} h_2 dA$ $-\int_A D_{13} h_3 dA$	$-\int_A D_{16} h_2 X_3 dA$ $-\int_A D_{13} h_3 X_3 dA$	$\int_A D_{16} h_2 X_2 dA$ $+\int_A D_{13} h_3 X_2 dA$	$\int_A D_{45} h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{55} h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{55} X_2 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$ $-\int_A D_{45} X_3 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{45} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{55} h_3^T dA \\ - \int_A h_2 D_{16} h^T dA \\ - \int_A h_3 D_{13} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} -\int_A h_2 D_{26} h_2^T dA \\ - \int_A h_3 D_{23} h_2^T dA \\ - \int_A h_2 D_{66} h_3^T dA \\ - \int_A h_3 D_{36} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi + \int_A h D_{45} h^T dA \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} -\int_A h_2 D_{66} h_2^T dA \\ - \int_A h_3 D_{36} h_2^T dA \\ - \int_A h_2 D_{36} h_3^T dA \\ - \int_A h_3 D_{33} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi + \int_A h D_{55} h^T dA \cdot \psi''$

(N:6)

(N:N)

(6+N:6+N)

$\hat{q}_{\Omega,1,\Upsilon} + \hat{q}_{\Omega,1,\Gamma}$	
$\hat{q}_{\Omega,2,\Upsilon} + \hat{q}_{\Omega,2,\Gamma}$	
$\hat{q}_{\Omega,3,\Upsilon} + \hat{q}_{\Omega,3,\Gamma}$	

$\hat{\Omega}^T \cdot$

**GLG-Gleichungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform: isotrop mit  $\nu=0$**

$K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	0	0	$\int_A E \cdot \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	0	0
$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	$-S_{0,22}$	$-S_{0,31}$	$-\int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T dA \cdot \psi' + \int_A E \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	0	$-\int_A \mathbf{G} \mathbf{h}^T dA \cdot \psi'$
$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,22}$	0	$S_{0,21}$	$\int_A D_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T dA \cdot \psi - \int_A E \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	$\int_A \mathbf{G} \mathbf{h}^T dA \cdot \psi'$	0
0	0	0	$S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_2^T dA \cdot \psi'$	$\int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	0
0	0	0	0	$S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_3^T dA \cdot \psi'$	0	$\int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$
0	0	0	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\left( -\int_A \mathbf{h}_2^T \cdot X_3 \cdot \mathbf{G} dA + \int_A \mathbf{h}_3^T \cdot X_2 \cdot \mathbf{G} dA \right) \cdot \psi'$	$-\int_A \mathbf{h}^T \cdot X_3 \cdot \mathbf{G} dA \cdot \psi''$	$\int_A \mathbf{h}^T \cdot X_2 \cdot \mathbf{G} dA \cdot \psi''$

(6:6) (6:N)

$\int_A E \mathbf{h} dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A E X_3 \mathbf{h} dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-\int_A E X_2 \mathbf{h} dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-\int_A \mathbf{G} \mathbf{h}_2 dA$	$-\int_A \mathbf{G} \mathbf{h}_3 dA$	$\int_A \mathbf{G} \mathbf{h}_2 X_3 dA$ $-\int_A \mathbf{G} \mathbf{h}_3 X_2 dA$	$\left( -\int_A \mathbf{h}_2 \mathbf{G} \mathbf{h}_2^T dA \right) \cdot \psi + \int_A \mathbf{h} D_{11} \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	$-\int_A \mathbf{h}_2 \mathbf{G} \mathbf{h}^T dA \cdot \psi'$	$-\int_A \mathbf{h}_3 \mathbf{G} \mathbf{h}^T dA \cdot \psi'$
0	0	0	$\int_A \mathbf{G} \mathbf{h} dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	$-\int_A \mathbf{G} X_3 \mathbf{h} dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A \mathbf{h} \mathbf{G} \mathbf{h}_2^T dA \cdot \psi'$	$\left( -\int_A \mathbf{h}_2 E \mathbf{h}_2^T dA \right) \cdot \psi + \int_A \mathbf{h} \mathbf{G} \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	$-\int_A \mathbf{h}_3 \mathbf{G} \mathbf{h}_2^T dA \cdot \psi$
0	0	0	0	$\int_A \mathbf{G} \mathbf{h} dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A \mathbf{G} X_2 \mathbf{h} dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A \mathbf{h} \mathbf{G} \mathbf{h}_3^T dA \cdot \psi'$	$-\int_A \mathbf{h}_2 \mathbf{G} \mathbf{h}_3^T dA \cdot \psi$	$\left( -\int_A \mathbf{h}_2 \mathbf{G} \mathbf{h}_2^T dA \right) \cdot \psi + \int_A \mathbf{h} \mathbf{G} \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$

(N:6) (N:N) (6+N;6+N)

$$\begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \hat{\Omega}_1 \\ \hat{\Omega}_2 \\ \hat{\Omega}_3 \end{bmatrix} = -$$

$\mathbf{q}_{1,0,\Psi} + \mathbf{q}_{1,0,\Gamma}$	$\mathbf{q}_{1,0,\Gamma}$
$\mathbf{m}_{2,0,\Psi} + \mathbf{m}_{2,0,\Gamma}$	$\mathbf{m}_{2,0,\Gamma}$
$\mathbf{m}_{3,0,\Psi} + \mathbf{m}_{3,0,\Gamma}$	$\mathbf{m}_{3,0,\Gamma}$
$\mathbf{q}_{2,0,\Psi} + \mathbf{q}_{2,0,\Gamma}$	$\mathbf{q}_{2,0,\Gamma}$
$\mathbf{q}_{3,0,\Psi} + \mathbf{q}_{3,0,\Gamma}$	$\mathbf{q}_{3,0,\Gamma}$
$\mathbf{m}_{1,0,\Psi} + \mathbf{m}_{1,0,\Gamma}$	$\mathbf{m}_{1,0,\Gamma}$

$\hat{\Omega}^T \cdot \psi_q$

## Randbedingungen für das 0-Problem

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$\pm \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0} \\ M_{3,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0} \end{bmatrix}_{\hat{E}, u} = - \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ R_{\beta 2,0} \\ R_{\beta 3,0} \\ R_{2,0} \\ R_{3,0} \\ R_{\beta 1,0} \end{bmatrix}_{\hat{E}, q} \cdot \psi_{q, \hat{E}}$$

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$\mathbf{g}_{\Gamma, u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u$$

## Normierungsgleichungen für die Wölbfunktionen

$$\int_A \begin{bmatrix} W_1 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_1 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,1} \\ -W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_2 \cdot \Omega_{i,2} \\ W_3 \cdot \Omega_{i,3} \\ -W_2 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,2} + W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,3} \end{bmatrix} \cdot dA = \mathbf{0}$$

## Randbedingungen für das $\Psi$ -Problem

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$\mathbf{g}_{\Gamma, u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u$$

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$\pm M_{\Psi, \hat{E}} = -\hat{\mathbf{r}}_{\Psi, \hat{E}} \cdot \psi_{q, \hat{E}} \quad M_{\Psi} = \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, 0} \cdot \mathbf{e}_0 + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi} \cdot \hat{\Omega} \cdot \Psi + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi'} \cdot \hat{\Omega} \cdot \Psi'$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, 0, 11} & \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, 0, 12} & \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, 0, 13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{k}}_{\Psi, 0, 24} & \hat{\mathbf{k}}_{\Psi, 0, 25} & \hat{\mathbf{k}}_{\Psi, 0, 26} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{k}}_{\Psi, 0, 34} & \hat{\mathbf{k}}_{\Psi, 0, 35} & \hat{\mathbf{k}}_{\Psi, 0, 36} \end{bmatrix} \hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 12} & \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 13} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi, 31} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 22} & \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 23} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 32} & \hat{\mathbf{K}}_{\Psi, \Omega, \Psi', 33} \end{bmatrix} \hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{0, \hat{E}} \\ \hat{\Omega}_{\hat{E}} \\ \hat{\Omega}_{\hat{E}} \end{bmatrix} = -\hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\Omega, 1, \Gamma} \\ \hat{\mathbf{q}}_{\Omega, 2, \Gamma} \\ \hat{\mathbf{q}}_{\Omega, 3, \Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi_{q, \hat{E}}$$

## Randbedingungen für das 0-Problem

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$\pm \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0} \\ M_{3,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0} \end{bmatrix} \Big|_E^A \cdot u = - \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ R_{\beta 2,0} \\ R_{\beta 3,0} \\ R_{2,0} \\ R_{3,0} \\ R_{\beta 1,0} \end{bmatrix} \Big|_E^A \cdot q$$

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$g_{\Gamma, u} = 0 \text{ auf } \Gamma_u$$

## Normierungsgleichungen für die Wölbfunktionen

$$\int_A \begin{bmatrix} W_1 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_1 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,1} \\ -W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_2 \cdot \Omega_{i,2} \\ W_3 \cdot \Omega_{i,3} \\ -W_2 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,2} + W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,3} \end{bmatrix} \cdot dA = 0$$

## Randbedingungen für das $\Psi$ -Problem

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$g_{\Gamma, u} = 0 \text{ auf } \Gamma_u$$

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$\pm M_{\Psi, \hat{E}} = -\hat{r}_{\Psi, \hat{E}} \cdot \Psi_{q, \hat{E}} \quad M_{\Psi} = \hat{\Omega}^T \cdot \hat{K}_{\Psi, 0} \cdot e_0 + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi} \cdot \hat{\Omega} \cdot \Psi + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi'} \cdot \hat{\Omega} \cdot \Psi'$$

	$\hat{k}_{\Psi, 0, 11}$	$\hat{k}_{\Psi, 0, 12}$	$\hat{k}_{\Psi, 0, 13}$	0	0	0	$\hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi', 11} \cdot \Psi'_{\hat{E}}$	$\hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi', 12} \cdot \Psi'_{\hat{E}}$	$\hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi', 13} \cdot \Psi'_{\hat{E}}$	$\begin{bmatrix} e_{0, \hat{E}} \\ \hat{\Omega}_{\hat{E}} \end{bmatrix} = -\hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{q}_{\Omega, 1, \Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega, 2, \Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega, 3, \Gamma} \end{bmatrix} \cdot \Psi_{q, \hat{E}}$
$\perp \hat{\Omega}^T$	0	0	0	$\hat{k}_{\Psi, 0, 24}$	$\hat{k}_{\Psi, 0, 25}$	$\hat{k}_{\Psi, 0, 26}$	$\hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi', 21} \cdot \Psi'_{\hat{E}}$	$\hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi', 22} \cdot \Psi'_{\hat{E}}$	$\hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi', 23} \cdot \Psi'_{\hat{E}}$	
	0	0	0	$\hat{k}_{\Psi, 0, 34}$	$\hat{k}_{\Psi, 0, 35}$	$\hat{k}_{\Psi, 0, 36}$	$\hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi', 31} \cdot \Psi'_{\hat{E}}$	$\hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi', 32} \cdot \Psi'_{\hat{E}}$	$\hat{K}_{\Psi, \Omega, \Psi', 33} \cdot \Psi'_{\hat{E}}$	

## Randbedingungen für das 0-Problem

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$\pm \begin{bmatrix} N_{0,0} \\ M_{2,0} \\ M_{3,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0} \end{bmatrix} \Big|_{\hat{E} \cdot u} = - \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ R_{\beta 2,0} \\ R_{\beta 3,0} \\ R_{2,0} \\ R_{3,0} \\ R_{\beta 1,0} \end{bmatrix} \Big|_{\hat{E} \cdot q} \cdot \psi_{q, \hat{E}}$$

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$g_{\Gamma, u} = 0 \text{ auf } \Gamma_u$$

## Normierungsgleichungen für die Wölbfunktionen

$$\int_A \begin{bmatrix} W_1 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_1 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,1} \\ -W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_2 \cdot \Omega_{i,2} \\ W_3 \cdot \Omega_{i,3} \\ -W_2 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,2} + W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,3} \end{bmatrix} \cdot dA = 0$$

## Randbedingungen für das Ψ-Problem

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$g_{\Gamma, u} = 0 \text{ auf } \Gamma_u$$

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$\pm M_{\psi, \hat{E}} = -\hat{r}_{\psi, \hat{E}} \cdot \psi_{q, \hat{E}} \quad M_{\psi} = \hat{\Omega}^T \cdot \hat{K}_{\psi, 0} \cdot e_0 + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{K}_{\psi, \Omega, \psi} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{K}_{\psi, \Omega, \psi'} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi'$$

	$\int_A D_{11} h dA$	$\int_A D_{11} X_3 h dA$	$-\int_A D_{11} X_2 h dA$	0	0	0	$\int_A h D_{11} h^T dA \cdot \psi'_{\hat{E}}$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{12} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{16} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'_{\hat{E}}$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{16} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{13} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'_{\hat{E}}$	$\begin{bmatrix} \hat{q}_{\Omega, 1, \Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega, 2, \Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega, 3, \Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi_{q, \hat{E}}$	
$\pm \hat{\Omega}^T$	0	0	0	$\int_A D_{44} h dA$	$\int_A D_{45} h dA$	$\int_A D_{45} X_2 h dA$ $-\int_A D_{44} X_3 h dA$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{44} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{45} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'_{\hat{E}}$	$\int_A h D_{44} h^T dA \cdot \psi'_{\hat{E}}$	$\int_A h D_{45} h^T dA \cdot \psi'_{\hat{E}}$		$\begin{bmatrix} e_{0, \hat{E}} \\ \hat{\Omega}_{\hat{E}} \end{bmatrix} = -\hat{\Omega}^T$
	0	0	0	$\int_A D_{45} h dA$	$\int_A D_{55} h dA$	$\int_A D_{55} X_2 h dA$ $-\int_A D_{45} X_3 h dA$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{45} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{55} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'_{\hat{E}}$	$\int_A h D_{45} h^T dA \cdot \psi'_{\hat{E}}$	$\int_A h D_{55} h^T dA \cdot \psi'_{\hat{E}}$		

## Randbedingungen für das 0-Problem

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitt

$$\pm \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0} \\ M_{3,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0} \end{bmatrix} \Big|_{E^u} = - \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ R_{\beta 2,0} \\ R_{\beta 3,0} \\ R_{2,0} \\ R_{3,0} \\ R_{\beta 1,0} \end{bmatrix} \Big|_{E^q} \cdot \psi_{q,A}^A$$

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitt

$$\mathbf{g}_{\Gamma,u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u$$

## Normierungsgleichungen für die Wölbfunktionen

$$\int_A \begin{bmatrix} W_1 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_1 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,1} \\ -W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_2 \cdot \Omega_{i,2} \\ W_3 \cdot \Omega_{i,3} \\ -W_2 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,2} + W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,3} \end{bmatrix} \cdot dA = \mathbf{0}$$

## Randbedingungen für das $\Psi$ -Problem mit Isotrop $\nu=0$

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitt

$$\mathbf{g}_{\Gamma,u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u$$

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitt

$$\pm M_{\psi,A}^A = -\hat{\tau}_{\psi,A}^A \cdot \psi_{q,A}^A \quad M_{\psi} = \hat{\Omega}^T \cdot \hat{K}_{\psi,0} \cdot \mathbf{e}_0 + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{K}_{\psi,\Omega,\psi} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi + \hat{\Omega}^T \cdot \hat{K}_{\psi,\Omega,\psi'} \cdot \hat{\Omega} \cdot \psi'$$

	$\int_A E h dA$	$\int_A E X_3 h dA$	$-\int_A E X_2 h dA$	0	0	0	$\int_A h E h^T dA \cdot \psi_{q,A}^A$	0	0
$\pm \hat{\Omega}^T$	0	0	0	$\int_A G h dA$	0	$-\int_A G X_3 h dA$	$\int_A h G h_2^T dA \cdot \psi_{q,A}^A$	$\int_A h G h^T dA \cdot \psi_{q,A}^A$	0
	0	0	0	0	$\int_A G h dA$	$\int_A G X_2 h dA$	$\int_A h D_{55} h_3^T dA \cdot \psi_{q,A}^A$	0	$\int_A h G h^T dA \cdot \psi_{q,A}^A$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{0,A}^A \\ \hat{\Omega}_A^A \end{bmatrix} = -\hat{\Omega}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{q}_{\Omega,1,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,2,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,3,\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi_{q,A}^A$$

**GLG-Gleichungen für das 0-Problem und  $\Psi$ -Problem in umgewandelter diskretisierter Integralform: homogen, 1,4,5,6 Integriert**

	$K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	0	0	$\hat{k}_{0,\psi,11} \cdot \psi''$	$\hat{k}_{0,\psi,12} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,13} \cdot \psi'$	
	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-S_{0,23}$	$-S_{0,33}$	$-S_{0,31}$	$-\hat{k}_{0,\psi,51} \cdot \psi + \hat{k}_{0,\psi,21} \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,22} \\ -\hat{k}_{0,\psi,52} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,23} \\ -\hat{k}_{0,\psi,53} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	
	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,22}$	$S_{0,23}$	$S_{0,21}$	$\hat{k}_{0,\psi,41} \cdot \psi + \hat{k}_{0,\psi,31} \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,32} \\ +\hat{k}_{0,\psi,42} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,33} \\ +\hat{k}_{0,\psi,43} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	
	0	0	0	$S_{0,22}$	$S_{0,23}$	$S_{0,21}$	$\hat{k}_{0,\psi,41} \cdot \psi$	$\hat{k}_{0,\psi,42} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,43} \cdot \psi'$	0
	0	0	0	$S_{0,23}$	$S_{0,33}$	$S_{0,31}$	$\hat{k}_{0,\psi,51} \cdot \psi$	$\hat{k}_{0,\psi,52} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,53} \cdot \psi'$	0
	0	0	0	$S_{0,21}$	$S_{0,31}$	$S_{0,11}$	$\hat{k}_{0,\psi,61} \cdot \psi$	$\hat{k}_{0,\psi,62} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,63} \cdot \psi'$	0
						(6;6)				(6;N)
$\hat{\Omega}^T$	$\hat{f}_{\Omega,e0,11} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,12} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,13} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,14}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,15}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,16}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,11} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi',11} \cdot \psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi',12} \cdot \psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi',13} \cdot \psi'$	
	$\hat{f}_{\Omega,e0,21}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,22}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,23}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,24} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,25} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,26} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi',21} \cdot \psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,22} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi',22} \cdot \psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,23} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi',23} \cdot \psi''$	0
	$\hat{f}_{\Omega,e0,31}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,32}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,33}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,34} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,35} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,36} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi',31} \cdot \psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,32} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi',32} \cdot \psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,33} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi',33} \cdot \psi''$	0
						(N;6)				(N;N)
									$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = -$	$\hat{\Omega}^T$
									$V_2$	0
									$V_3$	0
									$M_1$	0
										0
										0
										0

### F.3 GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform

Es folgt die Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen in vollständiger Form, es gilt:

- **GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform: Übersicht**
- **GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform: Detaildarstellung**
- **GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform: Detaildarstellung Isotropie mit  $\nu = 0$**
- **Randbedingungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform: Übersicht**
- **Randbedingungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform: Detaildarstellung**
- **Randbedingungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform: Detaildarstellung Isotropie mit  $\nu = 0$**
- **GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform: Übersicht mit Integration der Zeilen 4, 5 und 6**

Zudem werden neben den Gleichgewichtsgleichungen auch die zugehörigen Randbedingungen dargestellt.

:

---



### GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform

$\begin{matrix} K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 \\ K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & -S_{0,23} & -S_{0,33} & -S_{0,31} \\ K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,22} & S_{0,23} & S_{0,21} \\ 0 & 0 & 0 & S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ 0 & 0 & 0 & S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ 0 & 0 & 0 & S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1} & S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} \end{matrix}$		$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -\hat{k}_{0,\psi,51} & 0 & 0 \\ \hat{k}_{0,\psi,41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 0 & \hat{k}_{0,\psi,12} & \hat{k}_{0,\psi,13} \\ 0 & \hat{k}_{0,\psi,22} - \hat{k}_{0,\psi,52} & \hat{k}_{0,\psi,23} - \hat{k}_{0,\psi,53} \\ 0 & \hat{k}_{0,\psi,32} + \hat{k}_{0,\psi,42} & \hat{k}_{0,\psi,33} + \hat{k}_{0,\psi,43} \\ \hat{k}_{0,\psi,41} & 0 & 0 \\ \hat{k}_{0,\psi,51} & 0 & 0 \\ \hat{k}_{0,\psi,61} & 0 & 0 \end{matrix}$		$\begin{matrix} \hat{k}_{0,\psi,11} & 0 & 0 \\ \hat{k}_{0,\psi,21} & 0 & 0 \\ \hat{k}_{0,\psi,31} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k}_{0,\psi,42} & \hat{k}_{0,\psi,43} \\ 0 & \hat{k}_{0,\psi,52} & \hat{k}_{0,\psi,53} \\ 0 & \hat{k}_{0,\psi,62} & \hat{k}_{0,\psi,63} \end{matrix}$		$\begin{matrix} q_{1,0,\Psi} + q_{1,0,\Gamma} \\ m_{2,0,\Psi} + m_{2,0,\Gamma} \\ m_{3,0,\Psi} + m_{3,0,\Gamma} \\ q_{2,0,\Psi} + q_{2,0,\Gamma} \\ q_{3,0,\Psi} + q_{3,0,\Gamma} \\ m_{1,0,\Psi} + m_{1,0,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,1,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,1,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,2,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,2,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,3,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,3,\Gamma} \end{matrix}$		
		+			+			+		
$\begin{matrix} \hat{f}_{\Omega,e0,11} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,12} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,13} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,14} & \hat{f}_{\Omega,e0,15} & \hat{f}_{\Omega,e0,16} \\ \hat{f}_{\Omega,e0,21} & \hat{f}_{\Omega,e0,22} & \hat{f}_{\Omega,e0,23} & \hat{f}_{\Omega,e0,24} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,25} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,26} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \hat{f}_{\Omega,e0,31} & \hat{f}_{\Omega,e0,32} & \hat{f}_{\Omega,e0,33} & \hat{f}_{\Omega,e0,34} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,35} \frac{\partial}{\partial X_1} & \hat{f}_{\Omega,e0,36} \frac{\partial}{\partial X_1} \end{matrix}$		$\begin{matrix} \hat{K}_{\Omega,\psi,11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{K}_{\Omega,\psi,22} & \hat{K}_{\Omega,\psi,23} \\ 0 & \hat{K}_{\Omega,\psi,32} & \hat{K}_{\Omega,\psi,33} \end{matrix}$		$\begin{matrix} 0 & \hat{K}_{\Omega,\psi',12} & \hat{K}_{\Omega,\psi',13} \\ \hat{K}_{\Omega,\psi',21} & 0 & 0 \\ \hat{K}_{\Omega,\psi',31} & 0 & 0 \end{matrix}$		$\begin{matrix} \hat{K}_{\Omega,\psi'',11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{K}_{\Omega,\psi'',22} & \hat{K}_{\Omega,\psi'',23} \\ 0 & \hat{K}_{\Omega,\psi'',23} & \hat{K}_{\Omega,\psi'',33} \end{matrix}$				
		+			+			+		

### GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform

$K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	0	0	$\hat{k}_{0,\psi,11} \cdot \psi''$	$\hat{k}_{0,\psi,12} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,13} \cdot \psi'$	$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{1,0,\Psi} + q_{1,0,\Gamma} \\ m_{2,0,\Psi} + m_{2,0,\Gamma} \\ m_{3,0,\Psi} + m_{3,0,\Gamma} \\ q_{2,0,\Psi} + q_{2,0,\Gamma} \\ q_{3,0,\Psi} + q_{3,0,\Gamma} \\ m_{1,0,\Psi} + m_{1,0,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,1,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,1,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,2,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,2,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,3,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,3,\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi_q$
$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-S_{0,23}$	$-S_{0,33}$	$-S_{0,31}$	$-\hat{k}_{0,\psi,51} \cdot \psi + \hat{k}_{0,\psi,21} \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,22-} \\ -\hat{k}_{0,\psi,52} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,23-} \\ -\hat{k}_{0,\psi,53} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	
$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,22}$	$S_{0,23}$	$S_{0,21}$	$\hat{k}_{0,\psi,41} \cdot \psi + \hat{k}_{0,\psi,31} \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,32+} \\ +\hat{k}_{0,\psi,42} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,33+} \\ +\hat{k}_{0,\psi,43} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	
0	0	0	$S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{k}_{0,\psi,41} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,42} \cdot \psi''$	$\hat{k}_{0,\psi,43} \cdot \psi''$	
0	0	0	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{k}_{0,\psi,51} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,52} \cdot \psi''$	$\hat{k}_{0,\psi,53} \cdot \psi''$	
0	0	0	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{k}_{0,\psi,61} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,62} \cdot \psi''$	$\hat{k}_{0,\psi,63} \cdot \psi''$	
(6;6)						(6;N)			
$\hat{f}_{\Omega,e0,11} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,12} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,13} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,14}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,15}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,16}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,11} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi'',11} \cdot \psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,12} \cdot \psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,13} \cdot \psi'$	$(6+N;6+N)$
$\hat{f}_{\Omega,e0,21}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,22}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,23}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,24} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,25} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,26} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,21} \cdot \psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,22} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi'',22} \cdot \psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,23} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi'',23} \cdot \psi''$	
$\hat{f}_{\Omega,e0,31}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,32}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,33}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,34} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,35} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,36} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,31} \cdot \psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,32} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi'',32} \cdot \psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,33} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi'',33} \cdot \psi''$	
(N;6)						(N;N)			

GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform

$K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	0	0	$\int_A D_{11} \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$\int_A D_{12} \cdot h_2^T + D_{16} \cdot h_3^T dA \cdot \psi'$	$\int_A D_{16} \cdot h_2^T + D_{13} \cdot h_3^T dA \cdot \psi'$	$q_{1,0,\Psi} + q_{1,0,\Gamma}$
$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-S_{0,23}$	$-S_{0,33}$	$-S_{0,31}$	$-(\int_A D_{45} \cdot h_2^T + D_{55} \cdot h_3^T dA) \cdot \psi$ $+\int_A D_{11} \cdot X_3 \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} \int_A D_{12} X_3 h_2^T dA \\ + \int_A D_{16} X_3 h_3^T dA \\ - \int_A D_{45} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} \int_A D_{16} X_3 h_2^T dA \\ + \int_A D_{13} X_3 h_3^T dA \\ - \int_A D_{55} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$m_{2,0,\Psi} + m_{2,0,\Gamma}$
$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,22}$	$S_{0,23}$	$S_{0,21}$	$(\int_A D_{44} \cdot h_2^T + D_{45} \cdot h_3^T dA) \cdot \psi$ $-\int_A D_{11} \cdot X_2 \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} -\int_A D_{12} X_2 h_2^T dA \\ - \int_A D_{16} X_2 h_3^T dA \\ + \int_A D_{44} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} -\int_A D_{16} X_2 h_2^T dA \\ - \int_A D_{13} X_2 h_3^T dA \\ + \int_A D_{45} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$m_{3,0,\Psi} + m_{3,0,\Gamma}$
0	0	0	$S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$(\int_A D_{44} \cdot h_2^T + D_{45} \cdot h_3^T dA) \cdot \psi'$	$\int_A D_{44} \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$\int_A D_{45} \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$q_{2,0,\Psi} + q_{2,0,\Gamma}$
0	0	0	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$(\int_A D_{45} \cdot h_2^T + D_{55} \cdot h_3^T dA) \cdot \psi'$	$\int_A D_{45} \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$\int_A D_{55} \cdot h^T dA \cdot \psi''$	$q_{3,0,\Psi} + q_{3,0,\Gamma}$
0	0	0	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\begin{pmatrix} \int_A h_2^T \cdot (X_2 \cdot D_{45} - X_3 \cdot D_{44}) dA \\ + \int_A h_3^T \cdot (X_2 \cdot D_{55} - X_3 \cdot D_{45}) dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\int_A h^T \cdot (X_2 \cdot D_{45} - X_3 \cdot D_{44}) dA \cdot \psi''$	$\int_A h^T \cdot (X_2 \cdot D_{55} - X_3 \cdot D_{45}) dA \cdot \psi''$	$m_{1,0,\Psi} + m_{1,0,\Gamma}$
						(6;6)			(6;N)
$\int_A D_{11} h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{11} X_3 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-\int_A D_{11} X_2 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-\int_A D_{44} h_2 dA$ $-\int_A D_{45} h_3 dA$	$-\int_A D_{45} h_2 dA$ $-\int_A D_{55} h_3 dA$	$\int_A D_{44} h_2 X_3 dA$ $+\int_A D_{45} h_3 X_3 dA$ $-\int_A D_{45} h_2 X_2 dA$ $-\int_A D_{55} h_3 X_2 dA$	$\begin{pmatrix} -\int_A h_2 D_{44} h_2^T dA \\ - \int_A h_3 D_{45} h_2^T dA \\ - \int_A h_2 D_{45} h_3^T dA \\ - \int_A h_3 D_{55} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi + \int_A h D_{11} h^T dA \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{12} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{16} h_3^T dA \\ - \int_A h_2 D_{44} h^T dA \\ - \int_A h_3 D_{45} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{16} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{13} h_3^T dA \\ - \int_A h_2 D_{45} h^T dA \\ - \int_A h_3 D_{55} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\hat{q}_{\Omega,1,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,1,\Gamma}$
$-\int_A D_{12} h_2 dA$ $-\int_A D_{16} h_3 dA$	$-\int_A D_{12} h_2 X_3 dA$ $-\int_A D_{16} h_3 X_3 dA$	$\int_A D_{12} h_2 X_2 dA$ $+\int_A D_{16} h_3 X_2 dA$	$\int_A D_{44} h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{45} h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{45} X_2 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$ $-\int_A D_{44} X_3 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{44} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{45} h_3^T dA \\ - \int_A h_2 D_{12} h^T dA \\ - \int_A h_3 D_{16} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} -\int_A h_2 D_{22} h_2^T dA \\ - \int_A h_3 D_{26} h_2^T dA \\ - \int_A h_2 D_{26} h_3^T dA \\ - \int_A h_3 D_{66} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi + \int_A h D_{44} h^T dA \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} -\int_A h_2 D_{26} h_2^T dA \\ - \int_A h_3 D_{66} h_2^T dA \\ - \int_A h_2 D_{23} h_3^T dA \\ - \int_A h_3 D_{36} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi + \int_A h D_{45} h^T dA \cdot \psi''$	$\hat{q}_{\Omega,2,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,2,\Gamma}$
$-\int_A D_{16} h_2 dA$ $-\int_A D_{13} h_3 dA$	$-\int_A D_{16} h_2 X_3 dA$ $-\int_A D_{13} h_3 X_3 dA$	$\int_A D_{16} h_2 X_2 dA$ $+\int_A D_{13} h_3 X_2 dA$	$\int_A D_{45} h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{55} h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A D_{55} X_2 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$ $-\int_A D_{45} X_3 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{45} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{55} h_3^T dA \\ - \int_A h_2 D_{16} h^T dA \\ - \int_A h_3 D_{13} h^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} -\int_A h_2 D_{26} h_2^T dA \\ - \int_A h_3 D_{23} h_2^T dA \\ - \int_A h_2 D_{66} h_3^T dA \\ - \int_A h_3 D_{36} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi + \int_A h D_{45} h^T dA \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} -\int_A h_2 D_{66} h_2^T dA \\ - \int_A h_3 D_{36} h_2^T dA \\ - \int_A h_2 D_{36} h_3^T dA \\ - \int_A h_3 D_{33} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi + \int_A h D_{55} h^T dA \cdot \psi''$	$\hat{q}_{\Omega,3,\Psi} + \hat{q}_{\Omega,3,\Gamma}$
						(N;6)			(N;N) (6+N;6+N)

$$\begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \hat{\Omega}_1 \\ \hat{\Omega}_2 \\ \hat{\Omega}_3 \end{bmatrix} = - \cdot \psi_q$$

GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform: isotrop mit  $\nu=0$

$K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	0	0	$\int_A E \cdot \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	0	0	$q_{1,0,\Gamma} + q_{1,0,\Gamma}$
$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-S_{0,23}$	$-S_{0,33}$	$-S_{0,31}$	$-\int_A G \cdot \mathbf{h}_3^T dA \cdot \psi$ $+\int_A E \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	0	$-\int_A G \mathbf{h}^T dA \cdot \psi'$	$m_{2,0,\Gamma} + m_{2,0,\Gamma}$
$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,22}$	$S_{0,23}$	$S_{0,21}$	$\int_A D_{44} \cdot \mathbf{h}_2^T dA \cdot \psi$ $-\int_A E \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	$\int_A G \mathbf{h}^T dA \cdot \psi'$	0	$m_{3,0,\Gamma} + m_{3,0,\Gamma}$
0	0	0	$S_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A G \cdot \mathbf{h}_2^T dA \cdot \psi'$	$\int_A G \cdot \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	0	$q_{2,0,\Gamma} + q_{2,0,\Gamma}$
0	0	0	$S_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A G \cdot \mathbf{h}_3^T dA \cdot \psi'$	0	$\int_A G \cdot \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	$q_{3,0,\Gamma} + q_{3,0,\Gamma}$
0	0	0	$S_{0,21} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,31} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\left( -\int_A \mathbf{h}_2^T \cdot X_3 \cdot G dA \right)$ $\left( +\int_A \mathbf{h}_3^T \cdot X_2 \cdot G dA \right) \cdot \psi'$	$-\int_A \mathbf{h}^T \cdot X_3 \cdot G dA \cdot \psi''$	$\int_A \mathbf{h}^T \cdot X_2 \cdot G dA \cdot \psi''$	$m_{1,0,\Gamma} + m_{1,0,\Gamma}$
						(6;6)			(6;N)
$\int_A E h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A E X_3 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-\int_A E X_2 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-\int_A G h_2 dA$	$-\int_A G h_3 dA$	$\int_A G h_2 X_3 dA$ $-\int_A G h_3 X_2 dA$	$\left( -\int_A \mathbf{h}_2 G \mathbf{h}_2^T dA \right)$ $\left( -\int_A \mathbf{h}_3 G \mathbf{h}_3^T dA \right) \cdot \psi + \int_A h D_{11} \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	$-\int_A \mathbf{h}_2 G \mathbf{h}^T dA \cdot \psi'$	$-\int_A \mathbf{h}_3 G \mathbf{h}^T dA \cdot \psi'$	$\hat{q}_{\Omega,1,\Gamma} + \hat{q}_{\Omega,1,\Gamma}$
0	0	0	$\int_A G h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	$-\int_A G X_3 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A \mathbf{h} G \mathbf{h}_2^T dA \cdot \psi'$	$\left( -\int_A \mathbf{h}_2 E h_2^T dA \right)$ $\left( -\int_A \mathbf{h}_3 G \mathbf{h}_3^T dA \right) \cdot \psi + \int_A \mathbf{h} G \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	$-\int_A \mathbf{h}_3 G \mathbf{h}_2^T dA \cdot \psi$	$\hat{q}_{\Omega,2,\Gamma} + \hat{q}_{\Omega,2,\Gamma}$
0	0	0	0	$\int_A G h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A G X_2 h dA \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\int_A \mathbf{h} G \mathbf{h}_3^T dA \cdot \psi'$	$-\int_A \mathbf{h}_2 G \mathbf{h}_3^T dA \cdot \psi$	$\left( -\int_A \mathbf{h}_2 G \mathbf{h}_2^T dA \right)$ $\left( -\int_A \mathbf{h}_3 G \mathbf{h}_3^T dA \right) \cdot \psi + \int_A \mathbf{h} G \mathbf{h}^T dA \cdot \psi''$	$\hat{q}_{\Omega,3,\Gamma} + \hat{q}_{\Omega,3,\Gamma}$
						(N;6)			(N;N)
						(6+N;6+N)			

$$\begin{bmatrix} E_{11,0} \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_{12,0} \\ \gamma_{13,0} \\ \kappa_1 \\ \hat{\Omega}_1 \\ \hat{\Omega}_2 \\ \hat{\Omega}_3 \end{bmatrix} = - \cdot \psi_q$$

## Randbedingungen für das 0-Problem

Kräfte-Randbedingungen  
an den Stabendquerschnitten

$$\pm \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0} \\ M_{3,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0} \end{bmatrix}_{\hat{e}_E^u} = - \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ R_{\beta 2,0} \\ R_{\beta 3,0} \\ R_{2,0} \\ R_{3,0} \\ R_{\beta 1,0} \end{bmatrix}_{\hat{e}_E^q} \cdot \psi_{q,A,E}$$

Verformungs-Randbedingungen  
an den Stabendquerschnitten

$$g_{\Gamma,u} = 0 \text{ auf } \Gamma_u$$

## Normierungsgleichungen für die Wölbfunktionen

$$\int_A \begin{bmatrix} W_1 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_1 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,1} \\ -W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_2 \cdot \Omega_{i,2} \\ W_3 \cdot \Omega_{i,3} \\ -W_2 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,2} + W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,3} \end{bmatrix} \cdot dA = 0$$

## Randbedingungen für das $\Omega$ -Problem

Verformungs-Randbedingungen  
an den Stabendquerschnitten

$$g_{\Gamma,u} = 0 \text{ auf } \Gamma_u$$

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$\left\{ \pm \hat{K}_{\Omega,\psi,A,E} \cdot \psi_{A,E} \pm \hat{K}_{\Omega,\psi',A,E} \cdot \psi'_{A,E} \right\} \cdot \hat{\Omega}_A = - \left( \pm \hat{F}_{\Omega,e0,A,E} \cdot e_{0,A,E} + \int_{\Gamma_{\hat{e}}} H \cdot \hat{q}_{3D,\Gamma} \cdot dA \right)$$

$$\pm \begin{bmatrix} \hat{f}_{\Omega,e0,11} & \hat{f}_{\Omega,e0,12} & \hat{f}_{\Omega,e0,13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{f}_{\Omega,e0,24} & \hat{f}_{\Omega,e0,25} & \hat{f}_{\Omega,e0,26} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{f}_{\Omega,e0,34} & \hat{f}_{\Omega,e0,35} & \hat{f}_{\Omega,e0,36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \hat{K}_{\Omega,12,A,E} & \hat{K}_{\Omega,13,A,E} \\ \hat{K}_{\Omega,21,A,E} & 0 & 0 \\ \hat{K}_{\Omega,31,A,E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_{A,E} + \begin{bmatrix} \hat{K}_{\Omega,\psi',11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{K}_{\Omega,\psi',22} & \hat{K}_{\Omega,\psi',23} \\ 0 & \hat{K}_{\Omega,\psi',23} & \hat{K}_{\Omega,\psi',33} \end{bmatrix} \psi'_{A,E} \cdot \begin{bmatrix} e_{0,A,E} \\ \hat{\Omega}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{q}_{\Omega,1,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,2,\Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega,3,\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi_{q,A,E}$$

## Randbedingungen für das 0-Problem

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$\pm \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0} \\ M_{3,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0} \end{bmatrix}_{\substack{A \\ E, u}} = - \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ R_{\beta 2,0} \\ R_{\beta 3,0} \\ R_{2,0} \\ R_{3,0} \\ R_{\beta 1,0} \end{bmatrix}_{\substack{A \\ E, q}} \cdot \psi_{q, A, E}$$

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$g_{\Gamma, u} = 0 \text{ auf } \Gamma_u$$

## Normierungsgleichungen für die Wölbfunktionen

$$\int_A \begin{bmatrix} W_1 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_1 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,1} \\ -W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_2 \cdot \Omega_{i,2} \\ W_3 \cdot \Omega_{i,3} \\ -W_2 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,2} + W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,3} \end{bmatrix} \cdot dA = 0$$

## Randbedingungen für das $\Omega$ -Problem

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitten

$$g_{\Gamma, u} = 0 \text{ auf } \Gamma_u$$

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$\left\{ \pm \hat{K}_{\Omega, \psi, \frac{A}{E}} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}} \pm \hat{K}_{\Omega, \psi', \frac{A}{E}} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}} \right\} \cdot \hat{\Omega}_{\frac{A}{E}} = - \left( \pm \hat{F}_{\Omega, e0, \frac{A}{E}} \cdot e_{0, \frac{A}{E}} + \int_{\Gamma_{\hat{e}}} \mathbf{H} \cdot \hat{q}_{3D, \Gamma} \cdot dA \right)$$

+	$\hat{f}_{\Omega, e0, 11}$	$\hat{f}_{\Omega, e0, 12}$	$\hat{f}_{\Omega, e0, 13}$	0	0	0	$\hat{K}_{\Omega, \psi'', 22} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}}$	$\hat{K}_{\Omega, 12, \frac{A}{E}} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}}$	$\hat{K}_{\Omega, 13, \frac{A}{E}} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}}$	$\begin{bmatrix} \hat{e}_{0, \frac{A}{E}} \\ \hat{\Omega}_{\frac{A}{E}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{q}_{\Omega, 1, \Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega, 2, \Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega, 3, \Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi_{q, \frac{A}{E}}$
	0	0	0	$\hat{f}_{\Omega, e0, 24}$	$\hat{f}_{\Omega, e0, 25}$	$\hat{f}_{\Omega, e0, 26}$	$\hat{K}_{\Omega, 21, \frac{A}{E}} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}}$	$\hat{K}_{\Omega, \psi'', 22} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}}$	$\hat{K}_{\Omega, \psi'', 23} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}}$	
	0	0	0	$\hat{f}_{\Omega, e0, 34}$	$\hat{f}_{\Omega, e0, 35}$	$\hat{f}_{\Omega, e0, 36}$	$\hat{K}_{\Omega, 31, \frac{A}{E}} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}}$	$\hat{K}_{\Omega, \psi'', 23} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}}$	$\hat{K}_{\Omega, \psi'', 33} \cdot \psi'_{\frac{A}{E}}$	

## Randbedingungen für das 0-Problem

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$\pm \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0} \\ M_{3,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0} \end{bmatrix}_{\hat{E}, u} = - \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ R_{\beta 2,0} \\ R_{\beta 3,0} \\ R_{2,0} \\ R_{3,0} \\ R_{\beta 1,0} \end{bmatrix}_{\hat{E}, q} \cdot \psi_{q, \hat{E}}$$

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$g_{\Gamma, u} = 0 \text{ auf } \Gamma_u$$

## Normierungsgleichungen für die Wölbfunktionen

$$\int_A \begin{bmatrix} W_1 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_1 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,1} \\ -W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_2 \cdot \Omega_{i,2} \\ W_3 \cdot \Omega_{i,3} \\ -W_2 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,2} + W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,3} \end{bmatrix} \cdot dA = 0$$

## Randbedingungen für das $\Omega$ -Problem

Verformungs-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$g_{\Gamma, u} = 0 \text{ auf } \Gamma_u$$

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$\left\{ \pm \hat{K}_{\Omega, \psi, \hat{E}} \cdot \psi_{\hat{E}} \pm \hat{K}_{\Omega, \psi', \hat{E}} \cdot \psi'_{\hat{E}} \right\} \cdot \hat{\Omega}_{\hat{E}} = - \left( \pm \hat{F}_{\Omega, e_0, \hat{E}} \cdot e_{0, \hat{E}} + \int_{\Gamma_{\hat{E}}} \mathbf{H} \cdot \bar{q}_{3D, \Gamma} dA \right)$$

+	$\int_A D_{11} h dA$	$\int_A D_{11} X_3 h dA$	$-\int_A D_{11} X_2 h dA$	0	0	0	$\int_A h D_{11} h^T dA \cdot \psi_{\hat{E}}$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{12} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{16} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi_{\hat{E}}$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{16} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{13} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi_{\hat{E}}$	$\begin{bmatrix} \hat{q}_{\Omega, 1, \Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega, 2, \Gamma} \\ \hat{q}_{\Omega, 3, \Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi_{q, \hat{E}}$
	0	0	0	$\int_A D_{44} h dA$	$\int_A D_{45} h dA$	$\int_A D_{45} X_2 h dA$ $-\int_A D_{44} X_3 h dA$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{44} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{45} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi_{\hat{E}}$	$\int_A h D_{44} h^T dA \cdot \psi_{\hat{E}}$	$\int_A h D_{45} h^T dA \cdot \psi_{\hat{E}}$	
	0	0	0	$\int_A D_{45} h dA$	$\int_A D_{55} h dA$	$\int_A D_{55} X_2 h dA$ $-\int_A D_{45} X_3 h dA$	$\begin{pmatrix} \int_A h D_{45} h_2^T dA \\ + \int_A h D_{55} h_3^T dA \end{pmatrix} \cdot \psi_{\hat{E}}$	$\int_A h D_{45} h^T dA \cdot \psi_{\hat{E}}$	$\int_A h D_{55} h^T dA \cdot \psi_{\hat{E}}$	

## Randbedingungen für das 0-Problem

Kräfte-Randbedingungen  
an den Stabendquerschnitts

$$\pm \begin{bmatrix} N_0 \\ M_{2,0} \\ M_{3,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \\ M_{1,0} \end{bmatrix} \Big|_E^u = - \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ R_{\beta 2,0} \\ R_{\beta 3,0} \\ R_{2,0} \\ R_{3,0} \\ R_{\beta 1,0} \end{bmatrix} \Big|_E^q \cdot \psi_{q,A}^A$$

Verformungs-Randbedingungen  
an den Stabendquerschnitts

$$\mathbf{g}_{\Gamma,u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u$$

## Normierungsgleichungen für die Wölbfunktionen

$$\int_A \begin{bmatrix} W_1 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_1 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,1} \\ -W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,1} \\ W_2 \cdot \Omega_{i,2} \\ W_3 \cdot \Omega_{i,3} \\ -W_2 \cdot X_3 \cdot \Omega_{i,2} + W_1 \cdot X_2 \cdot \Omega_{i,3} \end{bmatrix} \cdot dA = \mathbf{0}$$

## Randbedingungen für das $\Omega$ -Problem

Verformungs-Randbedingungen  
an den Stabendquerschnitts

$$\mathbf{g}_{\Gamma,u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_u$$

Kräfte-Randbedingungen an den Stabendquerschnitts

$$\left\{ \pm \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, \hat{\mathbf{A}}} \cdot \psi_{\hat{\mathbf{A}}} \pm \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi', \hat{\mathbf{A}}} \cdot \psi'_{\hat{\mathbf{A}}} \right\} \cdot \hat{\Omega}_{\hat{\mathbf{A}}} = - \left( \pm \hat{\mathbf{F}}_{\Omega, e_0, \hat{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{e}_{0, \hat{\mathbf{A}}} + \int_{\Gamma_{\hat{\mathbf{e}}}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{3D, \Gamma} \cdot dA \right)$$

+	$\int_A E h dA$	$\int_A E X_3 h dA$	$-\int_A E X_2 h dA$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\int_A h \mathbf{e} h^T dA \cdot \psi'_{\hat{\mathbf{A}}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{0, \hat{\mathbf{A}}} \\ \hat{\Omega}_{\hat{\mathbf{A}}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\Omega, 1, \Gamma} \\ \hat{\mathbf{q}}_{\Omega, 2, \Gamma} \\ \hat{\mathbf{q}}_{\Omega, 3, \Gamma} \end{bmatrix} \cdot \psi_{q, \hat{\mathbf{A}}}$
	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\int_A G h \cdot dA$	$\mathbf{0}$	$-\int_A G X_3 h dA$	$\int_A h G h_2^T dA \cdot \psi'_{\hat{\mathbf{A}}}$	$\int_A h G h^T dA \cdot \psi'_{\hat{\mathbf{A}}}$	$\mathbf{0}$	
	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\int_A G h \cdot dA$	$\int_A G X_2 h dA$	$\int_A h D_{55} h_3^T dA \cdot \psi'_{\hat{\mathbf{A}}}$	$\mathbf{0}$	$\int_A h G h^T dA \cdot \psi'_{\hat{\mathbf{A}}}$	

GLG-Gleichungen für das 0-Problem und Querschnitts-GLG-DGL in umgewandelter diskretisierter Integralform: homogen, 1,4,5,6 Integriert

$K_{0,11} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	0	0	0	$\hat{k}_{0,\psi,11} \cdot \psi''$	$\hat{k}_{0,\psi,12} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,13} \cdot \psi'$	0
$K_{0,12} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,22} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$-S_{0,23}$	$-S_{0,33}$	$-S_{0,31}$	$-\hat{k}_{0,\psi,51} \cdot \psi + \hat{k}_{0,\psi,21} \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,22-} \\ -\hat{k}_{0,\psi,52} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,23-} \\ -\hat{k}_{0,\psi,53} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	0
$K_{0,13} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,23} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$K_{0,33} \frac{\partial}{\partial X_1}$	$S_{0,22}$	$S_{0,23}$	$S_{0,21}$	$\hat{k}_{0,\psi,41} \cdot \psi + \hat{k}_{0,\psi,31} \cdot \psi''$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,32+} \\ +\hat{k}_{0,\psi,42} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	$\begin{pmatrix} \hat{k}_{0,\psi,33+} \\ +\hat{k}_{0,\psi,43} \end{pmatrix} \cdot \psi'$	0
0	0	0	$S_{0,22}$	$S_{0,23}$	$S_{0,21}$	$\hat{k}_{0,\psi,41} \cdot \psi$	$\hat{k}_{0,\psi,42} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,43} \cdot \psi'$	$V_2$
0	0	0	$S_{0,23}$	$S_{0,33}$	$S_{0,31}$	$\hat{k}_{0,\psi,51} \cdot \psi$	$\hat{k}_{0,\psi,52} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,53} \cdot \psi'$	$V_3$
0	0	0	$S_{0,21}$	$S_{0,31}$	$S_{0,11}$	$\hat{k}_{0,\psi,61} \cdot \psi$	$\hat{k}_{0,\psi,62} \cdot \psi'$	$\hat{k}_{0,\psi,63} \cdot \psi'$	$M_1$
(6;6)						(6;N)			
$\hat{f}_{\Omega,e0,11} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,12} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,13} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,14}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,15}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,16}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,11} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi'',11} \cdot \psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,12} \cdot \psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,13} \cdot \psi'$	0
$\hat{f}_{\Omega,e0,21}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,22}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,23}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,24} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,25} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,26} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,21} \cdot \psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,22} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi'',22} \cdot \psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,23} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi'',23} \cdot \psi''$	0
$\hat{f}_{\Omega,e0,31}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,32}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,33}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,34} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,35} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{f}_{\Omega,e0,36} \cdot \frac{\partial}{\partial X_1}$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,31} \cdot \psi'$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,32} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi'',32} \cdot \psi''$	$\hat{K}_{\Omega,\psi,33} \cdot \psi + \hat{K}_{\Omega,\psi'',33} \cdot \psi''$	0
(N;6)						(N;N)			(6+N;6+N)

$$\begin{bmatrix} e_0 \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix} = -$$

# **Anhang G**

**Programm-  
Dokumentation für  
die FE-  
Querschnittsanalyse**

## G.1 Programmbeschreibung

Zur Lösung des Querschnittproblems für dickwandige Querschnitte wird das Programm Abaqus 6-10 Abaqus Usermanual (2010) verwendet. Entsprechend der strukturierten Lösungsprozedur des Gleichgewichtsgleichungssystems für den 3D-Stab nach Kapitel 7 gilt die folgende Vorgangsweise:

### G.1.1 Allgemeines

Die Lösung des Gleichgewichtsgleichungssystems mit dem Programm Abaqus beschränkt sich ausschließlich auf die Ermittlung Querschnittsverwölbungen. Die echten Querschnittsverformungen sind nicht Teil der Betrachtungen. Für die strukturierte Lösung sind die folgenden beiden Lösungsanteile zu berechnen:

- Berechnung der 3D-Verschiebungsfelder für die Freifeldlösungen für die drei Schubzustände (Abscheren in  $X_2$ -Richtung, Abscheren in  $X_3$ -Richtung sowie Torsion um  $X_1$ )
- Bestimmung der 3D-Verschiebungsfelder für das Abklingproblem, d. h. Lösung des Eigenwertproblems zur Bestimmung der Eigenwerte (Abklingzahlen) und der Eigenformen (Gesamtquerschnittsverschiebungsfelder).

Die Berechnung der oben genannten Verformungsfelder ist für beliebig aufgebaute Stabquerschnitte durchzuführen, d. h. dickwandige Querschnittsaufbauten mit und ohne nachgiebige Verbundfugen. Die Materialverteilung über die Querschnittsteile wird als konstant vorausgesetzt, wobei verschiedene Querschnittsteile verschiedene Materialeigenschaften aufweisen können.

Die FE-Diskretisierung wird vollständig im Sinne der 3D-Kinematik durchgeführt, dies gilt für alle Querschnittsbestandteile des FE-Modells.

### G.1.2 Lösungsmethodik

Zur Bestimmung der oben erwähnten beiden Lösungsanteile wird die folgende Vorgangsweise verwendet:

- Definition der Stabachse in Form eines steifigkeitslosen 3D-Balkenelements mit der Länge „1“. Die Stabachse weist dabei die jeweils sechs Systemfreiheitsgrade im Anfangs- und im Endknoten auf. Die Lage der Stabachse ist dabei beliebig wählbar.
- Definition des 3D-Stabkörpers, basierend auf 3D-Volumenelementen. Der Stabkörper weist dabei ebenfalls die Länge „1“ auf. Der Querschnitt kann dabei die in den einleitenden Kapiteln definierten geometrischen Eigenschaften aufweisen.
- Koppelung des Stabanfangsquerschnitts des Stabkörpers an den Anfangspunkt der Stabachse.
- Koppelung des Stabendquerschnitts des Stabkörpers an den Endpunkt der Stabachse.
- Definition der materiellen Eigenschaften für alle Querschnittsbestandteile.
- Definition der unter Punkt 7.3 angeführten Zwangsgleichungen zur Orthogonalisierung der einzelnen 3D-Einzelverschiebungsfelder sowie zur Abspaltung der globalen 3D-Teilverschiebungsfelder.
- Bestimmung der 3D-Einzelverschiebungsfelder durch Aufbringen der erforderlichen statischen Belastungszustände für den Lösungsanteil I (Freifeldlösung) sowie Lösung des Frequenzproblems der schwingenden dünnen Platte für den Lösungsanteil II (Abklinglösung).
- Export der 3D-Einzelverschiebungsfelder zur weiteren Verwendung im Rahmen der Bestimmung der gesamten 3D-Stabsteifigkeitsmatrix.

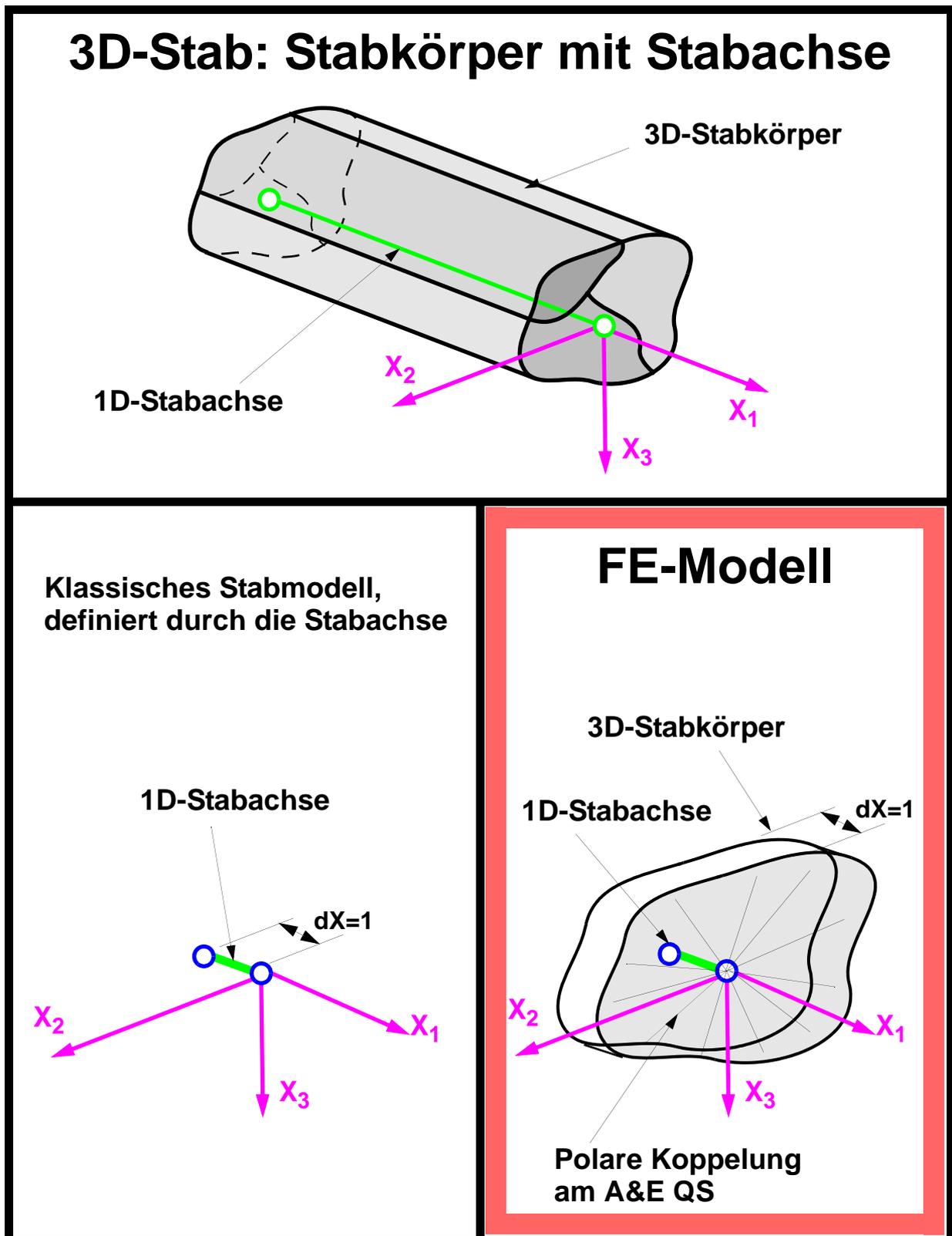


Abb. G.1: Modellbildung für das Stabmodell im FE-Kontext

## G.2 Detaillierte Darstellung der Berechnungsprozedur

### G.2.1 Verwendete Softwarepakete für die Bestimmung der 3D-Stabsteifigkeitsmatrix

Zur Bestimmung der 3D-Stabsteifigkeitsmatrix werden die folgenden Softwarepakete eingesetzt:

- Abaqus Version 6-10, 2010
- Matlab Version 7.7.0.471 (R2008b), 2008
- Wolfram Mathematica Version 7, 2009

Die erwähnten Softwarepakete werden im Rahmen der Bestimmung der 3D-Stabsteifigkeitsmatrix für die folgenden Aufgaben verwendet:

- Matlab: Automatisierte Erstellung eines Python Skripts zur Generierung des Abaqus CAE Files für beliebige Querschnittsgeometrien, basierend auf einem \*.txt Inputfile.
- Abaqus CAE: Erstellung eines \*.inp Files für die automatisierte Generierung der Querschnittsdiskretisierung.
- Matlab: Berechnung der Zwangsgleichungen für die definierte Querschnittsgeometrie aus den Geometriedaten des \*.inp Files.
- Abaqus CAE: Einbau der Zwangsgleichungen in das bestehende Stabmodell-Volumenelement
- Abaqus Standard: Bestimmung der 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Freifeldlösungen und die Abklinglösungen
- Matlab: Aufbereitung der Ergebnisse für die Verwendung in Mathematica
- Mathematica: Berechnung der 3D-Stabsteifigkeit, basierend auf den 3D-Einzelverschiebungsfeldern

### G.2.2 Detaillierte Berechnungsschritte

#### G.2.2.1 Schritt 1: Input

Für die Generierung des Stabmodells sind neben den geometrischen Definitionen des Stabkörpers auch die Definitionen der Materialeigenschaften vorzunehmen. In einem \*.txt File werden sämtliche geometrischen und materiellen Informationen des Querschnitts sowie die verschiedenen erforderlichen Belastungen definiert. Das \*.txt File beinhaltet die folgenden Daten:

- Lage der Drehachse inklusive Querschnitt und Material als steifigkeitsloses Balkenelement
- Geometrie des Querschnitts bzw. der einzelnen Querschnittsteile basierend auf Randlinien zur Definition der allgemeinen Querschnittsberandung.
- Stablänge, definiert durch die Länge „1“
- Netzteilung, definiert durch die Maschenweite
- Materialtypen und Eigenschaften für die Einzelquerschnittsteile
- Materialtypen und Eigenschaften für die Verbundfugen
- Einzelquerschnittsteile mit Materialangaben und Materialorientierungen
- Verbundfugen inkl. Materialangaben
- Belastungen
- Ergebnisdarstellung

### G.2.2.2 Schritt 2: Definition der Drehachse und des Stabkörpers

- **Definition der Stabachse in Abaqus CAE**

Die Drehachse ist als 3D-Biegestab mit 3D-Verformungsverhalten definiert und in der Querschnittsebene beliebig wählbar. Alle externen Randbedingungen sowie sämtliche Lasteinleitungen, in Form von Kräften und Momenten bzw. in Form von Verschiebungen und Rotationen, werden ausnahmslos über die Endknoten dieser beliebig wählbaren Drehachse definiert. Die Drehachse ist als Stab ohne Steifigkeit (schlaff) definiert.

Für die Diskretisierung der Stabachse mit der Länge „1“ wird in Abaqus das lineare Balkenelement C31 verwendet. In Stablängsrichtung wird ausschließlich ein Element verwendet, dies rechtfertigt sich mit den konstanten prismatischen Verhältnissen in Stablängsrichtung.

Die Steifigkeit wird ausschließlich über den definierten prismatischen Stabkörper, bestehend aus dickwandigen Einzelquerschnittsteilen (Solid-Elemente) definiert. Die Stabquerschnittsenden des Stabkörpers sind auf Basis der eindeutigen Starrkörperkoppelung an die Enden der Drehachse gekoppelt (siehe G.2.2.7).

- **Definition der dickwandigen Querschnittsteile basierend auf „Solid-Elemente“ in Abaqus CAE**

Für die Diskretisierung des gesamten Stabkörpers wird das lineare Volumenelement C3D8 verwendet, das quadratische Element C3D27 wäre grundsätzlich möglich, wird auf Grund der H-Verfeinerung allerdings nicht verwendet, es gilt:

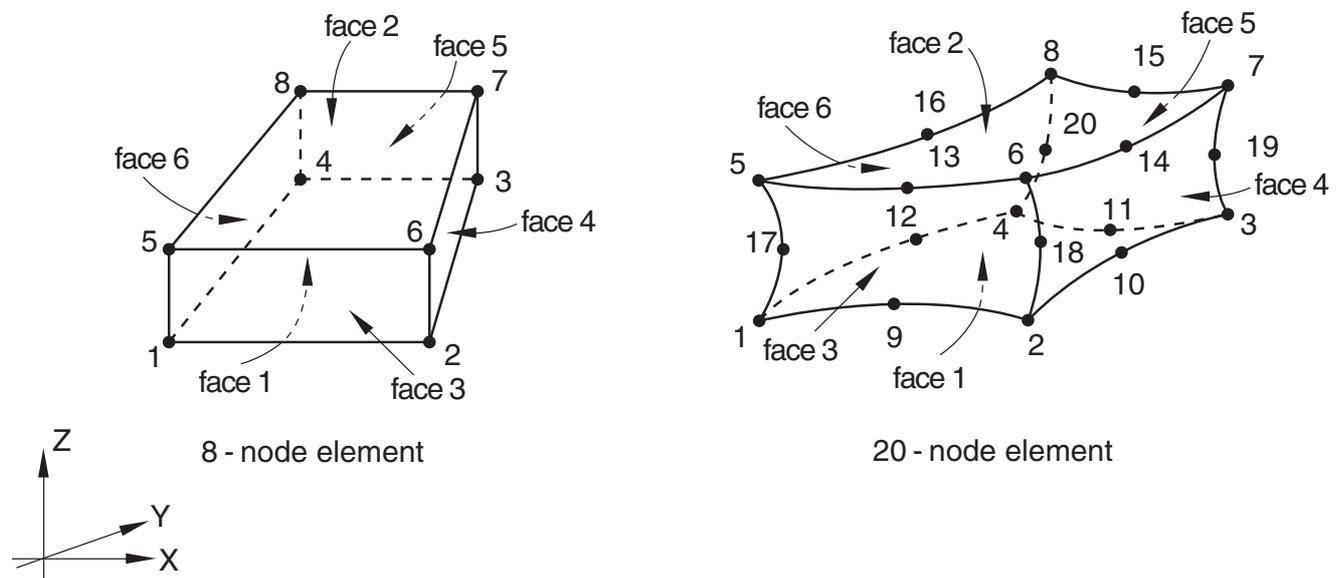


Abb.G.2: Nummernschema für Solid-Elemente (QS-Teil dickwandiger QS): (li) lineares C3D8 Element

In Stablängsrichtung wird entsprechend der Stabachse ebenfalls ausschließlich ein Element der Länge „1“ verwendet, was einer den prismatischen Stab charakterisierenden dünnen Querschnittsscheibe entspricht. Die Systemfreiheitsgrade der Volumenelemente an den beiden Querschnittsenden treten nicht in Erscheinung, diese sind, basierend auf der polaren Koppelung an die beiden Endpunkte der Stabachse, gebunden.

### G.2.2.3 Schritt 3: Materialorientierung:

Für einzelne Querschnittsteile sind die folgenden materiellen Eigenschaften möglich.

- **Isotropes Materialverhalten**

Zu definieren sind dafür zwei unabhängige Materialparameter, in diesem Fall eine Elastizitätskonstante und die Poisson-Zahl. Dieser Materialtyp ist für alle Solid-Elemente (Solid-Elemente sowie für die Cohesiven Elemente) verwendbar.

- **Orthotropes Materialverhalten**

Zu definieren sind dafür neun unabhängige Materialparameter, in diesem Fall drei Elastizitätsmoduli, drei Schubmoduli und drei Poisson-Zahlen. Dieser Materialtyp ist für alle Elemente (Solid-Elemente sowie für die cohesiven Elemente) verwendbar.

Für das Solid-Elemente (QS-Teil) und für das Cohesiv-Elemente (VF) gelten die folgenden Koordinatenorientierungen:

- Stabachse: 2-Achse
- 1-Achse entspricht der 1-Achse des kartesischen Koordinatensystems
- 3-Achse: positiv im Sinne eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems
- beliebige Orientierung (Drehung) des 1-3 Koordinatenebene um die 2-Achse

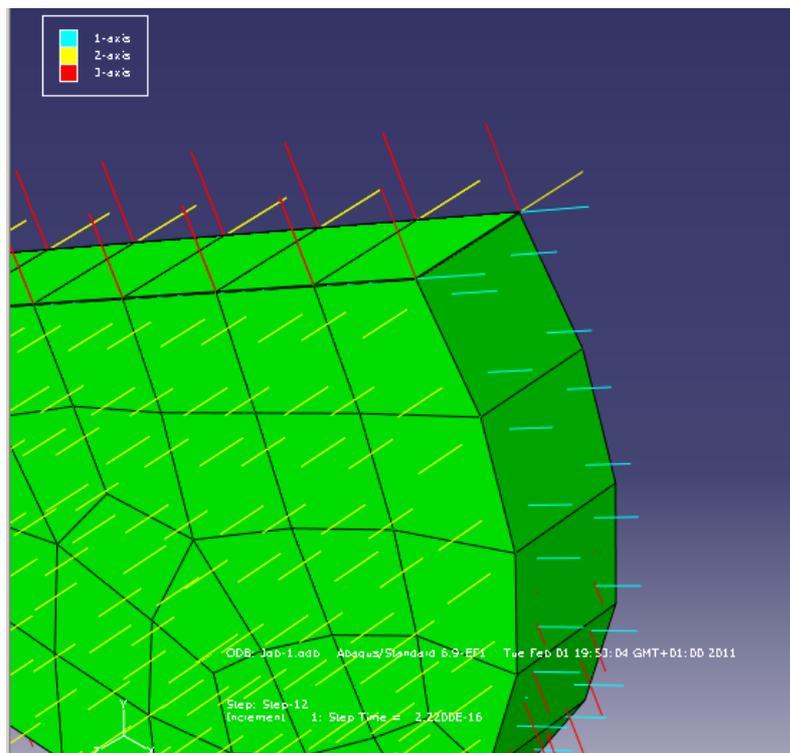


Abb.G.3: Materialorientierung für Solid-Elemente: Abaqus CAE

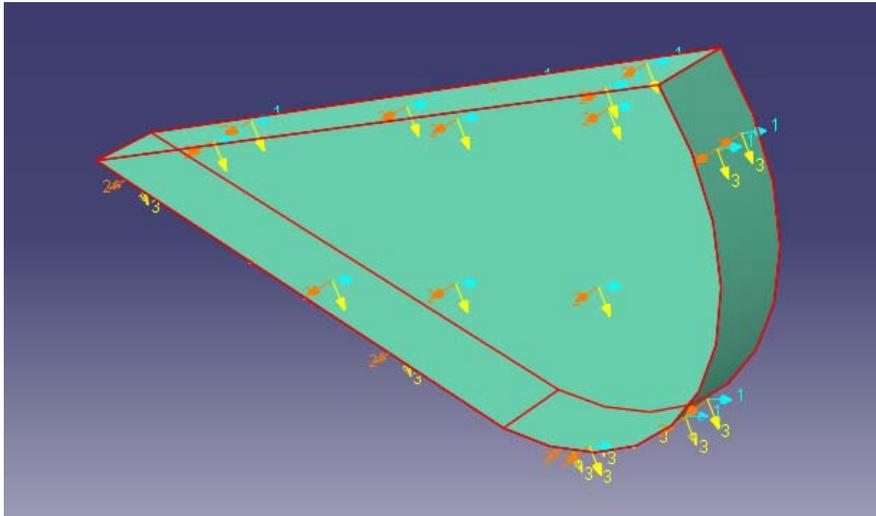


Abb.G.4: Materialorientierung für Solid-Elemente: Abaqus CAE-Viewer

#### G.2.2.4 Schritt 4: Verbundfugen für dickwandige Querschnittsteile (Koppelung: Solid-Solid)

- Grundlagen für die Verbundfugen

Die nachgiebige oder starre Koppelung von benachbarten dickwandigen Querschnittsteilen (Solid-Elemente) erfolgt durch den Einbau einer dünnen Zwischenschicht endlicher Dicke. Der Quotient aus Schubmodul und Schichtstärke (Normalenrichtung zur Verbundfuge) entspricht dabei der Verbundfugensteifigkeit. Durch diese Vorgehensweise kommt einer Verbundfuge im Vergleich zum Verhalten eines schubnachgiebigen Einzelquerschnittsteils keinerlei Besonderheit bzw. Sonderstellung zu.

Auf Grund der numerischen Umsetzung wurden cohesive Elemente mit verbesserten Ansätzen in Verbundfugendickenrichtung (Normalenrichtung 3) verwendet.

Die theoretische Behandlung stellt die Verbundfugen und die dickwandigen Elemente ohne Unterscheidung in identer Vorgehensweise dar.

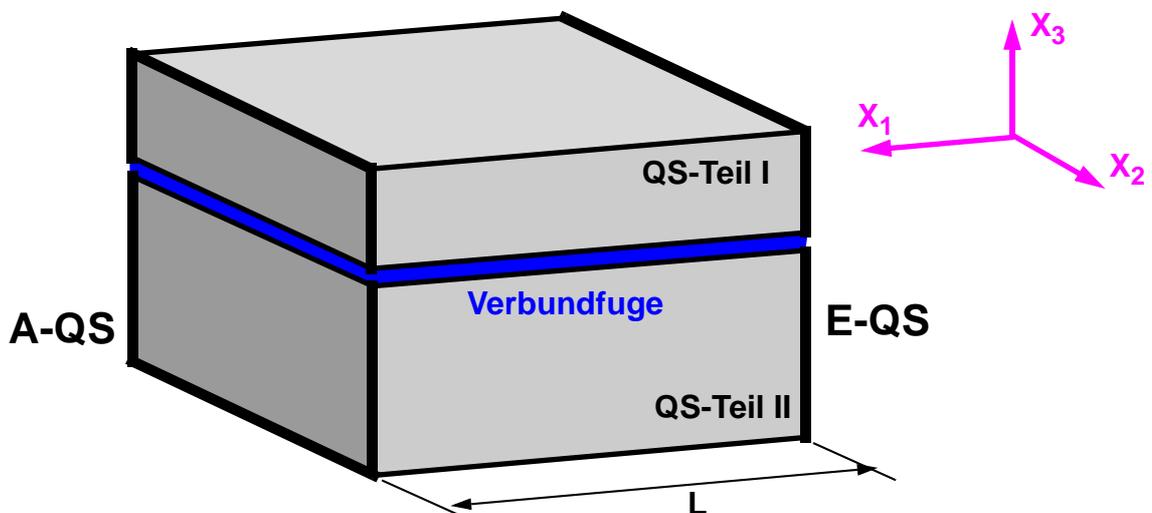


Abb.G.5: Cohesives Element zur Koppelung zweier dickwandiger QS-Teile

● **Definition der Verbundfugen (Cohesives Element) in Abaqus CAE**

Die Verbundfugen mit ihren starren bzw. nachgiebigen Verbundfugeneigenschaften werden mit den cohesiven Elementen vom Typ COH3D8 beschrieben. In Stablängsrichtung wird entsprechend der Stabachse ausschließlich ein Element verwendet.

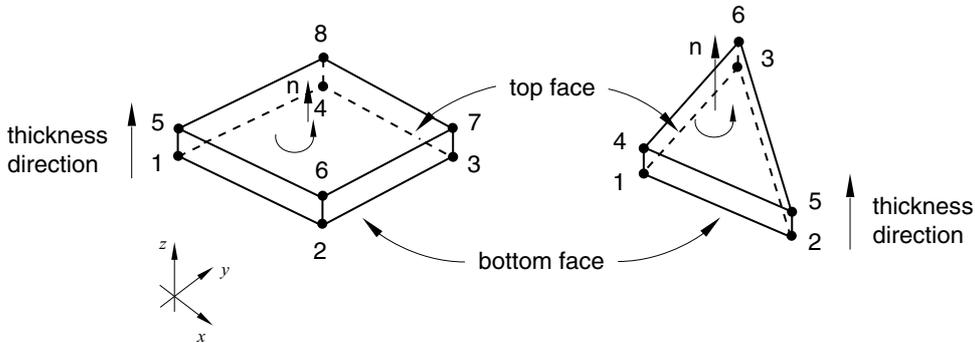


Abb.G.6: Nummernschema, Dickenrichtung für cohesive-Elemente (VF dickwandiger QS)

**G.2.2.5 Schritt 5: Allgemeine Vernetzung des beliebigen Stabquerschnitts**

Der Stabkörper, definiert durch den Stabquerschnitt und die Stablänge, wird wie folgt vernetzt: In Stablängsrichtung wird per Definition nur ein Element verwendet. Auf Grund der konstanten Verhältnisse in Stablängsrichtung ist dies ohne Einschränkungen in der Lösungsgenauigkeit möglich. Im Querschnitt ist eine beliebige Netzteilung definierbar.

Es werden lineare Elemente verwendet, wobei wahlweise die reduzierte Integration möglich ist:

- Solid-Elemente: C3D8(R)
- Cohesive-Elemente: COH3D8

**G.2.2.6 Schritt 6: Erstellung des InputFiles**

Für die automatisierte Bestimmung der Zwangsgleichungen für die Starrkörperrotationen (siehe G.2.2.7) und für die Normierungsbedingungen (siehe G.2.2.8) sind die Geometrie- und Materialinformationen (Koordinaten und Materialeigenschaften) des automatisch generierten Netzes erforderlich. Diese werden dem aus Abaqus-CAE exportierten Abaqus Inputfile (\*.inp) in geordneter Form entnommen.

**G.2.2.7 Schritt 7: Koppelung der Endquerschnitte des Stabkörpers an die Drehachse**

Für die polare Koppelung der Stabendquerschnitte des Stabkörpers an die Endpunkte der Drehachse gilt die folgende Darstellung für den Koordinatenvektor  $\bar{\mathbf{x}}$  für jeden Materialpunkt:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{DA} = \begin{bmatrix} X_2 - X_{2, DA} \\ X_3 - X_{3, DA} \end{bmatrix} \tag{G-1.a}$$

● **Starrkörperkoppelung des Stabkörpers an die Drehachse die axialen Freiheitsgrade**

Für die axialen Freiheitsgrade  $U_1$  des Stabanfangsquerschnitts gilt für die Koppelung an den Anfangspunkt der Drehachse in Abhängigkeit der Drehachsenanfangspunkt-Freiheitsgrade  $U_{1,DA}$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  die folgende Beziehung:

$$U_{1,A} = U_{1,A,DA} - \beta_{3,A,DA} \cdot \bar{X}_2 + \beta_{2,A,DA} \cdot \bar{X}_3 \quad [G-2.a]$$

Für die axialen Freiheitsgrade  $U_1$  des Stabendquerschnitts gilt für die Koppelung an den Endpunkt der Drehachse in Abhängigkeit der Drehachsenendpunkt-Freiheitsgrade  $U_{1,DA}$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  die folgende Beziehung:

$$U_{1,E} = U_{1,E,DA} - \beta_{3,E,DA} \cdot \bar{X}_2 + \beta_{2,E,DA} \cdot \bar{X}_3 \quad [G-2.b]$$

- **Starrkörperkoppelung des Stabkörpers an die Drehachse für die Querschnittskordinaten**

Für die Koppelung des Stabanfangsquerschnitts an den Anfangspunkt der Drehachse gilt für die Querschnittskordinaten  $U_2$  und  $U_3$  des Stabanfangsquerschnitts des Stabkörpers in Abhängigkeit der Drehachsenanfangspunktfreiheitsgrade  $U_2$ ,  $U_3$  und  $\beta_1$  die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} U_{2,A} &= U_{2,A,DA} - \beta_{1,A,DA} \cdot \bar{X}_3 \\ U_{3,A} &= U_{3,A,DA} + \beta_{1,A,DA} \cdot \bar{X}_2 \end{aligned} \quad [G-3.a]$$

Für die Koppelung des Stabendquerschnitts an den Endpunkt der Drehachse gilt für die Querschnittskordinaten  $U_2$  und  $U_3$  des Stabendquerschnitts des Stabkörpers in Abhängigkeit der Drehachsenendpunktfreiheitsgrade  $U_2$ ,  $U_3$  und  $\beta_1$  die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} U_{2,E} &= U_{2,E,DA} - \beta_{1,E,DA} \cdot \bar{X}_3 \\ U_{3,E} &= U_{3,E,DA} + \beta_{1,E,DA} \cdot \bar{X}_2 \end{aligned} \quad [G-3.b]$$

### G.2.2.8 Schritt 8: Normierungsgleichungen (Zwangsgleichungen): Verwölbung

Die Zwangsgleichungen sind einerseits für eine eindeutige kinematisch bestimmte Lagerung des Stabkörpers im Raum erforderlich. Ohne diese Zwangsgleichungen (Moment  $M_2$  und  $M_3$ ) tritt für die beiden Abscherzustände ausschließlich eine Querschnittaufkantung (Starrkörperrotation) auf. Zusätzlich führen sie zu, zu den Starrkörperfreiheitsgraden orthogonalen 3D-Querschnittsverwölbungsfelder, d.h. die 3D-Querschnittsverwölbungen beinhalten keinerlei Schnittkraftanteile, welche bereits durch die Starrkörperfreiheitsgrade beschrieben werden. In den folgenden formalen Beziehungen beschreibt  $\Omega$  die relativen 3D-Verschiebungsfelder ( $X_2$ ,  $X_3$ ),  $\Psi$  beschreibt den Amplitudenverlauf der Wölbfunktion in Stablängsrichtung ( $X_1$ ).

Für die Normierungsbedingungen für den Fall der materiellen Isotropie mit  $\nu = 0$  gilt.

- **Normalkraft**

Die Normierungsbedingung zur Abspaltung sämtlicher Normalkraftanteile aus den 3D-Einzelverschiebungsfeldern lautet:

$$\mathbf{k}_\Omega^T \cdot \Psi = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_\Omega = \int_A \mathbf{E} \cdot \Omega \cdot dA \quad [G-4.a]$$

Nach Glg. C-28.a gilt für die diskretisierte Darstellung:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 11} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 11} = \int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{G-4.b}]$$

• **Moment um die X<sub>3</sub>-Achse**

Die Normierungsbedingung zur Abspaltung sämtlicher Momentenanteile  $M_3$  aus den 3D-Einzerverschiebungsfeldern lautet:

$$\mathbf{k}_{x2\Omega}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_{x2\Omega}^T = \int_A \mathbf{E} \cdot X_2 \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot dA \quad [\text{G-4.c}]$$

Nach Glg. C-28.c gilt für die diskretisierte Darstellung:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 31} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 31} = \int_A -\mathbf{E} \cdot X_2 \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{G-4.d}]$$

• **Moment um die X<sub>2</sub>-Achse**

Die Normierungsbedingung zur Abspaltung sämtlicher Momentenanteile  $M_2$  aus den 3D-Einzerverschiebungsfeldern lautet:

$$\mathbf{k}_{x3\Omega}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}_{x3\Omega}^T = \int_A \mathbf{E} \cdot X_3 \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot dA \quad [\text{G-4.e}]$$

Nach Glg. C-28.b gilt für die diskretisierte Darstellung:

$$\hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 31} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{k}}_{0, \psi, 21} = \int_A \mathbf{E} \cdot X_3 \cdot \mathbf{h}^T dA \quad [\text{G-4.f}]$$

**G.2.2.9 Schritt 9: Numerische Integration der Zwangsgleichungen**

Die Zwangsgleichungen Glg. G-4.a, Glg. G-4.e und Glg. G-4.c werden, wie folgt, elementweise (FE-Netz) aus den linearen Ansatzfunktionen und den zugehörigen geometrischen und materiellen Informationen anhand der Gauß-Integration (vgl. Bathe, 2002) berechnet. Die zu integrierende Funktion  $F$  wird dabei als Summe einer beliebig wählbaren Anzahl (entspricht der Integrationsordnung) an gewichteten Funktionswerten bestimmt. Nach Bathe (2002) lässt sich ein Polynom  $(2n-1)$ -ter Ordnung mit nur  $n$  Funktionsauswertungen exakt integrieren.

$$\int_A F(Y, Z) \cdot dA = \det(\mathbf{J}) \cdot \int_0^1 \int_0^1 F(r, s) \cdot dr \cdot ds = \det(\mathbf{J}) \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot F(r_i, s_i) \quad [\text{G-5}]$$

Für die Lage der Stützstellen und für die Gewichtungsfaktoren gilt nach Bathe (2002) für Viereckelemente mit vier Integrationspunkten:

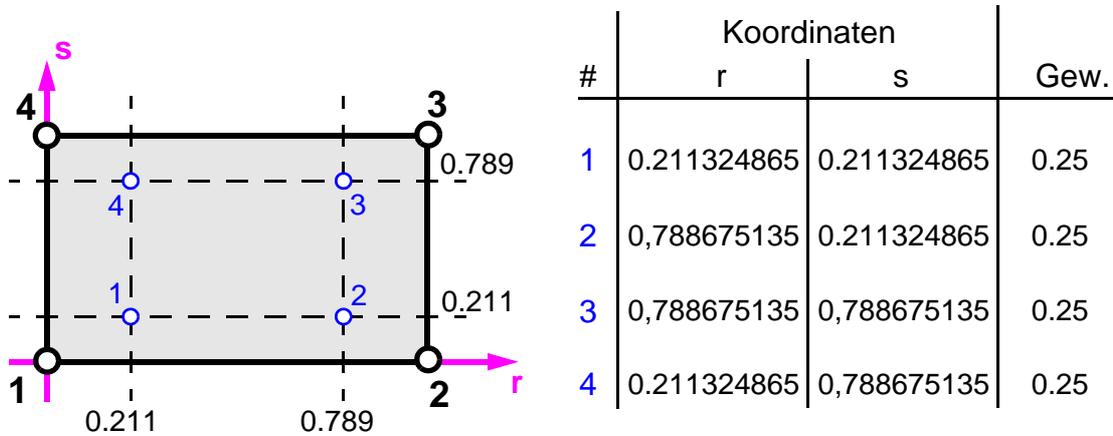


Abb.G.7: Integrationspunkte und Gewichtung bei einem Viereckelement nach Bathe (2002)

• Ansatzfunktionen für den 1D-Fall und den 2D-Fall

$$\mathbf{h}_{1D}(r) = \begin{bmatrix} h_1(r) \\ h_2(r) \\ \dots \\ h_n(r) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{2D}(r, s) = \mathbf{h}_{1D}(r) \cdot \mathbf{h}_{1D}^T(s) = \begin{bmatrix} h_1(r) \cdot h_1(s) & \dots & h_1(r) \cdot h_n(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_m(r) \cdot h_1(s) & \dots & h_m(r) \cdot h_n(s) \end{bmatrix} \quad [G-6.a]$$

• Ansatzfunktionen und deren Ableitungen im lokalen System für den 2D-Fall mit linearer Ansatzordnung in Spaltenform

$$\mathbf{h}_{2D}(r, s) = \begin{bmatrix} h_1(r, s) \\ h_2(r, s) \\ h_3(r, s) \\ h_4(r, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-r) \cdot (1-s) \\ r \cdot (1-s) \\ r \cdot s \\ (1-r) \cdot s \end{bmatrix} \quad [G-6.b]$$

Für die Anordnung der Produkte der Ansatzordnung im 2D-Fall gilt die Reihenfolge der zugehörigen Punkte.

Die Ableitung der Ansatzfunktionen nach den lokalen Koordinaten r und s sind wie folgt definiert:

$$\mathbf{h}_{2D,r}(r, s) = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{h}_{2D}(r, s) = \begin{bmatrix} -(1-s) \\ (1-s) \\ s \\ -s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 \\ 1-s \\ s \\ -s \end{bmatrix} \quad [\text{G-6.c}]$$

$$\mathbf{h}_{2D,s}(r, s) = \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{h}_{2D}(r, s) = \begin{bmatrix} -(1-r) \\ -r \\ s \\ (1-r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r-1 \\ -r \\ s \\ 1-r \end{bmatrix} \quad [\text{G-6.d}]$$

- **Darstellung der Verschiebungsgrößen  $\Omega$  in diskretisierter Darstellung**

$$\Omega(r, s) = \mathbf{h}_{2D}^T(r, s) \cdot \hat{\Omega} \quad [\text{G-6.e}]$$

- **Globale Koordinaten**

Auf Grund der isoparametrischen Darstellung gilt für die globalen Koordinaten:

$$X_2(r, s) = \mathbf{h}_{2D}^T(r, s) \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \quad \text{und} \quad X_3(r, s) = \mathbf{h}_{2D}^T(r, s) \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \quad [\text{G-6.f}]$$

- **Bestimmung der Jacobi-Matrix und deren Determinante**

Die Jacobi-Matrix wird durch Ableitung der Verschiebungsgrößen nach den globalen Koordinaten bestimmt:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial X_2} + \frac{\partial \Omega}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial X_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial r} & \frac{\partial \Omega}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial X_2} \\ \frac{\partial s}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad [\text{G-7.a}]$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X_3} = \frac{\partial \Omega}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial X_3} + \frac{\partial \Omega}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial X_3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial r} & \frac{\partial \Omega}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial X_3} \\ \frac{\partial s}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad [\text{G-7.b}]$$

$$\text{grad}\Omega^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial X_2} & \frac{\partial\Omega}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial r} & \frac{\partial\Omega}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial X_2} & \frac{\partial r}{\partial X_3} \\ \frac{\partial s}{\partial X_2} & \frac{\partial s}{\partial X_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial r} & \frac{\partial\Omega}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}^{-1} \quad [\text{G-7.c}]$$

In dieser Form geschrieben, lässt sich die Jacobi Matrix nicht bestimmen, der Weg über die differentiellen Koordinatenzuwächse vereinfacht die Bestimmung wesentlich.

$$\begin{bmatrix} dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial X_2}{\partial s} \cdot ds \\ \frac{\partial X_3}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial X_3}{\partial s} \cdot ds \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial r} & \frac{\partial X_2}{\partial s} \\ \frac{\partial X_3}{\partial r} & \frac{\partial X_3}{\partial s} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \cdot \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} \quad [\text{G-7.d}]$$

$$\begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial X_2} & \frac{\partial r}{\partial X_3} \\ \frac{\partial s}{\partial X_2} & \frac{\partial s}{\partial X_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial X_3}{\partial s} & -\frac{\partial X_2}{\partial s} \\ -\frac{\partial X_3}{\partial r} & \frac{\partial X_2}{\partial r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} \quad [\text{G-7.e}]$$

mit

$$\frac{\partial X_2}{\partial r} = \mathbf{h}_{2D,r}^T(r,s) \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial X_2}{\partial s} = \mathbf{h}_{2D,s}^T(r,s) \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \quad [\text{G-7.f}]$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial r} = \mathbf{h}_{2D,r}^T(r,s) \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial X_3}{\partial s} = \mathbf{h}_{2D,s}^T(r,s) \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \quad [\text{G-7.g}]$$

- **Determinante der Jacobi-Matrix**

Die Jacobi-Matrix beschreibt für den 2D-Fall das Flächeninhaltsverhältnis zwischen der realen Elementgeometrie und der Geometrie des unverzerrten Einheitselements.

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{\partial X_2}{\partial r} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial s} - \frac{\partial X_3}{\partial r} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial s} \quad [\text{G-7.h}]$$

### G.2.2.10 Schritt 10: Berechnung und Einbau der Normierungsgleichungen

Die unter Glg. G-4.a, Glg. G-4.e und Glg. G-4.c angeführten Zwangsgleichungen sind jeweils für den Stabanfangsquerschnitt und den Stabendquerschnitt zu berechnen. Dafür sind die Steifigkeitsvektoren  $\mathbf{K}_{\Omega}$ ,  $\mathbf{K}_{\chi 2 \Omega}$  und  $\mathbf{K}_{\chi 3 \Omega}$  entsprechend dem Element-Knoten-Schema zu assemblieren. Beim Einbau der Zwangsgleichung (Equation) ist besonders auf die Tatsache der Master-Slave Philosophie von Abaqus zu achten. Der jeweils erste Knotenfreiheitsgrad einer Equation ist in weiterer Folge für alle weiteren Schritte nicht mehr verwendbar, d. h. für diesen speziellen Fall der Zwangsgleichungen kann dieser bei den weiteren Zwangsgleichungen nicht mehr verwendet werden. Die drei Zwangsgleichungen betreffen ausnahmslos alle axialen Freiheitsgrade in Stablängsrichtung, somit sind bei den jeweils folgenden Zwangsgleichungen die eliminierten Freiheitsgrade in substituierter Form zu berücksichtigen.

### G.2.2.11 Schritt 11: Gleichungslösung für die Lösungsanteile I&II

- **Lösungsanteil I: Einzellastfälle – Bestimmung der Freifeldlösung**

Die 3D-Einzelverschiebungsfelder der Freifeldlösungen lassen sich aus den folgenden statischen Lastfällen eindeutig bestimmen.

- Abscheren in die  $\chi_2$ -Richtung:  $\gamma_{12,0} = 1$
- Abscheren in die  $\chi_3$ -Richtung:  $\gamma_{13,0} = 1$
- Torsion um die  $\chi_1$ -Achse  $\Theta_1 = 1$

- **Lösungsanteil II: Natural Frequency Extraction – Lösung des Eigenwertproblems**

Für die Bestimmung der 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösungen gilt es das lineare Eigenwertproblem nach Glg. G-8.a zu lösen. Bei genauer Betrachtung des Natural Frequency Extraction, implementiert in Abaqus zur Frequenzanalyse, sticht deren Äquivalenz ins Auge. Die einzige Aufgabe besteht somit in der richtigen Umrechnung des Belastungsterms. Für die Ermittlung der Ersatzrohrdichte zur Bestimmung der 3D-Verwölbungsfunktionen gelten die Vorfaktormatrizen aus Glg. E-6.a und Glg. E-14.a:

$$\left( \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 11} - \frac{\lambda^2}{L^2} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0} \text{ es gilt: } \lambda^{*2} = \frac{\lambda^2}{L^2} \quad [\text{G-8.a}]$$

mit  $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega} \cdot e^{-\lambda \xi}$ : [m]

Diese Form des Gleichungsaufbaus entspricht jenem der „Natural Frequency Extraction“, die in Abaqus 6.10.-1 zur Schwingungsanalyse verwendet wird (Abaqus Usermanual, 2010, 6.3.5).

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad [\text{G-8.b}]$$

mit  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \text{Sin}(\omega t)$ : [m]

Die Steifigkeitsmatrizen  $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi, 11}$  nach Glg. G-8.a und  $\mathbf{K}$  Glg. G-8.b sind bei Definition der Randbedingungen ident, d. h. die beiden reinen Schubzustände und der Torsionszustände sind per Definition unterbunden, es treten nur axiale Verschiebungen auf.

Für die Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11}$  gilt bei Verwendung des isotropen Materialverhaltens bei dimensionsloser Darstellung der Verwölbungsfunktionen  $\boldsymbol{\Omega}$  in diskretisierter Form:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}^T \, dA: [\text{Nm}] \quad [\text{G-8.c}]$$

Für die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  der „Natural Frequency Extraction“ gilt unter Zugrundelegung der dimensionslosen Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{M} = \int_V \rho_0 \cdot \mathbf{N}_m \cdot \mathbf{N}_m^T \cdot dV \, [\text{kg}] \quad [\text{G-8.d}]$$

Die Gleichungen Glg. G-8.c und Glg. G-8.d unterscheiden sich nur in den Vorfaktoren, d. h. durch das Verhältnis der Rohdichte zum Elastizitätsmodul. Auf Grund dieser formalen Äquivalenz der Gleichungen kann diese Art der Eigenwertzerlegung in Abaqus zur Bestimmung der 3D-Einzelverschiebungsfelder der Abklinglösungen verwendet werden.

### Prinzip der virtuellen Arbeit für Anteile aus den normalspannungsbehafteten Wölbanteilen

$$\delta \hat{\Omega}^T \cdot (-\lambda^{*2} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} \cdot \hat{\Omega}) \quad [-] \cdot \left[ \frac{1}{\text{m}^2} \cdot \text{Nm} \cdot \text{m} \right] = [\text{N}] \quad [\text{G-8.e}]$$

### Prinzip der virtuellen Arbeit für die Trägheitskräfte der Natural Frequency Extraction

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^T \cdot (-\omega^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad [-] \cdot \left[ \frac{1}{\text{t}^2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \right] = [\text{N}] \quad \text{mit } \omega = 2\pi \cdot f \quad \left[ \frac{1}{\text{t}} \right] \quad [\text{G-8.f}]$$

### Gegenüberstellung der Vorfaktoren

$$-\omega^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}} \neq -\lambda^{*2} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\Omega, \psi'', 11} \cdot \hat{\Omega} \quad \longrightarrow \quad -\omega^2 \cdot \rho_0 = -\lambda^{*2} \cdot \mathbf{E} \quad [\text{G-8.g}]$$

Für die Einheiten gilt:  $\omega: [1/\text{t}]$  und  $\lambda: [1/\text{m}]$

$$\frac{\omega^2}{\lambda^{*2}} = \frac{\mathbf{E}}{\rho_0} \quad \longrightarrow \quad \frac{\omega}{\lambda^*} = \sqrt{\frac{\mathbf{E}}{\rho_0}} \stackrel{!}{=} 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \longrightarrow \quad \rho_0 = \frac{\mathbf{E}}{1(\text{m/s})^2} \quad [\text{G-8.h}]$$

$$\text{Für die Einheiten von } \rho_0 = \frac{\mathbf{E}}{1(\text{m/s})^2} \text{ gilt: } \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \left( \frac{\text{t}}{\text{m}} \right)^2 \right] = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{t}^2 \cdot \text{m}^2} \cdot \frac{\text{t}^2}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad [\text{G-8.i}]$$

Somit ist für die Rohdichte  $\rho_0$  [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] ein Ersatzmodul  $\mathbf{E}$  in [ $\text{N}/\text{m}^2$ ] einzugeben.

Die Eigenwerte und die Eigenformen sind bei Berechnungen mit dem beschriebenen Modell unabhängig von der Stablänge, da die Verwölbungen für diesen Fall in Stablängsrichtung stets von konstanter Form sind.

### **Massenkorrektur für die transversale Schwingung**

Für die Gleichungslösung basierend auf der implementierten „Natural Frequency Extraction“, sind zur problemadäquaten Gleichungslösung die folgenden Überlegungen wichtig:

Bei der Bestimmung der Eigenformen mit der „Natural Frequency Extraction“ ist der Endknoten der Stabachse frei beweglich zu halten. Dies ist erforderlich, um die die Eigenformen begleitenden Starrkörperabscherungen und Starrkörperverdrillungen zu ermöglichen. Durch dieses Vorgehen sind zusätzlich auch die Randbedingungen in Form der spannungsfreien Oberflächen erfüllt.

Für den senkrecht zur Stabachse verschiebbaren und um die Stabachse drehbaren Querschnitt ist die Massenmatrix in der Form zu korrigieren, dass ausschließlich schwingungswirksame Massen in Stablängsrichtung vorhanden sind.

Die Korrektur wird in der Form durchgeführt, dass die schwingungsrelevante Stab- und Torsionsmasse am Endknoten in negativer Schwing- und Verdrehrichtung aufgebracht wird.

#### **G.2.2.12 Schritt 12: Datenexport**

Für die weitere Bearbeitung werden die folgenden Ergebnisse zur Verfügung gestellt:

- Lösungsanteil I: 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Freifeldlösung
- Lösungsanteil II: 3D-Einzelverschiebungsfelder für die Abklinglösung mit den zugehörigen Abklingzahlen und den begleitenden 3D-Starrkörperverschiebungsfeldern.

#### **G.2.2.13 Schritt 13: Bestimmung der Stabsteifigkeitsmatrix**

Basierend auf den bestimmten 3D-Einzelverschiebungsfeldern, wird mit Mathematica 7 nach den in Kapitel 7 hergeleiteten Gleichungen das Stabsteifigkeitselement ermittelt. Sämtliche grafische Darstellungen der relativen 3D-Verschiebungsfelder, der 3D-Spannungen sowie des Abklingverhaltens in Stablängsrichtung werden mit Mathematica erstellt.