



Harald Walder, BSc

Modellunsicherheit bei der Bewertung von Contingent Claims

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuerin:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Eranda Dragoti-Cela

Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik

Graz, November 2014

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum/Date

Unterschrift/Signature

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle besonders bei Frau Professor Eranda Dragoti-Cela für die Betreuung dieser Arbeit und der mir entgegengebrachten Geduld bei der Beantwortung meiner Fragen bedanken.

Weiters bedanke ich mich bei all jenen, die mir bei dieser Arbeit direkt und indirekt geholfen haben.

Besonders bedanken möchte ich mich auch bei meiner Familie und meiner Freundin Sarah, die mich Zeit meines Studiums unterstützt und motiviert haben.

Vielen herzlichen Dank,
Harald Walder

Zusammenfassung

Die Einführung von Basel III und weiterer regulatorischer Standards verpflichtet Unternehmen auch das Modellrisiko bei der Bewertung ihrer Positionen miteinzubeziehen. Dieses Risiko entsteht durch falsche Modell- oder Parameterannahmen und daraus resultierender Bepreisungs- oder Hedgingfehler. In dieser Arbeit wird zunächst der rechtliche Hintergrund erläutert und das Konzept der vorsichtigen Bewertung vorgestellt. Die akurate Bewertung des Modellrisikos verlangt das gleichzeitige Betrachten einer Vielzahl von Finanzmarktmodellen. Um stochastische Analysis parallel für viele Finanzmarktmodelle zu betreiben, wird eine passende Aggregationsmethode angewandt. Daraufhin werden die Risikomaße von *Cont* und *Detering/Packham* eingeführt und näher untersucht. Die Arbeit schließt mit einem Vergleich der Risikomaße anhand zweier praktischer Beispiele.

Abstract

Basel III and further regulatory standards require corporations to consider model risk as an additional risk factor in their evaluations. Model risk occurs due to incorrect model design or misspecification of parameters, which potentially leads to pricing and hedging errors. As a first step, this thesis explains the legal background as well as the concept of prudent valuation. To accurately analyse model risk, several pricing models have to be examined simultaneously and therefore a suitable aggregation method is presented that allows parallel development of stochastic analysis. Next, risk measures by *Cont* and *Detering/Packham* are introduced and further analysed. This thesis concludes with a comparison of the risk measures in two case studies.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	iv
1 Einleitung	1
1.1 London Fail Whale	1
2 Basel III - Prudent Valuation	3
2.1 Von Basel I zu Basel III	3
2.2 Umsetzung von Basel III und Prudent Valuation	4
2.3 Modellunsicherheit	5
3 Mathematische Voraussetzungen	8
3.1 Das Marktmodell	8
3.2 Risikoneutrale Bewertung	14
3.2.1 Black Scholes Modell	23
3.2.2 Heston Modell	26
3.3 Benchmark Instruments und Static Hedging	28
3.4 Vollständige und Unvollständige Märkte	29
3.5 Stochastische Analysis unter \mathcal{Q}	30
4 Modellunsicherheit nach Cont	37
4.0.1 Annahmen	37
4.1 Price Range Measure	38
Eigenschaften eines Modellrisiko-Maßes	40
4.1.1 Eigenschaften des Price Range-Maßes	43
4.2 Konvexes Maß der Modellunsicherheit	46
4.2.1 Eigenschaften des konvexen Risikomaßes	51
5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham	55
5.0.2 Annahmen	55

Inhaltsverzeichnis

5.1	Modellunsicherheit bei zwei Modellen	56
5.2	Modellunsicherheit bei mehreren Modellen	60
5.2.1	Erweiterter Wahrscheinlichkeitsraum	60
5.2.2	Allgemeine Risikomaße	67
5.2.3	Risikomaße für die Modellunsicherheit	69
	Vorgehensweise	71
5.3	Eigenschaften des Modellrisikomaßes von Detering und Packham	77
6	Vergleich der Modellrisikomaße	83
6.1	Modellrisiko einer europäischen Call-Option	83
6.2	Modellrisiko eines Down-and-Out-Calls	90
7	Zusammenfassung	94
	Literatur	97

Abbildungsverzeichnis

2.1	3-Säulen Modell von Basel II	4
3.1	Black Scholes Modell - Preisprozess	25
3.2	Heston Modell - Preisprozess	27
4.1	Parameter-Verteilung	45
5.1	Modellverteilung	79
5.2	Verlustverteilung	80
6.1	Modellrisiko für verschiedene Strikes 1	85
6.2	Modellrisiko für verschiedene Strikes 2	86
6.3	Modellrisiko für verschiedene Strikes 3	87
6.4	Vergleich der Strategien 1	89
6.5	Vergleich der Strategien 2	89
6.6	Modellrisiko einer Barrier-Option 1	92
6.7	Modellrisiko einer Barrier-Option 2	93

List of Notations

$\bar{\mathcal{A}}_W, \mathcal{A}_W$	in Definition 3.5.6 definierte Menge von Diffusionsmatrizen ...	33
\mathbb{F}^Q	zu Grunde liegende Filtration, definiert in Definition 3.2	38
\mathbb{F}^Q	zu Grunde liegende Filtration, definiert in Definition 3.2	55
$\mathbb{H}^2, \mathbb{H}_{loc}^2$	Menge integrierbarer Prozesse, siehe Definition 3.5.13	36
\mathbb{Q}	Martingalmaß aus der Menge \mathcal{Q}	29
\mathbb{Q}_0	Wiener Maß	31
\mathbb{Q}_H	Hedging- und Pricingmodell	56
\mathbb{Q}_M	Modell nach welchem sich der Markt entwickelt	56
$\mathbb{S}_d^{>0}$	Menge der d -dimensionalen positiv definiten Matrizen	31
\mathcal{A}	separable Klasse von Diffusionskoeffizienten, siehe Definition 3.5.11 35	
\mathcal{A}_0	Generatormenge, siehe Definition 3.5.10	35
\mathcal{C}	Menge aller betrachteter Payoffs mit Underlying S	38
\mathcal{Q}	Menge aller von \mathcal{P} abgeleiteter äquivalenter Martingalmaße ...	29
\mathcal{Q}_W	Menge aller schwacher Lösungen mit $a \in \mathcal{A}_W$	34
\mathcal{Q}_{loc}	Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße unter welchen der von ihnen induzierte kanonische Prozess B ein lokales Martingal ist	31

Abbildungsverzeichnis

\mathcal{S}	Menge aller selbstfinanzierter und zulässiger Handelsstrategien 18
μ	Risikomaß für Modellunsicherheit nach Detering/Packham, siehe Definition 5.2.9 72
μ_*	Konvexes Risikomaß der Modellunsicherheit, siehe Definition 4.19 47
$\mu_{\mathcal{Q}}$	Price Range Measure, siehe 4.9 39
π	Preis eines Contingent Claims 29
Π^X	Menge von Hedgingstrategien für einen Payoff X , sodass der Verlust unter \mathbb{Q}_H gleich 0 ist 70
$\theta^{a,b}$	Zeitpunkt, zu welchem zwei Elemente der Diffusionsmatrizen zum ersten Mal nicht übereinstimmen 34
AIC	Akaike Informationskriterium, siehe Definition 5.2.2 64
B	kanonischer Prozess 31
C^{bid}, C^{ask}	untere (bid) bzw. obere (ask) Schranke der Marktpreise eines Contingent Claims 38
L	Verlustprozess, siehe Definition 5.1.2 57
$R(AIC)$	Relative Likelihood-Funktion, siehe Definition 5.2.3 64
V	Wertprozess, siehe Definition 5.1.1 57
Y	nicht statisch hedgebarer Payoff 56

1 Einleitung

1.1 London Fail Whale

*”There is no good and evil, there is only power
...and those too weak to seek it.”¹*

Im Mai 2012 meldete *JPMorgan Chase & Co.* einen Verlust von über zwei Milliarden Dollar durch fehlgeschlagene Geschäfte der Risiko-Management-Abteilung². Obwohl mehrere Abteilungen Schuld daran trugen, wurde die Geschichte bekannt unter dem Titel *”The London Whale”* oder *”Voldemort”* - die Bezeichnungen für jenen Trader, der durch seine Geschäfte mit Credit Default Swaps für einen Großteil der Verluste verantwortlich war. Die daraufhin eingesetzte Task Force stellte in ihrem Report³ fest, dass auch katastrophale Fehler im VaR-Modell für die Verluste verantwortlich waren. Dazu gehörten Fehler in der tatsächlichen Berechnung, falsche Verteilungsannahmen und fehlendes oder mangelhaftes Backtesting des Modells. Ein weiteres bekanntes Beispiel, welches auch in *Detering* und *Packham* [16] beschrieben und in *Jorion* [30] aufgearbeitet wird, ist das des Hedgefonds *Long Term Capital Management*, welcher in Folge der Währungskrise in Russland 1998 aufgelöst wurde. Auch hier führten falsche Verteilungsannahmen und das Ausblenden von Risikofaktoren zu hohen Verlusten, welche schließlich nicht mehr ausgeglichen werden konnten. In der Leitung von *LTCM* saßen unter anderem *Myron S. Scholes* und *Robert Carhart Merton*.

¹Harry Potter and the Philosopher’s Stone, von Joanne K. Rowling [38]

²„Whale“ Fail: JPMorgan’s \$ 2 Billion Blunder Tied to London Trader, von Sam Gustin [22]

³Report of JPMorgan Chase & Co. Management Task Force Regarding 2012 CIO Losses, [8]

1 Einleitung

Dies sind nur zwei Beispiele von vielen, in denen falsche Annahmen und somit eine falsche Modellwahl zu großen Verlusten führten. In Folge der Finanzkrise ab 2007 wurde schließlich auch von regulatorischer Seite versucht die Risiken, denen Finanzinstitute ausgesetzt sind, differenzierter zu betrachten. Dies führte im Zuge von *Basel III* (siehe Kapitel 2) dazu, dass seit 1. Jänner 2014 die Bewertung und Absicherung des Modellrisikos verpflichtend ist.

Cont [9] beschrieb bereits 2006 zwei Risikomaße, die das Modellrisiko eines Contingent Claims bewerten. Diese beiden Maße werden in Kapitel 4 vorgestellt. Sie sind allerdings noch sehr einfach konzipiert und bemessen ausschließlich das Risiko, welches durch Bepreisen im falschen Finanzmarktmodell entsteht. Fehler durch Hedgen im falschen Modell werden damit nicht in die Bewertung des Modellrisikos miteinbezogen. Mit der Einführung von Regulatorien stieg auch das Bemühen kompetentere Verfahren zur Bewertung des Modellrisikos zu entwerfen. Eines dieser Verfahren wird in Kapitel 5 vorgestellt und wurde von *Detering* und *Packham* entwickelt. Damit lässt sich auch das Risiko, welches durch das Absichern im falschen Modell entsteht, in die Bewertung des Modellrisikos miteinbeziehen.

Die Bewertung des Modellrisikos verlangt dabei, dass man eine große Anzahl an verschiedenen Finanzmarktmodellen parallel betrachtet. Dies erfordert einige Überlegungen, da es im Allgemeinen nicht möglich ist, zum Beispiel stochastische Integrale parallel über eine beliebige Menge an Wahrscheinlichkeitsmaßen zu betrachten. Basierend auf der Arbeit von *Soner* [41] wird dieses Problem in Kapitel 3.5 behandelt. Alle für diese Arbeit notwendigen mathematischen Voraussetzungen werden in Kapitel 3 besprochen. In diesem Kapitel werden zusätzlich auch das Black-Scholes-Modell und das Heston-Modell vorgestellt. Diese werden in den Kapiteln 4.1.1, 4.2.1, 5.3 und 6 in praktischen Beispielen verwendet.

Für Simulationen und Auswertungen wurde die Programmiersprache **R** verwendet. Die in den Kapiteln 4.1.1, 4.2.1, 5.3 und 6 verwendeten Daten stammen von www.google.com/finance.

2 Basel III - Prudent Valuation

2.1 Von Basel I zu Basel III

Am 16. Dezember 2010 veröffentlichte der „Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht“ der *Bank of International Settlements (BIS)* die vorläufige Endfassung von *Basel III: International framework for liquidity risk measurement, standards and monitoring* [5], auf welcher auch der rechtliche Hintergrund dieser Arbeit aufbaut. *Basel III* ist dabei die aktuellste Version eines 1998, unter dem Name *Basel I*, eingeführten internationalen Standards mit dem Ziel, die Bankenaufsicht zu vereinheitlichen, gemeinsame internationale Wettbewerbsbedingungen zu schaffen und insgesamt das Insolvenzrisiko von Banken zu senken. Da *Basel I* aber den Risikogehalt des Bankgeschäfts nicht adäquat abbildete, Eigenkapital nicht nach Risikoart bewertete und Risikomanagement nicht ausreichend anerkannt wurde, trat mit 1. Jänner 2007 eine überarbeitete Version mit dem Name *Basel II* in Kraft. Während sich *Basel I* noch ausschließlich auf Mindestkapitalanforderungen konzentrierte, wurde mit *Basel II* ein 3-Säulen Modell (siehe Abbildung 2.1) vorgestellt, welches den aufsichtsrechtlichen Überwachungsprozess und die Offenlegung auf eine Stufe mit den Mindestkapitalanforderungen stellte.

Weiters durften Banken Forderungen an Staaten und Unternehmen von externen Ratingagenturen bewerten lassen und auch interne Ratings für Kreditrisiken verwenden (sofern behördlich zugelassen).

Im Zuge der, 2007 durch die US-Subprime-Krise ausgelösten, weltweiten Finanzkrise, wurde schnell sichtbar, dass auch *Basel II* die Risiken von Banken nicht vollständig abdeckt und es wurde mit der Arbeit an *Basel III* begonnen, welches folgende Ziele hatte:

2 Basel III - Prudent Valuation

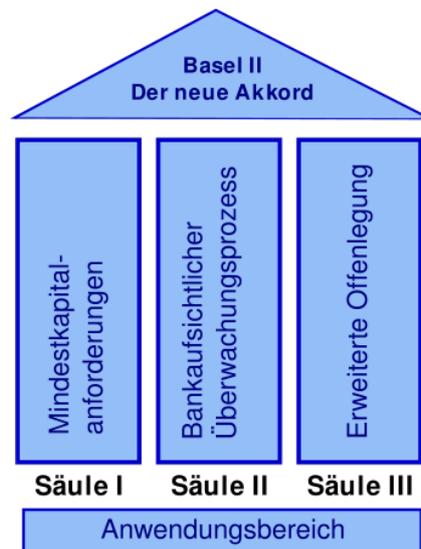


Abbildung 2.1: 3-Säulen Modell von Basel II ¹

- Harmonisierung der Risikotragfähigkeit der Banken (ausgedrückt durch Höhe und Qualität des Eigenkapitals) in Hinsicht der eingegangenen Risiken
- Erweiterte Rechenschaftspflichten
- Liquiditätspuffer sollen großzügiger gestaltet werden
- Aufbau der Risikovorsorge in wirtschaftlich positiven Zeiten

2.2 Umsetzung von Basel III und Prudent Valuation

Die durch *Basel III* definierten Regulatorien sind nicht verbindlich, sondern werden erst durch Übernahme in nationales Recht geltend. In der Europäischen Union geschieht dies durch das *CRD IV/CRR*-Paket, welches mit 17. Juli 2013 in Kraft getreten ist und seit 1. Jänner 2014 verbindlich ist. *CRD IV* steht

¹Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Basel_2.svg von Andreas Griessner

2 Basel III - Prudent Valuation

dabei für das *Capital Requirements Directives IV* und ist eine Richtlinie, welche in den jeweiligen Nationalstaaten umzusetzen ist. Sie betrifft allgemeine Voraussetzungen, Sanktionen, etc.. Für diese Arbeit von größerer Bedeutung ist die *Capital Requirements Regulation (CRR)*, welche direkt in allen Mitgliedsstaaten seit 1. Jänner 2014 verbindlich gilt. Mit der *CRR* gilt nun für alle Finanzinstrumente, die nach dem Fair-Value-Prinzip² bilanziert werden, das Konzept der vorsichtigen Bewertung (*Prudent Valuation*). Diese richtet ihr Hauptaugenmerk vor allem auf Finanzinstrumente, welche nicht ständig am Markt gehandelt werden oder illiquide sind. Um diese korrekt zu bewerten, reicht es nicht den Marktpreis zu beobachten, sondern es kommen Bewertungsmodelle zum Einsatz, welche auf verschiedenen Annahmen und Daten beruhen. Diese Prämissen beinhalten ein gewisses Fehlerpotential und um dieses auszugleichen, schreibt die *CRR* vor, dass, falls der Fair Value geringer als der *Prudent Value* ist, die Differenz direkt vom (harten) Kernkapital abgezogen werden muss.

Prudent Valuation beinhaltet im Gegensatz zum Fair-Value-Prinzip vor allem zusätzliche Wertanpassungen (*Additional Value Adjustments - AVA*). Diesbezüglich wurde von der *European Banking Authority (EBA)* am 31. März 2014 der finale Entwurf zu den technischen Standards (*Regulatory Technical Standards on Prudent Valuation*“, [4]) veröffentlicht, welcher die endgültigen Spezifizierungen dieser *AVAs* beinhaltet. Eine dieser *Additional Value Adjustments* ist die Modellunsicherheit bzw. Parameterunsicherheit des Bewertungsmodells.

2.3 Modellunsicherheit

Es gibt zwei Möglichkeiten *Prudent Valuation* im Unternehmen zu implementieren - den *Simplified Approach* und den *Core Approach*. Welcher zu verwenden ist und wie diese Ansätze aussehen, wird in den *Regulatory Technical Standards (RTS)* [4] definiert.

²„Preis, zu dem ein Finanzinstrument zwischen zwei unabhängigen Parteien frei gehandelt werden würde. Der Fair Value ist die Bewertungsgrundlage für Finanzinstrumente in der Rechnungslegung. Bei einem Optionsschein kennzeichnet der Fair Value den theoretisch richtigen Preis der Option unter Einbeziehung aller preisbeeinflussenden Faktoren.“ (Gabler Wirtschaftslexikon [25])

2 Basel III - Prudent Valuation

Ersterer ist von Instituten zu wählen, deren Summe an Fair-Value Positionen den Gesamtwert von 15 Mrd. Euro nicht übersteigt. Freiwillig können sie aber auch auf den *Core Approach* wechseln. Die AVAs belaufen sich dabei zusammen auf 0.1% des Gesamtwerts (siehe *Section 2*, [4]). Alle anderen Institute müssen den *Core Approach* wählen. In diesem Fall ist es notwendig, die einzelnen AVAs in die Bewertung miteinzubeziehen. In der EU-Regulation 575/2013 (siehe [36]) wird dazu festgehalten:

„Institutions shall formally consider the following valuation adjustments: unearned credit spreads, close-out costs, operational risks, market price uncertainty, early termination, investing and funding costs, future administrative costs and, where relevant, model risk.“
(Article 105,(10) [36])

Damit wird eine Bewertung unter Modellunsicherheit gesetzlich vorgeschrieben. Spezifiziert wird diese in Artikel 11 der RTS [4]:

„Institutions shall estimate a model risk AVA for each valuation model (‘individual model risk AVA’) by considering valuation model risk which arises due to the potential existence of a range of different models or model calibrations, which are used by market participants, and the lack of a firm exit price for the specific product being valued.“ (Article 11,(1) [4])

Nach Artikel 11,(2) [4] hat ein Institut zwei Möglichkeiten das entsprechende AVA zu berechnen. Falls möglich, kommt Paragraph (3) zum Einsatz:

„Where possible, institutions shall calculate the model risk AVA by determining a range of plausible valuations produced from alternative appropriate modelling and calibration approaches. In this case, institutions shall estimate a point within the resulting range of valuations where they are 90% confident they could exit the valuation exposure at that price or better.“ (Article 11,(3) [4])

Unternehmen sollen ihr Portfolio aus Vermögenswerten (Assets) und Verpflichtungen (Liabilities) mit verschiedenen Modellen und Parametern so bewerten, dass sie einen Preis definieren können, den sie mit 90%-iger Sicherheit erreichen. Dieser Wert ist dann der *Prudent Value*.

2 Basel III - Prudent Valuation

Lässt sich das Risiko mit dieser Methodik allerdings nicht bestimmen, kommt Artikel 11,(4) [4] zum Einsatz. Dieser schlägt einen „expert-based approach“ vor. Diese Methode muss die Komplexität des Produktes, die Vielfalt an mathematischen Modellen und Parametern, die „Hedgebarkeit“ des Risikos, etc. beinhalten und jährlich kompetenten Behörden zur Überprüfung vorgelegt werden. Eine dieser beiden Methoden ist für jede Position anzuwenden und ein Wert ist zu ermitteln. Die gesamte zusätzliche Justierung für die Modellunsicherheit wird in Artikel 11,(6) [4] geregelt.

„*Institutions shall calculate the total category level AVA for model risk by applying to individual model risk AVAs the formulae for either Method 1 or Method 2 as referred to in the Annex.*“ (Article 11,(6) [4])

Diese Methoden werden im Annex [4] beschrieben.

Methode 1:

$$\sum_{\text{alle Positionen}} 50\% \cdot (FV - PV)$$

Methode 2:

$$\sum_{\text{alle Positionen}} \max(0, FV - 50\% \cdot (EV - PV))$$

FV ...Preis der Position unter Fair-Value Bedingungen

PV ...Preis der Position unter *Prudent-Value* Bedingungen, also mit 90%-iger Sicherheit unter Betrachtung verschiedener Modelle und Parameter

EV ...der erwartete Preis, geschätzt aus einer Menge möglicher Werte

Der Fair-Value ist bei Assets größer oder gleich dem *Prudent Value*, weil letzterer den erzielbaren Preis vorsichtiger schätzt. Als Beispiel sei an die Bid/Ask-Spread gedacht. Der Fair-Value entspricht dabei dem Mittelwert aus Bid-Preis und Ask-Preis oder mehr. Unter vorsichtiger Bewertung bewertet das Institut die Position aber nur zum Bid-Preis.

3 Mathematische Voraussetzungen

3.1 Das Marktmodell

Um die Modellunsicherheit zu untersuchen, ist es nötig verschiedene finanzmathematische Modelle zu betrachten und zu verstehen. Diesen Modellen liegt ein stochastisches Gerüst zu Grunde, welches in diesem Kapitel aufgebaut werden soll. Dazu wird sich diese Arbeit an den Aufbau von *Bingham* und *Kiesel* [6] halten. Dabei geht es vor allem um das Bepreisen und Absichern von Derivaten - in der Finanzmathematik auch oft Contingent Claims (bedingte Forderung) genannt. In der Praxis sind dies meist Optionen (zum Beispiel europäische Optionen, amerikanische Optionen oder, für das Modellrisiko von besonderer Bedeutung: exotische Optionen), Forwards oder Swaps.

Definition 3.1.1. *Ein Contingent Claim ist ein Vertrag mit einer festgelegten Fälligkeit (Maturity) T , dessen Wert vom Preis (oder von den Preisen) einer Referenzgröße (Underlying), oder auch mehrerer Referenzgrößen, zum Zeitpunkt T (oder innerhalb des Intervalls $[0, T]$) abhängt.*

Um den Wert eines Derivates zu bestimmen, ist es somit nötig, sich mit dem Underlying zu beschäftigen. Das Underlying ist meistens eine Aktie (stock), ein Referenzzins (interest rate, yield), eine Währung (currency) oder ein Index (S&P-500, DAX, . . .). Theoretisch kann alles als Underlying dienen, da Derivate nur zu einem Teil standardisiert sind. Diese Contingent Claims werden auch an organisierten Börsen gehandelt. Dabei sind die Produkte tatsächlich standardisiert und müssen gewisse regulatorische Bedingungen erfüllen. Zu einem großen Teil werden diese Verträge aber zwischen den Vertragsparteien direkt

3 Mathematische Voraussetzungen

beschlossen (Over-the-Counter, OTC). Dabei sind die Verträge oftmals nicht mehr standardisiert und erfordern somit ein gesondertes Risikomanagement.

Um all diese Contingent Claims finanzmathematisch zu bewerten, ist es nötig gewisse Annahmen zu treffen. Diese entsprechen im Allgemeinen nicht den realen Bedingungen eines Finanzmarktes, ermöglichen aber ohne große Einschränkungen gewisse mathematische Theorien herzuleiten.

Annahmen an den Markt: Der zu Grunde liegende Markt sei frei von Transaktionskosten, Steuern, Sicherheitsleistungen, Bid/Ask-Spreads und Restriktionen bei Leerverkäufen (Short-Selling). Weiters gelte für alle TeilnehmerInnen der gleiche risikolose Zinssatz und der Markt sei arbitragefrei.

Die Forderung, dass es keine Bid/Ask-Spreads, also Unterschiede zwischen den Marktpreisen für KäuferInnen und VerkäuferInnen, gibt, wird im Laufe der Arbeit relaxiert. Essentiell ist vor allem die Forderung nach Arbitragefreiheit. Sie sagt aus, dass es zu keinem Zeitpunkt möglich sein soll, mit positiver Wahrscheinlichkeit risikolos Gewinn zu machen und ist in diesem Kapitel unumgänglich.

In diesem Markt werden Contingent Claims gehandelt, deren Wertprozess sich nach dem Wertprozess seines Underlyings richtet. Dieser wird mit Hilfe stochastischer Prozesse beschrieben, welchen ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zu Grunde liegt.

Definition 3.1.2 (σ -Algebra). Sei Ω eine nichtleere Menge und \mathcal{F} eine Teilmenge der Potenzmenge von Ω . \mathcal{F} heißt σ -Algebra auf Ω , falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$
- (ii) Sei $A \in \mathcal{F}$ beliebig. Dann gilt auch $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.
- (iii) Sei $A_i \in \mathcal{F}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots\}$, dann gilt auch $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$.

Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Dann bezeichnet $\sigma(\mathcal{G})$ die kleinste σ -Algebra auf Ω , die \mathcal{G} enthält.

Definition 3.1.3 (Wahrscheinlichkeitsraum). Sei Ω eine nichtleere Menge und \mathcal{F} eine σ -Algebra auf Ω . Dann wird (Ω, \mathcal{F}) Messraum genannt. Existiert weiters eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, welche für eine abzählbare

3 Mathematische Voraussetzungen

Folge $(A_i)_{i \geq 1}$ paarweise disjunkter Mengen

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i \right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i)$$

erfüllt, spricht man bei \mathbb{P} von einem Wahrscheinlichkeitsmaß und bei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ von einem Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 3.1.4 (Produkt σ -Algebra). Seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ zwei beliebige Messräume. Dann wird mit

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \sigma(\{F_1 \times F_2 \mid F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2\})$$

die Produkt σ -Algebra definiert.

Definition 3.1.5 (orthogonal oder singular). Sei (Ω, \mathcal{F}) ein beliebiger Messraum. Seien \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, \mathcal{F}) . Dann heißen \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 zueinander orthogonal (oder singular), $\mathbb{P}_1 \perp \mathbb{P}_2$, falls

$$\exists A \in \mathcal{F}, \text{ sodass } \mathbb{P}_1(A) = 0 \text{ und } \mathbb{P}_2(A^c) = 0.$$

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum lassen sich nun Zufallsvariablen und stochastische Prozesse definieren.

Definition 3.1.6 (messbar). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ein Messraum. Sei weiters $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. S heißt genau dann messbar, falls für ein $B \subset \mathbb{R}$ beliebig gilt:

$$S^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : S(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Definition 3.1.7 (Zufallsvariable). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ein Messraum, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel- σ -Algebra von \mathbb{R} ist. Eine Zufallsvariable S ist eine messbare Funktion $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 3.1.8 (Stochastischer Prozess). Ein stochastischer Prozess $S = (S_t)_{t \geq 0}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen $X_t : \omega \rightarrow S_t(\omega), \forall t \geq 0$, definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3 Mathematische Voraussetzungen

Solch ein stochastischer Prozess beschreibt zum Beispiel den Preisprozess einer Aktie. Demnach ist zu jedem Zeitpunkt t der aktuelle Wert der Aktie S , nämlich S_t , bekannt. Weiters ist auch der bisherige historische Verlauf dieses Preisprozesses bekannt, also alle S_s mit $0 \leq s \leq t$. Diese Information steckt in \mathcal{F} und wird durch eine aufsteigende Folge von Teil- σ -Algebras beschrieben.

Definition 3.1.9 (Filtration). *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist eine Folge von Teil- σ -Algebras $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \forall s, t$ mit $0 \leq s < t < \infty$.*

Definition 3.1.10 (progressiv messbar). *Sei $S = (S_t)_{t \geq 0}$ ein Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, welcher Werte in \mathbb{R} annimmt. Falls die Abbildung*

$$\Psi_t : [0, t] \otimes \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (s, \omega) \mapsto S_s(\omega)$$

$\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -messbar ist, $\forall t \geq 0$, dann ist S bezüglich \mathcal{F} progressiv messbar.

Ein Contingent Claim mit Maturity T ist somit eine \mathcal{F}_T -messbare Zufallsvariable, unabhängig davon, ob der Wert dieses Derivates nur vom Zeitpunkt T , oder vom ganzen Wertverlauf, abhängt, da jegliche Information in \mathcal{F}_T steckt. Die Filtration ist ein notwendiges Konzept, um Wertprozesse zu beschreiben und die stochastische Basis für diese Arbeit ist damit der filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Da in dieser Arbeit Optionen mit endlicher Laufzeit T betrachtet werden, beinhalten die Mengen $\mathcal{F}_{T+1}, \mathcal{F}_{T+2}, \dots$ keine zusätzlich nötige Information und es wird im Rest dieser Arbeit angenommen, dass $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ gilt. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei somit ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Lässt sich der Wert eines Prozesses S zu jedem Zeitpunkt t beobachten, spricht man von einem an \mathcal{F}_t -adaptierten Prozess. Lässt er sich sogar „voraussehen“, ist es ein „vorhersagbarer“ Prozess.

Definition 3.1.11 (adaptiert und vorhersagbar). *Ein Prozess S heißt adaptiert genau dann, wenn S_t eine \mathcal{F}_t -messbare Zufallsvariable ist, $\forall t \geq 0$. Ein Prozess S heißt vorhersagbar, wenn S als Abbildung von $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ auf \mathbb{R} messbar ist, bezüglich der von den adaptierten, linksseitig stetigen Prozessen generierten σ -Algebra.*

Es wird angenommen, dass die stochastische Basis $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ die üblichen Bedingungen erfüllt.

3 Mathematische Voraussetzungen

Definition 3.1.12 (übliche Bedingungen). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann erfüllt er die üblichen Bedingungen genau dann, wenn

- (i) \mathcal{F}_0 alle \mathbb{P} -Nullmengen enthält (\mathcal{F} ist vollständig). Also $\forall A$ mit $\mathbb{P}(A) = 0$ gilt, $A \in \mathcal{F}_0$
- (ii) $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ rechtseitig stetig ist, also $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$.

Gilt eine Eigenschaft überall, außer auf einer Menge A mit $\mathbb{P}(A) = 0$, sagt man, dass die Eigenschaft \mathbb{P} -fast sicher (\mathbb{P} -f.s.) gilt.

Die wichtigste Gruppe von stochastischen Prozessen, welche auch in dieser Arbeit unumgänglich ist, ist die der Martingale.

Definition 3.1.13 (Martingal). Ein stochastischer Prozess $S = (S_t)_{0 \leq t < \infty}$ heißt Martingal, genau dann, wenn

- (i) S ist adaptiert und $\mathbb{E}(|S_t|) < \infty, \forall 0 \leq t < \infty$.
- (ii) $\mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_s) = S_s, \mathbb{P}$ -f.s. für alle $0 \leq s \leq t$.

Gilt statt (ii)

$$\mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_s) \leq S_s, \mathbb{P}\text{-f.s. für alle } 0 \leq s \leq t,$$

spricht man von einem Supermartingal bzw. wenn

$$\mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_s) \geq S_s, \mathbb{P}\text{-f.s. für alle } 0 \leq s \leq t,$$

dann ist S ein Submartingal.

Allerdings erfüllt der Großteil aller Prozesse diese Eigenschaften nicht. Eine Generalisierung dazu bildet die Gruppe der Semimartingale (oder guter Integratoren), welche viel größer ist, als die Gruppe der Martingale. Semimartingale bilden die größte Gruppe an Integratoren, bezüglich derer sich das stochastische Integral nach $It\tilde{o}^1$ definieren lässt. Um diese Klasse von Prozessen zu definieren, müssen allerdings zwei weitere Klassen von Prozessen definiert werden - lokale Martingale und Prozesse von beschränkter Variation (FV-Prozesse).

¹*Itô Kiyoshi*, japanischer Mathematiker, † 10. November 2008 in Kyōto

3 Mathematische Voraussetzungen

Definition 3.1.14 (Stoppzeiten). *Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ heißt Stoppzeit, wenn das Ereignis $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$.*

Definition 3.1.15 (Lokales Martingal). *Sei S ein stochastischer Prozess und τ eine Stoppzeit. Ein Prozess S^τ heißt gestoppt zum Zeitpunkt τ , falls $S^\tau := S_{t \wedge \tau}$ mit $t \wedge \tau := \min(t, \tau)$. Gibt es eine monoton wachsende Folge $(\tau_n)_{n \geq 1}$ von Stoppzeiten mit $\tau_n \rightarrow \infty$, für $n \rightarrow \infty$, so heißt S lokales Martingal, falls die zum Zeitpunkt τ_n gestoppten Prozesse S^{τ_n} Martingale sind.*

Damit lassen sich bereits erste Aussagen zu stochastischen Integralen herleiten.

Definition 3.1.16 (S -integrierbar). *Sei S ein lokales Martingal (im Allgemeinen sogar ein Semimartingal, siehe Def. 3.1.19) und ϕ ein vorhersagbarer Prozess. Falls für jede Folge vorhersagbarer und beschränkter Prozesse U^n mit $|U^n| \leq |\phi|$ und $U^n \rightarrow 0$ gilt, dass $\int_0^t U^n dS$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, dann ist ϕ S -integrierbar.*

Lemma 3.1.1. *Sei S ein lokales Martingal und ϕ S -integrierbar.*

- (i) *Falls $\int \phi dS$ nach unten beschränkt ist, dann ist auch $\int \phi dS$ ein lokales Martingal.*
- (ii) *Jedes nach unten beschränkte lokale Martingal ist ein Supermartingal.*

Beweis. Siehe Lowther [32]. □

Definition 3.1.17 (càdlàg und càglàd). *Ein stochastischer Prozess S heißt càdlàg (continu à droite, limite à gauche), wenn seine Pfade rechtsseitig stetig sind und die linksseitigen Grenzwerte existieren in t , \mathbb{P} -f.s.. Sind die Pfade linksseitig stetig und die rechtsseitigen Grenzwerte existieren \mathbb{P} -f.s., heißt ein Prozess càglàd.*

Definition 3.1.18 (FV-Prozesse). *Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine Partitionierung von $[a, b]$ und π_n die Menge aller dieser endlichen Partitionierungen von $[a, b]$. Dann heißt*

$$V^*(g)_{[a,b]} := \sup_{\pi_n} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|$$

3 Mathematische Voraussetzungen

die Variation von g . Gilt $V^*(g)_{[0,t]} < \infty, \forall t \geq 0$ mit $g : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, dann heißt g von beschränkter Variation (auf kompakten Intervallen). Ein stochastischer Prozess S heißt Prozess von beschränkter Variation (FV-Prozess), wenn er adaptiert ist und seine Pfade \mathbb{P} -f.s. càdlàg und auf kompakten Mengen von beschränkter Variation sind.

Aus diesen Prozessen setzen sich Semimartingale zusammen.

Definition 3.1.19 (Semimartingal). *Ein adaptierter càdlàg Prozess S heißt Semimartingal, falls Prozesse N und A existieren, sodass gilt*

$$S_t = S_0 + N_t + A_t, \quad t \geq 0.$$

Dabei sei $S_0 < \infty$, \mathbb{P} -f.s. und \mathcal{F}_0 -messbar, N ein lokales Martingal und A ein Prozess mit beschränkter Variation.

3.2 Risikoneutrale Bewertung

Die in dieser Arbeit betrachteten stochastischen Prozesse seien genau solche Semimartingale. Diese spiegeln die betrachteten Underlyings wieder. In einem fiktiven Finanzmarkt, welcher den Annahmen 3.1 gerecht wird, gibt es somit $d+1$ Assets (zum Beispiel Aktien) mit Preisprozessen $S^j = (S_t^j)_{t \geq 0}, j \in \{0, \dots, d\}$. $S = (S^0, S^1, \dots, S^d)$ ist somit ein Preisprozess-Vektor. All diese S^j seien adaptierte und stetige Semimartingale auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und das stochastische Integral $\int \phi dS^j$ ist für alle vorhersagbaren, S^j -integrierbaren Prozesse ϕ definiert. S^0 spielt dabei eine besondere Rolle. Dies sei ein risikoloses Asset, wie zum Beispiel ein Bankkonto oder ein Bond, welches keine Dividende auszahlt und \mathbb{P} -f.s. strikt positiv ist. Dieses S^0 wird auch als *numéraire* verwendet.

Definition 3.2.1 (numéraire). *Ein numéraire ist ein Preisprozess $(S_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ mit $S_t^0 > 0, \mathbb{P}$ -f.s. für alle $t \in [0, T]$.*

Mit $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$, wobei $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0}, \forall t$ wird damit der diskontierte Preisprozess von S bezeichnet. Äquivalent werden auch alle anderen diskontierten Prozesse ausgedrückt.

3 Mathematische Voraussetzungen

Jeder Akteur am Finanzmarkt kann somit ein Portfolio aus den $d + 1$ Assets zusammenstellen und damit handeln - also zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ Assets kaufen und verkaufen. Die jeweilige Zusammenstellung eines Portfolios wird durch einen Prozess ϕ beschrieben. Dabei gibt ϕ_t^j an, wieviel Stück man von Asset j zum Zeitpunkt t besitzt. Dieser Prozess heißt (dynamische) Handelsstrategie.

Definition 3.2.2 (dynamische Handelsstrategie). Sei $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ ein $d + 1$ -dimensionaler Vektor mit $\phi^j = (\phi_t^j)_{0 \leq t \leq T}$, $j \in \{0, \dots, d\}$. Dabei seien die ϕ^j vorhersagbare, lokal-beschränkte Prozesse mit Werten in \mathbb{R} und es gilt

$$\int_0^T \mathbb{E}(\phi_t^0) dt < \infty \text{ und } \sum_{j=0}^d \int_0^T \mathbb{E}((\phi_t^j)^2) dt < \infty.$$

Dann ist ϕ eine dynamische Handelsstrategie.

Die Bedingungen stellen sicher, dass das stochastische Integral $\int_0^t \phi_s dS_s$ existiert. Im Gegensatz zur allgemeinen Theorie zur risikoneutralen Bewertung von Contingent Claims ist es MarktteilnehmerInnen allerdings auch gestattet mit Derivaten selbst zu handeln, sofern diese liquide am Markt gehandelt werden und S als Underlying haben. Diese Gruppe von Derivaten wurde von Cont [9] eingeführt und wird Benchmark Instruments genannt. Sie dienen dazu, das Modellrisiko eines Contingent Claims zu senken und werden in Abschnitt 3.3 näher behandelt. Sei $I \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Benchmark Instruments. Diese haben alle die gleiche Maturity T und ihre \mathcal{F}_T -messbare Auszahlung (Payoff) sei H^i , $1 \leq i \leq I$, $I \in \mathbb{N}$. Im Unterschied zu S , welche dynamisch, also zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$, gehandelt werden, wird die Handelsposition in den Benchmark Instruments nur jeweils zu Beginn des Vertrags eingegangen und anschließend nicht mehr verändert. Man spricht deshalb auch von einem Static Hedge.

Definition 3.2.3 (Handelsstrategie). Sei ϕ eine dynamische Handelsstrategie. Dann ist $\Phi = (\phi, u^1, u^2, \dots, u^I)$ ein vorhersagbarer Prozess, wobei $u^i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq I$, den Anteil des Benchmark Instruments i angibt.

Der Wert eines Portfolios ist als Produkt eines vorhersehbaren Prozesses mit einem stochastischen Prozess wiederum ein stochastischer Prozess.

3 Mathematische Voraussetzungen

Definition 3.2.4 (Wertprozess). *Ein Prozess $V(\Phi) = (V_t(\Phi))_{0 \leq t \leq T}$ heißt Wertprozess einer Handelsstrategie Φ mit*

$$V_t(\Phi) := \sum_{j=0}^d \phi_t^j S_t^j + \sum_{i=1}^I u^i H^i, \quad \forall t \in [0, T].$$

Für eine Strategie ohne Benchmark Instruments sei der Wertprozess $V(\phi)$ für eine Strategie ϕ definiert als

$$V_t(\phi) := \sum_{j=0}^d \phi_t^j S_t^j, \quad \forall t \in [0, T].$$

Analog zu vorhin werden mit

$$\tilde{V}_t(\Phi) := \sum_{j=0}^d \phi_t^j \tilde{S}_t^j + \sum_{i=1}^I u^i \tilde{H}^i, \quad \forall t \in [0, T].$$

und

$$\tilde{V}_t(\phi) := \sum_{j=0}^d \phi_t^j \tilde{S}_t^j, \quad \forall t \in [0, T].$$

die diskontierten Wertprozesse bezeichnet. Betrachtet werden nur solche Handelsstrategien, die während der Laufzeit keine Cash-Flows aufweisen. Das heißt, bei Umschichtungen des Portfolios wird kein Geld zugeschossen oder herausgenommen und sie finanzieren sich somit selbst. Dies ist natürlich nur bei dynamischen Handelsstrategien von Interesse, da sich statische Handelsstrategien per Definition nicht verändern.

Definition 3.2.5 (selbstfinanzierend). *Eine Handelsstrategie ϕ heißt selbstfinanzierend genau dann, wenn das Integral $\int_0^t \phi_s^j dS_s^j$ für alle $j \in \{0, \dots, d\}$ existiert und*

$$\sum_{j=0}^d \int_0^t \phi_s^j dS_s^j = V_t(\phi) - V_0(\phi), \quad t \in [0, T].$$

3 Mathematische Voraussetzungen

Bingham und Kiesel [6] zeigen, dass eine selbstfinanzierende Strategie selbstfinanzierend bleibt, wenn man das *numéraire*, also den Diskontierungsfaktor, ändert.

Proposition 3.2.1. *Selbstfinanzierende Strategien bleiben auch nach einem Wechsel des numéraires selbstfinanzierend.*

Beweis. Siehe [6] (basierend auf German et al. [20]) für den Fall, dass S und das *numéraire* stetig und Delbaen und Schachermayer [12] für den allgemeinen Fall. \square

Die No-Arbitrage-Bedingung ist notwendig, um selbstfinanzierende Handelsstrategien und risikoneutrale Bewertung von Derivaten miteinander zu verbinden. Gäbe es sie nicht, könnte durch eine geeignete Strategie risikolos unbegrenzt Gewinn gemacht werden.

Definition 3.2.6. *Eine selbst-finanzierende Handelsstrategie ϕ ist eine Arbitragemöglichkeit, falls ihr Wertprozess $V(\phi)$ folgende Bedingungen erfüllt:*

$$V_0(\phi) = 0, \quad \mathbb{P}(V_T(\phi) \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) > 0.$$

Um den Bogen zur risikoneutralen Bewertung von Derivaten zu spannen, ist es nötig sich mit äquivalenten Martingalmaßen zu beschäftigen.

Definition 3.2.7 (stetiges und äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß). *Seien \mathbb{P} und \mathbb{Q} zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, \mathcal{F}) . Falls für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) = 0$ gilt, dass $\mathbb{Q}(A) = 0$, so ist \mathbb{Q} absolut stetig bezüglich \mathbb{P} . Man schreibt $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Gilt auch $\mathbb{Q} \gg \mathbb{P}$, so heißen \mathbb{P} und \mathbb{Q} äquivalent und man schreibt $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.*

Definition 3.2.8. *Seien \mathbb{P}, \mathbb{Q} Wahrscheinlichkeitsmaße, definiert auf (Ω, \mathcal{F}) und \tilde{S} der diskontierte Preisprozess eines Preisprozesses S . Dann ist \mathbb{Q} ein (zu \mathbb{P}) äquivalentes Martingalmaß, genau dann wenn*

- (i) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$,
- (ii) \tilde{S} unter \mathbb{Q} ein lokales Martingal ist.

Ist \tilde{S} unter \mathbb{Q} sogar ein Martingal, spricht man von einem starken äquivalenten Martingalmaß. Sei \mathcal{Q} die Menge aller äquivalenten Martingalmaße.

3 Mathematische Voraussetzungen

Die Menge der Handelsstrategien wird nun weiter eingeschränkt und es sollen nur noch solche Strategien betrachtet werden, deren Wertprozess nach unten beschränkt ist.

Definition 3.2.9 (zulässig). *Eine Handelsstrategie ϕ heißt (δ) -zulässig, wenn für den diskontierten Wertprozess $\tilde{V}(\phi)$ folgendes gilt:*

$$\exists \delta \in \mathbb{R} : \tilde{V}(\phi) \geq -\delta, \quad \forall t \in [0, T]$$

Sei \mathcal{S} die Menge aller selbstfinanzierter und zulässiger Handelsstrategien ϕ .

Dies bedeutet, dass ein/e MarktteilnehmerIn, der/die eine zulässige Strategie verwendet, nur einen begrenzten Kreditrahmen hat und dessen/deren Portfoliowert somit nicht unendlich negativ werden kann. Der mathematische Nutzen ist jener, dass dadurch Lemma 3.1.1 nutzbar wird und der Wertprozess ein Supermartingal unter einem äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} ist.

Theorem 3.2.1 (vgl. [6]). *Sei die Menge aller äquivalenter Martingalmaße \mathcal{Q} nicht leer - $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Dann enthält die Menge aller selbstfinanzierter und zulässiger Handelsstrategien \mathcal{S} keine Arbitragemöglichkeit.*

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{S}$ und $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Weil ϕ selbstfinanzierend ist, gilt

$$\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \phi_s^j d\tilde{S}_s^j, \quad \forall t \in [0, T].$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{V}_t(\phi)$ ein lokales Martingal unter dem äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} und somit nach Lemma 3.1.1 ein Supermartingal.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_t(\phi) | \mathcal{F}_s) \leq \tilde{V}_s(\phi), \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T$$

Angenommen ϕ ist eine Arbitragemöglichkeit, dann gilt $V_0(\phi) = 0$ und nach der Supermartingaleigenschaft auch

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_T(\phi) | \mathcal{F}_0) \leq V_0(\phi) = 0$$

Als Arbitragemöglichkeit erfüllt ϕ aber auch $\mathbb{P}(V_T(\phi) \geq 0) = 1$ und weil $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ auch $\mathbb{Q}(V_T(\phi) \geq 0) = 1$. Das heißt $V_T = 0, \mathbb{P}$ -f.s., was ein Widerspruch zur Annahme der Arbitragemöglichkeit ist. \square

3 Mathematische Voraussetzungen

Die bloße Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes reicht also aus, dass es unter den selbstfinanzierenden und zulässigen Handelsstrategien keine Arbitragemöglichkeit mehr gibt. Die Frage ist, ob auch die andere Richtung dieses Theorems stimmt. Existiert immer ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} , falls der Markt arbitragefrei ist?

Definition 3.2.10 (einfach vorhersagbar). *Ein Prozess ϕ heißt einfach vorhersagbar, wenn er dargestellt werden kann als*

$$\phi_t = a_0 \mathbf{1}_0 + \sum_{k=0}^n a_k \mathbf{1}_{(\tau_{k-1}, \tau_k)}(t).$$

τ_k seien Stoppzeiten, a_k sei $\mathcal{F}_{\tau_{k-1}}$ -messbar und beschränkt für alle $k \leq n \in \mathbb{N}$ und a_0 sei \mathcal{F}_0 -messbar.

Definition 3.2.11 (NFLVR). *Sei $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Handelsstrategien, welche einfach vorhersagbar sind und $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt, dass ϕ_n δ_n -zulässig ist mit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Ein Preisprozess S erfüllt dann "no free lunch with vanishing risk" (NFLVR), falls gilt*

$$V_T(\phi_n) \rightarrow 0, \mathbb{P}\text{-f.s. für } n \rightarrow \infty.$$

Angenommen diese Eigenschaft gilt nicht und sei für ein beliebig kleines δ_{n_0} und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ der Wert $V_T(\phi_{n_0}) \geq -\delta_{n_0}$. Dann ermöglicht diese Strategie trotzdem eine positive Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn $\mathbb{P}(V_T(\phi_{n_0}) > 0) > 0$. Erfüllt ein Markt die No-Arbitrage-Bedingung, dann erfüllen die Preisprozesse in diesem Markt erst recht die NFLVR-Bedingung.

Theorem 3.2.2. *Ein lokal beschränktes Semimartingal S erfüllt NFLVR genau dann und nur dann, wenn ein äquivalentes Martingalmaß \mathbb{Q} existiert. Ist S ein beschränktes Semimartingal, existiert sogar ein starkes äquivalentes Martingalmaß.*

Beweis. Siehe Delbaen und Schachermayer [13]. □

Es werde nun ein Modell betrachtet, wo solch ein starkes äquivalentes Martingalmaß \mathbb{Q} existiert. Ein Contingent Claim ist eine \mathcal{F}_T -messbare Zufallsvariable. Gelingt es zum Zeitpunkt 0, also zu Beginn des Vertrages, eine Strategie zu

3 Mathematische Voraussetzungen

finden und, abhängig vom Verlauf des Underlyings, während der Laufzeit anzupassen, sodass zum Zeitpunkt T der Wertprozess dem Wert des Contingent Claims entspricht, dann kennt man zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ den Wert des Contingent Claims.

Definition 3.2.12 (Hedge). *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ϕ heißt Hedge oder \mathbb{Q} -zulässig, falls das Integral $\int_0^t \phi_s d\tilde{S}_s$ ein Martingal unter \mathbb{Q} ist.*

Definition 3.2.13 (vollständig). *Ein Contingent Claim X heißt erreichbar, falls mindestens eine \mathbb{Q} -zulässige Handelsstrategie ϕ existiert, sodass gilt*

$$V_T(\phi) = X.$$

ϕ heißt dann replizierende Handelsstrategie. Falls alle Contingent Claims in einem Marktmodell erreichbar sind, so spricht man von einem vollständigen Marktmodell.

Existiert eine Handelsstrategie ϕ , deren Wertprozess $V(\phi)$ zu einem Zeitpunkt T mit X übereinstimmt, aber zu einem Zeitpunkt $t < T$ mehr wert wäre als der Contingent Claim, dann wäre dies eine Arbitragemöglichkeit. Somit entspricht der Wert des Contingent Claims zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ dem Wertprozess seiner replizierenden Handelsstrategie. Wird allerdings nur angenommen, dass \mathbb{Q} ein äquivalentes Martingalmaß ist, also \tilde{S} ein lokales Martingal und somit \tilde{V} ein lokales Martingal und Supermartingal unter \mathbb{Q} ist, gilt

$$\pi_t(X) = \operatorname{ess\,sup}_{\phi \in \mathcal{S}} V_t(\phi) := \inf_{\phi \in \mathcal{S}} \{c \in \mathbb{R} : c \geq V_t(\phi) \text{ fast überall}\},$$

wobei $\pi_t(X)$ der faire Preis des Contingent Claims zum Zeitpunkt t sei und \mathcal{S} wiederum die Menge aller selbstfinanzierbarer und zulässiger Handelsstrategien.

Theorem 3.2.3. *Sei X ein erreichbarer Contingent Claim und $\pi(X)$ der faire Preisprozess davon. Dann ist dieser gegeben durch*

$$\pi_t(X) = S_t^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

3 Mathematische Voraussetzungen

X ist genau dann erreichbar, falls $\frac{X}{S_T^0}$ integrierbar unter \mathbb{Q} ist und

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \phi_s^j \tilde{S}_s^j, \quad \forall t \in [0, T],$$

wobei ϕ vorhersagbar und lokal beschränkt ist.

Beweis. Es gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \phi_s^j \tilde{S}_s^j.$$

Zuerst wird der zweite Teil bewiesen. Dazu setzt man

$$\phi_t^0 = \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \phi_s^j \tilde{S}_s^j - \sum_{j=1}^d \phi_t^j \tilde{S}_t^j.$$

Dadurch ist ϕ eine selbstfinanzierende Strategie und es gilt,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right) &= \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \phi_s^j \tilde{S}_s^j \\ &= \phi_t^0 + \sum_{j=1}^d \phi_t^j \tilde{S}_t^j = \tilde{V}_t(\phi). \end{aligned}$$

Wegen der Turmeigenschaft und der \mathcal{F}_t -messbarkeit des bedingten Erwartungswertes ist $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right)$ und damit $\tilde{V}_t(\phi)$ ein Martingal unter \mathbb{Q} und es gilt

$$V_T(\phi) = S_T^0 \tilde{V}_T(\phi) = S_T^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_T \right) = S_T^0 \frac{X}{S_T^0} = X.$$

Der Contingent Claim ist also erreichbar und sei ϕ die replizierende Handelsstrategie mit $V_T(\phi) = X$ und $\pi_t(X) = V_t(\phi)$. Unter der generellen Annahme, dass \mathbb{Q} ein starkes äquivalentes Martingalmaß ist, ist $\tilde{V}(\phi)$ ein Martingal. Somit gilt

$$\begin{aligned} \pi_t(X) &= V_t(\phi) = S_t^0 \tilde{V}_t(\phi) = S_t^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\tilde{V}_T(\phi) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= S_t^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{V_T(\phi)}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right) = S_t^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

□

3 Mathematische Voraussetzungen

Ein Contingent Claim ist also genau dann erreichbar, wenn der Preisprozess durch ein geeignetes Integral repräsentiert werden kann. Ist das starke äquivalente Martingalmaß eindeutig auf \mathcal{F}_T bestimmt, dann ist ein arbitragefreies Marktmodell vollständig.

Theorem 3.2.4. *Ein arbitragefreies Marktmodell ist genau dann vollständig, wenn ein starkes äquivalentes Martingalmaß auf \mathcal{F}_T eindeutig bestimmt ist.*

Beweis. Siehe Harrison und Pliska [24]. □

Im praktischen Teil dieser Arbeit werden das Black-Scholes Modell und das Heston Modell eingesetzt. Diese werden in den folgenden Abschnitten kurz vorgestellt. In diesen Modellen werden die Brown'sche Bewegung und der Satz von Girsanov verwendet.

Definition 3.2.14 (Brown'sche Bewegung). *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozess $B = (B_t)_{t \geq 0}$ heißt Brown'sche Bewegung, falls gilt*

- (i) $B_0 = 0$, \mathbb{P} -f.s.,
- (ii) Für beliebige gegebene Zeitpunkte $s < t < u < v$ sind die Zuwächse $B_t - B_s$ und $B_v - B_u$ stochastisch unabhängig.
- (iii) Die Zuwächse sind stationär. Für ein $h > 0$ hängt die Verteilung von $B_{t+h} - B_t$ nur von h ab.
- (iv) Die Zuwächse sind normalverteilt: $B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}(0, h)$.
- (v) Die einzelnen Pfade sind stetig in t , \mathbb{P} -f.s..

Satz 3.2.1 (Satz von Girsanov). *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und B eine Brownsche Bewegung bezüglich \mathcal{F} .*

Sei $Z_t = \exp(\mu B_t - \frac{1}{2}\mu^2 t)$ die Dichte eines zu \mathbb{P} äquivalenten Maßes \mathbb{Q}_t und $\mu \in \mathbb{R}$. Dann ist der durch

$$W_s = B_s - \mu s, \quad s \leq t$$

definierte Prozess eine Brown'sche Bewegung unter \mathbb{Q}_t .

Beweis. Siehe [6]. □

3.2.1 Black Scholes Modell

Das bekannteste Marktmodell ist das Black-Scholes Modell. Es besteht im Allgemeinen aus $d + 1$ Finanzgütern $S^j, j \in \{0, \dots, d\}$, wobei S_0 risikolos (zum Beispiel ein Girokonto) mit konstanter Zinsrate r sei. Sei $d = 1$. Für den allgemeinen Fall siehe *Bingham* und *Kiesel* [6].

S^0 und S^1 folgen der Dynamik:

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= rS_t^0 dt, & S_0^0 &= 1 \\ dS_t^1 &= S_t^1(\mu dt + \sigma dB_t), & S_0^1 &= c \in (0, \infty) \end{aligned}$$

Dabei ist $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine Brown'sche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und die Filtration sei die von B erzeugte vervollständigte kanonische Filtration. Die Parameter des Modells sind demnach $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Um zu zeigen, dass dieses Modell arbitragefrei ist, muss man nach Theorem 3.2.1 zeigen, dass ein zu \mathbb{P} äquivalentes Martingalmaß auf \mathcal{F}_T existiert. Dazu sei \tilde{S}^1 der mit S^0 diskontierte Preisprozess von S^1 . Die Lösung von $dS_t^0 = rS_t^0 dt, S_0^0 = 1$, ist $S_t^0 = \exp(rt)$ und damit gilt

$$\tilde{S}_t^1 = e^{-rt} S_t^1.$$

Korollar 3.2.1. *Das Black-Scholes Modell ist arbitragefrei.*

Beweis. Falls eine Darstellung $\tilde{S}_t^1 = Y_t dW_t$ existiert, wobei W eine Brown'sche Bewegung unter einem Maß \mathbb{Q} ist, dann ist \tilde{S} ein lokales Martingal unter \mathbb{Q} , \mathbb{Q} ein Martingalmaß und das Marktmodell somit arbitragefrei.

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t^1 &= d(e^{-rt} S_t^1) \\ &= -re^{-rt} dt S_t^1 + e^{-rt} dS_t^1 - re^{-rt} dt dS_t^1 \end{aligned}$$

Weil $dS_t^1 = S_t^1(\mu dt + \sigma dB_t)$, $dt dB_t = 0$ und $(dt)^2 = 0$ folgt

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t^1 &= e^{-rt} S_t^1 (-r dt + \mu dt + \sigma dB_t) \\ &= \tilde{S}_t^1 \sigma \left(dB_t - \frac{r - \mu}{\sigma} dt \right). \end{aligned}$$

3 Mathematische Voraussetzungen

Sei $W_t := B_t - \frac{r-\mu}{\sigma}t$. Dann gilt laut Satz von Girsanov, dass W unter \mathbb{Q} eine Brown'sche Bewegung ist mit Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T = \exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 t\right).$$

Dies gilt, weil Z das Exponentialmartingal von B ist (siehe Müller [35]). Somit ist auch \tilde{S}^1 ein lokales Martingal unter \mathbb{Q} . \square

Über den Darstellungssatz für Brown'sche Martingale und der Arbitragefreiheit lässt sich auch zeigen, dass das Black-Scholes Modell vollständig ist.

Theorem 3.2.5. *Das Black-Scholes Modell ist vollständig.*

Beweis. Siehe [6]. \square

Der größte Vorteil des Black-Scholes Modells ist die einfache Handhabbarkeit. Dadurch lassen sich zum Beispiel Preise europäischer Optionen analytisch berechnen. Allerdings wird diese einfache Handhabbarkeit durch Annahmen erreicht, die der Realität des Finanzmarktes nicht zwingend entsprechen. Einerseits verlangt das Black-Scholes Modell, dass die logarithmischen Returns normalverteilt sind. In der Realität passieren extreme Kursschwankungen aber viel häufiger, als laut Normalverteilung passieren sollten. Ein weiterer Nachteil des Modells ist die fehlende Fähigkeit sogenannte „Volatility-Smiles“ nachzubilden: Bei der Beobachtung von Optionspreisen am realen Finanzmarkt sieht man, dass die implizite Volatilität² im Allgemeinen niedriger ist, wenn der Ausübungspreis nahe dem Startpreis liegt („*at-the-money*“) und höher, wenn er weiter davon entfernt ist („*in-the-money*“ bzw. „*out-of-the-money*“). Laut Black-Scholes Modell müsste die implizite Volatilität aber konstant sein.

²Die implizite Volatilität lässt sich mittels numerischen Berechnungen aus der inversen Black-Scholes Formel für Optionen berechnen.

3 Mathematische Voraussetzungen

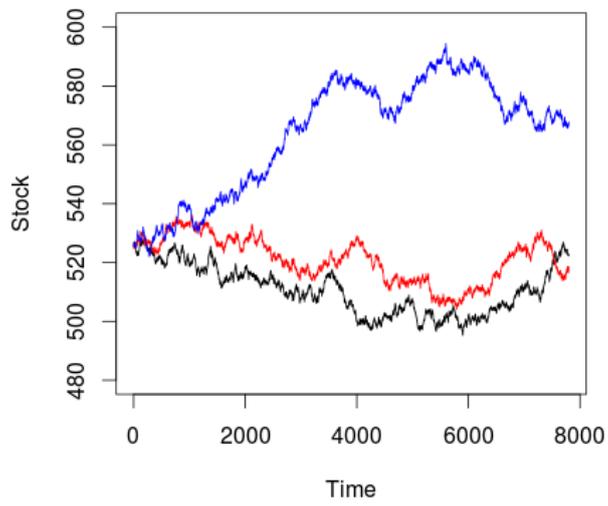


Abbildung 3.1: Preisprozess im Black-Scholes Modell mit $\sigma = 0.23$

3.2.2 Heston Modell

Ein zweites Finanzmarktmodell, welches weit verbreitet ist, ist das Heston-Modell. Dieses unterscheidet sich vom Black-Scholes-Modell nun gerade in der Annahme der konstanten Volatilität. Im Heston-Modell wird diese Annahme fallen gelassen, und die Volatilität durch eine eigene Dynamik beschrieben. Dadurch lassen sich auch Volatility-Smiles beschreiben. Weiterhin sei $S_t^0 = e^{rt}$ mit $r \geq 0$ ein risikoloses Finanzinstrument. Für den Preisprozess von S^1 gilt

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1(\mu dt + \sqrt{V_t}dB_t^S), & S_0^1 &= c \in (0, \infty) \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dB_t^V, & V_0 &= v_0 \in (0, \infty) \end{aligned}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$, $\theta > 0$, $\sigma > 0$ und

$$B_t^S = \rho B_t^V + \sqrt{(1 - \rho^2)}B_t,$$

wobei $|\rho| \leq 1$ und B sei stochastisch unabhängig von B^V . Damit die stochastische Volatilität V_t \mathbb{P} -f.s. strikt positiv ist, muss $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ gelten.

Auch in diesem Modell lässt sich Arbitragefreiheit zeigen (siehe Müller [34]), allerdings ist das Heston-Modell nicht vollständig. Der größte Vorteil des Heston-Modells liegt darin, dass sich die momenterzeugende Funktion, und auch die bedingte momenterzeugende Funktion analytisch berechnen lassen. Dadurch ist auch der Preis einer europäischen Call-Option eine analytische Funktion und lässt sich dementsprechend schnell berechnen.

$$\pi_t^{Call} = S_t^1 + e^{-r(T-t)} \frac{K}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{M_{X_T|\mathcal{F}_t}(R + iu)}{(R + iu)(R - 1 + iu)} \left(\frac{S_0^1 e^{rT}}{K} \right)^{R+iu} \right) du$$

Dabei ist $0 < R < 1$ und $M_{X_T|\mathcal{F}_t}$ die bedingte momenterzeugende Funktion einer Zufallsvariable X_T . Für die genaue Spezifikation der momenterzeugenden Funktion siehe *Heston* [26] oder *Schoutens* [39].

Ein Nachteil des Heston-Modells ist die schwierigere Kalibrationsfähigkeit. Auf Grund der fünf Parameter des Modells gestaltet sich die Suche nach einem optimalen Modell deutlich schwieriger, als es beim Black Scholes Modell der Fall ist, da es dort nur einen Parameter zu finden gibt.

3 Mathematische Voraussetzungen

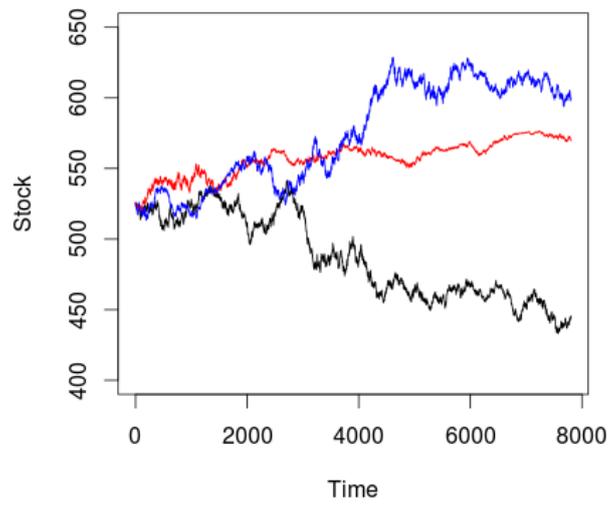


Abbildung 3.2: Preisprozess im Heston Modell mit $\kappa = 0.52$, $\rho = -0.33$, $\sigma = 0.55$, $\theta = 0.3$ und $V_0 = 0.04$.

3.3 Benchmark Instruments und Static Hedging

Benchmark Instruments wurden unter anderem von Cont [9] vorgeschlagen, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass es bei häufig gehandelten Derivaten kein Modellrisiko gibt. Ein Short-Position auf einen europäischen Call kann zum Beispiel gehedgt werden, in dem man eine Long-Position in einem Europäischen Put eingeht und ein Portfolio aus dem Underlying und einem Bankkonto anlegt. Dies ist als Put-Call-Parität bekannt.

$$\pi_0^{Call} = \pi_0^{Put} + (S_0^1 - K e^{-rT})$$

Zum Endzeitpunkt T gibt es als Verkäufer des Calls zwei Möglichkeiten.

1. $S_T^1 \geq K$: Der Wert des Calls ist positiv und der Wert des Puts gleich 0.

$$(S_T^1 - K) = 0 + (S_T^1 - K e^{-rT} e^{rT}) = (S_T^1 - K)$$

2. $S_T^1 < K$: Der Wert des Calls ist gleich 0 und der Wert des Puts ist positiv.

$$0 = (K - S_T^1) + (S_T^1 - K) = 0$$

Unabhängig vom Modell kann es hier zu keinem Gewinn oder Verlust kommen, da der Put und das Portfolio die Position exakt nachbilden und jede entsprechende Veränderung des Underlyings mitmachen. Diese Art des Hedgings wird Static Hedging genannt, da nur zu Beginn der Laufzeit Positionen eingenommen werden und anschließend keine Veränderung des Portfolios mehr vorgenommen wird. Man nimmt der Einfachheit halber an, dass die Benchmark Instruments alle zum Zeitpunkt T enden. Static Hedging von Optionen (z.B.: Europäischen Optionen) ist auch möglich, falls die Laufzeiten nicht übereinstimmen (siehe *Mayer, Packham* und *Schmidt* [33]).

Dem Static Hedging gegenüber steht das Dynamic Hedging. Das bekannteste Beispiel dafür ist das Delta-Hedging. Dabei wird mit Hilfe des Black-Scholes Modells berechnet, wieviel Teile des Underlyings und risikolosen Assets man benötigt, damit dieses Portfolio dem Payoff der Option entspricht. Da sich der Wert des Underlyings laufend verändert, ist eine durchgehende Anpassung des Portfolios nötig. Neben Static- und Dynamic-Hedging gibt es auch Semi-Static-Hedging. Dabei werden nur zu festgelegten Zeitpunkten Veränderungen am Portfolio vorgenommen. Siehe dazu auch *Albrecher* und *Mayer* [2]

3.4 Vollständige und Unvollständige Märkte

Um Modellunsicherheit zu untersuchen und entsprechende Risikomaße herzuleiten, ist es nötig eine Vielzahl von Modellen zu betrachten. Viele, der in der Praxis verwendeten Modelle, sind nicht vollständig. Das Black-Scholes-Modell gehört zu den Modellen, wo solch ein starkes äquivalentes Martingalmaß \mathbb{Q} existiert. Andererseits kann \mathbb{P} auch ein unvollständiges Marktmodell beschreiben, unter welchem kein eindeutiges Martingalmaß \mathbb{Q} existiert, welches die Contingent Claims bepreist. In diesem Fall gilt für den diskontierten Preis $\tilde{\pi}(X)$ eines Contingent Claims X mit Underlying S (bei geforderter Arbitragefreiheit, vgl. [34]):

$$\inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}(\tilde{S})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{X}) \leq \tilde{\pi}(X) \leq \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}(\tilde{S})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{X}) \quad (3.1)$$

Dabei ist \tilde{X} der diskontierte Payoff des Claims und $\mathcal{Q}(\tilde{S})$ die (konvexe) Menge der äquivalenten Martingalmaße zu \tilde{S} . In unvollständigen Märkten gibt es somit unendlich viele äquivalente Martingalmaße und jedes liefert einen diskontierten Preis, der zu keiner Arbitrage führt.

Das Ziel dieser Arbeit ist es nun diese Modelle parallel zu betrachten. All diese Modelle basieren auf dem selben Messraum (Ω, \mathcal{F}) . Allerdings sind die zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaße abhängig vom Modell. Ein/e InvestorIn, welche/r glaubt, dass ein Underlying wenig volatil ist, bewertet die Wahrscheinlichkeit für Kursschwankungen anders, als ein/e InvestorIn, die/der davon ausgeht, dass das Underlying stark schwankt. So generiert jede Modellannahme ein anderes objektives Wahrscheinlichkeitsmaß (real world measure oder objective measure) \mathbb{P} und sei \mathcal{P} die Menge aller dieser Modelle. Die Menge aller starker äquivalenter Martingalmaße sei \mathcal{Q} .

Im Rest dieser Arbeit wird ausschließlich \mathcal{Q} verwendet. Deshalb bezeichnet S von nun an auch den diskontierten Preisprozess. Für ein fixes Martingalmaß \mathbb{Q} ist es kein Problem bekannte Sätze der stochastischen Analysis zu formulieren. Auch wenn eine solche Familie von einem Maß \mathbb{Q} dominiert wird, also die Nullmengen übereinstimmen, reicht es, wenn man sich auf das Maß \mathbb{Q} konzentriert, da sich für alle anderen $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ die Ergebnisse davon ableiten lassen. Im Fall von verschiedensten Modellen, gibt es aber solch ein dominierendes Maß nicht

- ein Problem, das übrigens auch bei UVM-Modellen (Uncertain Volatility-Models) auftritt. Nun stellt sich die Frage, ob es trotzdem eine Möglichkeit gibt, mathematische Objekte, wie stochastische Integrale, simultan für alle Elemente aus \mathcal{Q} zu beschreiben.

3.5 Stochastische Analysis unter \mathcal{Q}

Die Technik um dieses Problem zu lösen, heißt Aggregation. In dieser Arbeit werden die Erkenntnisse von *Soner et al.* [41] verwendet. Weitere Arbeiten zu diesem Thema sind von *Karandikar* [31] und *Denis* und *Martini* [14]. *Aggregation* beschreibt einen Prozess S , der mit allen Prozessen $S^{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, \mathcal{Q} -quasi-sicher übereinstimmt.

Definition 3.5.1 (quasi-sicher). *Eine Eigenschaft gilt \mathcal{Q} -quasi-sicher (\mathcal{Q} -q.s.), wenn sie \mathbb{Q} -f.s. $\forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ gilt.*

Das stochastische Integral simultan über eine Menge von Maßen \mathcal{Q} zu definieren ist kein Problem, wenn alle betrachteten \mathbb{Q} äquivalent sind, da das stochastische Integral für jedes \mathbb{Q} definiert ist (Satz von Girsanov). Ein anderes Beispiel, wo Aggregation ohne zusätzliche Bedingungen erfüllt ist, gibt es im Fall abzählbar vieler Maße $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, welche paarweise orthogonal aufeinander stehen.

Für zwei Maße \mathbb{Q}_1 und \mathbb{Q}_2 und ihren kanonischen Prozessen B^1 und B^2 , welche $\mathbb{Q}_1(\Omega_1) = \mathbb{Q}_2(\Omega_2) = 1$ und $\mathbb{Q}_1(\Omega_2) = \mathbb{Q}_2(\Omega_1) = 0$ für $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ erfüllen, gilt für einen integrierbaren Prozess H

$$I_t(H)(\omega) = \begin{cases} \int_0^t H_s(\omega) dB_s^1(\omega), & \mathbb{Q}_1\text{-f.s.}, \omega \in \Omega_1 \\ \int_0^t H_s(\omega) dB_s^2(\omega), & \mathbb{Q}_2\text{-f.s.}, \omega \in \Omega_2 \end{cases}$$

Das Integral ist dann $\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2\}$ -q.s. eindeutig definiert. Im Allgemeinen gilt das aber nicht. Dies führt dazu, dass gewisse Bedingungen an \mathcal{Q} gestellt werden. Weiters werden in der genannten Arbeit von *Soner et al.* [41], welche in diesem Kapitel behandelt wird, ausschließlich Diffusionsprozesse (vgl. *Itô* [29]) betrachtet. Im Fall von zum Beispiel Sprung-Diffusions Modellen sei auf die Arbeit von *Detering* [15] verwiesen.

3 Mathematische Voraussetzungen

Für die Existenz eines Aggregators muss die Menge aller Maße eingeschränkt werden. Dazu betrachtet *Soner* die Menge der Diffusionsprozesse. Solche Diffusionsprozesse werden im Allgemeinen mittels stochastischer Differentialgleichungen (stochastic differential equation, SDE) ausgedrückt. Betrachtet man diese pfadweise und es existiert eine Lösung, spricht man von einer starken Lösung. Allerdings haben nicht alle SDE eine starke Lösung. In diesem Fall kann man den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum so einschränken, dass die SDE auf diesem Raum lösbar ist - dabei spricht man dann von einer schwachen Lösung. Die Idee ist nun die Menge der Diffusionsprozesse so einzuschränken, dass es eine eindeutige Abbildung in die Menge der Martingalmaße gibt. Dies gelingt, indem man die Maße als schwache Lösung von Differentialgleichungen betrachtet, deren Diffusionsmatrizen entsprechende Teilbarkeitseigenschaften aufweisen.

In diesem Kapitel sei $\Omega = \{\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \omega(0) = 0\}$, wobei $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ die Menge aller stetigen Funktionen von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R}^d bezeichnet. Ω wird auch Wiener Raum genannt. Mit B wird der kanonische Prozess, welcher nach dem Existenzsatz von *Kolmogorov* unter recht allgemeinen Voraussetzungen existiert, bezeichnet.

Definition 3.5.2 (kanonischer Prozess). *Sei $\omega \in \Omega$ eine Funktion in $t \in \mathbb{R}_+$. Dann wird mit*

$$B = (B_t)_{t \geq 0}, \quad B_t(\omega) := \omega(t)$$

der kanonische Prozess definiert.

Unter dem Wiener Maß \mathbb{Q}_0 ist dieser kanonische Prozess die Brown'sche Bewegung. Betrachtet werden hierbei ausschließlich Diffusionsprozesse.

Definition 3.5.3 (Nullmengen). *(i) Sei $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}} := \bigcap_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathcal{N}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}_{\infty})$. Dabei bezeichnet*

$\mathcal{N}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}_{\infty})$ die Menge aller Nullmengen unter \mathbb{Q} bzgl. \mathcal{F}_{∞} und die Elemente von $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$ sind somit die \mathbb{Q} -Polar-Mengen.

(ii) Ein Maß \mathbb{Q} heißt absolut stetig bzgl. \mathcal{Q} , wenn $\forall N \in \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}(N) = 0$ gilt.

Sei \mathcal{Q}_{loc} die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße, unter welchen der von ihnen induzierte kanonische Prozess B ein lokales Martingal ist.

Weiters sei die Dichte \hat{a} der quadratischen Variation ein Element der Menge der d -dimensionalen positiv definiten Matrizen $\mathbb{S}_d^{>0}$.

3 Mathematische Voraussetzungen

Definition 3.5.4 (Quadratische Variation). *Sei B ein kanonischer Prozess und $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ so, dass B unter \mathbb{Q} ein lokales Martingal ist. Dann sei*

$$\langle B \rangle_t := B_t B_t^\top - \int_0^t B_s dB_s$$

die quadratische Variation des Prozesses B und \hat{a} die Dichte der quadratischen Variation $\langle B \rangle_t$ mit

$$\hat{a}_t := \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} |\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_{t-\epsilon}|.$$

Ein weiterer wichtiger Baustein ist die Filtration, welche im Allgemeinen auch auf ein einzelnes Maß bezogen ist. Diese wird nun zu einer universellen Filtration erweitert.

Definition 3.5.5 (universelle Filtration). *Sei $\{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_{loc}\}$ die Menge aller paarweise singulärer Wahrscheinlichkeitsmaße und $\mathbb{F}^{\mathbb{Q}}$ die \mathbb{Q} -vollständige Filtration. Die universelle Filtration ist gegeben durch*

$$\mathbb{F}^{\mathbb{Q}} := \{\mathcal{F}_t^{\mathbb{Q}}\}_{t \geq 0} \text{ mit } \mathcal{F}_t^{\mathbb{Q}} := \bigcap_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\mathcal{F}_t^{\mathbb{Q}} \cup \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}), \quad t \geq 0. \quad (3.2)$$

Die universelle Filtration ist rechtsstetig, aber im Allgemeinen nicht vollständig unter allen $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$.

Im nächsten Schritt werden stochastische Differentialgleichungen betrachtet. Sei $S = (S_t)_{t \geq 0}$ ein d -dimensionaler reellwertiger stochastischer Prozess mit

$$dS_t = \sqrt{a_t(S_t)} dB_t, \quad S_0 = c \in \mathbb{R}^d. \quad (3.3)$$

Dabei sei B eine d -dimensionale Brown'sche Bewegung und a sei eine Abbildung mit

$$a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}_d^{>0},$$

Diffusionskomponente genannt. Ein Beispiel für solch eine Abbildung sei folgender Prozess mit $d = 2$ und

$$S_t = \begin{pmatrix} S_t^1 \\ S_t^2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } B_t = \begin{pmatrix} B_t^1 \\ B_t^2 \end{pmatrix}.$$

3 Mathematische Voraussetzungen

$$a : G \rightarrow \mathbb{S}_2^{>0}, (t, S_t) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{S_t^1} & 0 \\ 0 & \sqrt{S_t^2} \end{pmatrix},$$

$$G := \{(t, x) | t \geq 0, x : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ stetig}\}.$$

Die Diffusionskomponente ist in diesem Fall eine Diffusionsmatrix und hängt von S ab. Dies wird pfadabhängig genannt. Hängt die Diffusionskomponente vom kanonischen Prozess B ab, also

$$a_t(B_t) = a_t(B_t(\omega)) = a_t(\omega(t)), \quad t \geq 0,$$

schreibt man einfach a_t . Betrachtet werden die Diffusionskomponenten als Prozesse $a = (a_t)_{t \geq 0}$, welche nach $\mathbb{S}_d^{>0}$ abbilden, $\mathbb{F}^{\mathbb{Q}}$ -progressiv messbar sind und mit der Dichte der quadratischen Variation \hat{a} von B übereinstimmen.

Definition 3.5.6. Sei $\bar{\mathcal{A}}_W := \bigcup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_W(\mathbb{Q})$, wobei

$$\mathcal{A}_W(\mathbb{Q}) := \left\{ a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}_d^{>0} \mid a \text{ ist } \mathbb{F}^{\mathbb{Q}}\text{-progressiv messbar,} \right.$$

$$\left. \int_0^t |a_s| ds < \infty, \forall t \geq 0 \text{ und } a = \hat{a}, \mathbb{Q}\text{-f.s.} \right\}.$$

Die Menge der Diffusionskomponenten wird somit eingeschränkt. Im nächsten Schritt wird die Verbindung zu Wahrscheinlichkeitsmaßen hergestellt. Dies gelingt, in dem man schwache Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen betrachtet.

Definition 3.5.7 (Schwache Lösung). Sei $a \in \bar{\mathcal{A}}_W$.

(i) Seien $\tau_1 \leq \tau_2$ zwei $\mathbb{F}^{\mathbb{Q}}$ -Stoppzeiten und \mathbb{Q}^1 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{F}_{τ_1} . Dann heißt \mathbb{Q} schwache Lösung von Gleichung 3.3 auf $[\tau_1, \tau_2]$ mit Startbedingung \mathbb{Q}^1 , falls folgende Punkte erfüllt sind.

- (1) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^1$ auf \mathcal{F}_{τ_1} .
- (2) Der kanonische Prozess B ist ein lokales \mathbb{Q} -Martingal auf $[\tau_1, \tau_2]$.
- (3) Der Prozess W mit $W_t = \int_{\tau_1}^t (\sqrt{a_s(B_s)})^{-1} dB_s$, \mathbb{Q} -f.s., $\forall t \in [\tau_1, \tau_2]$ ist eine Brown'sche Bewegung unter \mathbb{Q} .

Sei $\mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2, \mathbb{Q}^1, a)$ die Menge aller Prozesse, die dies erfüllen.

3 Mathematische Voraussetzungen

- (ii) Die stochastische Differentialgleichung 3.3 hat genau dann eine schwache eindeutige Lösung auf $[\tau_1, \tau_2]$ mit Startbedingung Q^1 , falls für beliebige Lösungen $Q, Q' \in \mathcal{Q}(\tau_1, \tau_2, Q^1, a)$ gilt, dass $Q = Q'$ auf \mathcal{F}_{τ_2} .
- (iii) 3.3 hat eine schwache Lösung, falls (ii) für alle \mathbb{F}^Q -Stoppzeiten $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}^+$ erfüllt ist mit Startbedingung Q^1 auf \mathcal{F}_{τ_1} .

Damit lässt sich jedem Diffusionsprozess, dessen stochastische Differentialgleichung eine schwache Lösung hat, ein Wahrscheinlichkeitsmaß zuordnen.

Definition 3.5.8. Sei

$$\mathcal{A}_W := \left\{ a \in \bar{\mathcal{A}}_W \mid dS_t = \sqrt{a_t(S)} dB_t \text{ hat eine schwache eindeutige Lösung} \right\}$$

eine Menge von Diffusionsmatrizen. Für jedes $a \in \mathcal{A}_W$ existiert ein Maß Q^a , welches die stochastische Differentialgleichung 3.3 schwach löst. Die Menge der schwachen eindeutigen Lösungen wird mit $\mathcal{Q}_W := \{Q^a \mid a \in \mathcal{A}_W\}$ bezeichnet und es gilt $\mathcal{Q}_W \subset \mathcal{Q}_{loc}$.

Durch diese Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsmaße als schwache eindeutige Lösung von stochastischen Differentialgleichungen mit Diffusionskomponente a , ist es möglich, anstatt der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße, die Menge der Diffusionsterme a zu betrachten. Die Menge aller betrachteten Diffusionsterme lässt sich einschränken, sodass die daraus gewonnene Menge an Wahrscheinlichkeitsmaßen all die gewünschten Eigenschaften aufweist und sich ein Aggregator definieren lässt.

Definition 3.5.9. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_W$ und $\mathcal{Q} = \{Q^a \mid a \in \mathcal{A}\}$. Für $a, b \in \mathcal{A}$ sei

$$\theta^{a,b} := \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t a_s ds \neq \int_0^t b_s ds \right\}.$$

$\theta^{a,b}$ beschreibt die Zeitpunkte, an welchen zwei Elemente der Diffusionsmatrizen zum ersten Mal nicht übereinstimmen.

Definition 3.5.10 (Generatormenge). Eine Menge $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_W$ heißt Generatormenge für Diffusionskoeffizienten, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

3 Mathematische Voraussetzungen

- (i) $a\mathbf{1}_{[0,t)} + b\mathbf{1}_{[t,\infty)} \in \mathcal{A}_0, \forall a, b \in \mathcal{A}_0, t \geq 0$ (Verkettungseigenschaft)
- (ii) $\theta^{a,b}$ ist konstant $\forall a, b \in \mathcal{A}_0$

In der folgenden Definition sei mit $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ die kanonische, nicht notwendigerweise vollständige, Filtration gemeint.

Definition 3.5.11 (separable Klasse). Sei \mathcal{A}_0 eine Generatormenge für Diffusionskoeffizienten, $(a_i^n)_{i,n} \subset \mathcal{A}_0$ eine Folge in \mathcal{A}_0 und $(\tau_n)_n$ eine (nicht absteigende) Folge von \mathbb{F} -Stoppzeiten mit

- $\tau_0 = 0$,
- $\inf\{n \mid \tau_n = \infty\} < \infty, \tau_n < \tau_{n+1}, \forall \tau_n < \infty$ und jedes τ_n hat höchstens abzählbar viele Werte,
- für alle n ist $\{E_i^n, i \geq 1\} \subset \mathcal{F}_{\tau_n}$ eine Zerlegung von Ω .

Dann heißt $\mathcal{A} := \left\{ a = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n \mathbf{1}_{E_i^n} \mathbf{1}_{[\tau_n, \tau_{n+1})} \right\}$ separable Klasse von Diffusionskoeffizienten, generiert von \mathcal{A}_0 .

Definition 3.5.12 (\mathcal{Q} -Aggregator). Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_{loc}$ und $\{S^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\}$ eine Familie von $\mathbb{F}^{\mathbb{Q}}$ -progressiv messbaren stochastischen Prozessen. Ein $\mathbb{F}^{\mathbb{Q}}$ -progressiv messbarer Prozess S heißt genau dann \mathcal{Q} -Aggregator von $\{S^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\}$, wenn gilt:

$$S = S^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}\text{-f.s. für alle } \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$$

Nun folgt das Hauptergebnis der Arbeit von [41]. Dazu sei \mathcal{A} eine separable Klasse von Diffusionskoeffizienten und $\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q}^a \mid a \in \mathcal{A}\}$.

Theorem 3.5.1 (Quasi-sichere-Aggregation). Sei $\{S^a, a \in \mathcal{A}\}$ eine Familie von $\mathbb{F}^{\mathbb{Q}}$ -progressiv messbaren stochastischen Prozessen. Ein \mathcal{Q} -q.s. eindeutiger \mathcal{Q} -Aggregator S existiert genau dann und nur dann, wenn für $\{S^a, a \in \mathcal{A}\}$ folgende Bedingung erfüllt ist:

$$S^a = S^b, \mathbb{Q}^a\text{-f.s. auf } [0, \theta^{a,b}) \text{ für alle } a \in \mathcal{A}_0, b \in \mathcal{A} \quad (3.4)$$

Falls S^a \mathbb{Q}^a -f.s. càdlàg ist für alle $a \in \mathcal{A}$, dann existiert auch \mathcal{Q} -q.s. eine càdlàg Version von S .

3 Mathematische Voraussetzungen

Beweis. Siehe [41].

Unter den angegebenen Voraussetzungen gibt es also solch einen Aggregator. Dadurch lässt sich nun auch das stochastische Integral über eine Familie von Maßen definieren. Dazu sollen die Integranden aus folgender Menge stammen.

Definition 3.5.13. Sei $\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q}^a : a \in \mathcal{A}\}$ und \mathbb{H}^2 bzw. \mathbb{H}_{loc}^2 folgendermaßen definiert

$$\mathbb{H}^2 := \bigcap_{\mathbb{Q}^a \in \mathcal{Q}} \left\{ H \in \mathbb{R}^d \mid H \text{ } \mathbb{F}^{\mathbb{Q}^a}\text{-progressiv messbar und} \right. \\ \left. \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^a} \left[\int_0^T |a_s^{1/2} H_s|^2 ds \right] < \infty, \mathbb{Q}^a\text{-f.s.}, \forall T \geq 0 \right\},$$

$$\mathbb{H}_{loc}^2 := \bigcap_{\mathbb{Q}^a \in \mathcal{Q}} \left\{ H \in \mathbb{R}^d \mid H \text{ } \mathbb{F}^{\mathbb{Q}^a}\text{-progressiv messbar und} \right. \\ \left. \int_0^T |a_s^{1/2} H_s|^2 ds < \infty, \mathbb{Q}^a\text{-f.s.}, \forall T \geq 0 \right\}.$$

Mit Hilfe dieser Mengen wird nun das stochastische Integral definiert.

Theorem 3.5.2. Sei \mathcal{A} wie oben und $H \in \mathbb{H}_{loc}^2$. Dann existiert \mathbb{Q} -q.s. ein $\mathbb{F}^{\mathbb{Q}}$ -progressiv messbarer Prozess M , sodass gilt

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s, \quad t \geq 0 \quad \mathbb{Q}^a\text{-f.s.}, \forall a \in \mathcal{A}. \quad (3.5)$$

Weiters ist M ein lokales Martingal unter allen \mathbb{Q}^a . Falls gilt, dass $H \in \mathbb{H}^2$, $\forall a \in \mathcal{A}$, dann ist M ein quadrat-integrierbares \mathbb{Q}^a -Martingal.

4 Modellunsicherheit nach Cont

Cont [9] schlägt zur Bemessung des Modellrisikos zwei Maße vor, die auf Arbeiten von Artzner [3] bzw. Föllmer [18] basieren. Artzner untersucht in seiner Arbeit Risiken und deren Bemessung ohne Annahme eines vollständigen Marktes. Darauf aufbauend konstruiert Artzner ein Gerüst aus vier Eigenschaften, die ein Risikomaß erfüllen muss und nennt diese Maße kohärente Risikomaße. Föllmer [18] verallgemeinert das kohärente Risikomaß. Er streicht die Subadditivität und positive Homogenität und fordert stattdessen die schwächere Eigenschaft der Konvexität. Risikomaße, die diese Kriterien erfüllen, nennt er dann konvexe Risikomaße.

4.0.1 Annahmen

Cont [9] stellt an sein zu Grunde liegendes Marktmodell geringere Anforderungen, als dies zum Beispiel Detering und Packham [16] machen. Er definierte auf einem Messraum (Ω, \mathcal{F}) messbare Abbildungen $S : \Omega \rightarrow \mathcal{D}([0, T])$, $T \in \mathbb{R}_+$, wobei $\mathcal{D}([0, T])$ die Menge der càdlàg Funktionen auf $[0, T]$ ist. Als Modelle verwendet Cont dann all jene, unter deren Wahrscheinlichkeitsmaß S ein Martingal ist.

In diesem Kapitel werden bereits die Erkenntnisse von Soner [41] verwendet (siehe Kapitel 3.5). Auf Grund der Anforderungen an die Diffusionskomponenten schränkt dies allerdings die Menge der betrachteten Modelle ein. Sei (Ω, \mathcal{F}) ein Messraum und \mathcal{Q} die Menge aller starker äquivalenter Wahrscheinlichkeitsmaße. Folgende Annahmen seien erfüllt:

- (i) Sei $S = (S_t)_{t \geq 0} = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)_{t \geq 0}$ ein \mathcal{Q} -q.s. eindeutiger \mathcal{Q} -Aggregator nach Theorem 3.5.1 in Kapitel 3.5. Weiters seien die Voraussetzungen aus Theorem 3.5.2 in Kapitel 3.5 erfüllt, sodass $S^{\mathbb{Q}}, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, ein quadratintegrierbares Martingal ist.

4 Modellunsicherheit nach Cont

(ii) Sei $\mathbb{F}^{\mathcal{Q}} := \{\mathcal{F}_t^{\mathcal{Q}}\}_{t \geq 0}$, definiert wie in Definition 3.2, die zu Grunde liegende Filtration.

Diese S_j , $j \in \{1, \dots, d\}$, seien die diskontierten Underlyings für die betrachteten Contingent Claims, welche der Menge $\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{F}_T, \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[|X|] < \infty\}$ entstammen. X sei dabei der \mathcal{F}_T -messbare Payoff des Claims. Zu den betrachteten Contingent Claims gehören auch die Benchmark Instruments. Für diese gelten folgende, von Cont [9] übernommene, Annahmen.

(iii) Sei $H = (H_i)_{1 \leq i \leq I}$, $I \in \mathbb{N}$, eine Familie von Payoffs von Benchmark Instruments $H_i \in \mathcal{C}$ mit beobachteten Preisen (C_i^*) mit $C_i^* \in [C_i^{bid}, C_i^{ask}]$.

C_i^{bid} und C_i^{ask} sind dabei die Marktpreise, die ein/e VerkäuferIn mindestens haben möchte (ask) bzw. die ein/e KäuferIn höchstens bereits ist zu zahlen (bid).

(iv)

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|H_i|) < \infty, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) = C_i^*, \forall 1 \leq i \leq I, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \quad (4.1)$$

bzw. in Hinsicht (iii)

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|H_i|) < \infty, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) \in [C_i^{bid}, C_i^{ask}], \forall 1 \leq i \leq I, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \quad (4.2)$$

4.1 Price Range Measure

Sei $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ eine Abbildung vom Raum der betrachteten Contingent Claim Payoffs in die Menge der positiven reellen Zahlen, dann heißt μ ein kohärentes Risikomaß, falls es folgende Eigenschaften erfüllt.

Definition 4.1.1 (Kohärentes Risikomaß). *Ein Risikomaß μ heißt kohärent, falls es folgende Eigenschaften erfüllt:*

(i) Für $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ mit $X_1 \leq X_2$, \mathcal{Q} -q.s. gilt

$$\mu(X_1) \geq \mu(X_2). \quad (\text{Monotonie}) \quad (4.3)$$

4 Modellunsicherheit nach Cont

(ii) Sei $X \in \mathcal{C}$ und $a \in \mathbb{R}$ konstant.

$$\mu(X + a) = \mu(X) - a \quad (\text{Translationsinvarianz}) \quad (4.4)$$

(iii) Für $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ gilt

$$\mu(X_1 + X_2) \leq \mu(X_1) + \mu(X_2) \quad (\text{Subadditivität}) \quad (4.5)$$

(iv) Sei $X \in \mathcal{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$.

$$\mu(\lambda X) = \lambda \mu(X) \quad (\text{Positive Homogenität}) \quad (4.6)$$

(i) sorgt dafür, dass eine Position, welche immer einen höheren Payoff liefert als eine andere, weniger Risiko in sich birgt. (ii) sagt aus, dass eine Position mit sicherem Gewinn das finanzielle Risiko der Gesamtposition mindert. In (iii) wird der Diversifikation Rechnung getragen, die zur Risikominderung beiträgt und (iv) sorgt dafür, dass das Risiko proportional zur Größe der Position ist.

Artzner [3] zeigt auch, dass zum Beispiel der Value-at-Risk als eines der beliebtesten Risikomaße, kein kohärentes Risikomaß ist, weil die Subadditivität verletzt wird. Ein wichtiges Ergebnis von [3] ist folgende Proposition:

Proposition 4.1.1. *Ein Risikomaß μ ist genau dann kohärent, falls eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen \mathcal{Q} existiert, sodass $\forall X \in \mathcal{C}$ gilt:*

$$\mu(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(-X). \quad (4.7)$$

Beweis. Siehe [3]. □

Basierend auf dieser Proposition definiert Cont das Price Range Measure.

Definition 4.1.2. *Seien $\bar{\pi}, \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ und $\underline{\pi}, \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ zwei Abbildungen mit*

$$\bar{\pi}(X) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) \quad \text{und} \quad \underline{\pi}(X) := \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X). \quad (4.8)$$

Dann wird mit

$$\mu_{\mathcal{Q}} : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty), \quad \mu_{\mathcal{Q}}(X) := \bar{\pi}(X) - \underline{\pi}(X) \quad (4.9)$$

ein Modellrisiko-Maß definiert. Dieses Maß wird Price Range Measure genannt.

4 Modellunsicherheit nach Cont

Dabei ist sofort ersichtlich, dass $\bar{\pi}(-X)$ mit Gleichung 4.7 übereinstimmt und ein kohärentes Risikomaß definiert.

Das Maß $\mu_{\mathcal{Q}}$ erfüllt allerdings nicht die Bedingungen eines kohärenten Risikomaßes. *Cont* spricht deshalb von einem „kohärenten“ Risikomaß. $\mu_{\mathcal{Q}}$ erfüllt aber eine Reihe von anderen Bedingungen, die von *Cont* definiert wurden. Diese Bedingungen sollen der speziellen Situation bei Modellunsicherheit und der Existenz von Benchmark Instruments, Static Hedging, etc. gerecht werden.

Eigenschaften eines Modellrisiko-Maßes

Wie bereits in Abschnitt 3.3 erwähnt, gibt es bei häufig gehandelten Instrumenten kein Modellrisiko und das finanzielle Risiko ist somit kleiner gleich dem Bid-Ask-Spread. Das ist sinnvoll, weil man zum Beispiel durch die Put-Call-Parität Optionen ohne Modellrisiko hedgen kann und dies soll auch das Risikomaß widerspiegeln.

$$\mu(H_i) \leq |C_i^{ask} - C_i^{bid}|, \quad \forall 1 \leq i \leq I \quad (4.10)$$

Lässt sich ein Payoff X teilweise oder auch ganz durch eine Strategie replizieren, die unabhängig von der Wahl des Modells $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ ist, verringert sich dadurch das Modellrisiko.

Definition 4.1.3. Sei $\phi \in \mathcal{S}$ eine zulässige, selbstfinanzierte dynamische Handelsstrategie. Dann heißt ϕ modell-unabhängig genau dann, wenn für einen Contingent Claim mit Payoff $X \in \mathcal{C}$ gilt, dass

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \text{ sodass } \mathbb{Q} \left(X_t = x_0 + \int_0^t \phi_s dS_s \right) = 1.$$

Sei ϕ modell-unabhängig und $X \in \mathcal{C}$ ein beliebiger Payoff eines Contingent Claims. Dann gelte für μ :

$$\mu \left(X + \int_0^T \phi_s dS_s \right) = \mu(X). \quad (4.11)$$

Falls ϕ also eine modell-unabhängige Handelsstrategie ist, soll ihr Wertprozess nicht zum Modellrisiko beitragen.

4 Modellunsicherheit nach Cont

Ebenso soll Diversifikation zur Verringerung des Risikos beitragen. Das heißt, das Risikomaß soll Konvexität erfüllen. Seien $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{C}$. Dann gilt $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\mu(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda\mu(X_1) + (1 - \lambda)\mu(X_2). \quad (4.12)$$

Weiters gelte für $X \in \mathcal{C}$

$$\mu\left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i\right) \leq \mu(X) + \sum_{i=1}^I |u_i| |C_i^{ask} - C_i^{bid}| \quad (4.13)$$

bzw. falls sich X statisch hedgen lässt, also

$$\exists u_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq I, X = \sum_{i=1}^I u_i H_i, \quad (4.14)$$

gelte

$$\mu(X) \leq \sum_{i=1}^I |u_i| |C_i^{ask} - C_i^{bid}|. \quad (4.15)$$

$\mu_{\mathcal{Q}}$ erfüllt all diese Eigenschaften, wie in der folgenden Proposition bewiesen wird.

Proposition 4.1.2 (vgl. Cont [9]). *Sei $\mu_{\mathcal{Q}}$ so wie in Gleichung 4.9. Dann erfüllt $\mu_{\mathcal{Q}}$ die Eigenschaften 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 und 4.15.*

Beweis zu Gleichung 4.10: Nach Voraussetzung 4.2 gilt, dass

$$\mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(H) \in [C^{bid}, C^{ask}], \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q},$$

für ein beliebiges Benchmark Instrument H . Daraus folgt

$$\mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(H) \leq C^{ask} \text{ bzw. } -\mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(H) \leq -C^{bid}.$$

Dies gilt auch, wenn das Supremum bzw. das Infimum über alle $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}$ betrachtet wird. Somit gilt

$$\mu_{\mathcal{Q}}(H) = \bar{\pi}(H) - \underline{\pi}(H) \leq C^{ask} - C^{bid} \leq |C^{ask} - C^{bid}|.$$

4 Modellunsicherheit nach Cont

Beweis zu Gleichung 4.11: Unter den gegebenen Voraussetzungen (ϕ eine dynamische Handelsstrategie und S ein Martingal) ist auch $\int \phi dS$ ein Martingal unter $\mathbb{F}^{\mathcal{Q}}$. Somit gilt $\mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(\int_0^T \phi_s dS_s) = 0$, \mathcal{Q} -q.s. und daraus folgt

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{Q}}\left(X + \int_0^T \phi_s dS_s\right) &= \bar{\pi}\left(X + \int_0^T \phi_s dS_s\right) - \underline{\pi}\left(X + \int_0^T \phi_s dS_s\right) \\ &= \bar{\pi}(X) - \underline{\pi}(X) = \mu_{\mathcal{Q}}(X).\end{aligned}$$

Beweis zu Gleichung 4.12: Seien $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ und $\lambda \in [0, 1]$. Dann gilt $\forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}$

$$\begin{aligned}\lambda \inf_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(X_1) + (1 - \lambda) \inf_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(X_2) &\leq \lambda \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(X_1) + (1 - \lambda) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(X_2) \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2) \leq \lambda \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(X_1) + (1 - \lambda) \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(X_2)\end{aligned}$$

Betrachtet man das Supremum bzw. Infimum über alle $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}$, gilt

$$\begin{aligned}\bar{\pi}(\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2) &\leq \lambda \bar{\pi}(X_1) + (1 - \lambda) \bar{\pi}(X_2) \text{ bzw.} \\ -\underline{\pi}(\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2) &\leq -\lambda \underline{\pi}(X_1) + (1 - \lambda) \underline{\pi}(X_2).\end{aligned}$$

Dies führt zu

$$\mu_{\mathcal{Q}}(\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2) \leq \lambda \mu_{\mathcal{Q}}(X_1) + (1 - \lambda) \mu_{\mathcal{Q}}(X_2).$$

Beweis zu Gleichung 4.13:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{Q}}\left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i\right) &= \bar{\pi}\left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i\right) - \underline{\pi}\left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i\right) \\ &= \mu_{\mathcal{Q}}(X) + \sum_{i=1}^I u_i (\sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(H_i) - \inf_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}(H_i)) \\ &= \mu_{\mathcal{Q}}(X) + \sum_{i=1}^I u_i \mu_{\mathcal{Q}}(H_i) \leq \mu_{\mathcal{Q}}(X) + \sum_{i=1}^I |u_i| |C_i^{ask} - C_i^{bid}|\end{aligned}$$

Beweis zu Gleichung 4.15: Setze $X = 0$ im Beweis zu Gleichung 4.13. □

4.1.1 Eigenschaften des Price Range-Maßes

Das Price-Range-Measure ist trotz seiner Simplität durchaus aufwendig zu berechnen. Dies liegt daran, dass erst alle betrachteten Modelle bezüglich der Benchmark Instruments kalibriert werden müssen, was abhängig vom Modell mit einigem Aufwand verbunden ist (zum Beispiel im Heston-Modell, siehe Kapitel 3.2.2). Problematisch wird dies vor allem dann, wenn eine Vielzahl an verschiedenen Modelltypen untersucht werden soll.

Im nächsten Schritt muss für alle Modelle überprüft werden, ob sie die Gleichung 4.10 erfüllen. Bei einer großen Menge unterschiedlicher Benchmark Instruments oder unregelmäßigen Marktpreisen kann dies zu Problemen führen.

Beispiel Betrachtet werden $I = 6$ Call-Optionen auf eine Aktie der Firma **Google** mit Basispreis $S_0^1 = 525.62$, Laufzeit von 113 Tagen und Strikes von $K = 500$ bis $K = 550$. Es wurden jeweils ein Heston-Modell \mathbb{Q}_H und ein Black-Scholes-Modell \mathbb{Q}_{BS} auf diese Optionen kalibriert. Dies geschieht durch minimieren von

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I |C_i^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i)|^2, \quad \mathbb{Q} \in \{\mathbb{Q}_H, \mathbb{Q}_{BS}\}, \quad (4.16)$$

wobei C_i^* die beobachtbaren Preise und H_i die Auszahlungsfunktionen der Benchmark Instruments sind. Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 4.1. Dabei sieht man, dass bereits ein Benchmark Instrument ausreicht, sodass ein Modell nicht mehr betrachtet wird. In diesem Fall ist die Bid/Ask-Spread bei Strike $K = 550$ mit 0.1 deutlich kleiner als der mittlere Abstand der Bid- und Ask-Preise (~ 0.717).

Ausreißer wie in diesem Fall sind zu analysieren und es ist zu entscheiden, ob die entsprechende Option als Benchmark Instrument verwendet werden soll. Ein weiterer Nachteil ist die fehlende Vergleichbarkeit mit in der Praxis üblichen Risikomaßen wie Value-at-Risk oder Expected-Shortfall. Vor allem die in Kapitel 2.3 geforderte 90%-ige Sicherheit, dass ein gewisser Verlust nicht überschritten werden soll, lässt sich mit diesem Risikomaß nicht überprüfen. Allerdings könnte das Maß weiterhin für interne Überprüfungen verwendet werden.

4 Modellunsicherheit nach Cont

Strike	C^{bid}	C^H	C^{BS}	C^{ask}
500	47.0	47.27911	46.32424	47.8
510	40.7	41.15403	40.55815	41.6
520	35.0	35.49225	35.29625	35.8
530	29.8	30.30715	30.53319	30.6
540	25.1	25.60565	26.25615	26.0
550	21.5	21.38767	22.44585	21.6

Tabelle 4.1: Es wurde jeweils ein Heston-Modell und ein Black-Scholes-Modell auf die Call-Optionen im Beispiel in Kapitel 4.1.1 kalibriert. Die Tabelle zeigt die von den Modellen generierten Preise im Vergleich zu den Bid/Ask-Preisen. Fett gedruckt sind die Preise, die außerhalb der Bid/Ask-Spread liegen.

Der größte Nachteil ist aber, dass das Risiko durch Hedging im falschen Modell nicht betrachtet wird. Falls alle Modelle die Benchmark Instruments perfekt wiedergeben, attestiert das Price-Range-Measure ein Modellrisiko von 0. Allerdings können sich die Hedgingstrategien in den Modellen gänzlich unterscheiden, woraus in weiterer Folge ein ungedeckter Verlust entstehen kann.

Fortführung Beispiel Seien θ_H und θ_{BS} die Parametervektoren der Modelle \mathbb{Q}_H und \mathbb{Q}_{BS} . Basierend auf den beiden Modellen \mathbb{Q}_H und \mathbb{Q}_{BS} werden jeweils weitere 499 Modelle $\mathbb{Q}_{H,i}$, $i \in \{2, 3, \dots, 500\}$, im Heston-Modell bzw. $\mathbb{Q}_{BS,i}$, $i \in \{2, 3, \dots, 500\}$, im Black-Scholes-Modell zufällig generiert, sodass für die Parametervektoren $\theta_{H,i}$ und $\theta_{BS,i}$ gilt

$$\begin{aligned}\theta_{H,i} &\sim \mathcal{N}(\theta_H, 10^{-4}), \quad i \in \{2, 3, \dots, 500\}, \\ \theta_{BS,i} &\sim \mathcal{N}(\theta_{BS}, 10^{-4}), \quad i \in \{2, 3, \dots, 500\},\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{N}(\theta_H, 10^{-4})$ der Normalverteilung mit Erwartungswert $\mathbb{E}(\theta_{H,i}) = \theta_H$ und Varianz $Var(\theta_{H,i}) = 10^{-4}$ entspricht bzw. äquivalent für $\mathcal{N}(\theta_{BS}, 10^{-4})$. Siehe Abbildung 4.1.

Von diesen 1000 Modellen erfüllen elf Heston-Modelle die Bedingung 4.10. Diese elf Modelle können somit verwendet werden, um das Modellrisiko eines beliebigen Contingent Claims zu bewerten. Sei $X \in \mathcal{C}$ der Payoff einer europäischen

4 Modellunsicherheit nach Cont

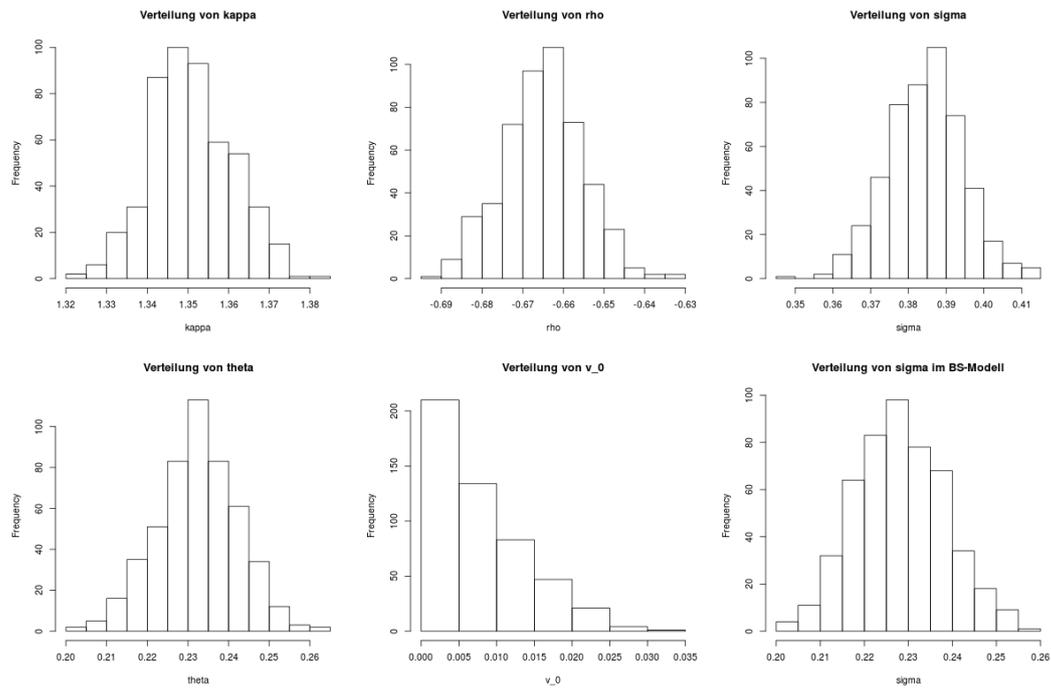


Abbildung 4.1: Verteilung der Parameter der Heston-Modelle und der Volatilität der Black-Scholes-Modelle mit $T = \frac{113}{252}$ bzgl. der im Beispiel in Kapitel 4.1.1 vorgestellten Optionen.

4 Modellunsicherheit nach Cont

Option mit Basispreis $S_0^1 = 525.62$, Strike $K = 525.62$ und Laufzeit von 113 Tagen. Der Wert π_0^{Call} im zuerst kalibrierten Heston-Modell beträgt

$$\pi_0^{Call} = 32.90965.$$

Die Modellunsicherheit unter dem Price-Range-Measure ist dann

$$\mu_{\mathcal{Q}}(X) = \bar{\pi}(X) - \underline{\pi}(X) = 0.08653893.$$

Dies entspricht 0.263% des Optionswertes. Alle Modelle, welche Bedingung 4.10 erfüllen, spiegeln den Markt wieder. Falls zur Bewertung des Contingent Claims das Modell verwendet wird, welches den minimalsten Wert $\underline{\pi}(X)$ generiert, sich der Markt aber entsprechend dem Modell entwickelt, welches den maximalsten Wert $\bar{\pi}(X)$ berechnet, entsteht ein Verlust von $\mu_{\mathcal{Q}}(X)$. Dem entsprechend lässt sich das Modellrisiko von Modell $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ für einen Contingent Claim X durch

$$\bar{\pi}(X) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X)$$

berechnen. Würde die Call-Option aus dem Beispiel mit dem Black-Scholes-Modell bewertet werden, welches die Benchmark Instruments am besten wiedergibt, ergäbe sich ein Optionswert von 32.85844 und somit ein Modellrisiko von 0.6066694.

4.2 Konvexes Maß der Modellunsicherheit

Ein Problem des Price Range Measures ist, dass wie in Abschnitt 4.1.1 angesprochen, die Kalibrierung mitunter sehr aufwendig ist. Die Idee ist nun, diese Kalibrierung zu umgehen und ein alternatives Risikomaß zu definieren. Dieses Risikomaß für das Modellrisiko basiert auf dem konvexen Risikomaß, wie es *Föllmer* und *Schied* in [18] definieren.

Definition 4.2.1. Ein Risikomaß $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ heißt konvex, falls es die Eigenschaften 4.3, 4.4 und 4.12 erfüllt.

Auch in diesem Fall gibt es ein Repräsentationstheorem.

4 Modellunsicherheit nach Cont

Proposition 4.2.1 (vgl. Föllmer und Schied [18]). $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ ist genau dann und nur dann ein konvexes Risikomaß, wenn $\exists \alpha : \mathcal{Q} \rightarrow (-\infty, \infty]$ beliebig, sodass

$$\mu(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(-X) - \alpha(\mathbb{Q})) \quad (4.17)$$

Beweis. Siehe [18]. □

Dieses α heißt Penalty Function. Diese Funktion definiert *Cont* mit Hilfe der Benchmark Instruments.

Definition 4.2.2. Sei C_i^* wie in Annahme 4.1 und $H = (H_i)_{1 \leq i \leq I}$ eine Familie von Benchmark Instruments. Dann gilt für α :

$$\alpha(\mathbb{Q}) := \begin{cases} \|C^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H)\|_p, & \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.18)$$

Die p-Norm sei sei folgendermaßen gegeben:

$$\|C^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H)\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^I |C_i^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i)|^p}$$

Ähnlich wie beim Price Range Measure wird dann das konvexe Risikomaß der Modellunsicherheit definiert.

Definition 4.2.3. Seien $\pi^* : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ und $\pi_* : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ zwei Abbildungen mit

$$\begin{aligned} \pi^*(X) &:= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) - \alpha(\mathbb{Q})), \\ \pi_*(X) &:= \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) + \alpha(\mathbb{Q})). \end{aligned}$$

Dann sei $\mu_* : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$ ein Risikomaß für die Modellunsicherheit $\forall X \in \mathcal{C}$ mit

$$\mu_*(X) := \pi^*(X) - \pi_*(X). \quad (4.19)$$

4 Modellunsicherheit nach Cont

$\pi^*(-X)$ ist nach Proposition 4.2.1 ein konvexes Risikomaß. μ_* ist kein konvexes Risikomaß, erfüllt aber wiederum die Voraussetzungen 4.10, 4.11 und 4.12 und angepasste Versionen von 4.13 und 4.15.

Proposition 4.2.2 (vgl. Cont [9]). *Falls gilt, dass $\forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}, \forall 1 \leq i \leq I$,*

$$\alpha(\mathbb{Q}) = \|C^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H)\|_p \geq |C_i^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i)|, \quad (4.20)$$

dann gelten folgende Eigenschaften.

(i) *Für alle Benchmark Instruments H_i mit Marktpreisen C_i^* , $1 \leq i \leq I$, gilt:*

$$\pi^*(H_i) \leq C_i^* \text{ und } \pi_*(H_i) \geq C_i^* \quad (4.21)$$

(ii) *Falls gilt, dass*

$$\exists \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}, \forall 1 \leq i \leq I, \text{ sodass } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) = C_i^*, \quad (4.22)$$

dann gilt $\forall 1 \leq i \leq I$, $\pi^(H_i) = \pi_*(H_i) = C_i^*$ und für alle sonstigen Payoffs $X \in \mathcal{C}$ $\pi^*(X) \geq \pi_*(X)$.*

(iii) *Falls das Risikomaß μ_* die Eigenschaft 4.22 erfüllt, dann gelten auch die Eigenschaften 4.10, 4.11 und 4.12.*

(iv) *Sei die Gleichung 4.22 erfüllt und $\lambda_i \in [0, 1], \forall 0 \leq i \leq I$ mit $\sum_{i=0}^I \lambda_i = 1$. Dann gilt:*

$$\mu_* \left(\lambda_0 X + \sum_{i=1}^I \lambda_i H_i \right) \leq \mu_*(X) \quad (4.23)$$

bzw. falls sich X mit einer Konvexkombination aus H_i statisch hedgen lässt, also

$$\exists (\lambda_i^*)_{1 \leq i \leq I}, \text{ sodass } X = \sum_{i=1}^I \lambda_i^* H_i,$$

dann gilt

$$\mu_*(X) = \mu_* \left(\sum_{i=1}^I \lambda_i^* H_i \right) \leq 0. \quad (4.24)$$

4 Modellunsicherheit nach Cont

Beweis. (i) Aus $-|x| \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$, folgt $\forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}, \forall 1 \leq i \leq I$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) - \|C^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H)\|_p &\stackrel{(4.20)}{\leq} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) - |C_i^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i)| \\ &\leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) + C_i^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) = C_i^* \end{aligned}$$

bzw. aus $|x| \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) + \|C^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H)\|_p &\stackrel{(4.20)}{\geq} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) + |C_i^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i)| \\ &\geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) + C_i^* - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(H_i) = C_i^*. \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen halten auch, wenn man sie unter dem Supremum bzw. Infimum über alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ betrachtet. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq I$

$$\pi^*(H_i) \leq C_i^* \text{ und } \pi_*(H_i) \geq C_i^*.$$

(ii) Sei $X \in \mathcal{C}$. Aus [18] (vgl. Proposition 4.2.1) ist bekannt, dass $\pi^*(-X)$ ein konvexes Risikomaß ist. Weiters gilt

$$\begin{aligned} \pi^*(-X) &= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(-X) - \alpha(\mathbb{Q})) \\ &= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) + \alpha(\mathbb{Q})) \\ &= - \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) + \alpha(\mathbb{Q})) = -\pi_*(X). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \pi^*(0) &= \pi^*\left(\frac{X}{2} - \frac{X}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\pi^*(X) + \pi^*(-X)) \\ &= \frac{1}{2}(\pi^*(X) - \pi_*(X)) \end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned} \pi^*(X) &\geq \pi_*(X) - 2\pi^*(0) \\ &= \pi_*(X) + 2 \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (-\alpha(\mathbb{Q})) \\ &= \pi_*(X) - 2 \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\alpha(\mathbb{Q})). \end{aligned}$$

4 Modellunsicherheit nach Cont

Unter der Voraussetzung 4.22 ist $\inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}}(\alpha(\mathbb{Q})) = 0$ und somit $\pi^*(X) \geq \pi_*(X), \forall X \in \mathcal{C}$. Mit 4.21 gilt $\forall 1 \leq i \leq I$

$$C_i^* \leq \pi_*(H_i) \leq \pi^*(H_i) \leq C_i^*$$

und somit $\pi^*(H_i) = \pi_*(H_i)$.

(iii) Axiom 4.10 ist erfüllt, weil

$$\pi^*(H_i) = \pi_*(H_i) \Rightarrow \mu_*(H_i) = 0$$

und somit gilt

$$\mu_*(H_i) \leq |C_i^{ask} - C_i^{bid}|, \forall 1 \leq i \leq I.$$

Für eine modell-unabhängige Handelsstrategie ϕ gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^t \phi_s dS_s \right) = 0, \forall t \geq 0,$$

für alle Martingalmaße $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \pi^* \left(X + \int_0^T \phi_s dS_s \right) &= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(X + \int_0^T \phi_s dS_s \right) - \alpha(\mathbb{Q}) \right) \\ &= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^T \phi_s dS_s \right) - \alpha(\mathbb{Q}) \right) \\ &= \pi^*(X), \\ \pi_* \left(X + \int_0^T \phi_s dS_s \right) &= \dots = \pi_*(X). \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} \mu_* \left(X + \int_0^T \phi_s dS_s \right) &= \pi^* \left(X + \int_0^T \phi_s dS_s \right) - \pi_* \left(X + \int_0^T \phi_s dS_s \right) \\ &= \mu_*(X) \end{aligned}$$

und damit ist Axiom 4.11 erfüllt.

4 Modellunsicherheit nach Cont

Weil $\pi^*(-X)$ konvex ist, gilt für $\lambda \in [0, 1]$ und $X, Y \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
 \mu_*(\lambda X + (1 - \lambda)Y) &= \pi^*(\lambda X + (1 - \lambda)Y) - \pi_*(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \\
 &\stackrel{(4.25)}{=} \pi^*(-(-\lambda X - (1 - \lambda)Y)) + \pi^*(-(\lambda X + (1 - \lambda)Y)) \\
 &\leq \lambda\pi^*(X) + (1 - \lambda)\pi^*(Y) + \lambda\pi^*(-X) + (1 - \lambda)\pi^*(-Y) \\
 &= \lambda(\pi^*(X) + \pi^*(-X)) + (1 - \lambda)(\pi^*(Y) + \pi^*(-Y)) \\
 &= \lambda(\pi^*(X) - \pi_*(X)) + (1 - \lambda)(\pi^*(Y) - \pi_*(Y)) \\
 &= \lambda\mu_*(X) + (1 - \lambda)\mu_*(Y).
 \end{aligned}$$

Damit ist auch Axiom 4.12 erfüllt.

(iv) Aus (ii) und (iii) folgt klarerweise

$$\mu_*\left(\lambda_0 X + \sum_{i=1}^I \lambda_i H_i\right) \leq \lambda_0 \mu_*(X) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \mu_*(H_i) = \lambda_0 \mu_*(X) \leq \mu_*(X)$$

und damit ist Ungleichung 4.23 bewiesen. Setzt man $X = 0$, folgt daraus auch die Ungleichung 4.24. □

Das Maß μ_* ist ein sogenanntes Worst-Case-Maß, weil es die größtmögliche Differenz unter den "penalisierten" Preisen $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X) - \alpha(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, wiedergibt. Die Penalty Function α ist dabei auch eine Art Kalibrierungsfehler. Werden nur Modelle mit $\alpha(\mathbb{Q}) = 0$ betrachtet, also solche, welche die Marktpreise der Benchmark Instruments perfekt widerspiegeln, gelangt man zum Price Range Measure aus Kapitel 4.1.

4.2.1 Eigenschaften des konvexen Risikomaßes

Der große Vorteil dieses Risikomaßes ist, dass man eine viel größere Anzahl an Modellen betrachten kann, da es nicht notwendig ist, nur Modelle zu untersuchen, die die Marktpreise der Benchmark Instruments abbilden können. Dies erspart viel Rechenzeit, da somit nur ein Modell kalibriert werden muss, um die Gleichung 4.22 zu erfüllen. Allerdings muss solch ein Modell nicht zwingend existieren. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn es eine Vielzahl von Benchmark Instruments gibt, die alle unterschiedliche Payoff-Funktionen aufweisen. In diesem Fall schreibt *Cont*:

4 Modellunsicherheit nach Cont

„However, this condition may be difficult to satisfy in some cases, especially in presence of many benchmark instruments with different payoff structures: available models may only be able to reproduce all options to within a certain precision $\epsilon > 0$. In this case, one can still conserve the structure above by replacing $\pi^*(X)$ by $\pi^*(X) + \epsilon$, $\pi_*(X)$ by $\pi_*(X) - \epsilon$ and $\mu_*(X)$ by $\mu_*(X) + 2\epsilon$. This point is further developed in Cont and Gabay (2005)“ (Cont, [9])

Ist Gleichung 4.22 nicht erfüllt, kann dies dazu führen, dass $\mu_*(X) < 0$. Um dies zu verhindern, wird $\mu_*(X)$ folgendermaßen gesetzt.

Definition 4.2.4. Sei $X \in \mathcal{C}$ beliebig,

$$\epsilon := \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\alpha(\mathbb{Q}))$$

und

$$\mu_*(X) := \pi^*(X) - \pi_*(X) + 2\epsilon.$$

Proposition 4.2.3. Sei $X \in \mathcal{C}$ beliebig und ϵ und $\mu_*(X)$ wie in Definition 4.2.4. Dann gilt $\mu_*(X) \geq 0$.

Beweis. Aus dem Beweis zu (ii) in Proposition 4.2.2 ist bekannt, dass durch Konvexität von $\pi^*(-X) = -\pi_*(X)$ und

$$\pi^*(0) = \frac{1}{2}(\pi^*(X) - \pi_*(X))$$

folgendes gilt:

$$\pi^*(X) \geq \pi_*(X) - 2 \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\alpha(\mathbb{Q})).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mu_*(X) &= \pi^*(X) - \pi_*(X) + 2\epsilon \\ &\geq \pi_*(X) - 2 \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\alpha(\mathbb{Q})) - \pi_*(X) + 2 \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\alpha(\mathbb{Q})) = 0. \end{aligned}$$

□

4 Modellunsicherheit nach Cont

p	$\bar{\alpha}^H$	$\inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_H} \alpha(\mathbb{Q})$	$\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_H} \alpha(\mathbb{Q})$	$\bar{\alpha}^{BS}$	$\inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_{BS}} \alpha(\mathbb{Q})$	$\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_{BS}} \alpha(\mathbb{Q})$
1	9.9068	0.4922036	34.9584067	7.5497	3.6710807	24.8145953
2	4.06619	0.253116	14.281219	3.42332	1.708615	10.315259
4	2.6209	0.174519	9.136759	2.4575	1.238322	6.789368
8	2.12197	0.1478893	7.3213911	2.17941	1.0891352	5.6429549

Tabelle 4.2: Entwicklung von $\alpha(\mathbb{Q})$ unter verschiedenen p mit $T = \frac{113}{252}$ für 6 Call-Optionen mit Strikes $K = 500$ bis $K = 550$ und 500 Heston-Modelle und 500 Black-Scholes-Modelle. $\bar{\alpha}^H$ bzw. $\bar{\alpha}^{BS}$ sind dabei die arithmetischen Mittel aller Fehler der Heston-Modelle α^H bzw. Black-Scholes-Modelle α^{BS} .

Ein wesentlicher Faktor für dieses konvexe Risikomaß ist die Wahl von p in Gleichung 4.18. Die Wahl von p entscheidet, wie stark die einzelnen Modelle für ihre Kalibrationsfähigkeit bestraft werden. Je größer p , desto kleiner $\alpha(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Siehe dazu auch Tabelle 4.2. Die Höhe von $\mu_*(X)$ hängt einerseits von der Varianz von $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X)$ und andererseits von $\alpha(\mathbb{Q})$ ab. Wenn $\alpha(\mathbb{Q})$ groß ist, wird aber in $\pi^*(X)$ und $\pi_*(X)$ oft das selbe Modell \mathbb{Q} gewählt, nämlich das Modell, für welches $\alpha(\mathbb{Q})$ am kleinsten ist. Dies führt zu $\mu_*(X) = 0$.

Beispiel Betrachtet wird das Beispiel aus Kapitel 4.1.1. Seien die Benchmark Instruments also Call-Optionen mit einer Laufzeit von 113 Tagen und Strikes von $K = 500$ bis $K = 550$. Wie in Kapitel 4.1.1 werden 500 Heston-Modelle und 500 Black-Scholes-Modelle betrachtet und $p = 2$. Eine Call-Option X mit Strike $K = 525.62$, Basispreis $S_0^1 = 525.62$ und Laufzeit von 113 Tagen hat unter dem konvexen Risikomaß der Modellunsicherheit ein Modellrisiko von

$$\mu_*(X) = 0.04363484.$$

Der Wert dieser Call-Option im best-kalibrierten Heston-Modell betrug 32.91. Somit entspricht das Modellrisiko unter dem konvexen Risikomaß der Modellunsicherheit 0.044% des Optionswertes. $\mu_*(X) = 0.04363484$ gilt auch, wenn man als Modellmenge ausschließlich Heston-Modelle betrachten würde. Dies liegt daran, dass der minimale Strafterm $\min_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_{BS}} \alpha(\mathbb{Q})$ für Black-Scholes-Modelle $\mathcal{Q}_{BS} \subseteq \mathcal{Q}$ deutlich größer ist als $\min_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_H} \alpha(\mathbb{Q})$ für Heston-Modelle $\mathcal{Q}_H \subseteq \mathcal{Q}$, sodass zur Berechnung von $\mu_*(X)$ nur Heston-Modelle verwendet

4 Modellunsicherheit nach Cont

werden. Würden ausschließlich Black-Scholes-Modelle verwendet werden, hätte die Call-Option ein Modellrisiko von $\mu_*(X) = 0.3128087$.

Im Gegensatz zum Risikomaß aus Kapitel 4.1 lässt sich mit diesem Risikomaß das Modellrisiko eines bestimmten Modells nicht bestimmen. Der Strafterm $\alpha(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, bestimmt lediglich, wie wichtig ein Modell für die Berechnung von $\mu_*(X)$, $X \in \mathcal{C}$, ist. $\alpha(\mathbb{Q})$ wächst mit der Anzahl an Benchmark Instruments. Damit sinkt auch das Modellrisiko. Dies entspricht insofern der Wirklichkeit, als dass es durch eine größere Anzahl an Benchmark Instruments auch mehrere Möglichkeiten zum statischen Hedgen gibt, welche das Modellrisiko verringern.

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

In diesem Kapitel wird nun die Idee für ein Modellrisikomaß von *Detering* und *Packham* [16] vorgestellt. Dazu wird ein Verlustprozess L eingeführt, welcher den Verlust (oder Gewinn) durch falsche Modellwahl beschreibt. Auf Basis dieses Prozesses werden anschließend Risikomaße definiert, welche die Modellunsicherheit ausdrücken. Zuerst wird der Fall betrachtet, in welchem die in Definition 3.2.2 definierte Hedgingstrategie fix festgelegt wird, aber der Markt sich anderweitig entwickelt. Anschließend wird das Modellrisiko eines Contingent Claims allgemein unter einer Menge \mathcal{Q} von Marktmodellen betrachtet.

5.0.2 Annahmen

Wie auch in Kapitel 4 werden die Ergebnisse aus Kapitel 3.5 verwendet. Dabei sei (Ω, \mathcal{F}) ein Messraum, der mit der in Kapitel 3.5 vorgestellten universellen Filtration ausgestattet wird. Die Menge der betrachteten Martingalmaße \mathcal{Q} erfülle folgende Bedingungen:

- (i) Sei $S = (S_t)_{t \geq 0} = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)_{t \geq 0}$ ein \mathcal{Q} -q.s. eindeutiger \mathcal{Q} -Aggregator nach Theorem 3.5.1 in Kapitel 3.5. Weiters seien die Voraussetzungen aus Theorem 3.5.2 in Kapitel 3.5 erfüllt, sodass $S^{\mathbb{Q}}, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, ein quadratintegrierbares Martingal ist.
- (ii) Sei $\mathbb{F}^{\mathcal{Q}} := \{\mathcal{F}_t^{\mathcal{Q}}\}_{t \geq 0}$, definiert wie in Definition 3.2, die zu Grunde liegende Filtration.

S bezeichnet wiederum den mit einem *numeraire* diskontierten Preisprozess, welcher als Underlying für alle Contingent Claims dient, die in der Menge

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

$\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{F}_T, \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[|X|] < \infty\}$ enthalten sind. Mit $\Phi = (\phi, u)$ wird nach Definition 3.2.3 aus Kapitel 3.2 eine Handelsstrategie bezeichnet.

Definition 5.0.5. Die Menge der zulässigen dynamischen Hedgingstrategien wird definiert durch

$$\mathcal{S} := \left\{ \phi \text{ zulässig} \mid \int_0^t \phi_s dS_s \text{ wohldefiniert,} \right. \\ \left. \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^t (\phi_s^j)^2 d\langle S^j \rangle \right) < \infty, \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}, t \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

Die Payoffs der Benchmark Instruments werden wiederum mit $H_i \in \mathcal{C}$, $i \in \{1, 2, \dots, I\}$, bezeichnet, wobei $I \in \mathbb{N}$.

5.1 Modellunsicherheit bei zwei Modellen

Im ersten Teil wird gezeigt, dass der erwartete Verlust durch falsche Modellwahl mit dem Price Range Measure aus Kapitel 4.1 übereinstimmt.

Sei $\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}$ das Modell, mit welchem Derivate bepreist und gehedgt werden (H steht für Hedge) und $\mathbb{Q}_M \in \mathcal{Q}$ das Modell, nach welchem sich der Markt tatsächlich entwickelt (M steht für Market). Es wird dabei angenommen, dass \mathbb{Q}_H und \mathbb{Q}_M einen vollständigen und arbitragefreien Markt induzieren. Somit sind auch die Hedging-Strategien ϕ^H und ϕ^M durch \mathbb{Q}_H und \mathbb{Q}_M vorgegeben und diese seien selbstfinanzierend.

Die Annahme der Vollständigkeit ist problematisch, weil gängige Marktmodelle, wie zum Beispiel das Heston-Modell dies nicht erfüllen. Allerdings lässt sich durch das Hinzufügen von Contingent Claims Vollständigkeit erreichen (siehe zum Beispiel *Romano* und *Touzi* [37]). Der Payoff X wird zerlegt in den Teil, welcher statisch hedgebar ist und den übrigen Payoff Y - also $X = Y + \sum_{i=1}^I u_i H_i$, wobei der Markt der Einfachheit halber nur aus einem Underlying S besteht. Da das statische Hedgen nicht zur Modellunsicherheit beiträgt, wird beim Verlustprozess L nur der Payoff Y betrachtet. Deshalb werden nun auch nur noch Handelsstrategien ϕ ohne u_i , $1 \leq i \leq I$ betrachtet. Ein Beispiel für solch eine Zerlegung sind Barrier-Optionen in unvollständigen Märkten.

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

In diesem Fall zeigen *Ilhan* und *Sircar* [28], dass man diese Optionen optimal hedgen kann, wenn man sie mit einem Portfolio aus Standard Call- und Put-Optionen und dem Underlying nachbildet. Andererseits gilt bei einer reinen Dynamic Hedging Strategie natürlich $X = Y$ bzw. bei einer reinen Static Hedging Strategie $Y = 0$.

Sei V wie in Kapitel 3.2 der Wertprozess einer dynamischen Handelsstrategie ϕ , mit welcher Y gehedgt wird. Dieser besteht aus dem Erstinvestment, welches nach den Überlegungen aus Kapitel 3.2 der erwarteten Auszahlung von Y entspricht, und der Entwicklung des Portfolios bis zum Zeitpunkt t .

Definition 5.1.1 (Wertprozess). Sei $V = (V_t)_{t \in [0, T]}$ ein stochastischer Prozess mit

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}(Y) + \int_0^t \phi_s^H dS_s. \quad (5.1)$$

Der Verlustprozess entspricht dann der erwarteten Auszahlung ohne dem Wert des Portfolios.

Definition 5.1.2 (Verlustprozess). Sei $L = (L_t)_{t \in [0, T]}$ ein stochastischer Prozess, der

$$L_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}(Y | \mathcal{F}_t) - V_t \quad (5.2)$$

erfüllt.

Muss ein/e VerkäuferIn von Y , mehr auszahlen, als das Hedging-Portfolio wert ist, macht er/sie einen Verlust und $L_t > 0$. In einem vollständigen Marktmodell gibt es natürlich eine Strategie, sodass gilt

$$\mathbb{Q}_H(L_t = 0) = \mathbb{Q}_H(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}(Y | \mathcal{F}_t) = V_t) = 1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Dies muss aber unter \mathbb{Q}_M nicht mehr gelten. Es kann passieren, dass

$$\mathbb{Q}_M(L_t > 0) > 0$$

gilt, also sich der Markt in Wirklichkeit so entwickelt, dass die Hedgingstrategie ϕ^H , die unter \mathbb{Q}_H Y perfekt repliziert, unter \mathbb{Q}_M für einen Verlust sorgt.

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Proposition 5.1.1. *Sei $\phi^{M,t}$ eine Handelsstrategie, sodass*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H}(Y|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}(Y) + \int_0^t \phi_s^{M,t} dS_s, \quad \mathbb{Q}_M\text{-f.s.}$$

Dann gilt

$$L_t = -(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H}(Y) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}(Y)) - \int_0^t (\phi_s^H - \phi_s^{M,t}) dS_s.$$

$\int_0^t (\phi_s^H - \phi_s^{M,t}) dS_s$ ist unter \mathbb{Q}_M ein Martingal und es gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}(L_t) = -(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H}(Y) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}(Y)). \quad (5.3)$$

Beweis. $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H}(Y|\mathcal{F}_t)$ ist \mathcal{F}_t -messbar und nachdem \mathbb{Q}_M vollständig ist, existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\phi^{M,t}$, welche $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H}(Y|\mathcal{F}_t)$ perfekt repliziert für alle $t \in [0, T]$. Diese ist aber abhängig von t , weil $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H}(Y|\mathcal{F}_t)$ unter \mathbb{Q}_M kein Martingal ist. Nun setzt man für V_t ein.

$$\begin{aligned} L_t &= -(V_t - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H}(Y|\mathcal{F}_t)) \\ &= -\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H}(Y) + \int_0^t \phi_s^H dS_s - \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}(Y) + \int_0^t \phi_s^{M,t} dS_s\right)\right) \\ &= -(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H}(Y) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}(Y)) - \int_0^t (\phi_s^H - \phi_s^{M,t}) dS_s \end{aligned}$$

Bildet man den Erwartungswert unter \mathbb{Q}_M für den letzten Teil, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}\left(\int_0^t (\phi_s^H - \phi_s^{M,t}) dS_s\right) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}\left(\int_0^t \phi_s^H dS_s\right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}\left(\int_0^t \phi_s^{M,t} dS_s\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}\left(\int_0^t \phi_s^H dS_s\right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H}(Y|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}(Y)) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}\left(\int_0^t \phi_s^H dS_s\right) - (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}(Y) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}(Y)) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}\left(\int_0^t \phi_s^H dS_s\right) = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.4 auf 5.5 gilt, weil unter der universellen Filtration die Turmeigenschaft erfüllt ist. Die letzte Gleichung gilt, weil nach Voraussetzung $\mathbb{Q}_M \in \mathcal{Q}$ ein

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Martingalmaß ist. Somit ist S ein \mathbb{Q}_M -Martingal und für jeden einfach vorhersehbaren Prozess ϕ hat auch das Integral $\int \phi dS$ diese Eigenschaft. Gleichung 5.3 ergibt sich dann direkt aus der eben gezeigten Eigenschaft. \square

Somit gilt auch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}(L_T) &= -(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}(Y) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}(Y)) \\ &= -\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}\left(X - \sum_{i=1}^I u_i H_i\right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}\left(X - \sum_{i=1}^I u_i H_i\right)\right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}(L_T) &= -\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}\left(\sum_{i=1}^I u_i H_i\right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}\left(\sum_{i=1}^I u_i H_i\right)\right) \\ &= -(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}(X) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}(X)). \end{aligned}$$

Der erwartete Verlust minus den Kosten, die durch Modellunsicherheit bei den Benchmark Instruments entstehen, entspricht gerade der Differenz der erwarteten Payoffs unter den beiden Modellen. Stimmen die H_i , $\forall 1 \leq i \leq I$, unter beiden Modellen überein, also betrachtet man nur Modelle, die bezüglich der Benchmark Instruments gleiche Preise liefern, gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}\left(\sum_{i=1}^I u_i H_i\right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}\left(\sum_{i=1}^I u_i H_i\right) = 0$$

und man gelangt wieder zum Price Range Measure aus Kapitel 4.1:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}(L_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}(X) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}(X)$$

Da \mathbb{Q}_M im Allgemeinen nicht bekannt ist, macht es Sinn das Supremum über alle möglichen Modelle aus \mathcal{Q} zu betrachten. Der Verlustprozess L wird dabei weiterhin unter \mathbb{Q}_H definiert. Der maximale Verlust durch Modellunsicherheit beträgt dann

$$\sup_{\mathbb{Q}_M \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}(L_T) = \sup_{\mathbb{Q}_M \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M}(X) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}(X).$$

5.2 Modellunsicherheit bei mehreren Modellen

Das Ziel von *Detering* und *Packham* ist es, ein vom Verlustprozess L abhängiges Risikomaß zu definieren, welches einerseits die Modellauswahl möglichst wenig einschränkt, aber gleichzeitig „schlechte“ Modelle bestraft. Dies erinnert an das konvexe Risikomaß der Modellunsicherheit von *Cont* aus Kapitel 4.2. Tatsächlich wird die Modellauswahl in diesem Kapitel ähnlich getroffen. Allerdings werden die einzelnen Modelle nicht mit einem Strafterm bedacht, sondern es wird an Hand ihrer Präzision und Parameteranzahl eine Verteilung über \mathcal{Q} generiert. Dazu wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} definiert, welches die Modellunsicherheit miteinbezieht.

5.2.1 Erweiterter Wahrscheinlichkeitsraum

Um ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} zu finden, welches die Modellunsicherheit berücksichtigt, wird ein erweiterter Wahrscheinlichkeitsraum betrachtet. Dieser besteht einerseits aus einem Messraum (Ω, \mathcal{F}) mit einer Zufallsvariable $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, welche Preise von Finanzgütern definiert. Andererseits sei $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ ein weiterer Messraum mit einer Zufallsvariable $\theta : \tilde{\Omega} \rightarrow \Theta$. Es gelte $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ und $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta))$ sei ein Messraum, auf welchem eine weitere messbare Abbildung $\mathbb{Q} : \Theta \rightarrow \mathcal{Q}$ in den Raum der starken Martingalmaße $(\mathcal{Q}, \sigma(\mathcal{Q}))$ definiert wird. Die Verteilung von θ entspricht der Verteilung der verschiedenen Modelle. Die Elemente von \mathcal{Q} seien nun die Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbb{Q}_θ auf (Ω, \mathcal{F}) , welche durch $\theta \in \Theta$ indexiert werden.

Beispiel Sei $\tilde{\Omega} = \{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$, $\tilde{\mathcal{F}} = \{\emptyset, \{\tilde{\omega}_1\}, \{\tilde{\omega}_2\}, \{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}\}$ und $\theta(\tilde{\omega}_1) = 1$ bzw. $\theta(\tilde{\omega}_2) = 2$. Es gibt also zwei Modelle \mathbb{Q}_1 und \mathbb{Q}_2 . Wenn $\tilde{\mathcal{G}} = \{\tilde{\omega}_1\}$, dann ist $\mathbb{P}(\cdot | \tilde{\mathcal{G}})$ die Verteilung der $\omega \in \Omega$ unter Modell 1 - es gibt also in diesem Fall keine Modellunsicherheit mehr, weil Modell 1 verwendet wird. Sei ν die

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Verteilung von θ auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ und $B \in \mathcal{F}$ beliebig. Dann gelte

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \times \tilde{\Omega}) &= \mathbb{Q}_1(B) \nu(1) + \mathbb{Q}_2(B) \nu(2) \\ &= \mathbb{P}(B \times \tilde{\Omega} | \theta = 1) \nu(1) + \mathbb{P}(B \times \tilde{\Omega} | \theta = 2) \nu(2). \end{aligned}$$

Dabei gibt ν die Wahrscheinlichkeit von Modell 1 bzw. Modell 2 an.

Ziel ist es nun ein Maß \mathbb{P} auf $(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}})$ zu finden, sodass für die bedingte Wahrscheinlichkeit mit $B \in \mathcal{F}, a \in \Theta$, gilt

$$\mathbb{P}(B \times \tilde{\Omega} | \sigma(\theta^{-1}(a))) = \mathbb{Q}_{\theta(\tilde{\omega})=a}(B), \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}. \quad (5.6)$$

Diese bedingte Wahrscheinlichkeit definiert die Verteilung einer Zufallsvariable S auf (Ω, \mathcal{F}) unter dem Marktmodell \mathbb{Q}_a . Dazu muss \mathbb{Q}_θ den Bedingungen einer regulären bedingten Wahrscheinlichkeit gerecht werden, welche nach *Shiryayev* [40] folgendermaßen definiert ist.

Definition 5.2.1 (vgl. *Shiryayev* [40]). Sei $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und (E, \mathcal{E}) ein Messraum. $X : (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ sei eine Zufallsvariable und $\bar{\mathcal{G}} \subset \bar{\mathcal{F}}$ eine σ -Subalgebra. Eine Funktion $\mathbb{Q}(\omega, B), \omega \in \bar{\Omega}, B \in \mathcal{E}$, heißt reguläre bedingte Verteilung von X , bedingt auf $\bar{\mathcal{G}}$, wenn

- (i) $\forall \omega \in \bar{\Omega}$ ist die Funktion $\mathbb{Q}(\omega, B)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (E, \mathcal{E})
- (ii) $\forall B \in \mathcal{E}$ ist die Funktion $\mathbb{Q}(\omega, B)$, als Funktion in ω , eine Version der bedingten Wahrscheinlichkeit $\bar{\mathbb{P}}(X \in B | \bar{\mathcal{G}})(\omega)$, zum Beispiel

$$\mathbb{Q}(\omega, B) = \bar{\mathbb{P}}(X \in B | \bar{\mathcal{G}})(\omega), f.s.$$

Sei $(E, \mathcal{E}) = (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ mit $X(\omega) = \omega$, dann spricht man von der regulären bedingten Wahrscheinlichkeit.

Lemma 5.2.1. Sei \mathbb{P} ein Maß auf $(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}})$ welches für $B \in \mathcal{F}, a \in \Theta, \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ die Gleichung 5.6 erfüllt. Dann ist \mathbb{Q}_θ eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit nach Definition 5.2.1.

Beweis. Als erstes ist zu zeigen, dass \mathbb{Q}_θ für alle $(\omega, \tilde{\omega})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Sei dazu \mathbb{Q}_θ wie in Gleichung 5.6. \mathbb{Q}_θ ist eine Funktion in $\tilde{\omega}$ und es gilt

$$\mathbb{Q}_{\theta(\tilde{\omega})}(B) \in \mathcal{Q}, \forall (\omega, \tilde{\omega}) \in \Omega \times \tilde{\Omega}, B \in \mathcal{F}$$

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

und \mathcal{Q} ist die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, \mathcal{F}) .

Für den zweiten Teil ist zu zeigen, dass \mathbb{Q}_θ , als Funktion in $(\omega, \tilde{\omega})$, einer Version der bedingten Wahrscheinlichkeit entspricht. Eine $\mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{G}}$ -messbare Funktion $\mathbb{E}(X|\mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{G}})$, $\mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}}$, heißt bedingte Erwartung einer Zufallsvariablen X , gegeben $\mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{G}}$, falls sie folgende Eigenschaft $\forall G \times \tilde{G} \in \mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{G}}$ erfüllt (vgl. [6]).

$$\int_{G \times \tilde{G}} \mathbb{E}(X|\mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{G}}) d\mathbb{P} = \int_{G \times \tilde{G}} X d\mathbb{P} \quad (5.7)$$

Sei $X(\omega, \tilde{\omega}) := \mathbf{1}_{B \times \tilde{\Omega}}(\omega, \tilde{\omega})$, $B \in \mathcal{F}$, $\mathcal{G} := \mathcal{F}$ und $\tilde{\mathcal{G}} := \sigma(\theta^{-1}(a)) \in \tilde{\mathcal{F}}$ für ein $a \in \Theta$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{G}}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B \times \tilde{\Omega}}|\mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{G}}) = \mathbb{P}(B \times \tilde{\Omega}|\mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{G}}) = \mathbb{Q}_a(B).$$

Für die linke Seite von Gleichung 5.7 gilt

$$\begin{aligned} \int_{G \times \tilde{G}} \mathbb{E}(X|\mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{G}}) d\mathbb{P} &= \int_{G \times \tilde{G}} \mathbb{Q}_a(B) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega \times \tilde{\Omega}} \mathbf{1}_G(\omega) \mathbf{1}_{\tilde{G}}(\tilde{\omega}) \mathbb{Q}_{\theta(\tilde{\omega})=a}(B) d\mathbb{P}(\omega, \tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Sei $\nu := \mathbb{P}(\Omega \times \theta^{-1}(\cdot))$ die Verteilung von θ auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ und

$$A := \{a|\theta(\tilde{\omega}) = a, \tilde{\omega} \in \tilde{G}\}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \times \tilde{\Omega}} \mathbf{1}_G(\omega) \mathbf{1}_{\tilde{G}}(\tilde{\omega}) \mathbb{Q}_{\theta(\tilde{\omega})=a}(B) d\mathbb{P}(\omega, \tilde{\omega}) \\ &= \mathbb{P}(G \times \tilde{\Omega}) \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{1}_A(a) \mathbb{Q}_a(B) d\nu. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite der Gleichung 5.7 gilt

$$\begin{aligned} \int_{G \times \tilde{G}} X d\mathbb{P} &= \int_{G \times \tilde{G}} \mathbf{1}_{B \times \tilde{\Omega}} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega \times \tilde{\Omega}} \mathbf{1}_{G \cap B}(\omega) \mathbf{1}_{\tilde{G}}(\tilde{\omega}) d\mathbb{P}(\omega, \tilde{\omega}) \\ &= \mathbb{P}(G \cap B \times \tilde{G}). \end{aligned}$$

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Die Gleichung 5.7 gilt also genau dann, wenn

$$\mathbb{P}\left((G \cap B) \times \tilde{G}\right) := \mathbb{P}\left(G \times \tilde{\Omega}\right) \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{1}_A(a) \mathbb{Q}_a(B) d\nu$$

bzw. für $G = \Omega$

$$\mathbb{P}\left(B \times \tilde{G}\right) := \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{1}_A(a) \mathbb{Q}_a(B) d\nu.$$

Damit sind die Voraussetzungen der Definition 5.2.1 erfüllt. □

\mathbb{P} misst sowohl die Preisunsicherheit, als auch die Modellunsicherheit. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\cdot | \theta(\tilde{\omega}) = a)$ gibt somit nur noch die Wahrscheinlichkeit für den Preis unter Modell a , wobei $a \in \Theta$. Das heißt aber auch, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Verlust kleiner $c \in \mathbb{R}$ ist, also $\mathbb{P}(L_t \leq c, a \in \Theta)$, dem Erwartungswert über alle möglichen Modelle entspricht.

$$\mathbb{P}(L_t \leq c, a \in \Theta) = \int_{\Theta} \mathbb{Q}_a(L_t \leq c) d\nu(a)$$

Die Verteilung von θ ist das Bildmaß $\mathbb{P}(\Omega \times \theta^{-1}(\cdot))$. Um dieses zu finden, bedienen sich *Detering* und *Packham* einem klassischen Werkzeug der Statistik - dem Akaike-Informationskriterium [1], kurz AIC (Akaike Information Criterion). Ähnlich wie beim konvexen Risikomaß der Modellunsicherheit sollen Modelle, welche die Benchmark Instruments weniger gut nachbilden, auch in der Berechnung des Modellrisikos weniger berücksichtigt werden. Beim AIC spielt aber nicht nur die Genauigkeit, sondern auch die Modellkomplexheit eine Rolle. Es ist natürlich möglich sich komplexer Modelle zu bedienen, welche die konkreten Benchmark Instruments sehr gut nachbilden. Der Nachteil daran ist, dass diese komplexen Modelle oft wenig robust sind und anschließend in der Anwendung bei sonstigen Derivaten große Fehler verursachen können. Das Akaike-Informationskriterium versucht dem entgegen zu wirken, indem es die Anzahl der Parameter als Strafterm mit aufnimmt. Je komplexer das Modell ist, desto schlechter ist der AIC-Wert. Optimal sind somit Modelle, welche mit möglichst wenig Parametern auskommen und gleichzeitig die Preise der Benchmark Instruments sehr gut wiedergeben.

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Definition 5.2.2 (Akaike Informationskriterium). Sei $k(a)$ die Anzahl der Parameter eines Modells a und l das Maximum der Likelihood-Funktion des Modells. Dann heißt

$$AIC_a = 2k(a) - 2\ln(l)$$

das Akaike-Informationskriterium.

Für unsere Verteilung ist auch die relative Likelihood-Funktion wichtig.

Definition 5.2.3 (Relative Likelihood-Funktion). Sei AIC_a wie eben und $AIC_{min} = \min_{\mathbb{Q}_a \in \mathcal{Q}} AIC_a$. Dann wird

$$R(AIC_a) = \exp\left(\frac{1}{2}(AIC_{min} - AIC_a)\right)$$

die relative Likelihood-Funktion genannt. Es gilt $R(AIC_a) \in (0, 1]$.

$R(AIC_a)$ gibt die relative Wahrscheinlichkeit an, dass Modell a den erwarteten Informationsverlust minimiert. Das Modell AIC_{min} ist das „beste“ Modell und es gilt

$$R(AIC_{min}) = \exp\left(\frac{1}{2}(AIC_{min} - AIC_{min})\right) = 1.$$

Mittels der relativen Likelihood-Funktion kann nun eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert werden.

Definition 5.2.4 (Modellverteilung). Sei \mathcal{Q} die Menge aller Modelle, welche durch $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ indexiert werden und $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Dann wird durch

$$\mathbb{Q}_{\theta=a} = \frac{R(AIC_a)}{\int_{a \in \Theta} R(AIC_a) d\nu(a)} \quad (5.8)$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert. Dabei sei ν das Lebesgue-Maß auf Θ mit $\nu(\Theta) < \infty$ bzw. falls Θ endlich - also falls nur eine endliche Anzahl an Modellen betrachtet wird - ein Zählmaß.

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Bezüglich der beiden Modelle \mathbb{Q}_1 und \mathbb{Q}_2 aus Kapitel 5.2.1, sieht die Verteilung folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{\theta=1} &= \frac{R(AIC_1)}{R(AIC_1) + R(AIC_2)} \\ \mathbb{Q}_{\theta=2} &= \frac{R(AIC_2)}{R(AIC_1) + R(AIC_2)}\end{aligned}$$

Da AIC eine Tendenz zum Overfitting aufweist, falls die Stichprobengröße n (in dieser Arbeit die Anzahl der Benchmark Instruments I) klein, oder falls die Anzahl der Parameter des Modells im Verhältnis zur Stichprobengröße groß ist, wird in der Praxis oft eine korrigierte Version des AIC verwendet. Diese ist folgendermaßen definiert:

$$AIC_a^c = AIC_a + \frac{2k(a)(k(a) + 1)}{n - k(a) - 1}$$

In dieser Arbeit wird für die weitere Analyse aber nicht die korrigierte Version sondern AIC_a verwendet. Seien C_i die am Markt beobachteten Preise der Benchmark Instruments und H_i deren Payoffs. Unter der Annahme, dass die Residuen $\epsilon_i = C_i - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_a}(H_i)$, $1 \leq i \leq I$, unabhängig und identisch normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 sind, gilt, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer mit dem minimalem Fehlerquadratschätzer übereinstimmt. Zu minimieren ist also der Mean-Squared Error

$$MSE_a = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I |C_i - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_a}(H_i)|^2.$$

Unter Annahme der Normalverteilung mit Erwartungswert μ_i , $1 \leq i \leq I$ und Varianz σ^2 hat die Wahrscheinlichkeitsdichte die Form

$$f(C_i; \mu_i, \sigma^2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(C_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Sei \mathbb{Q}_a ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß und $1 \leq i \leq I$. Dann gilt wegen

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_a}(\epsilon_i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_a}(C_i) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_a}(H_i) = 0$$

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

auch

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_a}(C_i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_a}(H_i).$$

Sei $L(C, \mu, \sigma^2)$ die Likelihood-Funktion eines Zufallsvektors $C = (C_i)_{1 \leq i \leq I}$ mit Parametern $\mu = (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_a}(H_i))_{1 \leq i \leq I}$ und σ^2 .

$$\begin{aligned} L(C, \mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^I f(C_i; \mu_i, \sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^I \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^I \frac{(C_i - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_a}(H_i))^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^I \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2} MSE_a\right). \end{aligned}$$

Der MSE_a ist nun gerade jener (verzerrte) Schätzer für die Varianz σ^2 der ϵ_i , der die Likelihood-Funktion maximiert (vgl. [21]) und somit gilt für den Maximum-Likelihood-Schätzer $l(C, \mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} l(C, \mu, \sigma^2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi MSE_a}}\right)^I \exp\left(-\frac{I}{2} \frac{MSE_a}{MSE_a}\right) \\ &= (2\pi MSE_a)^{(-I/2)} \exp\left(\frac{I}{2}\right). \end{aligned}$$

Somit lässt sich AIC_a auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} AIC_a &= 2k(a) - 2 \ln \left((2\pi MSE_a)^{(-I/2)} \exp\left(-\frac{I}{2}\right) \right) \\ &= 2k(a) + I(1 + \ln(2\pi) + \ln(MSE_a)) \end{aligned}$$

Eine wichtige Rolle spielt die Anzahl der Parameter $k(a)$. Im Black-Scholes-Modell gibt es genau einen Parameter, welcher nicht direkt beobachtet werden kann - die Volatilität. Eine Änderung des Preises im Black-Scholes-Modell erfolgt somit über die implizite Volatilität und damit hat dieses Modell auch nur einen Parameter. Einen Parameter mehr hat das von Cox [10] entwickelte

CEV-Modell (Constant elasticity of variance model), wo neben der Volatilität auch noch ein Parameter γ für die Beziehung zwischen Volatilität und Preis verwendet wird. Komplexer gestaltet sich das vor allem bei Zinsderivaten eingesetzte SABR-Modell von *Hagan et al.* [23] mit drei Parametern oder das bekannte Heston-Modell [26] mit fünf Parametern. Dies erfordert eine gute Kenntnis der einzelnen Modelle und ein genaues Abwiegen, ob der erhöhte Informationsgewinn durch komplexere Modelle den Aufwand und den Verlust der Robustheit rechtfertigt. Das Akaike Informationskriterium ist dabei nur eine Möglichkeit von vielen, um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung aus den Marktdaten zu gewinnen. Alternativen wären klarerweise AIC^c oder das Bayessche-Informationskriterium (BIC).

5.2.2 Allgemeine Risikomaße

Ein wichtiges Kriterium, welches an ein Maß für die Modellunsicherheit gestellt wird, können die Modelle aus Kapitel 4 nicht erfüllen - die Vergleichbarkeit mit in der Praxis gängigen Risikomaßen. Sowohl das Price Range Measure, als auch das konvexe Risikomaß der Modellunsicherheit lassen nur Vergleiche untereinander zu. Ein vor allem für Unternehmen wichtiger Aspekt ist aber zum Beispiel der Vergleich mit dem Marktrisiko, welches ja eng mit dem Modellrisiko verknüpft ist. Dieses wird in der Praxis üblicherweise mit Risikomaßen wie Value-at-Risk (VaR) oder Expected Shortfall (ES) gemessen.

Definition 5.2.5 (Value-at-Risk). *Sei L eine Verlustfunktion und $\alpha \in (0, 1)$ ein gegebenes Konfidenzniveau. $VaR_\alpha(L)$ ist die kleinste Zahl l , sodass*

$$\mathbb{Q}(L > l) \leq 1 - \alpha$$

gilt. Sei F_L die Verteilungsfunktion von L , dann gilt

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(L) &= \inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{Q}(L > l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R} : 1 - F_L(l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

Der VaR gibt den Schwellwert der Funktion L an, welcher mit einer Wahrscheinlichkeit von α nicht überschritten wird. Es ist das gängigste Risikomaß,

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

da es sehr einfach und schnell in der Anwendung ist. Allerdings hat es auch einige Nachteile, auf welche an dieser Stelle nicht genauer eingegangen wird. Ein Nachteil wurde bereits in Kapitel 4 erwähnt (der Value-at-Risk ist kein kohärentes Risikomaß). Ein anderer Nachteil ist, dass man zwar weiß, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von α der Verlust nicht größer als $VaR_\alpha(L)$ sein wird, aber man keinerlei Information über die Verlusthöhe selbst hat, falls $L > VaR$. Dies löst das folgende Risikomaß.

Definition 5.2.6 (Expected Shortfall). *Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L .*

$$ES_\alpha(L) := \mathbb{E}(L | L \geq VaR_\alpha(L)).$$

Der ES lässt sich mit Hilfe des VaR berechnen.

Lemma 5.2.2 (vgl. Dragoti-Cela [17]). *Seien α , L und F_L wie eben. Dann gilt*

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_p(L) dp.$$

Beweis. Siehe [17]. □

Es gibt verschiedene Möglichkeiten den Value-at-Risk und damit auch den Expected Shortfall zu berechnen. Diese Methoden werden hier kurz vorgestellt. Detailinformationen finden sich zum Beispiel in Jorion [30] oder Hull [27].

Historische Simulation Die historischen Verlustdaten werden als Stichprobe der gesamten Verlustverteilung verwendet. Das α -Quantil der Stichprobe wird dann auch als α -Quantil und somit als $VaR_\alpha(L)$ der gesamten Verteilung F_L angesehen. Dies ist natürlich problematisch, falls die Datenlage sehr dünn ist. Weiters nimmt man damit an, dass sich zukünftige Verluste entsprechend der historischen Verluste verhalten.

Varianz-Kovarianz-Methode Unter Annahme der Normalverteilung wird an Hand historischer Daten der Risikofaktoren eine analytische Funktion aufgestellt, mit welcher der $VaR_\alpha(L)$ berechnet werden kann. Die Annahme der Normalverteilung muss aber begründet sein, vor allem um mögliche Extremereignisse nicht zu unterschätzen.

Monte-Carlo Simulation Durch Beobachtung der Risikofaktoren nimmt man eine Annahme der Verteilung von L und generiert eine sehr große Anzahl an Verläufen von L . Daraus berechnet man eine empirische Verteilungsfunktion \tilde{F}_L der Verlustfunktion L um aus dieser den $VaR_\alpha(L)$ zu gewinnen.

5.2.3 Risikomaße für die Modellunsicherheit

Wie bereits in Kapitel 5.1 bezeichnet \mathbb{Q}_H wieder das Modell mit welchem Derivate bepreist und gehedgt werden. \mathbb{Q}_H genüge auch in diesem Unterkapitel der Annahme, dass es einen vollständigen und arbitragefreien Markt induziert. Die Verlustfunktion L sei definiert wie in Definition 5.1.2 und somit gilt $\mathbb{Q}_H(L_t = 0) = 1$, $t \leq T$, aber auch $\mathbb{Q}(L_t = 0) \leq 1$, $t \leq T$ für alle $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}_H$, $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Das bedeutet, dass ein Verlust unter einem anderen Modell möglich ist, weil L unter \mathbb{Q}_H definiert wird. Zuvor wurde der Verlust zu einem Maß \mathbb{Q}_M betrachtet, welches die tatsächliche Entwicklung des Marktes widerspiegeln sollte. In der Realität ist dieses Maß natürlich nicht bekannt und man kann somit auch keinen möglichen Vergleich ziehen. Deshalb wird eine Menge $\mathcal{Q}_H \subseteq \mathcal{Q}$ aus möglichst vielen Finanzmarktmodellen betrachtet und für jedes $\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}_H$ ein vorher festgelegtes Risikomaß berechnet. Das Modellrisiko berechnet sich dann als das Supremum über all diese Risikomaße. Je größer und umfangreicher also \mathcal{Q}_H , desto wahrscheinlicher ist auch, dass sich der Markt tatsächlich ähnlich einem Maß aus \mathcal{Q}_H entwickelt. Andererseits besteht auch die Gefahr, dass das Risiko überschätzt wird.

Sei $\Phi = (\phi, u)$ eine Hedgingstrategie unter \mathbb{Q}_H , sodass für einen Payoff $X \in \mathcal{C}$ gilt, dass

$$\mathbb{Q}_H \left(X_t = \sum_{i=1}^I u_{i,t} H_{i,t} + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H}(X | \mathcal{F}_0) + \int_0^t \phi_s dS_s \right) = 1$$

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Unter vollständigen Marktmodellen gibt es durch die Existenz eines eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes auch eine eindeutige dynamische Strategie (vgl. [34]). Bei nicht vollständigen Marktmodellen lässt sich zeigen, dass es eine eindeutige risikominimierende dynamische Strategie gibt, wie *Föllmer* und *Schweizer* [19] zeigen.

Durch die Hinzunahme von Benchmark Instruments lässt sich Vollständigkeit erreichen, aber es gibt nun auch mehrere Hedgingstrategien. Ein Beispiel dafür ist eine einfache europäische Option. Diese kann im Black-Scholes-Modell sowohl durch ein eindeutiges Portfolio aus risikolosem Finanzgut und dem Underlying gehedgt werden, oder, wie bereits gezeigt (siehe Kapitel 3.3), über die Call-Put-Parität statisch gehedgt werden.

Definition 5.2.7. Sei L ein Verlustprozess für einen Contingent Claim $X \in \mathcal{C}$ und einer Handelsstrategie $\Phi = (\phi, u)$ unter einem Marktmodell $\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}_H \subseteq \mathcal{Q}$ mit

$$L_t(X, \Phi) := - \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} \left(X - \sum_{i=1}^I u_i H_i \right) + \int_0^t \phi_s dS_s - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} \left(X - \sum_{i=1}^I u_i H_i \middle| \mathcal{F}_t \right) \right)$$

und

$$\Pi^X := \{ \Phi : \mathbb{Q}_H(L_t(X, \Phi) = 0) = 1, t \leq T \} \quad (5.9)$$

die Menge aller möglicher Hedgingstrategien für einen Payoff X , sodass der Verlust unter \mathbb{Q}_H gleich 0 ist, \mathbb{Q}_H -f.s..

Das rein dynamische Hedgen birgt das Risiko, dass sich der Markt nicht entsprechend dem Modell entwickelt, welches man beim Bepreisen und Hedgen annimmt, und somit die dynamische Strategie für einen Verlust sorgt. Dies kann beim statischen Hedgen nicht passieren, da in diesem Fall gar keine Modellannahmen getroffen werden. Ziel ist es, das Modellrisiko zu finden und zu quantifizieren, welches selbst bei optimaler Strategie existiert. Dies sollen auch die folgenden, von *Detering* und *Packham* [16] propagierten, Risikomaße erfüllen. Dabei bestimmen diese Maße das Risiko, welches ein Contingent Claim X birgt, wenn man ihn mittels Modell \mathbb{Q}_H hedgt.

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Definition 5.2.8. Sei $X \in \mathcal{C}$ und L und Π^X wie in Definition 5.2.7. Dann seien die folgenden Abbildungen Risikomaße für die Modellunsicherheit.

- (i) $\mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}_H}(X) = \inf_{\Phi \in \Pi^X} \mathbb{E} (L_t(X, \Phi)^2)$
- (ii) $\mu_{VaR,\alpha,t}^{\mathbb{Q}_H}(X) = \inf_{\Phi \in \Pi^X} VaR_\alpha (|L_t(X, \Phi)|)$
- (iii) $\mu_{ES,\alpha,t}^{\mathbb{Q}_H}(X) = \inf_{\Phi \in \Pi^X} ES_\alpha (|L_t(X, \Phi)|)$
- (iv) $\mu_{mVaR,\alpha,t}^{\mathbb{Q}_H}(X) = \inf_{\Phi \in \Pi^X} \max (VaR_\alpha (|L_t(X, \Phi)|), 0)$
- (v) $\mu_{mES,\alpha,t}^{\mathbb{Q}_H}(X) = \inf_{\Phi \in \Pi^X} \max (ES_\alpha (|L_t(X, \Phi)|), 0)$

Den Erwartungswert bzw. VaR und ES betrachtet man dabei jeweils unter der in Definition 5.2.4 definierten Verteilung. Die Risikomaße (ii) und (iii) machen keinen Unterschied zwischen Gewinn und Verlust, während sich (iv) und (v) auf die Verluste beschränken. Für alle Risikomaße gilt

$$L_t(X, \Phi) = 0 \Rightarrow \mu_t^{\mathbb{Q}_H}(X) = 0.$$

Detering und *Packham* geben dabei keine Empfehlung und somit obliegt es dem Anwender zu entscheiden, welches dieser Maße geeignet ist. Es kann natürlich auch Sinn machen, mehrere dieser Maße miteinander zu vergleichen, oder diese auf eigene Bedürfnisse anzupassen.

Vorgehensweise

Um nun solch ein Maß berechnen zu können, sind folgende Schritte notwendig.

- (1) Definiere eine endliche Menge $\mathcal{Q}_H \subseteq \mathcal{Q}$ potentieller Modelle und Parametermengen.
- (2) Bestimme mittels der in Definition 5.2.1 vorgestellten Methode die Verteilung von \mathcal{Q}_H .
- (3) Berechne für jedes Modell $\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}_H$ jene Hedgingstrategie $\Phi = (\phi, u)$, sodass $\mathbb{Q}_H(L_T(X, \Phi) = 0) = 1$. Abhängig von der Anzahl an Benchmark Instruments u_i , gibt es dabei mehrere mögliche Strategien.
- (4) Bestimme nun mittels der in Schritt 2 definierten Verteilung ein Risikomaß $\mu^{\mathbb{Q}_H}$ aus Definition 5.2.8 für alle Modelle $\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}_H$. Die Wahl des Risikomaßes aus Definition 5.2.8 ist dabei nicht vorgegeben und richtet sich nach dem Interesse des Anwenders.

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

(5) Berechne $\sup_{\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}_H} \mu^{\mathbb{Q}_H}$.

Das im letzten Schritt verwendete Maß gibt nun das Modellrisiko eines Payoffs $X \in \mathcal{C}$ nach *Detering* und *Packham* an.

Definition 5.2.9. Sei $\mu_t^{\mathbb{Q}_H}$ eines der in Definition 5.2.8 definierten Risikomaße für die Modellunsicherheit, wenn man nach Modell $\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}_H \subseteq \mathcal{Q}$ hedgt. Das Risiko der Modellunsicherheit μ , welches ein Payoff $X \in \mathcal{C}$ birgt, ist dann durch

$$\mu_t(X) = \sup_{\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}_H} \mu_t^{\mathbb{Q}_H}(X)$$

gegeben.

Abhängig davon, welches Risikomaß aus Definition 5.2.8 verwendet wird, erfüllt das in Definition 5.2.9 definierte Risikomaß $\mu_t(X)$ alle bzw. fast alle (abhängig von der Konvexität) von *Cont* definierten Eigenschaften eines Modellrisikomaßes (siehe Kapitel 4.1). Allerdings gibt es zwei kleine Anpassungen gegenüber der Arbeit von *Cont*. *Detering* und *Packham* sehen den Verlust, der durch das Handeln von Benchmark Instruments entsteht, also $|C_i^{ask} - C_i^{bid}|$, als „sunk costs“ (verlorene Kosten) an. Das heißt, sie betrachten diesen Verlust (oder auch Gewinn) nicht weiter, da er nicht durch Modellunsicherheit entsteht, nur einmalig auftritt und auch in weiterer Folge für keine Verluste (oder Gewinne) sorgt. Somit soll $\mu_t(X)$ folgende Axiome erfüllen.

$$\mu(H_i) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq I \tag{5.10}$$

$$\mu\left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i\right) = \mu(X), \quad \forall X \in \mathcal{C}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^I \tag{5.11}$$

$$\mu\left(X + \int_0^T \phi_s dS_s\right) = \mu(X), \quad \forall \phi \in \mathcal{S} \tag{5.12}$$

$$\mu(\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2) \leq \lambda \mu(X_1) + (1 - \lambda) \mu(X_2), \tag{5.13}$$

$$\forall X_1, X_2 \in \mathcal{C}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Lemma 5.2.3. Das in Definition 5.2.9 definierte Risikomaß $\mu_t(X)$ erfüllt die Axiome 5.10, 5.12 und 5.11. Falls $\mu_t^{\mathbb{Q}_H}(X)$ konvex ist, erfüllt $\mu_t(X)$ zusätzlich auch Axiom 5.13.

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

$\mu_{VaR,\alpha,t}^{\mathbb{Q}^H}(X)$ und somit auch $\mu_{mVaR,\alpha,t}^{\mathbb{Q}^H}(X)$ sind keine konvexen Risikomaße, weil VaR nicht konvex ist. Aus diesem Grund erfüllt auch $\mu_t(X)$ Axiom 5.13 nicht, falls es auf einem der beiden basiert.

Beweis von Gleichung 5.10: $\forall 1 \leq i \leq I \exists \Phi_i = (0, u_1, \dots, u_I)$ mit $u_i = 1$ und $u_j = 0, \forall j \neq i, j \in I$, sodass H_i statisch gehedgt werden kann. Daraus folgt für L_t nach Definition 5.2.7, $\forall t \leq T$,

$$\begin{aligned} L_t(H_i, \Phi_i) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H} \left(H_i - \sum_{j=1}^I u_j H_j \middle| \mathcal{F}_t \right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H} \left(H_i - \sum_{j=1}^I u_j H_j \right) - \int_0^t \phi_s dS_s \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H} (H_i - H_i | \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H} (H_i - H_i) = 0, \quad \mathbb{Q}\text{-quasi-sicher.} \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $\mu^{\mathbb{Q}^H}$ aus Definition 5.2.8

$$\mu_t^{\mathbb{Q}^H}(H_i) = 0$$

und somit

$$\mu_t(H_i) = \sup_{\mathbb{Q}^H \in \mathcal{Q}_H} \mu_t^{\mathbb{Q}^H}(H_i) = 0.$$

Beweis von Gleichung 5.12: Sei $\phi^Z \in \mathcal{S}$ eine zulässige Handelsstrategie. Somit gilt auch $\int_0^T \phi_s^Z dS_s \in \mathcal{C}$ weil dieses Integral \mathcal{F}_T -messbar und integrierbar ist, \mathbb{Q} -q.s.. Setzen $Z := \int_0^T \phi_s^Z dS_s$. Z ist ein Martingal unter $\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}_H$ und der Preisprozess folgendermaßen definiert:

$$Z_t^H := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} (Z | \mathcal{F}_t) = \int_0^t \phi_s^Z dS_s, \quad \mathbb{Q}_H\text{-f.s.}$$

Für den Verlustprozess L folgt mit Strategie

$$\Phi^Z = \left((\phi_s^Z)_{0 \leq s \leq T}, 0, \dots, 0 \right) \in \Pi^Z.$$

$$\begin{aligned} L_t(Z, \Phi^Z) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H} \left(\int_0^T \phi_s^Z dS_s \middle| \mathcal{F}_t \right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H} \left(\int_0^T \phi_s^Z dS_s \right) - \int_0^t \phi_s^Z dS_s \\ &= \int_0^t \phi_s^Z dS_s - \int_0^t \phi_s^Z dS_s = 0 \end{aligned}$$

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Dies gilt für alle $\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}$ - also $L_t(Z, \Phi^Z) = 0, \forall \mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}$. Sei $X \in \mathcal{C}$ beliebig und es gilt, dass L additiv in Φ ist. Dazu sei $\Phi^X \in \Pi^X$ eine Handelsstrategie für X unter $\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}$.

$$\begin{aligned}
& L_t(X + Z, \Phi^X + \Phi^Z) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} \left(X + Z - \sum_{i=1}^I (u_i^X + u_i^Z) H_i \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&- \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} \left(X + Z - \sum_{i=1}^I (u_i^X + u_i^Z) H_i \right) - \int_0^t (\phi_s^X + \phi_s^Z) dS_s \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} \left(X - \sum_{i=1}^I u_i^X H_i \middle| \mathcal{F}_t \right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} \left(X - \sum_{i=1}^I u_i^X H_i \right) - \int_0^t \phi_s^X dS_s \\
&+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} \left(Z - \sum_{i=1}^I u_i^Z H_i \middle| \mathcal{F}_t \right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} \left(Z - \sum_{i=1}^I u_i^Z H_i \right) - \int_0^t \phi_s^Z dS_s \\
&= L_t(X, \Phi^X) + L_t(Z, \Phi^Z) = L_t(X, \Phi^X)
\end{aligned}$$

Auch das gilt für alle $\mathbb{Q}_H \in \mathcal{Q}$ und für alle $\Phi^X \in \Pi^X$. Daraus folgt für $\mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}_H}(X)$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} \left((L_t(X + Z, \Phi^X + \Phi^Z))^2 \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_H} \left((L_t(X, \Phi^X))^2 \right)$$

und weil $\Phi^Z + \{\Phi^X \in \Pi^X\} \subseteq \Pi^{X+Z}$ gilt

$$\inf_{\Phi \in \Pi^{X+Z}} \mathbb{E} \left(L_t(X + Z, \Phi)^2 \right) \leq \inf_{\Phi \in \Pi^X} \mathbb{E} \left(L_t(X, \Phi)^2 \right),$$

also

$$\mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}_H}(X + Z) \leq \mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}_H}(X).$$

Nun wendet man das gleiche Argument nochmals auf $-Z$ an. Dies ist möglich, weil, wenn $\phi^Z \in \mathcal{S}$, dann ist auch $-\phi^Z \in \mathcal{S}$ und somit auch $-Z \in \mathcal{C}$. Das führt zu

$$\mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}_H}(X) = \mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}_H}((X + Z) - Z) \leq \mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}_H}(X + Z) \leq \mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}_H}(X).$$

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Somit gilt

$$\mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}^H} \left(X + \int_0^t \phi_s^Z dS_s \right) = \mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}^H} (X).$$

Für $\mu_{VaR,\alpha,t}^{\mathbb{Q}^H}(X)$, $\mu_{ES,\alpha,t}^{\mathbb{Q}^H}(X)$, $\mu_{mVaR,\alpha,t}^{\mathbb{Q}^H}(X)$ und $\mu_{mES,\alpha,t}^{\mathbb{Q}^H}(X)$ ist der Beweis äquivalent zu führen. Daraus folgt für alle $\mu^{\mathbb{Q}^H}$ aus Definition 5.2.8

$$\mu^{\mathbb{Q}^H} \left(X + \int_0^T \phi_s dS_s \right) = \mu^{\mathbb{Q}^H} (X)$$

und damit

$$\begin{aligned} \mu_t \left(X + \int_0^T \phi_s dS_s \right) &= \sup_{\mathbb{Q}^H \in \mathcal{Q}^H} \mu_t^{\mathbb{Q}^H} \left(X + \int_0^T \phi_s dS_s \right) \\ &= \sup_{\mathbb{Q}^H \in \mathcal{Q}^H} \mu_t^{\mathbb{Q}^H} (X) = \mu_t (X). \end{aligned}$$

Falls X sich überhaupt modell-unabhängig hedgen lässt, also

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \exists \phi \in \mathcal{S}, \forall \mathbb{Q}^H \in \mathcal{Q} \text{ sodass } \mathbb{Q}^H \left(X_t = x_0 + \int_0^t \phi_s dS_s \right) = 1,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} L_t(X, \Phi = ((\phi_s)_{0 \leq s \leq T}, 0, \dots, 0)) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H} \left(x_0 + \int_0^T \phi_s dS_s \middle| \mathcal{F}_t \right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H} \left(x_0 + \int_0^T \phi_s dS_s \right) - \int_0^t \phi_s dS_s \\ &= x_0 + \int_0^t \phi_s dS_s - x_0 - \int_0^t \phi_s dS_s = 0, \mathcal{Q}\text{-q.s.} \end{aligned}$$

Daraus folgt auch $\mu(X) = 0$.

Beweis von Gleichung 5.11: Sei $X \in \mathcal{C}$ und (u_1, \dots, u_I) gegeben.

$$\Phi^H = (0, u_1, \dots, u_I)$$

sei eine rein statische Handelsstrategie und es gilt

$$\Phi^X + \Phi^H \in \Pi^{X + \sum_{i=1}^I u_i H_i}, \forall \Phi^X \in \Pi^X.$$

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Wegen der Additivität von L gilt

$$\begin{aligned}
& L_t \left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i, \Phi^X + \Phi^H \right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H} \left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i - \sum_{i=1}^I u_i^X H_i - \sum_{i=1}^I u_i H_i \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^H} \left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i - \sum_{i=1}^I u_i^X H_i - \sum_{i=1}^I u_i H_i \right) - \int_0^t \phi_s^X dS_s \\
&= L_t(X, \Phi^X), \quad \forall \mathbb{Q}^H \in \mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

Äquivalent zum Beweis zu Eigenschaft 5.12 gilt

$$\inf_{\Phi \in \Pi^{X + \sum_{i=1}^I u_i H_i}} \mathbb{E} \left(L_t \left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i, \Phi^X + \Phi^H \right)^2 \right) \leq \inf_{\Phi \in \Pi^X} \mathbb{E} \left(L_t(X, \Phi^X)^2 \right).$$

Somit gilt

$$\mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}^H} \left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i \right) \leq \mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}^H}(X).$$

Nun wendet man das selbe Argument nochmals auf $(-u_1, \dots, -u_I)$ und $\Phi^{-H} = (0, -u_1, \dots, -u_I)$ an, so dass gilt

$$\begin{aligned}
\mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}^H}(X) &= \mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}^H} \left(\left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i \right) - \sum_{i=1}^I u_i H_i \right) \\
&\leq \mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}^H} \left(X + \sum_{i=1}^I u_i H_i \right) \leq \mu_{SQE,t}^{\mathbb{Q}^H}(X).
\end{aligned}$$

Äquivalent gilt dies natürlich auch für alle anderen Maße aus Definition 5.2.8.

Beweis von Gleichung 5.13: Sei $\mu^{\mathbb{Q}^H} \in \{\mu_{SQE}^{\mathbb{Q}^H}, \mu_{ES,\alpha}^{\mathbb{Q}^H}, \mu_{mES,\alpha}^{\mathbb{Q}^H}\}$ und es wird angenommen, dass $\mu^{\mathbb{Q}^H}$ nicht konvex sei, d.h. $\exists \lambda \in [0, 1], X, Y \in \mathcal{C}$, sodass gilt

$$\mu_t^{\mathbb{Q}^H}(\lambda X + (1 - \lambda) Y) > \lambda \mu_t^{\mathbb{Q}^H}(X) + (1 - \lambda) \mu_t^{\mathbb{Q}^H}(Y)$$

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

Dies entspricht für $\mu^{\mathbb{Q}_H} = \mu_{SQE}^{\mathbb{Q}_H}$ (äquivalent für $\mu_{ES,\alpha}^{\mathbb{Q}_H}$ und $\mu_{mES,\alpha}^{\mathbb{Q}_H}$)

$$\begin{aligned} & \inf_{\Phi \in \Pi^{\lambda X + (1-\lambda)Y}} \mathbb{E} \left(L_t(\lambda X + (1-\lambda)Y, \Phi)^2 \right) \\ & > \lambda \inf_{\Phi \in \Pi^X} \mathbb{E} \left(L_t(X, \Phi)^2 \right) + (1-\lambda) \inf_{\Phi \in \Pi^Y} \mathbb{E} \left(L_t(Y, \Phi)^2 \right) \end{aligned}$$

Das heißt $\exists \Phi^X \in \Pi^X$, $\Phi^Y \in \Pi^Y$, sodass

$$\begin{aligned} & \inf_{\Phi \in \Pi^{\lambda X + (1-\lambda)Y}} \mathbb{E} \left(L_t(\lambda X + (1-\lambda)Y, \Phi)^2 \right) \\ & > \lambda \mathbb{E} \left(L_t(X, \Phi^X)^2 \right) + (1-\lambda) \mathbb{E} \left(L_t(Y, \Phi^Y)^2 \right) \end{aligned}$$

Weil aber $\mu_{SQE}^{\mathbb{Q}_H}$, $\mu_{ES,\alpha}^{\mathbb{Q}_H}$ und $\mu_{mES,\alpha}^{\mathbb{Q}_H}$ alles konvexe Risikomaße sind und

$$\begin{aligned} & L_t(\lambda X + (1-\lambda)Y, \lambda \Phi^X + (1-\lambda)\Phi^Y) \\ & = \lambda L_t(X, \Phi^X) + (1-\lambda) L_t(Y, \Phi^Y) \end{aligned}$$

gilt, erhält man für $\mu_{SQE}^{\mathbb{Q}_H}$ (äquivalent für $\mu_{ES,\alpha}^{\mathbb{Q}_H}$ und $\mu_{mES,\alpha}^{\mathbb{Q}_H}$)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left(L_t(\lambda X + (1-\lambda)Y, \lambda \Phi^X + (1-\lambda)\Phi^Y) \right)^2 \right) \\ & = \mathbb{E} \left(\left(\lambda L_t(X, \Phi^X) + (1-\lambda) L_t(Y, \Phi^Y) \right)^2 \right) \\ & \leq \lambda \mathbb{E} \left(\left(L_t(X, \Phi^X) \right)^2 \right) + (1-\lambda) \mathbb{E} \left(\left(L_t(Y, \Phi^Y) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur getroffenen Annahme. □

5.3 Eigenschaften des Modellrisikomaßes von Detering und Packham

Wie in Lemma 5.2.3 bewiesen, erfüllen die von *Detering* und *Packham* definierten Risikomaße die von *Cont* [9] postulierten Eigenschaften eines Risikos für die Modellunsicherheit. Weiters erfüllen diese Maße auch die in Kapitel 2.3 geforderte Eigenschaft, dass sich AnwenderInnen zu 90% sicher sein müssen,

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

einen gewissen Verlust nicht zu übersteigen. Dies entspricht der Idee des Value-at-Risk, welcher als mögliches Risikomaß in Definition 5.2.8 verwendet werden kann.

Eine weitere Stärke ist die Einbeziehung der Hedgingstrategien der Modelle in die Bewertung. Risikomaße, welche dies nicht berücksichtigen, wie zum Beispiel das Price Range Measure in Kapitel 4.1 oder das konvexe Maß der Modellunsicherheit in Kapitel 4.2, laufen somit Gefahr, das Modellrisiko eines Contingent Claims zu unterschätzen. *Detering* und *Packham* [16] zeigen, dass sich die Hedgingstrategien von Modellen, welche der Black-Scholes-Dynamik (siehe Kapitel 3.2.1)

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu dt + \sigma(t)dB_t)$$

folgen (allerdings mit zeitabhängiger Volatilität $\sigma(t)$), zu jedem Zeitpunkt $t \in (0, T)$ unterscheiden können, auch wenn die Modelle zum Zeitpunkt T den selben Optionswert berechnen. Würden nur diese Modelle betrachtet werden, wäre das Modellrisiko in den von *Cont* definierten Maßen gleich 0, weil diese Maße zur Bewertung des Modellrisikos nur die erwartete Auszahlung zum Laufzeitende verwenden.

Beispiel Betrachtet wird das Beispiel aus 4.1.1. Bewertet wird das Modellrisiko einer Call-Option mit $S_0^1 = 525.62$, Strike $K = 525.62$ und Laufzeit von 113 Tagen. Es wird jeweils ein Heston-Modell und ein Black-Scholes-Modell an alle Call-Optionen auf das selbe Underlying mit gleicher Laufzeit und Strikes von $K = 480$ bis $K = 570$ kalibriert. Die Modellmenge $\mathcal{Q}_H \subseteq \mathcal{Q}$ wird wie im Beispiel in Kapitel 4.1.1 zufällig erzeugt, sodass deren Parameter verteilt sind wie in Abbildung 4.1. Im nächsten Schritt wird an Hand dieser Modelle nach Definition 5.2.4 eine Modellverteilung erstellt (siehe Abbildung 5.1). Diese zeigt, dass Heston-Modelle die Benchmark Instruments deutlich besser wiedergeben und somit eine höhere Modellwahrscheinlichkeit aufweisen. Das kalibrierte Heston-Modell hat eine geringere Wahrscheinlichkeit als viele der zufällig erzeugten Heston-Modelle, weil das Kalibrieren der Parameter im Heston-Modell nur ein lokales Minimum der Funktion 4.16 findet. Dadurch kann es passieren, dass zufällig generierte Parameter um die Parameter des kalibrierten Modells bessere Ergebnisse liefern. Black-Scholes-Modelle haben alle eine sehr kleine Modellwahrscheinlichkeit. Sie fließen somit auch nicht in

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

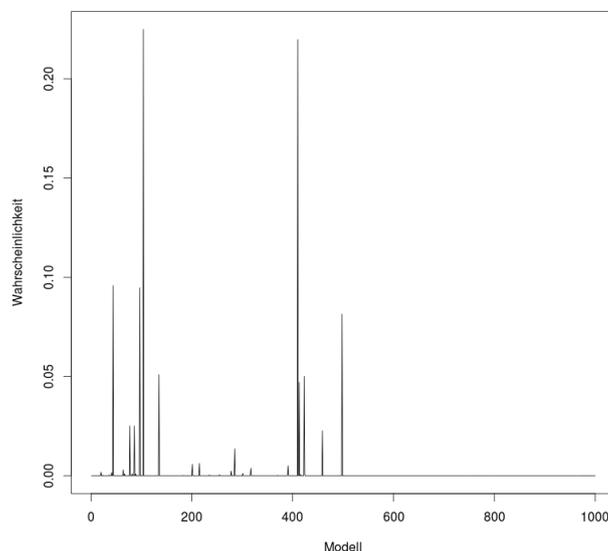


Abbildung 5.1: Modellverteilung von 500 Heston-Modellen und 500 Black-Scholes-Modellen im Beispiel in Kapitel 5.3.

das Marktmodell ein, welches durch 1000 Pfade simuliert wird. Die 1000 Pfade werden dabei entsprechend der Modellverteilung generiert. Je wahrscheinlicher ein Modell in der Modellverteilung, desto mehr Pfade werden mit dessen Parametern erzeugt. Im nächsten Schritt werden die Strategiemengen in Gleichung 5.9 bestimmt. Dazu werden alle Hedgingstrategien betrachtet, sodass der erwartete Verlust unter diesem Modell gleich null ist. Im Black-Scholes-Modell gelingt dies durch kontinuierliches hedgen des Underlyings S^1 und eines risikoloses Assets S^0 . Diese Strategie wird Delta-Hedging genannt (vgl. [34]). Da das Heston Modell nicht vollständig ist, muss zusätzlich ein Contingent Claim auf das selbe Underlying gehedgt werden. In diesem Beispiel wurde das Heston-Modell deshalb mittels eines Delta-Vega-Hedges abgesichert. Dabei wird zusätzlich zum Underlying S_0^1 ein weiterer Contingent Claim (Call-Option mit Strike $K = 530$) dynamisch gehedgt. Die Anteile der Hedginginstrumente hängen von der Ableitung des Optionspreises nach dem Underlying und der Ableitung des Optionspreises nach der stochastischen Volatilität ab.

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

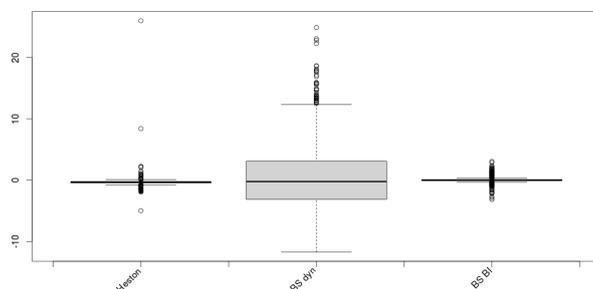


Abbildung 5.2: Verteilung der Verluste im best-kalibrierten Heston-Modell und im best-kalibrierten Black-Scholes-Modell (nach Modellverteilung). Das Heston-Modell wurde dynamisch mittels eines Delta-Vega-Hedges abgesichert. Das Black-Scholes-Modell wurde einmal mit einem Delta-Hedge abgesichert und einmal wurden zusätzlich zwei Optionen statisch gehedgt.

Eine genaue Spezifikation findet sich in *Daglish* und *Neely* [11]. Die Anteile u_1 und u_2 an zwei vorgegebenen Benchmark Instruments (Put-Option mit Strike 530 und Call-Option mit Strike 500) wurden im Black-Scholes-Modell bezüglich der Varianz der Verlustfunktion L über alle simulierten Pfade optimiert. Die Verteilung der Verlustfunktion L sieht man in Abbildung 5.2. Die Verlustfunktion L wurde jeweils zum Laufzeitende T ausgewertet. Das Hinzufügen von Benchmark Instruments reduziert die Varianz der Verluste deutlich. Weiters garantiert ein gut kalibriertes Modell nicht, dass es auch zum Hedgen das beste Modell ist. In diesem Beispiel ist das Black-Scholes-Modell mit dem statischen Hedgen von Benchmark Instruments dem Heston-Modell mit Delta-Vega-Hedge ebenbürtig, obwohl es die Preise der Benchmark Instruments deutlich schlechter wiedergibt. Dies unterstreicht die Wichtigkeit des statischen Hedgens.

Die Ergebnisse des Beispiels finden sich in Tabelle 5.1. Dabei wurden das Heston-Modell \mathbb{Q}_{H^*} und das Black-Scholes-Modell \mathbb{Q}_{BS^*} gewählt, welche in der Modellverteilung 5.2.4 die höchsten Wahrscheinlichkeiten aufweisen. Die Risikomaße aus Definition 5.2.9 berechnen sich dabei als das Minimum über alle Hedgingstrategien. Im Heston-Modell besteht diese Menge nur aus einer

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

gemischten Strategie mit Benchmark Instruments. Im Black-Scholes-Modell wurde eine rein dynamische Strategie und eine gemischte Strategie mit Benchmark Instruments betrachtet. Das Modellrisiko für die Call-Option $\mu(X)$ entspricht dem Supremum der Risikomaße aus Definition 5.2.9 über alle betrachteten Modelle. In diesem Beispiel wurden die Hedgingportfolios fünfmal täglich angepasst. Dadurch entsteht in jedem Fall ein Fehler beim Replizieren des Optionswertes, da das Portfolio auf Änderungen des Preises der Underlyings bzw. der Volatilität im Heston-Modell nicht schnell genug reagiert. Dieser Fehler ist beim diskreten Hedging aber unvermeidlich und entspricht auch der Realität.

Wie bereits in den Beispielen in den Kapiteln 4.1.1 und 4.2.1 ist auch unter den Risikomaßen von *Detering* und *Packham* das Modellrisiko für die Call-Option sehr niedrig im Verhältnis zu ihrem Preis von $\pi_0^{Call} = 32.90965$, wenn auch deutlich größer als die berechneten Maße in den Beispielen aus Kapitel 4. Dies liegt daran, dass in diesem Kapitel auch das Hedgingrisiko miteinbezogen wird. Würde man nur Black-Scholes-Modelle mit Delta-Hedging Strategien betrachten, würde der Verkäufer der Call-Option mit 5% Wahrscheinlichkeit einen Verlust von mehr als 10.87 erleiden. Durch eine schlechte Wahl der Handelsstrategien kann das Ergebnis deutlich von den Ergebnissen der Risikomaße von *Cont* abweichen. Das bedeutet allerdings nicht, dass die Maße von *Detering* und *Packham* das Modellrisiko überschätzen, sondern zeigt einmal mehr, dass Hedgen im falschen Modell große Auswirkungen auf das Modellrisiko hat und die Maße von *Cont* dieses Risiko vernachlässigen.

5 Modellunsicherheit nach Detering und Packham

	\bar{L}_T	$\mu_{SQE,T}^{\mathbb{Q}}$	$\mu_{VaR,\alpha,T}^{\mathbb{Q}}$	$\mu_{ES,\alpha,T}^{\mathbb{Q}}$	$\mu_{mVaR,\alpha,T}^{\mathbb{Q}}$	$\mu_{mES,\alpha,T}^{\mathbb{Q}}$
\mathbb{Q}_{H^*}	-0.33	0.8609	0.9483	2.053	0.00	0.989
\mathbb{Q}_{BS^*} dyn.	0.63	27.61	10.901	14.66	10.874	14.644
\mathbb{Q}_{BS^*} mit BI	0.017	0.1963	0.9598	1.5847	0.7086	1.3156
$\max_{\mathbb{Q} \in \{\mathbb{Q}_{H^*}, \mathbb{Q}_{BS^*}\}} \mu^{\mathbb{Q}}$		0.8609	0.9598	2.053	0.7086	1.3156

Tabelle 5.1: Der mittlere Verlust \bar{L} und die Risikomaße für das Beispiel in Kapitel 5.3 mit $\alpha = 0.05$. Bewertet wird das Modellrisiko einer Call-Option mit den Risikomaßen aus Definition 5.2.9. Betrachtet wurde jeweils das nach Modellverteilung 5.2.4 best-kalibrierte Heston-Modell und das best-kalibrierte Black-Scholes-Modell. Im Heston-Modell wurde nur eine Delta-Vega-Strategie betrachtet. Im Black-Scholes-Modell wurde eine rein dynamische Strategie und eine Strategie mit zwei Benchmark Instruments, welche statisch gehedgt wurden, verwendet.

6 Vergleich der Modellrisikomaße

6.1 Modellrisiko einer europäischen Call-Option

In diesem Kapitel werden die in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellten Risikomaße bezüglich europäischer Call-Optionen $X \in \mathcal{C}$ auf die Aktie von *Google* mit Strikes

$$K_1 = 480, K_2 = 500, K_3 = 520, K_4 = 540, K_5 = 560 \text{ und } K_6 = 580$$

und Laufzeiten

$$T_1 = \frac{50}{252}, T_2 = \frac{780}{252}, T_3 = \frac{113}{252} \text{ und } T_4 = \frac{169}{252}$$

verglichen. Die Modellmenge $\mathcal{Q}_H \subseteq \mathcal{Q}$ setzt sich aus 1000 Heston-Modellen \mathcal{Q}_h und 1000 Black-Scholes-Modellen \mathcal{Q}_{bs} , sodass gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_H &= \mathcal{Q}_h \cup \mathcal{Q}_{bs} \\ |\mathcal{Q}_H| &= |\mathcal{Q}_h| + |\mathcal{Q}_{bs}| = 2000.\end{aligned}$$

\mathcal{Q}_H wird dabei wie in Kapitel 4.1.1 erzeugt. Dazu werden im ersten Schritt jeweils ein Heston-Modell und ein Black-Scholes-Modell bezüglich entsprechender Benchmark Instruments kalibriert und anschließend jeweils 999 weitere Parameter entsprechend der Vorgehensweise in Kapitel 4.1.1 um die gefundenen Parameter randomisiert erzeugt. Seien $H_i \in \mathcal{C}$, $1 \leq i \leq I$ die betrachteten Benchmark Instruments bezüglich derer die Modelle kalibriert, die Modellrisikomaße aus Kapitel 4 berechnet und die Modellverteilung aus Definition 5.2.4 erzeugt wird.

Im Fall des Price Range Measures $\mu_{\mathcal{Q}}(X)$ müssen die Modelle aus \mathcal{Q}_H die Bedingung 4.10 erfüllen

$$\mu(H_i) \leq |C_i^{ask} - C_i^{bid}|, \quad \forall 1 \leq i \leq I, \quad (6.1)$$

6 Vergleich der Modellrisikomaße

wobei C_i^{ask} und C_i^{bid} die Ask- und Bid-Preise der Benchmark Instruments H_i sind. Für die Berechnung des Price Range Measures $\mu_{\mathcal{Q}}(X)$ nach Definition 4.1.2 werden nur jene Modelle verwendet, die diese Fähigkeit besitzen.

Das konvexe Risikomaß der Modellunsicherheit $\mu_*(X)$ wird wie in Kapitel 4.2.1 berechnet. Dazu wird für jedes Modell $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_H$ die Fehlerfunktion $\alpha(\mathbb{Q})$ bestimmt um anschließend $\mu_*(X)$ gemäß Definition 4.2.4 zu berechnen.

Für das in Kapitel 5 vorgestellte Risikomaß $\mu_T(X)$ wird, wie in Kapitel 5.3, an Hand der Benchmark Instruments eine Modellverteilung mittels Akaike-Kriterium erzeugt. Basierend auf dieser Verteilung werden im nächsten Schritt rund 1000 Preisprozesse des Underlyings generiert. Die exakte Anzahl der Pfade hängt dabei von der Modellverteilung ab. Für die Preisprozesse werden nur jene Modelle verwendet, deren Modellwahrscheinlichkeit größer 10^{-6} ist, weil alle anderen Modelle eine vernachlässigbare Modellwahrscheinlichkeit aufweisen. Für alle Modelle, deren Modellwahrscheinlichkeit zwischen 10^{-3} und 10^{-6} liegt, wird jeweils ein Pfad erzeugt. Deshalb werden meist etwas mehr als 1000 Pfade erzeugt. Die Preisprozesse werden 4 mal täglich ausgewertet und die Hedgingportfolios 4-mal täglich angepasst. Das Risikomaß $\mu_T(X)$ enthält in der Praxis somit einen Fehler, weil die Portfolios nicht kontinuierlich angepasst werden können. Als Hedging-Strategien kommen wie im Beispiel in Kapitel 5.3 eine Delta-Vega-Strategie im Heston-Modell und eine Delta-Hedging-Strategie im Black-Scholes-Modell zum Einsatz. Zusätzlich wird im Black-Scholes-Modell eine weitere statische Hedging-Strategie mit einer Call-Option $C(S^1, K_C, T)$ mit Strike K_C und einer Put-Option $P(S^1, K_P, T)$ mit Strike K_P auf das selbe Underlying verwendet. Es werden absichtlich Optionen mit Strikes verwendet, welche nicht dem Strike der zu bewertenden Option entsprechen, da der Algorithmus sonst entsprechend der Put-Call-Parität (siehe Kapitel 3.3) genau eine Put-Option mit dem gleichen Strike kaufen würde, um die Call-Option abzusichern. Damit würde das Modellrisiko verschwinden. Die optimalen Anteile u_1 und u_2 werden im Vorfeld bezüglich der selben Modellverteilung mittels Minimieren der Varianz der Verlustfunktion L bestimmt.

Wie in den Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 ersichtlich, beschreibt das Price Range Measure das Modellrisiko ähnlich wie die Modellrisikomaße aus Kapitel 5. Beide weisen somit eine ähnliche Struktur auf und im Vergleich von unterschiedlichen Optionen lassen sich dadurch Rückschlüsse auf das Modellrisiko einzelner Optionen ziehen. Contingent Claims mit höherem Price Range

6 Vergleich der Modellrisikomaße

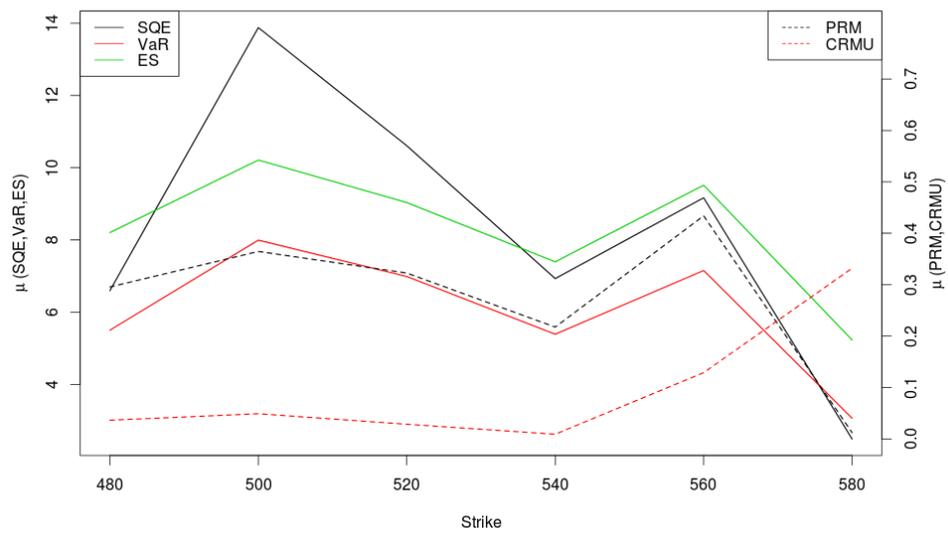


Abbildung 6.1: Modellrisiko unter unterschiedlichen Risikomaßen mit einer Laufzeit von 50 Tagen und Strikes von 480 bis 580.

6 Vergleich der Modellrisikomaße

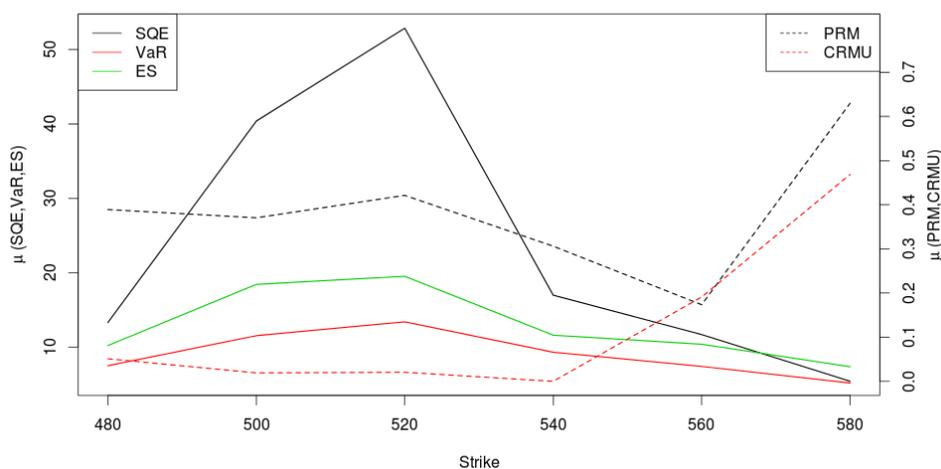


Abbildung 6.2: Modellrisiko unter unterschiedlichen Risikomaßen mit einer Laufzeit von 78 Tagen und Strikes von 480 bis 580.

Measure, weisen auch in den Risikomaßen von *Detering* und *Packham* ein höheres Modellrisiko auf. Allerdings lässt das Price Range Measure keinerlei Rückschlüsse auf die tatsächliche Höhe des Risikos zu, weil Hedgingstrategien nicht beachtet werden. Entscheidend ist dabei auch die Qualität der Daten der Benchmark Instruments und die Anzahl der beobachteten Modelle. Werden zu wenig Modelle betrachtet, kann es passieren, dass es kein Modell schafft, Preise innerhalb der Bid/Ask-Spread zu generieren. Andererseits erfüllen bei großer Bid/Ask-Spread mehr Modelle diese Eigenschaft und damit steigt auch das Price Range Measure, weil die Modelle eine breitere Spanne an erwarteten Preisen generieren. Die Qualität des Price Range Measures hängt dabei auch wesentlich von der Anzahl I der Benchmark Instruments ab, wie in den Abbildungen 6.4 und 6.5 ersichtlich wird. In 6.4 wurden im Gegensatz zu den Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 nur noch $I = 3$ Benchmark Instruments verwendet. Damit steigt die Genauigkeit und das Price Range Measure bewertet die unterschiedlichen Call-Optionen sehr ähnlich wie die Risikomaße von *Detering* und *Packham*. Im Gegensatz dazu zeigt 6.4 die Schwäche dieses Risikomaßes auf. In diesem Fall wurden $I = 11$ Benchmark Instruments zum Kalibrieren verwendet. Durch die

6 Vergleich der Modellrisikomaße

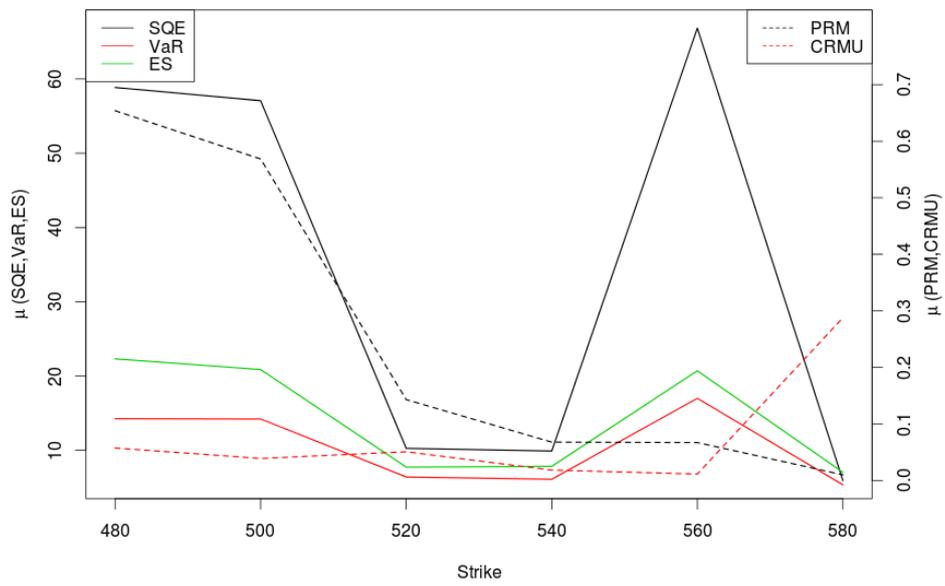


Abbildung 6.3: Modellrisiko unter unterschiedlichen Risikomaßen mit einer Laufzeit von 113 Tagen und Strikes von 480 bis 580.

6 Vergleich der Modellrisikomaße

große Anzahl an Benchmark Instruments, schafft es ab Strike K_5 keines der Modelle, Preise innerhalb der Bid/Ask-Spread wiederzugeben und $\mu_{\mathcal{Q}}(X)$ kann somit nicht berechnet werden. Im Falle von Call-Optionen ist eine derartige Anzahl an Benchmark Instruments natürlich nicht nötig. Allerdings kann dies bei der Berechnung des Modellrisikos von exotischen Optionen, welche sich durch Kombinationen von anderen Derivaten optimal hedgen lassen, schnell zum Nachteil entwickeln. Trotzdem zeigt das Price Range Measure insofern brauchbare Ergebnisse, als dass es zwar durch die fehlende Berücksichtigung des Hedgingrisikos das tatsächliche Modellrisiko unterschätzt, allerdings von der Struktur mit dem deutlich aufwändigeren Risikomaßen von *Detering* und *Packham* übereinstimmt. Dadurch kann das Price Range Measure dazu verwendet werden, das Modellrisiko eines Contingent Claims mit anderen Contingent Claims zu vergleichen, um geplante Investitionen bereits in einer frühen Phase bezüglich des Modellrisikos zu vergleichen. Dies geht durch die Nicht-Berücksichtigung der Hedgingstrategien vergleichsweise schnell.

Das konvexe Risikomaß der Modellunsicherheit gibt die Struktur in den Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 deutlich schlechter wieder und weicht bei einem Strike von 580 überhaupt von den anderen Maßen ab. Dies wurde auch für unterschiedliche Benchmark Instruments und verschiedene Werte von p in Gleichung 4.18 überprüft. Dabei wichen die Ergebnisse mit dem konvexen Maß der Modellunsicherheit von den anderen Risikomaßen ab. Im Fall von komplexeren Derivaten, wie zum Beispiel Barrier-Optionen (siehe Abschnitt 6.2), ist dieses Risikomaß deutlich besser anwendbar und liefert ähnliche Ergebnisse wie das Price Range Measure.

Die Maße von *Detering* und *Packham*, welche in Kapitel 5 vorgestellt wurden, geben das tatsächliche Modellrisiko durch die Berücksichtigung der Hedgingstrategien am genauesten wieder. Allerdings hängt die Höhe des Modellrisikos dabei auch von den verwendeten Strategien und den Benchmark Instruments ab, wie man in den Abbildungen 6.4 und 6.5 sieht. Die Struktur ist dabei ähnlich. Da $\mu_t(X)$ aus Definition 5.2.9 sich als Supremum über alle verwendeten Maße \mathbb{Q} berechnet, entsprach es in diesem Kapitel meist den Risikomaßen aus $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_h$, da die Risikomaße aus Definition 5.2.8 unter den Delta-Vega Hedging Strategien der Heston-Modelle größer waren, als die Risikomaße unter den Static Hedging Strategien in den Black-Scholes-Modellen (vgl. Kapitel 5.3).

6 Vergleich der Modellrisikomaße

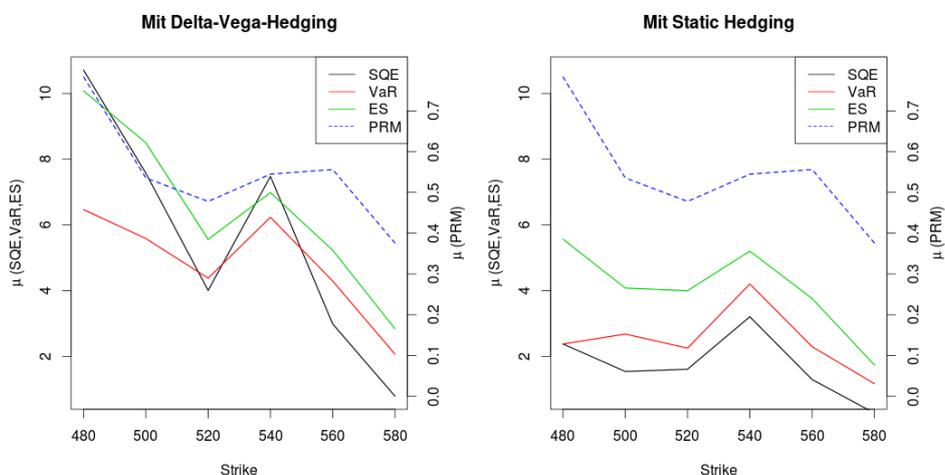


Abbildung 6.4: Vergleich der Modellrisiken unter der Delta-Vega Hedging Strategie im Heston Modell und der Static Hedging Strategie im Black-Scholes Modell mit elf Benchmark Instruments.

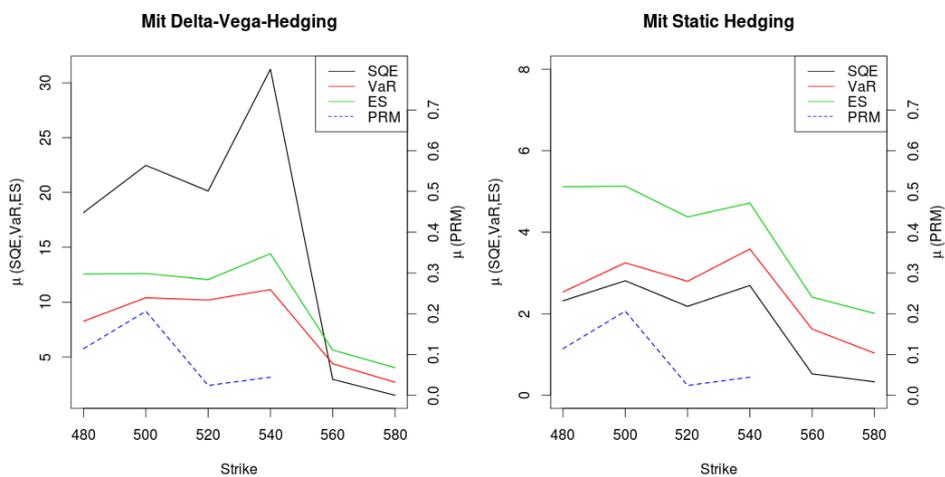


Abbildung 6.5: Vergleich der Modellrisiken unter der Delta-Vega Hedging Strategie im Heston Modell und der Static Hedging Strategie im Black-Scholes Modell mit drei Benchmark Instruments.

6.2 Modellrisiko eines Down-and-Out-Calls

In den Beispielen in Kapiteln 4.1.1, 4.2.1 und 5.3 und im Abschnitt zuvor wurden ausschließlich europäische Call-Optionen betrachtet, um die Vorgehensweise und die Eigenschaften der Risikomaße zu beschreiben. Allerdings haben europäische Optionen in liquiden Märkten kein Modellrisiko, da sie sich durch eine Put-Option mit gleichem Strike statisch hedgen lassen, wie in Kapitel 3.3 beschrieben wird. Von Bedeutung ist die Betrachtung des Modellrisikos aber vor allem bei exotischen Optionen. In diesem Abschnitt werden die vorgestellten Risikomaße bezüglich einer Down-and-Out-Call-Option mit Auszahlung $X \in \mathcal{C}$ berechnet. Dies ist eine Barrier-Option die einer europäischen Call-Option entspricht, solange das Underlying die Barriere nicht berührt oder unterschreitet. Tritt dieser Fall aber ein, endet der Vertrag und der Käufer erhält keine Auszahlung. Das besondere an dieser Option ist, dass sie sich im Gegensatz zu den meisten anderen exotischen Optionen, statisch hedgen lässt. *Carr, Ellis* und *Guptar* [7] zeigen, dass für einen Down-and-Out-Call $DOC(S^1, K, B, T)$ mit Underlying S^1 , Strike K , Barriere $B < K$ und Laufzeit T zum Zeitpunkt $t < T$

$$DOC_t(S_t^1, K, B, T) = C_t(S_t^1, K, T) - \frac{K}{B} P_t\left(S_t^1, \frac{B^2}{K}, T\right) \quad (6.2)$$

gilt. Dabei seien $C_t(S_t^1, K, T)$ und $P_t\left(S_t^1, \frac{B^2}{K}, T\right)$ eine Call- bzw. Put-Option mit Strike K bzw. $\frac{B^2}{K}$, Underlying S^1 und Laufzeit T zum Zeitpunkt $t < T$. Dies gilt allerdings nur für Modelle, die gewisse Bedingungen erfüllen (vgl. [7]). Das Heston Modell gehört nicht dazu. Deshalb wurde in diesem Kapitel ausschließlich das Black-Scholes-Modell mit unterschiedlichen Volatilitäten σ verwendet. Da sich diese Barriere-Option aus einem Call- und einer Put-Option replizieren lässt, wurden als Benchmark Instruments einmal nur Call-Optionen um den Strike-Preis K und einmal zusätzlich Put-Optionen um den Strikepreis $\frac{B^2}{K}$ eingesetzt. Der Aktienkurs S_0^1 zum Zeitpunkt 0 beträgt 525.62, als Barriere B wurde 450 gewählt und es wurden wiederum Strikes

$$K_1 = 480, K_2 = 500, K_3 = 520, K_4 = 540, K_5 = 560 \text{ und } K_6 = 580$$

verwendet. Als Laufzeit wurden 50 Tage gewählt und die Preisprozesse wurden mit 250 Zeitpunkten simuliert. In den Black-Scholes-Modellen wurde eine

6 Vergleich der Modellrisikomaße

Delta-Hedging Strategie und eine Static-Hedging Strategie gewählt, in welcher gemäß Gleichung 6.2 zusätzlich eine Call-Option $C(S^1, K, T)$ gekauft und $\frac{K}{B}$ Einheiten einer Put-Option $P\left(S^1, \frac{B^2}{K}, T\right)$ verkauft wurden.

Die Ergebnisse finden sich in den Abbildungen 6.6 und 6.7. Dabei wurden in der Abbildung 6.6 als Benchmark Instruments nur Call-Optionen mit Strikes um den Strike K des $DOC(S^1, K, B, T)$ eingesetzt. In Abbildung 6.7 wurden zusätzlich noch Put-Optionen mit Strike $\frac{B^2}{K}$ als Benchmark Instruments verwendet. Dabei sieht man, dass sich das Price Range Measure nur im ersten Fall berechnen lässt. Sowohl das Price Range Measure, als auch das konvexe Maß der Modellunsicherheit (CRMU) liefern dabei ähnliche Ergebnisse. Das konvexe Risikomaß $\mu_*(X)$ liefert allerdings auch dann noch vergleichbare Ergebnisse, wenn zusätzlich Put-Optionen als Benchmark Instruments verwendet werden. Somit ist $\mu_*(X)$ vor allem bei komplexeren Derivaten ein brauchbares Risikomaß, um einen Überblick über das Modellrisiko eines Contingent Claims zu gewinnen.

Wie bereits in Abschnitt 6.1, sind $\mu_*(X)$ und $\mu_Q(X)$ deutlich geringer als das Risikomaß $\mu(X)$ aus Kapitel 5, welche unabhängig von den Benchmark Instruments ähnliche Ergebnisse aufweisen. Weiters ist die deutliche Reduktion des Modellrisikos durch den Einsatz des statischen Hedgens sichtbar. Die Höhe des Modellrisikos bei niedrigen Strikes beim statischen Hedgen liegt daran, dass der statische Hedge den Down-and-Out-Call nur dann repliziert, wenn das Underlying die Barriere genau trifft. Gleichung 6.2 gilt also genau dann, wenn ein Zeitpunkt $0 \leq t < T$ existiert, sodass $S_t^1 = B$. Durch die Diskretisierung des Preisprozesses fällt das Underlying aber meist unter die Barriere, sodass dann gilt $S_t^1 < B$. Dies führt zu einem Verlust der statischen Hedgingstrategie.

Auch in diesem Beispiel sieht man, dass sich die in Kapitel 4 beschriebenen Maße vor allem dazu eignen, frühzeitig das Modellrisiko von Contingent Claims abzuschätzen, ohne etwaige Handelsstrategien zu bedenken. Die tatsächliche Höhe des Modellrisikos wird aber durch die verwendeten Hedgingstrategien maßgeblich beeinflusst. Deshalb ist eine große Auswahl an möglichen Hedgingstrategien zur Berechnung des Modellrisikos sinnvoll, auch wenn diese in der Praxis nicht zum Einsatz kommen.

6 Vergleich der Modellrisikomaße

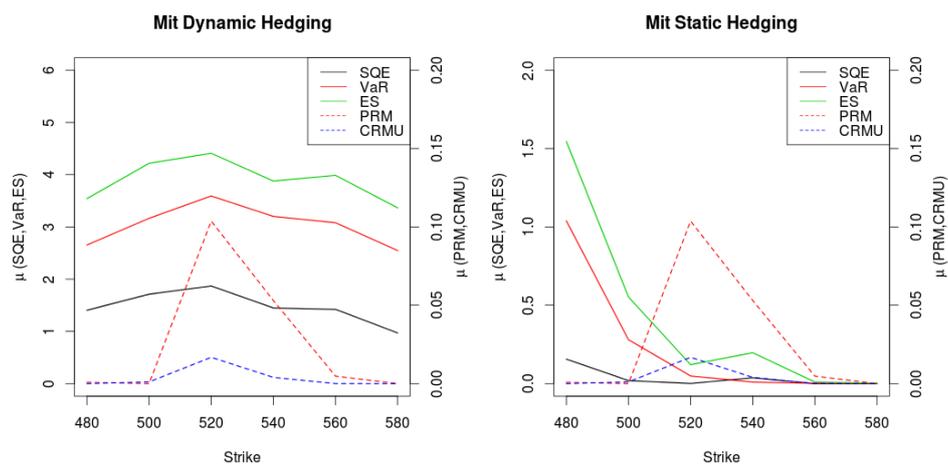


Abbildung 6.6: Modellrisiko eines Down-and-Out-Calls mit Barriere $B = 450$, $S_0^1 = 525.62$ und Strikes von 480 bis 580 bei einer Laufzeit von 50 Tagen. In der linken Grafik sieht man die Ergebnisse, wenn nur eine Delta-Hedging-Strategie verwendet wird. In der rechten Grafik wurden zusätzlich zwei Optionen statisch gehedgt, sodass sie dem Down-and-Out-Call entsprechen. Als Benchmark Instruments wurden Call-Optionen mit Strikes um den Strike K , des Down-and-Out-Calls verwendet.

6 Vergleich der Modellrisikomaße

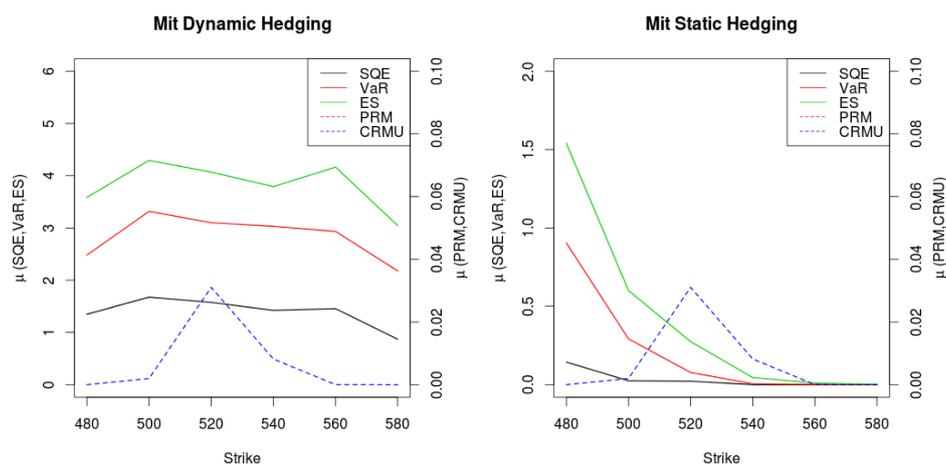


Abbildung 6.7: Modellrisiko eines Down-and-Out-Calls mit Barriere $B = 450$, $S_0^1 = 525.62$ und Strikes K von 480 bis 580 bei einer Laufzeit von 50 Tagen. In der linken Grafik sieht man die Ergebnisse, wenn nur eine Delta-Hedging-Strategie verwendet wird. In der rechten Grafik wurden zusätzlich zwei Optionen statisch gehedgt, sodass sie dem Down-and-Out-Call entsprechen. Als Benchmark Instruments wurden Call-Optionen mit Strikes um den Strike K , des Down-and-Out-Calls und Put-Optionen mit Strikes um B^2/K verwendet.

7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Risikomaße zur Bewertung von Modellrisiko von *Cont* [9] und *Detering* und *Packham* [16] vorgestellt. Während die Risikomaße von *Cont* in einer Zeit definiert wurden, in welcher das Modellrisiko nur unternehmensintern untersucht wurde, richten sich die von *Detering* und *Packham* definierten Maße bereits an die mit *Basel III* eingeführten Regularien (siehe Kapitel 2. Das Price Range Measure (Kapitel 4.1) und das konvexe Risikomaß der Modellunsicherheit (Kapitel 4.2) sind sehr einfache Maße und geben einen schnellen Überblick über das Modellrisiko eines Contingent Claims. Dabei hängt die Güte der Risikomaße stark von den betrachteten Modellen und den Benchmark Instruments ab. Das Price Range Measure ist dabei aufwendiger zu bestimmen, da zu erst ausreichend Modelle gefunden werden müssen, welche die Preise der Benchmark Instruments genügend gut widerspiegeln (siehe Kapitel 4.1.1). Dafür lässt sich mit diesem Risikomaß auch das Modellrisiko unter einem konkreten Finanzmarktmodell bestimmen. Das konvexe Maß der Modellunsicherheit zielt nur auf die Bewertung des Modellrisikos des Contingent Claims ab. Dieses lässt sich dafür schnell bestimmen, sobald die Strafterme $\alpha(Q)$, $Q \in \mathcal{Q}$, einmal bestimmt wurden. Somit dient dieses Maß vor allem dem Vergleich der Modellrisiken unterschiedlicher Contingent Claims. Beiden Risikomaßen ist gemein, dass sie das Hedgingrisiko völlig außer Acht lassen. Hedging im falschen Modell oder mit der falschen Strategie kann allerdings zu beträchtlichen Verlusten führen, wie auch das Beispiel in Kapitel 5.3 zeigt.

In Kapitel 5 wurden schließlich Risikomaße vorgestellt, welche mit den Regularien nach *Basel III* konform sind und auch das Hedgingrisiko miteinbeziehen. Dazu wird an Hand von Marktdaten eine Modellverteilung generiert, welche den realen Markt widerspiegeln soll. Dies entspricht der Idee von *Cont* nur Modelle zu verwenden, die innerhalb der Bid/Ask-Spread der Benchmark Instruments liegen. Allerdings werden bei den Risikomaßen von *Detering* und *Packham* diese Modelle entsprechend ihrer Kalibrationsgenauigkeit gewichtet.

7 Zusammenfassung

Die Modellverteilung wird mittels Akaike Informationskriterium erstellt. Dieses bewertet die Güte von Modellen nach ihrer Genauigkeit und ihrer Anzahl an Parametern. Dieses Kriterium lässt sich allerdings mit parameterfreien Modellen nicht verwenden. Auf Basis der Modellverteilung wird im nächsten Schritt eine große Anzahl an Pfaden von Preisprozessen simuliert. Abhängig von der Anzahl an Modellen ist dieser Schritt sehr rechenintensiv. Die Preisprozesse erfüllen dabei gewisse Anforderungen, welche in Kapitel 3.5 diskutiert werden. In dieser Arbeit sind die Preisprozesse ausschließlich Diffusionsprozesse. Wird aber gefordert, dass nur abzählbar viele Modelle betrachtet werden, lassen sich auch andere Preisprozesse (wie zum Beispiel Sprung-Diffusions-Prozesse) als \mathbb{Q} -Aggregatoren betrachten (siehe [15]). Für ein Modell $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ lassen sich die Risikomaße in Definition 5.2.9 als Infimum über alle Strategien, bezüglich der Verlust L_t , $0 \leq t \leq T$, \mathbb{Q} -fast sicher 0 ist, berechnen. Die Wahl der Strategien hat dabei einen großen Einfluss auf das Ergebnis der Bewertung des Modellrisikos. In dieser Arbeit wurden nur sehr triviale Strategien betrachtet (siehe Kapitel 5.3). Für eine vollständige Betrachtung ist es aber in jedem Fall notwendig, alle erdenklichen Strategien in Betracht zu ziehen. Dabei macht es einen Unterschied, ob das Modellrisiko untersucht wird oder eine Position tatsächlich gehedgt wird. Betrachtet werden bei der Bestimmung des Modellrisikos deshalb nur Strategien, die in Erwartung keinen Verlust oder Gewinn realisieren, um das Marktrisiko vom Modellrisiko zu unterscheiden. Beim tatsächlichen Hedging einer Position können andere Strategien, wie zum Beispiel risiko-minimierende Strategien, ein besseres Ergebnis erzielen. Das Modellrisiko von quadrat-risiko-minimierenden Strategien untersucht *Detering* in [15].

Entscheidend ist in jedem Fall der Einsatz von Benchmark Instruments zum statischen Hedgen. Dadurch lässt sich das Modellrisiko in manchen Fällen sogar gänzlich ausschließen, wie beispielsweise in Kapitel 3.3 gezeigt wird. In jedem Fall reduzieren sie aber das Modellrisiko, wie auch das Beispiel in Kapitel 5.3 belegt. Notwendig dafür sind liquide Märkte, die den Kauf und Verkauf von entsprechenden Benchmark Instruments jederzeit ermöglichen. Somit spiegelt das Modellrisiko in gewisser Weise auch die Liquidität eines Marktes wieder. Gibt es nämlich keine adäquaten Contingent Claims zum Hedgen, steigt das Modellrisiko. Dies ist vergleichbar mit der Eigenschaft des konvexen Risikomaßes in Kapitel 4.2. Auch in diesem Fall sinkt das Modellrisiko mit einer größeren Anzahl an handelbaren Optionen.

7 Zusammenfassung

Mit der Entscheidung das Modellrisiko nun auch auf regulatorischer Ebene vorzuschreiben, hat sich in der Entwicklung von Risikomaßen vieles getan. Erfolg und Misserfolg der Bewertung des Modellrisikos hängen mittlerweile nicht nur von der betrachteten Menge von Modelltypen ab, sondern auch von den verwendeten Handelsstrategien. Mit der Menge an verwendeten Modelltypen und Strategien steigt allerdings auch der Aufwand der Berechnung. Genaue Kenntnisse über die Eigenschaften der jeweiligen Modelle und ihrer Strategien sind unumgänglich. Dabei ist auch entscheidend, das Modellrisiko vom Marktrisiko abzugrenzen. Geschieht dies nicht, kann es bei der Rückstellung von Kapital große Auswirkungen haben, da sich etwaige Risiken in der Berechnung aufheben können.

Literatur

- [1] H. Akaike. „A new look at the statistical model identification“. In: *IEEE Transactions on automatic control* 19 (1974), S. 716–723.
- [2] Hansjoerg Albrecher und Philipp A. Mayer. „Semi-static hedging strategies for exotic options“. In: *Alternative Investments and Strategies* (2010), S. 345–373.
- [3] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber und David Heath. *Coherent Measures of Risk*. 1998.
- [4] European Banking Authority. „EBA FINAL draft Regulatory Technical Standards on prudent valuation under Article 105(14) of Regulation (EU) No 575/2013 (Capital Requirements Regulation — CRR)“. In: (März 2014). URL: <https://www.eba.europa.eu/documents/10180/642449/EBA-RTS-2014-06+RTS+on+Prudent+Valuation.pdf>.
- [5] Basel Committee on Banking Supervision (Bank for International Settlements). „Basel III: International framework for liquidity risk measurement, standards and monitoring“. In: (Dez. 2010). URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs188.pdf>.
- [6] N.H. Bingham und R. Kiesel. *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer Finance. Springer, 2004. ISBN: 9781852334581.
- [7] Peter Carr, Katrina Ellis und Vishal Gupta. „Static Hedging of Exotic Options“. In: *The Journal of Finance* 53.3 (1998), S. 1165–1190. ISSN: 1540-6261. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/0022-1082.00048>.
- [8] Michael Cavanagh u. a. *Report of JPMorgan Chase & Co. Management Task Force Regarding 2012 CIO Losses*. Jan. 2013.

Literatur

- [9] Rama Cont. „Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments“. In: *Mathematical Finance* 16.3 (Juli 2006), S. 519–547.
- [10] John Cox. *Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions*. Stanford University, 1975.
- [11] Toby Daglish und Chris Neely. „Optimal discrete hedging in the Heston Stochastic Volatility Model“. In: (Aug. 2007). URL: http://www.iscr.org.nz/f451,13225/Hedge_SV120808TD.pdf.
- [12] F. Delbaen und W. Schachermayer. *The Mathematics of Arbitrage*. Springer Finance. Physica-Verlag, 2006. ISBN: 9783540312994.
- [13] Freddy Delbaen und Walter Schachermayer. „A general version of the fundamental theorem of asset pricing.“ In: *Mathematische Annalen* 300 (1994), S. 463–520. URL: <http://eudml.org/doc/165264>.
- [14] L. Denis und C. Martini. „A Theoretical Framework for the Pricing of Contingent Claims in the Presence of Model Uncertainty“. In: *Annals of Applied Probability* 16 (2006), S. 827–852.
- [15] Nils Detering. *Measuring the model risk of quadratic risk minimizing hedging strategies with an application to energy markets*. Feb. 2014. URL: <http://ssrn.com/abstract=2400670>.
- [16] Nils Detering und Natalie Packham. *Measuring the model risk of contingent claims*. Okt. 2013. URL: <http://ssrn.com/abstract=2214913>.
- [17] Eranda Dragoti-Cela. *Vorlesungsskript: Risikotheorie und -management*. Techn. Ber. TU Graz: Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik (Math B), 2009. URL: <http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/~cela/Vorlesungen/Risk11-12/Skriptum.pdf>.
- [18] Hans Föllmer und Alexander Schied. „Convex measures of risk and trading constraints.“ In: *Finance and Stochastics* 6.4 (2002), S. 429–447. URL: <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/fs/fs6.html#FollmerS02>.
- [19] Hans Föllmer und Martin Schweizer. „Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information“. In: *Applied Stochastic Analysis (Stochastics Monographs)* 5 (1991), S. 389–414.

Literatur

- [20] H. German, N. El Karoui und J. Rochet. „Changes of Numeraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing“. In: *Journal of Applied Probability* 32 (1995), S. 443–458.
- [21] David Evan Albert Giles und Anthony Clement Rayner. „The mean squared errors of the maximum likelihood and natural-conjugate bayes regression estimators“. In: *Journal of Econometrics* 11.2–3 (1979), S. 319–334. ISSN: 0304-4076. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304407679900435>.
- [22] Sam Gustin. ‘Whale’ Fail: JPMorgan’s \$2 Billion Blunder Tied to London Trader. <http://business.time.com/2012/05/11/whale-fail-jp-morgans-2-billion-derivates-blunder-tied-to-mysterious-london-trader/>. Mai 2012.
- [23] Patrick s. Hagan, Deep Kumar, Andrew S. Lesniewski und Diana E. Woodward. „Managing smile risk“. In: *Wilmott magazine* (2002), S. 84–108.
- [24] J.Michael Harrison und Stanley R. Pliska. „Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading“. In: *Stochastic Processes and their Applications* 11.3 (1981), S. 215–260. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304414981900260>.
- [25] Cordula Heldt, Birgitta Dennerlein, Bernhard Pellens, Torben Rütters u. a. *Gabler Wirtschaftslexikon*. <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/9408/fair-value-v9.html>. Stichwort: Fair Value.
- [26] Steven L. Heston. „A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options“. In: *Review of Financial Studies* 6 (1993), S. 327–343.
- [27] John Hull. *Options, Futures and Other Derivatives*. 8. Aufl. Pearson und Prentice Hall, 2009. Kap. 21. ISBN: 9780136015864.
- [28] Aytac Ilhan und Ronnie Sircar. *Optimal Static - Dynamic Hedges for Barrier Options*. 2006. URL: <http://ssrn.com/abstract=889977>.
- [29] Kiyosi Itó. „Diffusion Processes“. In: *Encyclopedia of Statistical Sciences*. John Wiley & Sons, Inc., 2004. ISBN: 9780471667193. URL: <http://dx.doi.org/10.1002/0471667196.ess0495.pub2>.

Literatur

- [30] Philippe Jorion. „Risk management lessons from Long-Term Capital Management“. In: *European Financial Management* 6(3) (Sep. 2000), S. 277–300.
- [31] R. Karandikar. „On pathwise stochastic integration“. In: *Stochastic Processes and their Applications* 57 (1995), S. 11–18.
- [32] George Lowther. *Preservation of the Local Martingale Property*. März 2010. URL: <https://almostsure.wordpress.com/2010/03/25/preservation-of-the-local-martingale-property/>.
- [33] Philipp A. Mayer, Natalie Packham und Wolfgang M. Schmidt. „Static hedging under maturity mismatch“. In: *Finance and Stochastics* (2014). noch nicht veröffentlicht. URL: <http://ssrn.com/abstract=1971625>.
- [34] Wolfgang Müller. *Vorlesungsskript: Finanzmathematik*. Techn. Ber. TU Graz: Institut für Statistik, 2014. URL: <http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/~cela/Vorlesungen/Risk11-12/Skriptum.pdf>.
- [35] Wolfgang Müller. *Vorlesungsskript: Stochastische Analysis*. Techn. Ber. TU Graz: Institut für Statistik, 2014. URL: <http://portal.tugraz.at/portal/page/portal/Files/i5060/files/staff/mueller/StochastischeAnalysis/StochastischeAnalysis2014.pdf>.
- [36] Das Europäische Parlament und die Europäische Kommission. „Regulation (EU) No 575/2013 of the european parliament and of the council“. In: Official Journal of the European Union (Juni 2013). URL: <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2013:176:0001:0337:EN:PDF>.
- [37] Marc Romano und Nizar Touzi. „Contingent Claims and Market Completeness in a Stochastic Volatility Model“. In: *Mathematical Finance* 7.4 (1997), S. 399–412. URL: <http://EconPapers.repec.org/RePEc:bla:mathfi:v:7:y:1997:i:4:p:399-412>.
- [38] Joanne K. Rowling. *Harry Potter and the Philosopher’s Stone*. Bloomsbury, 1999, S. 211. ISBN: 0747532699.
- [39] W. Schoutens, E. Simons und J. Tistaert. „A perfect calibration! Now what?“ In: *Wilmott* (2004), S. 66–78.
- [40] Albert Nikolaevich Shiryaev. *Probability (2Nd Ed.)* Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1995. ISBN: 0387945490.

Literatur

- [41] H. Mete Soner, Nizar Touzi und Jianfeng Zhang. „Quasi-sure Stochastic Analysis through Aggregation“. In: *Electronic Journal of Probability* 16 (2011), S. 1844–1879.