

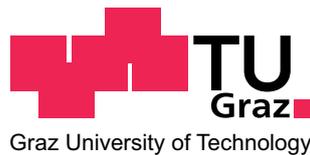
Christian Pock

*Problemstellungen bei der Verwendung
des Geoids als Transformationsfläche
zwischen ellipsoidischen und
orthometrischen Höhen*

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Ingenieur

Masterstudium Geomatics Science



Technische Universität Graz

Betreuer:

ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Norbert Kühtreiber
Institut für Navigation

Graz, September 2011

Deutsche Fassung:
Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008
Genehmigung des Senates am 1.12.2008

EIDESSTÄTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am

.....
(Unterschrift)

Englische Fassung:

STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....
date

.....
(signature)

Danksagung

Ein herzliches Dankeschön an alle die mich bei der Erstellung dieser Masterarbeit unterstützt haben. Insbesondere möchte ich mich bei meinem Betreuer Professor Norbert Kührtreiber bedanken, der stets ein offenes Ohr für meine vielen Fragen und Anliegen hatte.

Ebenfalls ein Dankeschön gilt meinen ehemaligen Arbeitskollegen an der Technischen Universität Graz sowie an der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, mit denen ich oftmals durch konstruktive Diskussion der Lösung von Problemstellungen ein gutes Stück näher kam.

Abschließend möchte ich mich noch bei meinen Eltern für die zusätzliche finanzielle Unterstützung bedanken, ohne die das Studium sicher nicht zu meistern gewesen wäre.

Zusammenfassung

Neben den Informationen die das Geoid beispielsweise über das Erdinnere liefert, ist es auch für die Höhenbestimmung von essentieller Bedeutung. Hier spielt das Geoid eine sehr wichtige Rolle als Bezugsfläche für Höhenangaben. Bei der Umrechnung von ellipsoidischen Höhen h aus GPS (Global Positioning System) Messungen in orthometrische Höhen H werden Geoidhöhen N benötigt ($h = H + N$). In der Praxis wird diese lineare Beziehung zum Beispiel durch systematische oder zufällige Fehler in den Beobachtungen, Datumsinkonsistenzen oder aber auch durch geodynamische Effekte (Post-Glacial Rebound etc.) nicht zu realisieren sein. Hier zeigt sich der Unterschied zwischen physikalischen und geometrischen Größen. Es treten somit Differenzen zwischen den rein aus Schwereanomalien bestimmten gravimetrischen Geoidhöhen und den GPS/Nivellementpunkten (GPS/Niv.) auf. Findet eine Anpassung des Geoids an die GPS/Niv. Punkte statt, so spricht man von Lagerung auf die GPS/Niv. Punkte und das Geoid wird als *Transformationsfläche* bezeichnet. Je nach Verteilung der GPS/Niv. Punkte und der Größe der Differenzen kann die dadurch entstehende *Korrekturfläche* beispielsweise mittels Polynom dritten Grades, höheren Grades oder auch mit radialen Basisfunktion (RBF) modelliert werden. Für die Modellierung der Korrekturflächen mit RBF's wurde der Greedy Algorithmus adaptiert um die minimale Anzahl und Lage der GPS/Niv. Punkte zu ermitteln. Dieser Algorithmus unterteilt die GPS/Niv. Punkte in Greedypunkte und Restpunkte. Durch Vorgabe einer selbst zu wählenden Fehlergrenze liegt der Approximationsfehler für die Restpunkte innerhalb dieser Grenze. Da nun nicht mehr alle GPS/Niv. Punkte in die Berechnung einfließen, können die Restpunkte zur Validierung der Lösung herangezogen werden.

Die Entwicklung eines Algorithmus um einzelne, auffällige GPS/Niv. Punkte detektieren zu können ist ebenfalls Bestandteil dieser Arbeit. Dazu wurde auf die Leave-One-Out Cross Validation (LOOCV) zurückgegriffen, die es ermöglicht auf Unregelmäßigkeiten und somit auf mögliche Fehler in den GPS/Niv. Punkten zu stoßen. Die Detektion wird mit verschiedenen radialen Basisfunktionen und auch mittels Polynom dritten Grades für die Korrekturfläche durchgeführt. Anschließend werden die verschiedenen Detektionsergebnisse miteinander verglichen. Zeigen sich Auffälligkeiten in den gleichen Punkten, so werden diese markiert und erfordern eine weitere Überprüfung. Ebenfalls eine wichtige Rolle für die Kollokation spielt die Gewichtung der unterschiedlichen Schwerefeldgrößen (Schwereanomalien, Lotabweichungen und Geoidhöhen) relativ zueinander. Klassisch werden Gewichte über den Ist-Soll Vergleich zwischen den gemessenen Geoidhöhen N_{gem} und der unter Annahme gleicher Genauigkeit auf den GPS/Niv. Punkten gelagerten Geoidlösung ermittelt. Ein alternativer Ansatz über die Residuen der LOOCV wurde entwickelt und mit der gängigen Methode verglichen.

Abstract

Apart from the pieces of information about the interior of the earth the geoid has a key role regarding the determination of heights. The geoid or more precisely geoid heights N are needed for converting ellipsoidal heights h into orthometric heights H and backwards ($h = H + N$). This fundamental linear relation is hard to achieve due to stochastic and systematic errors in the observations or datum inconsistencies in the combined height data or geodynamic effects like post-glacial rebound. There also is an inconsistency between geometrical and physical quantities. If the gravimetric geoid is fitted to the GPS/levelling points the geoid is called *transformation surface*. The difference between the gravimetric geoid and GPS/levelling geoid heights is called *correction surface*. This surface can be modelled with low-degree polynomials or radial base functions (RBF). For the RBF modelling of the correction surface the Greedy algorithm was adapted to find the minimum number and location of the GPS/levelling points that are necessary for the reconstruction of the surface. The chosen error margin for the algorithm has a significant influence on the number of GPS/levelling points. After finishing algorithm computation, points were divided into Greedy points and remaining points. These remaining points were not necessary for geoid computation and can be used as validation points to check the solution.

Furthermore an algorithm to validate GPS/levelling points was developed. A combined Leave-One-Out Cross Validation (LOOCV) was used to find irregularities in the GPS/levelling points. Investigations concerning relative weighting of the quantities of the gravitational field (gravity anomalies, deflections of the vertical and geoid heights) for Least Squares Collocation (LSC) have also been made. The classic approach for weighting GPS/levelling points is to consider the difference between the measured geoid heights N_{gem} and the geoid solution N which is based on the same geoid height accuracy. An alternative approach with LOOCV residuals had been developed and compared with the classic method.

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung	II
Danksagung	III
Zusammenfassung	IV
Abstract	V
1 Ziele und Aufgabenstellung	1
1.1 Arbeitsgrundlage und Problemstellung	1
1.2 Zielsetzung	2
1.3 Allgemeine Erklärungen zu dieser Arbeit	3
2 Höhensysteme	5
2.1 Ellipsoidische Höhen h	5
2.2 Orthometrische Höhen H	6
2.3 Normalhöhen H_N	7
2.4 GPS Levelling	8
2.5 Vergleich der Höhensysteme	9
3 Physikalische Geodäsie und Geoidbestimmung	11
3.1 Das Schwerfeld der Erde	11
3.1.1 Definition des Schwerepotentials	11
3.1.2 Äquipotentialflächen	15
3.2 Grundgleichung der physikalischen Geodäsie	16
3.2.1 Schwereanomalien	16
3.3 Lösen der Grundgleichung der physikalischen Geodäsie	18
3.4 Formel von Stokes	20
3.4.1 Astrogeodätische vs. gravimetrische Geoidbestimmung	21
3.5 Geoidbestimmung	22
3.5.1 Remove-Restore Technik	22
3.5.2 Indirekter Effekt	25
3.5.3 Airy-Heiskanen topographisch/isostatisch	26
4 Datenbasis für die Geoidbestimmung	28

4.1	Das österreichische Geoid	28
4.1.1	Projekt GElOnAUT	28
4.1.2	Projekt GEOID+	30
4.2	Schwerefeldgrößen in Österreich	34
4.2.1	Schwereanomalien	34
4.2.2	Lotabweichungen	35
4.2.3	GPS/Nivellementpunkte	35
5	Radiale Basisfunktionen (RBF)	37
5.1	RBF Interpolation	38
5.2	RBF Berechnung	38
5.3	Praktische Anwendung der RBF	40
5.4	Greedy Algorithmus	41
6	Cross Validation	44
6.1	Leave-One-Out Cross Validation (LOOCV)	44
6.2	K-fold Cross Validation	45
6.3	Random Subsampling Cross Validation	45
6.4	Root Mean Squares Error	46
6.5	Gewichtung der GPS/Niv. Punkte Klassisch vs. LOOCV	47
7	Least Squares Collocation (LSC)	49
7.1	Prädiktion nach kleinsten Quadraten	49
7.2	Kollokation nach kleinsten Quadraten	51
7.3	Kovarianzfunktion des Störpotentials	53
7.4	Kovarianzfortpflanzung der Schwerefeldgrößen	54
7.4.1	Tscherning-Rapp Modellkovarianz	56
7.5	Anpassen der Modellkovarianzfunktion an die empirische Kovarianzfunktion	57
7.6	Anpassen der MCF an reduzierte Schwereanomalien Δg_{red}	59
7.6.1	Berechnen der Geoidhöhen N_{koll}	62
8	Ergebnisse	63
8.1	Untersuchungen zum Verhalten radialer Basisfunktionen und des Polynoms in Bezug auf die Korrekturfläche	63
8.2	Unterschiede der Interpolationsfunktionen bei der Modellierung der Korrekturfläche	67
8.3	Auswirkung der RBF auf den Greedy Algorithmus	68
8.3.1	Adaptierter Greedy Algorithmus	69

8.4	Gewichtung von GPS/Nivellement Punkten im Kollokationsprozess	72
8.4.1	Gewichtung bei der Modellierung mit RBF	72
8.4.2	Gewichtung bei der Modellierung mit Polynom dritten Grades	74
8.4.3	Individuelle Gewichtung mittels LOOCV	77
8.5	Detektion von auffälligen GPS/Nivellement Punkten	79
8.5.1	Korrekturflächen	80
8.5.2	Durchführen der Detektion	81
8.5.3	Sensitivität der Detektion	84
8.5.4	Auswirkungen einer Punktelimination auf die Detektion	86
8.6	Geoidbestimmung mit Greedy Algorithmus	87
8.6.1	Auswirkung der gewählten Fehlergrenze auf die Greedy Punkte	87
8.6.2	Ergebnisse der Geoidbestimmung mit Greedy Algorithmus	91
8.7	Geoidbestimmung mit RBF und Polynom dritten Grades	92
8.8	Geoidbestimmung ohne Korrekturfläche	93
8.9	Gebrauchsgeoid	94
8.10	Geoidbestimmung mit nachträglicher Lagerung	96
9	Zusammenfassung und Ausblick	97
A	Anhang - Transformationsfläche berechnet mit $\pm 1\text{cm}$ Fehlergrenze	100
B	Anhang - Transformationsfläche berechnet mit $\pm 2\text{cm}$ Fehlergrenze	101
C	Anhang - Transformationsfläche berechnet mit RBF "Linear"	102
D	Anhang - Transformationsfläche berechnet mit Polynom dritten Grades	103
E	Anhang - Transformationsfläche berechnet ohne Korrekturfläche	104
F	Anhang - Transformationsfläche berechnet aus Gebrauchshöhen	105
G	Anhang - Geoid ungelagert, berechnet aus Schwereanomalien und Lotabweichungen	106
H	Anhang - Transformationsfläche nachträglich gelagert	107
	Abbildungsverzeichnis	111
	Tabellenverzeichnis	112
	Literaturverzeichnis	113

1 Ziele und Aufgabenstellung

1.1 Arbeitsgrundlage und Problemstellung

Die Basis für diese Masterarbeit bilden die an der Technischen Universität Graz im Zuge von ASAP III und ASAP VI abgewickelten Projekte zur Geoidbestimmung GEOnAUT (2006-2007) [PAI07] und GEOID+ (2009-2010) [KUH11]. Durch zusätzliche Schweredaten und GPS/Niv. Punkte, bereitgestellt vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen (BEV) sowie der Hinzunahme eines mittels GRACE/GOCE erzeugten globalen Schwerefeldmodells (GOCO051 [PAI10]) ist eine noch genauere Geoidbestimmung möglich.

Problematisch ist die Kombination von geometrischen und physikalischen Größen. So ergeben sich Unterschiede von bis zu ± 3.5 Meter zwischen dem gravimetrischen Geoid und den durch GPS/Niv. Punkten bestimmten Geoidhöhen. Diese dabei entstehende Korrekturfläche oder im englischen "*correction surface*" ist abhängig von der zuvor durchgeführten Reduktion.

Als Teil der Remove-Restore Technik (Kapitel 3.5.1) ist es üblich, diese Unterschiede bereits im Remove Schritt zu modellieren und vor der Kollokation zusätzlich zur globalen und lokalen Reduktion von den gemessenen Geoidhöhen abzuziehen. Dieser Vorgang ist dann im Restore Schritt wieder rückgängig zu machen, indem die Korrekturfläche wieder addiert wird. Somit ist das Geoid auf den GPS/Niv. Punkten gelagert und der Übergang zur Transformationsfläche vollzogen. Im Projekt GEOnAUT wurde für die Modellierung der Korrekturfläche ein Polynom dritten Grades verwendet. Diese Lösung scheint in Bezug auf die Randgebiete Österreichs nicht immer optimal zu sein, da es zu einem Ausschwingen des Polynoms in diesen Bereichen wo keine GPS/Niv. Punkte vorhanden sind kommen kann. Dadurch werden die wieder aufgesetzten Geoidhöhen am Gitter verfälscht. Hier wurden alternative Modellierungsvarianten mittels radialer Basisfunktionen (RBF) untersucht und mit dem Polynom verglichen. Ebenfalls eine Untersuchung wert war die Frage, ob die GPS/Niv. Punkte zur durchgeführten langwelligen Reduktion passen, oder ob es Geoidhöhen gibt, die Auffälligkeiten zeigen. Im Zuge dieser Untersuchung wurde ein Algorithmus zur Grobfehlersuche in den GPS/Niv. Punkten entwickelt.

Heutzutage ist es gängige Praxis alle Schwerefeldgrößen im Kollokationsprozess miteinander zu kombinieren. Somit ergeben sich heterogene Messdaten und es ist eine sinnvolle relative Gewichtung der Daten notwendig. Wie sich gezeigt hat, ist die Kombination heterogener Daten

stark von ihrer Anzahl und Verteilung abhängig [KUH02]. So ist beispielsweise der Beitrag von wenigen Lotabweichungen ξ , η bei gleichzeitiger Verwendung vieler Schwereanomalien Δg zur Kollokationslösung marginal. Dies liegt am Wesen der Kollokation. Eine passende Gewichtung zwischen diesen beiden Schwerefeldgrößen liegt bei $\Delta g = 1\text{mGal}$ sowie $\xi, \eta = 0.3$ [KUH99]. Durch die Hinzunahme von GPS/Niv. Punkten wird nun eine dritte Schwerefeldgröße in den Kollokationsprozess eingeführt. Hier zu einer passenden Gewichtung und somit Lagerung zu gelangen ist ebenfalls Teil dieser Masterarbeit. Auch Untersuchungen hinsichtlich einer Vernachlässigung der GPS/Niv. Punkte im Kollokationsprozess und einer späteren Lagerung nach dem Wiederaufsetzen der Geoidhöhen sind durchgeführt worden. Ein weiterer Punkt war die Entwicklung eines Algorithmus, der es ermöglicht, die Korrekturfläche innerhalb einer gewissen Fehlergrenze zu rekonstruieren und dadurch nicht alle GPS/Niv. Punkte zur Lagerung verwenden zu müssen.

1.2 Zielsetzung

Die Grundlage der Berechnung stellen die aus Schwereanomalien Δg bestimmten Geoidhöhen N_{koll} dar. Nach der Qualitätsprüfung des Datensatzes der 52793 Schwereanomalien in Österreich durch das BEV ist dieser in einem ersten Schritt um die Schwereanomalien aus anderen Ländern zu ergänzen. Der durch den anschließenden Ausdünnprozess auf $4 \times 4\text{km}$ entstandene Datensatz bestehend aus 13689 Schwereanomalien (Abbildung 4.5) bildet die Basis für die gravimetrischen Geoidhöhen.

Eingangs ist die Qualität der Ausgangsdaten, im speziellen jene der GPS/Niv. Punkte zu untersuchen. Für Österreich liegen derzeit 192 solcher Punkte vor. Zu diesem Zweck wurde ein Algorithmus entwickelt, der als Input die Differenz zwischen der reinen gravimetrischen Geoidlösung N_{koll} und den reduzierten Geoidhöhen N_{red} verwendet. Diese Fläche ist dieselbe, die sich am Geoid als Differenz zwischen den wieder aufgesetzten Geoidhöhen N und den gemessenen Geoidhöhen in den GPS/Niv. Punkten N_{gem} ergibt.

Da sich bei ändernden Reduktionen (lokal und/oder global) auch die Korrekturfläche verändert, kann aufgrund der gegenseitigen Abhängigkeiten zwischen den Schwerefeldgrößen nicht mit letzter Sicherheit festgestellt werden wo sich ein möglicher Fehler verbirgt. Mittels kombinierter Leave-One-Out Cross Validation (LOOCV) ist es jedoch möglich Punkte als auffällig zu detektieren. Eine Überprüfung des in Kapitel 8.5 noch genauer beschriebenen Algorithmus erfolgte anhand der im Projekt GEOnAUT (Kapitel 4.1.1) als auch im Projekt GEOID+ (Kapitel 4.1.2) verwendeten Daten.

Die Modellierung der Korrekturfläche mit alternativen Ansätzen zum Polynom dritten Grades ist ein weiterer Punkt. Hierbei wurde ein Modellierungsansatz über radiale Basisfunktionen gewählt, da diese im Gegensatz zum Polynom in den Randgebieten nicht zum Ausschwingen neigen. Auch eine bessere Interpolation von Flächen mit steileren Gradienten ist gewährleistet. Das Polynom neigt im Gegensatz zur RBF bei derartigen Flächen zu großen Interpolationsfehlern.

Ein weiterer Eckpfeiler dieser Arbeit ist die Kombination der radialen Basisfunktionen mit dem Greedy Algorithmus. Damit soll die minimale Anzahl von Punkten ermittelt werden, die notwendig ist um die Korrekturfläche noch innerhalb einer kleinen Fehlergrenze zu modellieren. Um sich mit der Interpolation bzw. Approximation mittels radialer Basisfunktionen vertraut zu machen, war zu Beginn dieses Arbeitsschritts ein intensives Literaturstudium notwendig.

1.3 Allgemeine Erklärungen zu dieser Arbeit

Sämtliche Berechnungen erfolgten mit MATLAB Version R2009b bzw. Fortran Programmen, welche mir durch die Technischen Universität Graz zur Verfügung gestellt wurden. Zur effizienteren Berechnung wurde eine im Rahmen des GEOID+ Projektes entwickelte Software genutzt, die die verschiedenen Programmiersprachen (MATLAB, Fortran) in einer gemeinsamen Benutzeroberfläche kombiniert.

Um die erzielten Ergebnisse graphisch darzustellen, wurde auf das Programm Surfer Version 8.0 der Firma Golden Software zurückgegriffen, welches ebenfalls an der Technischen Universität Graz verfügbar ist. Alle damit erstellten Graphiken wurden mittels Kriging [CRE90] im Abstand 10×10 km auf ein Raster interpoliert. Falls nötig, wurden Rasterdaten außerhalb Österreichs eliminiert, da diese nur eine Extrapolation darstellen. Das österreichische Staatsgebiet ist in allen Darstellungen anhand der schwarzen Linie zu erkennen, GPS/Niv. Punkte wurden mit roten Dreiecken gekennzeichnet. Das für die Darstellungen gewählte Konturintervall ist an der Colorbar rechts neben der Abbildung zu erkennen. Die geographischen Koordinaten φ und λ der Abbildungen beziehen sich alle auf WGS-84. Falls Abbildungen nebeneinander dargestellt sind, wurde aus Gründen der Lesbarkeit weitgehend auf eine Achsenbeschriftung verzichtet. Die Differenzplots in dieser Arbeit sind alle flächenhaft für ganz Österreich dargestellt, die daraus entstehenden Schichtenlinien sind aus den Klaffungen interpoliert.

Wenn nicht extra angegeben, beziehen sich lokale Reduktionen der Schwerefeldgrößen immer auf Airy-Heiskanen topographisch/isostatisch. Mehr Details zu dieser Reduktion sind in Kapitel 3.5.3 zu finden. Die globale Reduktion ist immer abhängig vom gewählten Grad/Ordnung der Reihenentwicklung und bezieht sich auf das beim Erstellen dieser Arbeit aktuellste Erdschwerefeldmodell GOCO01S [PAI10]. Eine nähere Beschreibung des Modells findet sich in Kapitel 4.1.2. Um nicht zusätzlich Korrelationen in die Berechnung einzuführen, wird für die globale Reduktion ein satellite-only Modell verwendet.

In den ersten Kapiteln dieser Arbeit werden die notwendigen Grundlagen der physikalischen Geodäsie erläutert, um die ab Kapitel 7 erzielten Ergebnisse besser verstehen und interpretieren zu können.

2 Höhensysteme

Dieses Kapitel soll einen Überblick über die in dieser Arbeit verwendeten Höhensysteme geben. Für weiterführende Informationen siehe *Hofmann-Wellenhof* und *Moritz* [HWM05]. Allgemein wird der Potentialunterschied eines Punktes P zum Geoid als geopotentielle Kote C bezeichnet. Somit gilt:

$$C = W_0 - W_P = -\Delta W = \int_0^P g \, dn \quad (2.1)$$

Die geopotentielle Kote hat nicht automatisch die Dimension einer Höhe, sondern sie muss durch die Schwere dividiert werden. Abhängig von der gewählten Schwere erhält man unterschiedliche Höhen. Eine Höhe ist generell definiert durch:

$$\text{Höhe} = \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Schwere}} \quad (2.2)$$

2.1 Ellipsoidische Höhen h

Um Punkte auf der Erdoberfläche darzustellen, verwendet man geodätische bzw. ellipsoidische Koordinaten φ und λ . Ellipsoidische Koordinaten und die ellipsoidische Höhe h sind immer in Zusammenhang mit einem Rotationsellipsoid zu sehen, welches die Erdfigur deutlich besser approximiert als die Kugel. Für Anwendungen wie GPS (Global Positioning System) ist das globale Datum WGS-84 etabliert worden. Hierbei fallen das Zentrum des Ellipsoids und das Erdzentrum zusammen. Um das WGS-84 Ellipsoid zu definieren sind folgende Parameter zu verwenden [HWM05].

Tabelle 2.1.: Parameter WGS-84

Parameter	Wert	Bedeutung
a	6378137 [m]	Große Halbachse des Ellipsoids
GM	$3986004.418 \cdot 10^8 [\text{m}^3 \text{s}^{-2}]$	Masse \times Grav. Konstante Erde
w	$7292115 \cdot 10^{-11} [\text{rad s}^{-1}]$	Winkelgeschwindigkeit der Erde
f	0.0033528107	Abplattung des Ellipsoids

Die ellipsoidische Höhe h ist, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, definiert als Höhe über dem Referenzellipsoid. Da die ellipsoidische Höhe eine rein geometrisch definierte Größe ist, wird sie nicht vom Erdschwerefeld beeinflusst.

2.2 Orthometrische Höhen H

Die orthometrische Höhe H ist definiert als Höhe über dem Geoid, gemessen entlang der Lotlinie. Folglich kann diese als Länge von einem Punkt P entlang der gekrümmten Lotlinie bis zum Geoid interpretiert werden. Dies ist anschaulich in Abbildung 2.1 dargestellt. Berechnet wird die orthometrische Höhe über

$$H = \frac{C}{\bar{g}} \quad (2.3)$$

mit $C = W_0 - W$ als geopotentieller Kote des Punktes P und $\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g \, dH$ der mittleren Schwere entlang der gekrümmten Lotlinie. Da die Schwere im Erdinneren nicht gemessen werden kann, ist die exakte Bestimmung von \bar{g} nicht möglich. Die mittlere Schwere ergibt sich aus einer hypothetischen Annahme über die Dichteverteilung im Erdinneren.

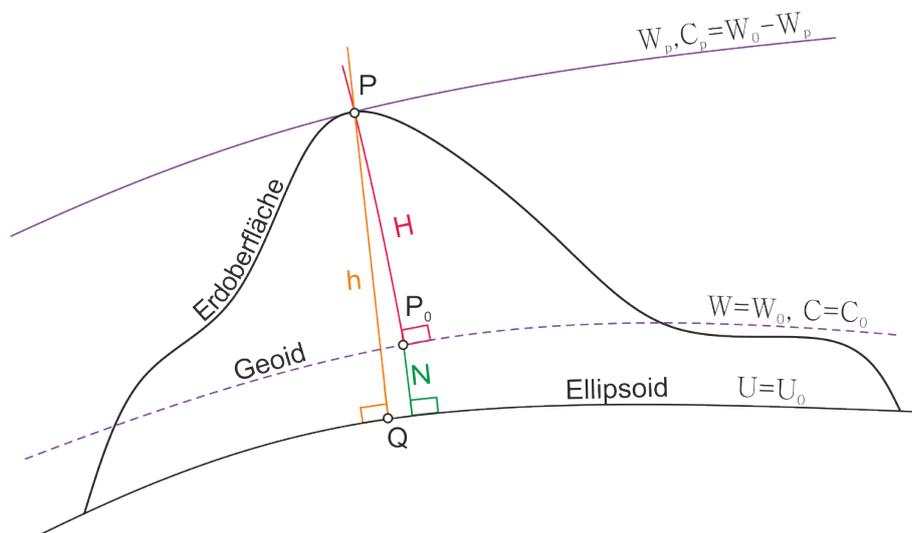


Abbildung 2.1.: Definition der ellipsoidischen Höhe h , der orthometrischen Höhe H und der Geoidhöhe N

Für die Bestimmung der mittleren Schwere \bar{g} können unter der Annahme einer linearen Änderung der Schwere entlang der Lotlinie verschiedene Berechnungsmethoden durchgeführt werden [HWM05]. Diese Methoden sind:

1. Prey-Poincare: $\bar{g} = g + 0.0424H$, (g [Gal], H [km])
2. Mader: $\bar{g} = \frac{1}{2}(g + g_0)$, (g, g_0 [Gal])
3. Helmert: $\bar{g} = g + (0.3086 - 0.08382\sigma)\frac{H}{2}$, (g [Gal], σ [g/cm³], H [km])

2.3 Normalhöhen H_N

Die Normalhöhe H_N ist die Länge der gekrümmten Lotlinie ausgehend von einem Punkt P bis zum Quasigeoid. Definiert wurde diese Höhe von *M.S. Molodenski*, einem russischen Mathematiker. Im Gegensatz zur orthometrischen Höhe H ist sie hypothesenfrei zu bestimmen. Grund dafür ist die mittlere Normalschwere $\bar{\gamma}$, welche für jedes gewählte Normalschwerefeld exakt berechnet werden kann

$$H_N = \frac{C}{\bar{\gamma}} . \quad (2.4)$$

Mit der geopotentiellen Kote C definiert als Potentialunterschied $U_0 - U = W_0 - W$ im Punkt P und $\bar{\gamma} = \frac{1}{H_N} \int_0^{H_N} \gamma dH_N$ der Normalschwere entlang der gekrümmten Lotlinie. Der Unterschied zwischen der ellipsoidischen Höhe h und der Normalhöhe H_N wird in der physikalischen Geodäsie als Höhenanomalie ζ bezeichnet. Diese ist definiert als

$$\zeta = h - H_N . \quad (2.5)$$

Der Zusammenhang zwischen Normalhöhe und orthometrischer Höhe ist durch Gleichung 2.6 gegeben

$$N - \zeta = H_N - H . \quad (2.6)$$

Wird die Höhenanomalie vom Referenzellipsoid nach oben aufgetragen, ergibt sich das Quasigeoid, welches auch die Bezugsfläche für die Normalhöhen darstellt. Das Quasigeoid und das

Geoid unterscheiden sich nur geringfügig. Das Quasigeoid entspricht allgemein einem "geglätteten Geoid". Abgetragen von einem Punkt auf der Erdoberfläche ergibt sich das Telluroid, welches von *M. Hirvonen* 1960 definiert wurde. Das Telluroid ist im Gegensatz zum Geoid keine Äquipotentialfläche. In Abbildung 2.2 ist dies graphisch aufbereitet.

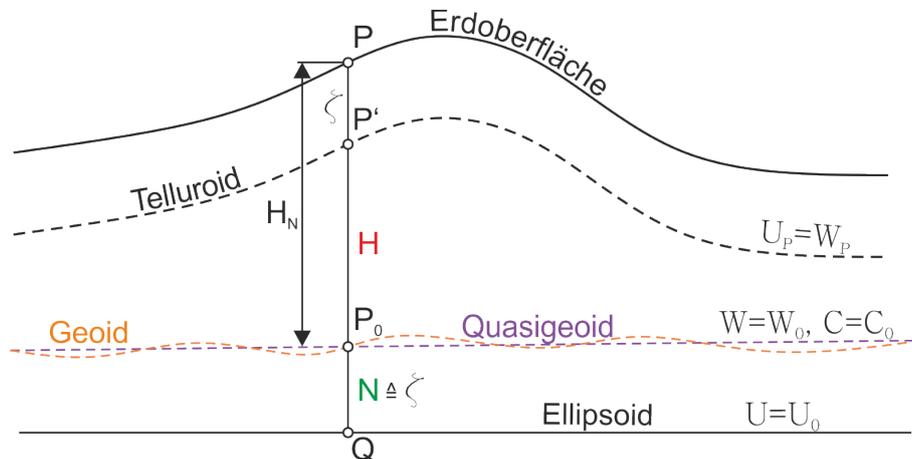


Abbildung 2.2.: Definition der Normalhöhe

2.4 GPS Levelling

Unter GPS Levelling versteht man die Kombination von geometrischen und physikalischen Größen. Während sich die GPS Messung auf die geometrisch bestimmte ellipsoidische Höhe h bezieht, stammt die orthometrische Höhe H aus einer Kombination von Präzisionsnivellement und Schweremessung. Somit kann die sich ergebende Geoidhöhe N direkt durch

$$N = h - H \quad (2.7)$$

ermittelt werden. Das Messprinzip ist in Abbildung 2.3 dargestellt. In Österreich liegen derzeit 192 GPS/Levelling bzw. GPS/Niv. Punkte vor. (siehe Kapitel 4). Aufgrund der linearen Beziehung aus Gleichung 2.7 ist es theoretisch möglich das relativ aufwendige Nivellement in Kombination mit Schweremessungen durch GPS Messungen zu ersetzen. Hierbei gilt es aber auf Datumsinkonsistenzen bzw. systematische Fehler oder Messfehler zu achten. Durch die dabei entstehende Korrekturfläche können alle diese Effekte modelliert werden.

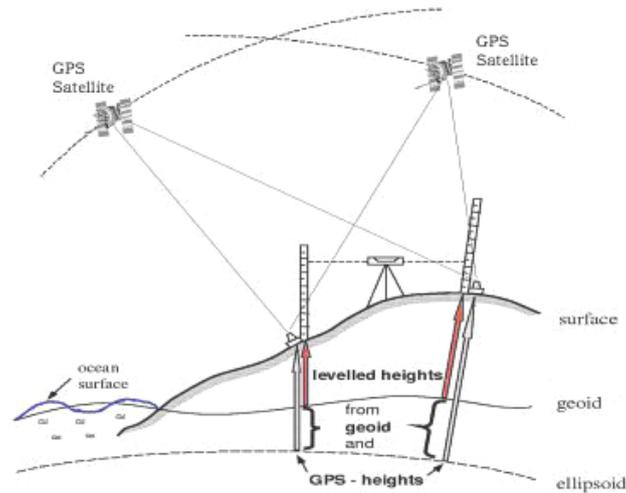


Abbildung 2.3.: Messprinzip GPS Levelling [TOR03]

2.5 Vergleich der Höhensysteme

In der folgenden Tabelle 2.2 findet sich eine Charakterisierung der in diesem Kapitel angeführten Höhensysteme.

Tabelle 2.2.: Charakterisierung der Höhensysteme [MAS02]

Name	Geop. Kote	Orthometrische Höhe	Ellipsoidische Höhe	Normalhöhe
<i>Kürzel</i>	C	H	h	H_N
<i>Einheit</i>	$[m^2/s^2]$	m	m	m
<i>Hypothesenfrei</i>	ja	nein	ja	ja
<i>Bezugsfläche</i>	Geoid	Geoid	Referenzellipsoid	Quasigeoid
<i>Bestimmung</i>	Nivellement	Nivellement	GPS	Nivellement
<i>Schweremessung</i>	ja	ja	nein	ja

Der Vollständigkeit halber müssen auch noch weitere in Österreich existierende Höhensysteme angeführt werden. Diese sind:

- Dynamische Höhe
- Normalorthometrische Höhe
- Gebrauchshöhe

Die dynamischen Höhen werden oft bei Wasserbauprojekten verwendet, da sich das Wasser nach dem Potential richtet. Diese Höhe hat zwar die Dimension [m] jedoch nicht den Charakter einer Höhe, da man unter Höhe immer den Abstand von einer Bezugsfläche versteht. Das bedeutet, jede dynamische Höhe entspricht einer Äquipotentialfläche (siehe Kapitel 3.1.2) und es ist sichergestellt, dass das Wasser nicht zwischen Punkten gleicher dynamischer Höhe fließen kann.

Normalorthometrische Höhen verdanken ihre Existenz dem Umstand, dass früher Schwere-messungen äußerst aufwendig gewesen sind und es wesentlich komfortabler war, statt der gemessenen Schwere die theoretische Schwere γ zu verwenden. Diese ist nur abhängig von der geographischen Breite φ und dem Bezugsellipsoid. Das österreichische Höhenbezugssystem vor dem zweiten Weltkrieg basierte ursprünglich auf normalorthometrischen Höhen bezogen auf den mittleren Pegelstand der Adria im Jahr 1875 am Molo Sartorio in Triest (Italien). Nach dem Krieg war der Höhenbolzen am Bahnhofsgebäude Bruck/Fusch (Salzburg) Ausgangspunkt für das Nivellement. Diese dabei neu entstandenen Höhennetze aus orthometrischen Höhen werden auch als Gebrauchshöhen bezeichnet und bilden die Höhengrundlage in der Katastervermessung.

3 Physikalische Geodäsie und Geoidbestimmung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der physikalischen Geodäsie aufbereitet auf denen diese Arbeit basiert. Auch einige Begriffe werden erklärt und näher beschrieben. Die verwendeten Formeln sind dem Buch *Physical Geodesy* von *Helmut Moritz* und *Bernhard Hofmann Wellenhof* entnommen.

3.1 Das Schwerfeld der Erde

Auf einen Körper, der sich auf der Erde befindet wirken Kräfte. Diese Kräfte sind einerseits die Zentrifugal- oder Fliehkraft, die aus der Erdrotation resultiert und andererseits die Gravitationskraft. Die Gravitationskraft wirkt durch die Erde selbst sowie durch die uns umgebenden Gestirne auf den Körper. Im Gravitationsfeld eines Himmelskörpers erfährt ein Körper also die Schwerebeschleunigung \vec{g} . Die Schwerebeschleunigung \vec{g} setzt sich aus der Summe von Gravitationsbeschleunigung \vec{g}_{grav} und Zentrifugalbeschleunigung \vec{g}_{zen} zusammen

$$\vec{g} = \vec{g}_{grav} + \vec{g}_{zen} . \quad (3.1)$$

Die Auswirkung der Zentrifugalbeschleunigung ist abhängig vom Abstand zur Erdrotationsachse. Da diese Beschleunigung immer nach außen wirkt, also weg von der Erdrotationsachse, ist sie am Äquator am größten und an den Polen wird sie zu Null. Gravitationsbeschleunigung und Zentrifugalbeschleunigung wirken am Äquator genau entgegengesetzt und daraus folgt, dass die Schwere \vec{g} am Pol am größten und am Äquator am geringsten ist. Die Schwere der Erde ist also nicht konstant, sondern abhängig von der Position auf der Erde sowie von den durch die Gravitationskraft entstehenden Abhängigkeiten wie der Dichteverteilung im Erdinneren.

3.1.1 Definition des Schwerepotentials

Das Schwerepotential W setzt sich aus dem Gravitationspotential V und dem Zentrifugalpotential Φ zusammen. Dieser Zusammenhang ergibt sich, wie schon erwähnt, durch die zugehörigen Beschleunigungen

$$W = V + \Phi . \quad (3.2)$$

Das Potential ist definiert als die Arbeit, die notwendig ist um die Masseneinheit vom Punkt P ins Unendliche zu transportieren [HWB06]. Erfolgt eine Bewegung entlang einer Potentialfläche, so ist keine Energie notwendig um von Punkt A nach Punkt B zu gelangen. Beim Schwerepotential handelt es sich um eine Äquipotentialfläche (Kapitel 3.1.2), deren Punkte allesamt das gleiche, konstante Potential aufweisen. Die zuvor beschriebene Schwerebeschleunigung \vec{g} kann als Gradient des Schwerepotentials W angesehen werden. In kartesischen Koordinaten bedeutet dies:

$$\vec{g} = \text{grad } W = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Das Gravitationspotential V kann als skalare Funktion dargestellt werden. Für eine Punktmasse gilt

$$V = \frac{G m}{l} \quad (3.4)$$

wobei G die Gravitationskonstante und m die Masse des anziehenden Punktes ist. Mit l wird die Distanz zur Punktmasse bezeichnet. Wird der Gradient des Gravitationspotentials V gebildet, folgen daraus die Komponenten der Gravitationskraft \vec{F} mit

$$\vec{F} = \text{grad } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} . \quad (3.5)$$

Die bisherige Betrachtungsweise bezieht sich nur auf einzelne Punktmassen. Im Allgemeinen sind jedoch immer mehrere Punktmassen zu betrachten. Das Gravitationspotential kann somit auch über die Summe der Einzeleinflüsse der Massen gebildet werden. Gleichung 3.4 wird zu

$$V = \frac{G m_1}{l_1} + \frac{G m_2}{l_2} + \dots + \frac{G m_n}{l_n} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} . \quad (3.6)$$

Sind diese Punktmassen gleichmäßig kontinuierlich über die Erde verteilt, mit einer Dichte ρ als Quotient von Massenelement dm zu Volumenelement dv

$$\rho = \frac{dm}{dv} \quad (3.7)$$

kann Gleichung 3.6 als sogenanntes Newton Integral, also ein Integral über das gesamte Erdvolumen angeschrieben werden. Durch Umformen von Gleichung 3.7 nach dm und Ersetzen von Summe durch Integral in Gleichung 3.6 ($n \rightarrow \infty$) folgt also

$$V = G \iiint_{Erde} \frac{dm}{l} = G \iiint_{Erde} \frac{\rho}{l} dv \quad (3.8)$$

mit l als Distanz zwischen dem Aufpunkt P und dem Massenelement $dm = \rho dv$. Die zweiten Ableitungen des Potentials sind abhängig von der Lage des Aufpunktes. Für einen Punkt im Außenraum ergibt sich eine verschwindende Dichte ($\rho = 0$) und infolgedessen erfüllt das Gravitationspotential V die Laplace Gleichung, welche eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Funktionen, die diese Gleichung erfüllen und somit Lösungen der Differentialgleichung sind, werden als harmonische Funktionen bezeichnet. Die Laplace Gleichung ist zwei mal stetig differenzierbar, das bedeutet, es treten keine Unstetigkeitsstellen in den Ableitungen auf

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (3.9)$$

Für einen Punkt im Innenraum ist die Dichte ρ nicht verschwindend ($\rho \neq 0$). Aufgrund von Dichtesprüngen im Erdinneren sowie am Übergang von Innen- zu Außenraum gilt die Laplace Gleichung nicht. Für den Innenraum gilt die *Poisson Gleichung*:

$$\Delta V = -4\pi G\rho \quad (3.10)$$

Aufgrund der harmonischen Eigenschaft des Potentials im Außenraum ist es möglich das Gravitationspotential V in Kugelfunktionen zu entwickeln. Um die Laplace Gleichung einfacher lösen zu können, ist es üblich von kartesischen Koordinaten (x, y, z) auf sphärische Kugelkoordinaten (r, ϑ, λ) überzugehen. Es folgt die Laplace Gleichung, dargestellt in Kugelkoordinaten:

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (3.11)$$

Als Lösung der Laplace Gleichung ergibt sich das Gravitationspotential in Kugelfunktionsentwicklung. Ein Übergang auf Kugelfunktionsreihen entspricht einer Darstellung im Spektralbereich

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \vartheta) [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)] \right) . \quad (3.12)$$

Das Produkt aus Gravitationskonstante mal Erdmasse wird mit GM bezeichnet. Mit r wird der Abstand eines Punktes zum Erdmittelpunkt angegeben. Die Konstante a gibt die große Halbachse des Referenzellipsoids an. Mit $P_{nm}(\cos \vartheta)$ werden die assoziierenden Legendre'schen Funktionen bezeichnet. Die Bezeichnung für Schwerefeldkoeffizienten ist C_{nm} und S_{nm} . Grad und Ordnung der Reihenentwicklung werden mit n bzw. m benannt, wobei sich das Gravitationspotential mit zunehmenden Entwicklungsgrad immer besser darstellen lässt.

Die zweite Komponente des Schwerepotentials W ist das Zentrifugalpotential Φ . Dieses Potential ist definiert als

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) . \quad (3.13)$$

Analog zum Gravitationspotential ergeben sich die einzelnen Komponenten aus der ersten Ableitung des Zentrifugalpotentials Φ mit

$$\vec{f} = \text{grad } \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} . \quad (3.14)$$

Die Laplace Gleichung für den Außenraum ist nicht harmonisch, es gilt:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2\omega^2 \quad (3.15)$$

Aus der Kombination mit Gleichung 3.10 wird die sogenannte *allgemeine Poisson Gleichung* für das Schwerepotential im Innenraum gewonnen. Diese ist definiert als

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2 . \quad (3.16)$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Erde wird mit ω bezeichnet, x, y und z stehen für die kartesischen Koordinaten. Das Zentrifugalpotential ist im Gegensatz zum Gravitationspotential analytisch relativ einfach zu beschreiben.

3.1.2 Äquipotentialflächen

Diese Flächen zeichnen sich dadurch aus, dass jeder Punkt der Fläche das gleiche Potential aufweist. Weitere Bezeichnungen sind Geopotential- oder Niveauflächen. Äquipotentialflächen verlaufen nicht parallel zueinander, wodurch sich Lotlinien, die immer senkrecht auf die Äquipotentialflächen stehen, leicht krümmen. Die Länge entlang einer gekrümmten Lotlinie bis zum Geoid wird als orthometrische Höhe H bezeichnet (siehe Kapitel 2.2). In geodätischer Betrachtungsweise zeigt der Schwerevektor \vec{g} in einem Punkt P in Richtung der Tangente an die Lotlinie im selben Punkt.

$$W(x, y, z) = konst. \quad (3.17)$$

Der Zusammenhang von Äquipotentialflächen und Lotlinien sowie dem Schwerevektor \vec{g} ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

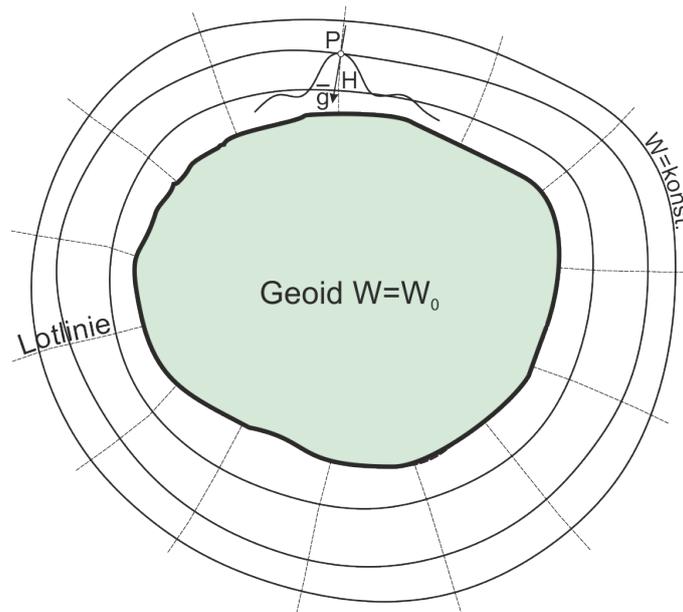


Abbildung 3.1.: Äquipotentialflächen und Lotlinien

Das Geoid ist eine ausgezeichnete Äquipotentialfläche mit dem Potential $W = W_0$. In guter Näherung fällt das Geoid auf den Ozeanen mit der mittleren Meeresoberfläche (über die Gezeitenschwankungen gemittelt) zusammen. Für das Festland muss man sich das Geoid als gedankliche Fortsetzung der Meeresoberfläche unter den Kontinenten vorstellen.

3.2 Grundgleichung der physikalischen Geodäsie

Zwischen dem Schwerepotential W und dem Normalpotential U , welches als Bezugspotential für das Erdschwerefeld verwendet wird, treten kleine Unterschiede auf, da das Referenzellipsoid das Geoid nur annähert. Dieser Unterschied wird als Störpotential T bezeichnet. Für die Potentiale gilt:

$$W = U + T \quad (3.18)$$

Dieser Zusammenhang ist nur gültig wenn das Referenzellipsoid folgende drei Anforderungen erfüllt [KUH10]:

1. Ellipsoid und Geoid müssen sehr ähnlich sein. Daraus folgt, dass das Ellipsoid eine Niveaulfläche des Schwerefeldes mit dem Potential $U = U_0$ sein muss
2. Alle Außenraumpotentiale müssen harmonisch sein ($\Delta V = 0$)
3. Ellipsoidmasse soll möglichst gleich der Erd- bzw. Geoidmasse sein

Das Schwerepotential besteht aus dem Normalpotential und einem Zuschlag, dem Störpotential. Da das Störpotential sehr klein ist, lässt es sich in eine Reihe entwickeln.

3.2.1 Schwereanomalien

Für die Definition der Schwereanomalien Δg bzw. des Schwereanomalienvektors wird der Zusammenhang zwischen dem Geoid und dem Referenzellipsoid in Abbildung 3.2 dargestellt.

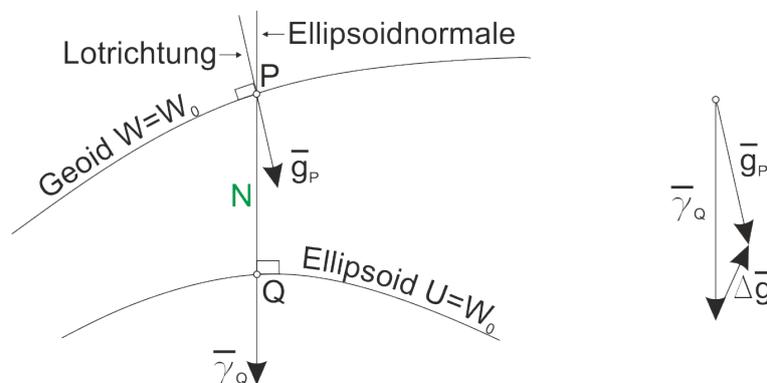


Abbildung 3.2.: Geoid und Referenzellipsoid

Da Vektoren entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden können, ergibt sich der Schwereanomalienvektor über das Verschieben in einen gemeinsamen Startpunkt

$$\Delta \vec{g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_Q . \quad (3.19)$$

Soll Gleichung 3.19 als skalares Ergebnis dargestellt werden, sind einfach die Differenzen der Beträge der Vektoren zu bilden. Die mittels Gravimetern gemessene Schwere entspricht g_P und γ_Q ist die Normalschwere am Referenzellipsoid.

Als nächstes wird der Zusammenhang von Störpotential T und Geoidhöhe N beschrieben. Für das Störpotential gilt die lineare Gleichung 3.18. Aufgelöst nach T ergibt sich $T = W - U$. Durch die kleinen Störgrößen und die daraus resultierende Linearisierung nach Taylor folgt mit der zuvor formulierten Bedingung, dass das Ellipsoid dem Geoid möglichst ähnlich sein muss, die *Formel von Bruns*:

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad (3.20)$$

Die Normalschwere für das gewählte Referenzellipsoid wird mit γ bezeichnet. Auch hier gilt wieder die generelle Aussage über Höhen, die als Quotient von Potentialdifferenz zu Schwere anzusehen sind (siehe hierzu Kapitel 2).

Ein weiterer, wichtiger Schritt auf dem Weg zur Grundgleichung der physikalische Geodäsie die das gesuchte Störpotential mit den gemessenen Schwereanomalien verbindet, ist die Definition der Schwerestörung

$$\delta \vec{g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_P . \quad (3.21)$$

Hinter Schwerestörungen $\delta \vec{g}$ steckt dasselbe Konzept wie für die Schwereanomalien, jedoch erfolgt die Auswertung im gleichen Punkt P . Über die Beträge der Vektoren ist ebenfalls die skalare Schreibweise möglich.

Durch Kombination verschiedener Ausdrücke für die Schwerestörung in Zusammenhang mit der Formel von Bruns ergibt sich die Grundgleichung der physikalischen Geodäsie:

$$0 = \frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g \quad (3.22)$$

Werden in der Gleichung die ellipsoidischen Größen durch die Kugel ersetzt, spricht man von sphärischer Approximation der Grundgleichung. Da sich Kugel und Ellipsoid lediglich durch die Abplattung $f \approx 0.3\%$ unterscheiden, ist der Fehler in den Geoidhöhen durch diese Approximation $0.3 \times N$. Da das Geoid global gesehen im Maximum $\pm 100\text{m}$ vom Ellipsoid abweicht, ergeben sich Fehler von maximal $\pm 0.3\text{m}$. Führt man den Erdradius R ein, kann Gleichung 3.22 wie folgt umgeschrieben werden:

$$0 = \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{R}T + \Delta g \quad (3.23)$$

Die Referenzfläche bleibt trotz der sphärischen Approximation das Ellipsoid. Der Zusammenhang zwischen dem gesuchten Störpotential T und den gemessenen Schwereanomalien Δg ist gefunden. Die Grundgleichung ist keine Differentialgleichung, sondern stellt eine Randbedingung dar, da die Schwereanomalien nur am Geoid und nicht im Raum definiert sind. Deshalb wird sie auch als Randbedingung der physikalischen Geodäsie bezeichnet.

3.3 Lösen der Grundgleichung der physikalischen Geodäsie

Unter der Annahme das Störpotential sei harmonisch, gilt die Laplace Gleichung außerhalb des Geoids

$$\Delta T = 0 . \quad (3.24)$$

Da im Allgemeinen jedoch die Poisson Gleichung im Außenraum gültig ist, müssen die topographischen Massen rechnerisch entfernt werden. Man spricht von Schwerereduktion und befindet sich streng genommen nicht mehr am Geoid, sondern am Cogeoid. Dies ist auf den indirekten Effekt zurückzuführen, welcher in Kapitel 3.5.2 beschrieben ist. Die Grundgleichung kann nach Durchführung der Reduktionen durch Kugelfunktionsreihenentwicklung gelöst werden. Da die Laplace Gleichung nun gilt, ist es möglich das Störpotential folgendermaßen anzuschreiben:

$$T(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda) \quad (3.25)$$

Diese Reihenentwicklung erfüllt die Laplace Gleichung und beruht auf der Verwendung von Kugelflächenfunktionen T_n . Der Start der Reihe bei $n = 2$ basiert auf der Annahme, dass die Erde und das Ellipsoid die gleiche Masse besitzen und somit keine Terme $n = 0$ auftreten.

Durch das Zusammenfallen des Ursprungs des Koordinatensystems mit dem Erdschwerpunkt verschwinden auch alle Terme $n = 1$.

Der Übergang vom Störpotential auf die Schwereanomalien erfolgt durch Einsetzen von Gleichung 3.26 in die Grundgleichung. Wird die partielle Ableitung nach r gebildet, resultiert daraus

$$\Delta g(r, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda) \quad (3.26)$$

und in sphärischer Approximation mit $r = R$

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) T_n(\vartheta, \lambda) . \quad (3.27)$$

Durch die sphärische Approximation gilt für das Störpotential

$$T(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\vartheta, \lambda) \quad (3.28)$$

und in gleicher Weise lassen sich auch Schwereanomalien in Reihenentwicklung darstellen

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n(\vartheta, \lambda) . \quad (3.29)$$

Daraus folgt in Kombination mit Gleichung 3.27 die Beziehung Δg_n mit den Kugelflächenfunktionen T_n

$$\Delta g_n(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{R} (n-1) T_n(\vartheta, \lambda) . \quad (3.30)$$

Umformen von Gleichung 3.30 nach T_n und Einsetzen in 3.28 liefert für das Störpotential

$$T(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \Delta g_n(\vartheta, \lambda) . \quad (3.31)$$

Nach Entwicklung der Schwereanomalien Δg in eine Kugelfunktionsreihe Δg_n und anschließender Summation ist unter Anwendung der Formel von Bruns (Gleichung 3.20) eine Geoidbestimmung grundsätzlich möglich.

3.4 Formel von Stokes

Die zuvor etablierte Gleichung 3.31 eignet sich um eine Geoidbestimmung durchzuführen, es tritt aber das Problem einer schlechten Konvergenz der Reihe auf. Es ist von Vorteil, die Reihenentwicklung durch eine Integration der Schwereanomalien über die gesamte Erde zu ersetzen. Dies ist durch das Vertauschen von Summe und Integral mathematisch möglich und es folgt:

$$\Delta g_n(\vartheta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) d\sigma \quad (3.32)$$

Die Koordinaten des Aufpunktes P werden mit ϑ, λ bezeichnet. Die Koordinaten des Integrationspunktes P' , die mit ϑ', λ' bezeichnet werden, sind von der sphärischen Distanz ψ abhängig. Das Flächenelement auf der Kugel $d\sigma$ setzt sich aus den Termen $d\vartheta' \sin \vartheta' d\lambda'$ zusammen. Hinter $P_n(\cos \psi)$ stecken die Legendre'schen Polynome sowie der sphärische Kosinussatz gebildet zwischen den Koordinaten des Aufpunktes und des Integrationspunktes.

Wird die Stokes'sche Funktion $S(\psi)$

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \quad (3.33)$$

und Gleichung 3.32 in Gleichung 3.31 eingesetzt, folgt das Integral von Stokes:

$$T(\vartheta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g(\vartheta', \lambda') S(\psi) d\sigma \quad (3.34)$$

Wird auf das Integral von Stokes noch die Formel von Bruns (3.20) angewandt, können Geoidhöhen aus Schwereanomalien bestimmt werden

$$N(\vartheta, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g(\vartheta', \lambda') S(\psi) d\sigma \quad (3.35)$$

Der Formel von Stokes liegt die sphärische Approximation zu Grunde, weshalb sich auch die Schwere γ zur konstanten Schwere γ_0 wandelt. Die Geoidbestimmung mittels Formel von Stokes wird als gravimetrische Geoidbestimmung bezeichnet. Dieses Verfahren ist ein absolutes und es resultieren direkt Geoidhöhen N . Die Formel von Stokes wurde früher mittels numerischer Integration ausgewertet. Die heutzutage verwendeten Methoden zur Geoidbestimmung sind die Fast Fourier Transformation (FFT) bzw. die Kollokation. Mehr dazu in Kapitel 7.

3.4.1 Astrogeodätische vs. gravimetrische Geoidbestimmung

Im Gegensatz zur gravimetrischen Methode verwendet die astrogeodätische die Lotabweichungen ξ und η . Die astrogeodätische Methode arbeitet also mit der Richtung des Schwerevektors, während für die gravimetrische der Betrag von Bedeutung ist. Die Lotabweichung entspricht dem Unterschied der tatsächlichen Lotrichtung, welche über das astronomische Koordinatenpaar Φ , Λ definiert ist, zur Ellipsoidnormalen. Astronomische und ellipsoidische Werte unterscheiden sich geringfügig. Die Komponente in Nord-Süd wird mit ξ , die in Ost-West Richtung mit η bezeichnet. Es gilt:

$$\xi = \Phi - \varphi \qquad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \qquad (3.36)$$

Die totale Lotabweichung ϑ ist definiert als

$$\vartheta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} . \qquad (3.37)$$

Da die Lotabweichung auch vom Azimut, also dem Winkel vom Meridian aus gesehen, abhängig ist, ergibt sich für einen bestimmten Winkel α

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha . \qquad (3.38)$$

Ein weiterer Unterschied ist die Parallelität der Bezugsellipsoidachse zur Erdachse. Das bedeutet, die Orientierung erfolgt über den Fundamentalpunkt (Wien, Hermannskogel) und die Lage des Bezugsellipsoids zum Erdschwerpunkt ist unbekannt. Bei der gravimetrischen Methode fällt der Mittelpunkt des Bezugsellipsoids in den Erdschwerpunkt. Des weiteren beruht die astrogeodätische Methode auf der *Formel von Helmert*:

$$N_B - N_A = - \int_A^B \varepsilon \, ds \qquad (3.39)$$

Da die Lotabweichungen jedoch nicht als Funktion der Strecke s bekannt sind, ist die analytische Integration nicht möglich. Durch den Übergang auf die sogenannte Trapezformel kann die Geoidhöhendifferenz, welche ein relatives Ergebnis darstellt, genähert werden

$$\Delta N_{AB} = - \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_B}{2} s_{AB} . \qquad (3.40)$$

3.5 Geoidbestimmung

Für die Geoidbestimmung müssen zu Beginn die Reduktionen der Schwerefeldgrößen durchgeführt werden. Um die Formel von Stokes für die Geoidberechnung nutzen zu können, ist es notwendig von den gemessenen Schwerewerten an der Erdoberfläche auf die Schwereanomalien Δg am Geoid zu gelangen. Da die Laplace Gleichung erfüllt sein muss, müssen alle Massen außerhalb des Geoids entfernt werden. Eine weitere Forderung ist, dass nur kleine, glatte Werte in die Stokes'sche Formel bzw. Kollokation einfließen dürfen.

3.5.1 Remove-Restore Technik

Um regional eine Geoidbestimmung durchzuführen, hat sich die Remove-Restore Methode etabliert. Hierbei werden im Remove Schritt alle Schwerefeldgrößen die für die Geoidberechnung herangezogen werden auf das Geoid reduziert. Diese Reduktion erfolgt einerseits mittels eines globalen Erdschwerefeldmodells (siehe Kapitel 4.1.2) über eine Reihenentwicklung der Schwerefeldgrößen sowie andererseits durch eine topographisch/isostatische Reduktion. Über das globale Modell wird der langwellige Anteil des Schwerefeldes berücksichtigt während der kurzwellige, hochfrequente Anteil topographisch/isostatisch zu reduzieren ist. Für letzteres ist ein Höhenmodell sowie eine Annahme über die Dichteverteilung im Erdinneren notwendig. Der kurzwellige Anteil wird mit dem ursprünglich von *Rene Forsberg* stammenden Fortran 77 Programm TC (Terrain Correction) reduziert [FOR84]. Für den Remove Schritt ergeben sich folgende Reduktionen der Schwerefeldgrößen:

$$\Delta g_{red} = \Delta g_{fa} - \Delta g_{TC} - \Delta g_{global} \quad (3.41)$$

$$\xi_{red} = \xi_{gem} - \xi_{TC} - \xi_{global} \quad (3.42)$$

$$\eta_{red} = \eta_{gem} - \eta_{TC} - \eta_{global} \quad (3.43)$$

$$N_{red} = N_{gem} - N_{TC} - N_{global} \quad (3.44)$$

In Gleichung 3.44 ist die Korrekturfläche N_{korr} zwischen der reinen gravimetrischen Lösung N_{koll} und N_{red} nicht enthalten. Wird diese berücksichtigt, folgt:

$$N_{red} = N_{gem} - N_{TC} - N_{global} - N_{korr} \quad (3.45)$$

Es werden auch Lotabweichungen ξ und η global reduziert, obwohl sie eigentlich rein lokale Größen sind. Die Remove-Restore Technik verlangt allerdings Konsistenz in der Berechnung und folglich sind alle Schwerefeldgrößen gleich zu behandeln. Die Freiluftanomalie Δg_{fa} wird aus der Differenz zwischen der Normalschwere γ in Normalhöhe und der gemessenen Absolutschwere g bestimmt. Alle anderen Reduktionen werden mit den direkt beobachteten Schwerefeldgrößen gebildet. Mit dem Kürzel TC werden die kurzwelligen Reduktionen bezeichnet, $global$ steht für den langwelligen Anteil. Für die Berechnung der globalen Anteile sei auf [AEH98] verwiesen. Als Ergebnis des Remove Schrittes resultieren glatte Werte, die nur mehr eine regionale Struktur aufweisen. In Abbildung 3.3 sind reduzierte Schwereanomalien Δg_{red} abgebildet.

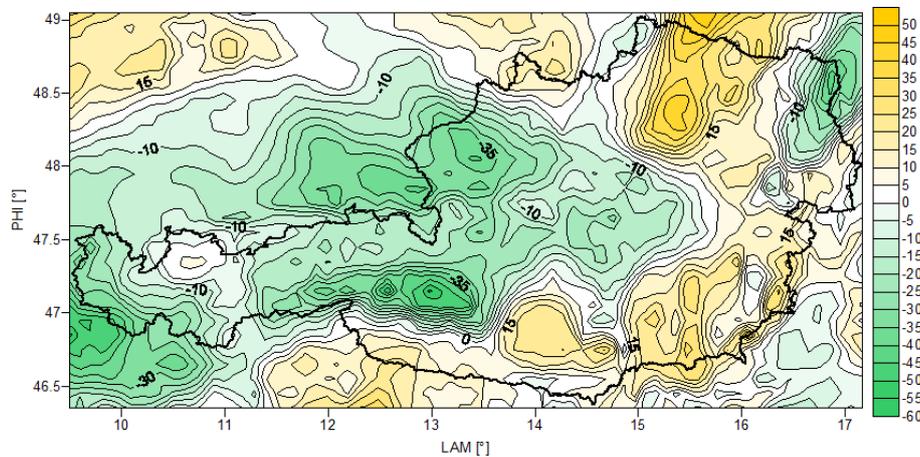


Abbildung 3.3.: 13689 Schwereanomalien Δg_{red} reduziert mit GOCO01S Grad/Ordnung 25 - Airy-Heiskanen topographisch/isostatisch [mGal]

Aus den reduzierten Schwereanomalien Δg_{red} lässt sich eine empirische Kovarianzfunktion ableiten, an die eine Modellkovarianzfunktion angepasst wird und daraus die Inputwerte für die Kollokation gewonnen werden (siehe Kapitel 7.5).

Mit der Kollokation ist es möglich alle Schwerefeldgrößen zu präzisieren. Im Falle der Geoidbestimmung werden die Geoidhöhen N_{koll} auf ein regelmäßig verteiltes Gitter präzisiert. An diesen Gitterpunkten werden im Restore Schritt die Geoidhöhen wieder aufgesetzt. Dazu sind die kurzwelligen und langwelligen Komponenten für die Gitterpunkte zu bestimmen. Die wieder aufgesetzten Geoidhöhen N ergeben sich somit aus

$$N = N_{koll} + \delta N_{TC} + N_{global} . \quad (3.46)$$

Wird die Korrekturfäche wieder addiert kann Gleichung 3.46 für den Restore Schritt wie folgt angeschrieben werden:

$$N = N_{koll} + \delta N_{TC} + N_{global} + N_{korr} \quad (3.47)$$

In diesen Fällen wurde das Geoid bereits durch die Hinzunahme und Gewichtung der Geoidhöhen im Kollokationsprozess gelagert. Der Term δN_{TC} impliziert die Berücksichtigung des indirekten Effektes durch das TC Programm. Eine detailliertere Beschreibung der Remove-Restore Methode ist in [KUH02] zu finden. Der Berechnungsablauf der Remove-Restore Technik ist in folgender Abbildung 3.4 dargestellt.

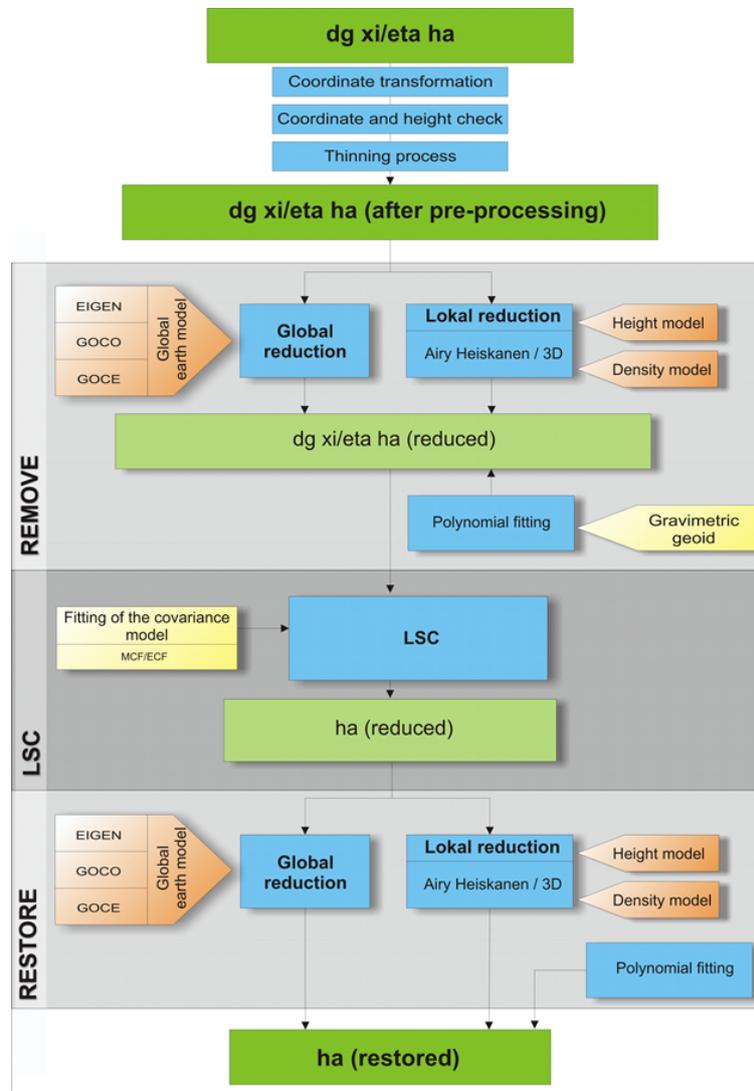


Abbildung 3.4.: Berechnungsablauf Remove-Restore Technik [KUH11]

3.5.2 Indirekter Effekt

Der indirekte Effekt bezeichnet den Umstand, dass bei der topographisch/isostatischen Entfernung von Massen sich auch das Potential bzw. Potentialflächen ändern. Das Geoid als ausgezeichnete Äquipotentialfläche erfährt durch die Reduktion eine Änderung und es wird nicht auf das Geoid, sondern auf eine leicht veränderte Fläche, das Cogeoid reduziert. Um dieser Änderung Ausdruck zu verleihen, kann die Formel von Bruns auf das Cogeoid angewandt werden

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma} . \quad (3.48)$$

Mit δW als Schwerepotentialänderung hervorgerufen durch die Reduktion. Das TC Programm berücksichtigt den indirekten Effekt und es gilt:

$$\delta N = \delta N_{TC} \quad (3.49)$$

Um nun vom Cogeoid wieder auf das Geoid übergehen zu können, muss δN zur Cogeoidhöhe N^C addiert werden

$$N = N^C + \delta N . \quad (3.50)$$

Durch das Anbringen dieser Korrektur ist der Übergang vom Cogeoid auf das Geoid vollzogen. Mit der Berücksichtigung des indirekten Effektes ist sichergestellt, dass die Geoidberechnung mit jeder Art der Schwerereduktion durchgeführt werden kann. Im Allgemeinen gilt jedoch, dass der indirekte Effekt klein gehalten werden soll und sich dadurch die Bouguer bzw. Prey Reduktion nicht so gut eignet wie die topographisch/isostatische Reduktion [TOR03].

3.5.3 Airy-Heiskanen topographisch/isostatisch

Die topographisch/isostatische Reduktion der Schwerefeldgrößen erfolgt mit dem Programm TC. Das Programm wurde von *Norbert Kühtreiber* und *Hussein Abd-Elmotaal* adaptiert und auf die geologischen Verhältnisse, die in Österreich vorherrschen, zugeschnitten. So wird beispielsweise für den Dichtekontrast $\Delta\rho$, also dem Unterschied zwischen Mantel- und Krustendichte, ein geringerer Wert als von *Airy* vorgegeben verwendet. Untersuchungen hierzu sind von *Norbert Kühtreiber* durchgeführt worden und in [KUH98] zu finden.

Die Reduktion mittels TC basiert auf dem Aufteilen des Geländes in Massensäulen, wobei je nach Lage des Prismenschwerpunktes zur Berechnung des Einflusses die exakte Prismenformel oder die Approximation einer Punktmasse verwendet wird. Es ist ebenfalls möglich ein Dichtemodell in die Berechnung zu integrieren. In dieser Masterarbeit wurde eine solches jedoch nicht verwendet, da sich das Modell von Airy-Heiskanen, welches einen konstanten Dichtekontrast vorsieht, für die Geoidbestimmung in Österreich ebenfalls bestens bewährt hat.

Bei der topographisch/isostatischen Reduktion wird der Einfluss der Topographie zusammen mit der isostatischen Kompensation entfernt. Als Ergebnis dieser Reduktionen ergibt sich eine vereinfachte Erdkruste mit konstanter Dichte ρ_C und Krustentiefe. Nach [HWM05] kann die Reduktion in drei Schritte unterteilt werden:

1. Entfernen der Topographie
2. Entfernen der Isostasie
3. Freiluftreduktion auf das Geoid

Unter Isostasie versteht man das hydrostatische Gleichgewicht der Erdkruste. Das Prinzip, das dahinter steht, basiert auf der Annahme, dass Gebirge oder Erdmassen die einen Dichteüberschuss besitzen, durch ein Dichtedefizit in der Tiefe kompensiert werden. Im Laufe der Jahre wurden mehrere Modelle zur Isostasie etabliert. Das in Abbildung 3.5 dargestellte Isostasiemodell von Airy-Heiskanen beruht auf dem Gedanken, dass die Erdmassen auf Lava mit höherer Dichte "schwimmen" und abhängig von der topographischen Erhebung auf der Erdoberfläche tiefer oder weniger tief in den Erdmantel eintauchen. Das Airy-Heiskanen Modell wird auch als Schwimmtheorie bezeichnet. Für Gebiete mit wenig Topographie ist dieses Modell aber eher nicht geeignet.

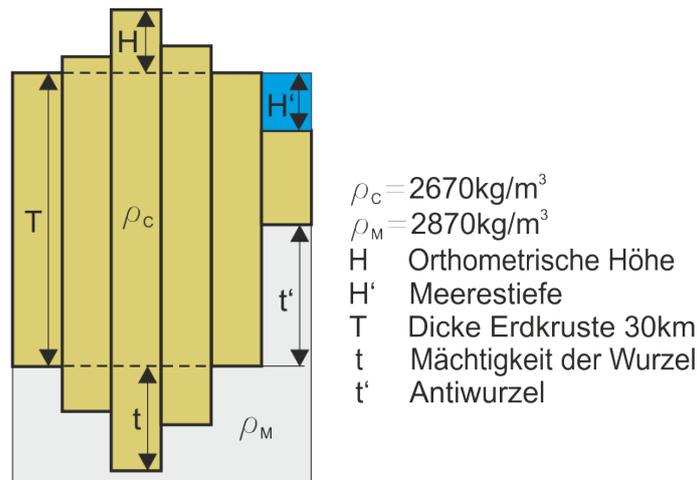


Abbildung 3.5.: Airy-Heiskanen Isostasiemodell

In Österreich wird im Unterschied zu dem ursprünglichen Airy-Heiskanen Modell für die Manteldichte ρ_M ein Wert von 2870 kg/m^3 angenommen. Dadurch ergibt sich der Dichtekontrast $\Delta\rho_{Aust}$ für Österreich als

$$\Delta\rho_{Aust} = \rho_M - \rho_C = 200 \text{ kg/m}^3 . \quad (3.51)$$

Ein weiteres Isostasiemodell ist nach Pratt-Hayford benannt. Dieses Modell sieht eine konstante Kompensationstiefe für alle Massensäulen vor. Jede Säule hat dabei eine unterschiedliche Dichte um in der Kompensationstiefe gleiche Auflast zu erzeugen. Diese Annahme impliziert, dass Massensäulen mit mehr Topographie eine geringere Dichte aufweisen als beispielsweise auf Meeressniveau. Eine detailliertere Beschreibung dieses Isostasiemodells findet sich in [HWM05].

Eine Alternative zu Airy-Heiskanen und Pratt-Hayford stellt das Modell von Vening-Meinesz dar. Dabei wird das Wirken der Massensäulen nicht lokal auf die jeweilige Massensäule begrenzt, sondern davon ausgegangen, dass durch die Massensäule die Lithosphäre, also der Übergang von Erdkruste auf Erdmantel durchgebogen wird. Folglich ist die Auflast in der Kompensationstiefe regionaler verteilt. Es gilt als realistischer als das Airy-Heiskanen Modell, jedoch ist die mathematische Realisierung auch wesentlich komplexer. Detaillierte Untersuchungen basierend auf diesem Isostasiemodell wurden von *Hussein Abd-Elmotaal* durchgeführt [AEH91].

4 Datenbasis für die Geoidbestimmung

4.1 Das österreichische Geoid

Die Anfänge des österreichischen Geoids gehen an den Beginn des vorigen Jahrhunderts zurück. Als einer der ersten Geodäten Österreichs veröffentlichte *Josef Litschauer* 1953 seine astrogeodätische Geoidlösung, die sich auf einige wenige Lotabweichungsmessungen in Triangulierungspunkten stützte. Eine Vorreiterrolle im Bereich der physikalischen Geodäsie übernahmen auch die Grazer Geodäten *Helmut Moritz* und *Karl Rinner*. Die von Moritz stammende Kollokation nach kleinsten Quadraten bildet das Fundament für die Kombination von heterogenen Messdaten bei der Geoidbestimmung. Basierend auf dieser Methode publizierten auch *Hans Sünkel* [SUN87] und nicht zuletzt *Norbert Kühnreiber* ihre Geoidlösungen. Unter ihrer Leitung werden seit den 80er Jahren Geoidberechnungen an der Technischen Universität Graz durchgeführt. Eine weitere astrogeodätische Geoidlösung (nur Lotabweichungen) wurde von *Hans Sünkel* im Jahre 1987 publiziert. *Norbert Kühnreiber* berechnete 1998 erstmals eine gravimetrische (nur Schwereanomalien) Geoidlösung. Die erste kombinierte Geoidlösung stammt ebenfalls von *Norbert Kühnreiber* [KUH02] und wurde 2002 veröffentlicht. Einen Überblick über die Anfänge der Geoidbestimmung in Österreich bietet [RIN83].

4.1.1 Projekt GEOnAUT

Das Projekt *The Austrian Geoid 2007* (GEOnAUT) war ein im Rahmen von ASAP III der FFG genehmigtes Projekt zur Geoidbestimmung in Österreich. Das Projekt war in den Jahren 2006-2007 unter Führung des Instituts für Navigation und Satellitengeodäsie (INAS) Bestandteil der universitären Forschung. Die Projektpartner waren das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen sowie das Institut für Numerische Mathematik (INM), das an der gleichen Fakultät angesiedelt ist.

Zweck von GEOnAUT war in erster Linie die Neuberechnung eines österreichischen Geoids, basierend auf der Kombination von lokalen, terrestrischen Daten sowie Satellitendaten aus entsprechenden Schwerefeldmissionen wie beispielsweise GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment). Durch die Kombination von terrestrischen und Satellitendaten können die Vor- und Nachteile der jeweiligen Beobachtungstypen ausgeglichen werden. So besitzt ein globales Schwerefeldmodell (satellite-only) für regionale Anwendungen oft eine zu geringe Auflösung,

während die terrestrischen Daten eine hohe Auflösung besitzen, jedoch für globale Aussagen bezüglich des langwelligen Anteils des Erdschwerefeldes nicht geeignet sind.

Die dabei verwendeten Schwerefeldgrößen sind in Abbildung 4.1 zu sehen. Die Schwereanomalien wurden hierbei auf 4×4 km ausgedünnt, um im Kollokationsprozess eine gute Konditionierung der Kovarianzmatrix der Beobachtungen C_u zu gewährleisten (siehe dazu Kapitel 7). Alle verwendeten Schwereanomalien wurden mit dem digitalen Geländemodell (DGM) "BEV00" [PAI07] verschnitten und auf ihre Höhenkonsistenz überprüft. So wurden nur Schwereanomalien mit einer maximalen Abweichung von ± 35 m zwischen der gegebenen orthometrischen Höhe und der mittels TC interpolierten Stationshöhe für den Ausdünnprozess zugelassen. Bei dieser empirisch bestimmten Abweichung handelt es sich entweder um einen Fehler in der nivellitischen Höhe des Stationspunktes oder im DGM. Beides würde sich auf die Reduktion auswirken, sodass diese Schwereanomalien für die Berechnung nicht zulässig sind.

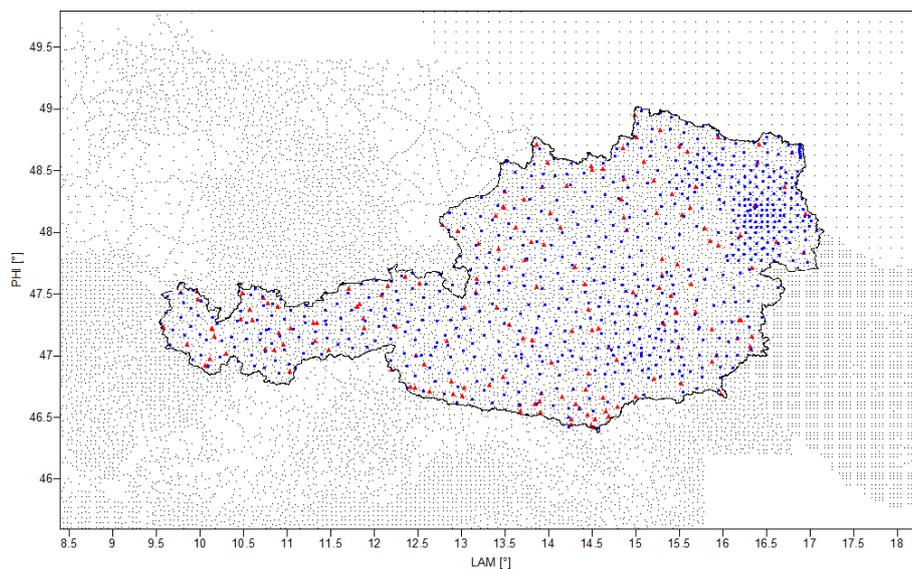


Abbildung 4.1.: Ausgangsdaten Projekt GEOnAUT: Schwereanomalien(schwarz), Lotabweichungen(blau), GPS/Niv. Punkte(rot)

Insgesamt besteht der verwendete Datensatz aus:

- 14001 Schwereanomalien Δg
- 672 Lotabweichungen ξ, η
- 170 GPS/Nivellement Punkte N_{gem}

Die globale, langwellige Reduktion der Schwerefeldgrößen wurde mit dem Schwerefeldmodell *EIGEN-GL04S1* [FOE06] bis Grad/Ordnung 70 durchgeführt. Dieses Modell basiert auf

GRACE Beobachtungen und ist bis Grad/Ordnung 150 verfügbar. Der lokale, kurzweilige Anteil wurde klassisch mittels Airy-Heiskanen topographisch/isostatisch bestimmt (siehe Kapitel 3.5.3). Die dabei zu Grunde liegenden digitalen Geländemodelle haben eine Auflösung von $1.40625'' \times 2.34375''$ was etwa $44 \times 49\text{m}$ (BEV00), sowie $1.5' \times 2.5'$, was etwa $2.7 \times 3.2\text{km}$ entspricht (BEV04). Dieses DGM basiert auch nach der Hinzunahme eines hochauflösenden Geländemodells für die Schweiz (DHM25) und eines Geländeoberflächenmodells aus der Space-Shuttle-Topographiemission (SRTM) auf der Arbeit von *J. Graf*, der 1996 ein hochauflösendes Geländemodell für die Geoidbestimmung bereitstellte [GRA96]. Weiterführende Details zu GEOnAUT sind in [PAI07] zu finden.

4.1.2 Projekt GEOID+

Das an der Technischen Universität Graz im Rahmen von ASAP VI der österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft (FFG) genehmigte Nachfolgeprojekt von GEOnAUT hatte den Namen *Improved Austrian geoid solution combining terrestrial and satellite gravity data* (GEOID+). In den Jahren 2009-2010 war das Projekt am Institut für Navigation und Satellitengeodäsie (INAS) angesiedelt. Projektpartner waren wie auch schon in GEOnAUT das BEV, welches als Datenlieferant sowie als Validierungsstelle der Geoidlösung fungierte sowie das Institut für Numerische Mathematik.

Grundsätzlich wurden alle schon in GEOnAUT verwendeten Daten nochmals überprüft und gegebenenfalls verbessert sowie ein auf GRACE und GOCE (Gravity Field and Steady State Ocean Circulation Explorer) Daten basierendes Erdschwerefeldmodell (GOCO01S) [PAI10] für die globalen Reduktionen verwendet. Dieses Modell wurde im Rahmen des Forschungsprojekts GOConAUT unter wesentlicher Beteiligung Grazer Forscher generiert. In diesem satellite-only Modell liegen die Koeffizienten C_{nm} und S_{nm} bis Grad/Ordnung 224 vor. Aufgrund der Kombination von zwei unabhängigen Satellitenmissionen dominiert bis etwa Grad/Ordnung 150 die aus GRACE stammende Information, während die hochgenauen GOCE Gradiometerdaten erst ab Grad/Ordnung 150 zur Lösung beitragen. Dieser Umstand ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Dennoch existiert ein Einfluss von etwa 10% in den sektoriellen Koeffizienten der hinunter bis Grad/Ordnung 100 reicht [GOI10].

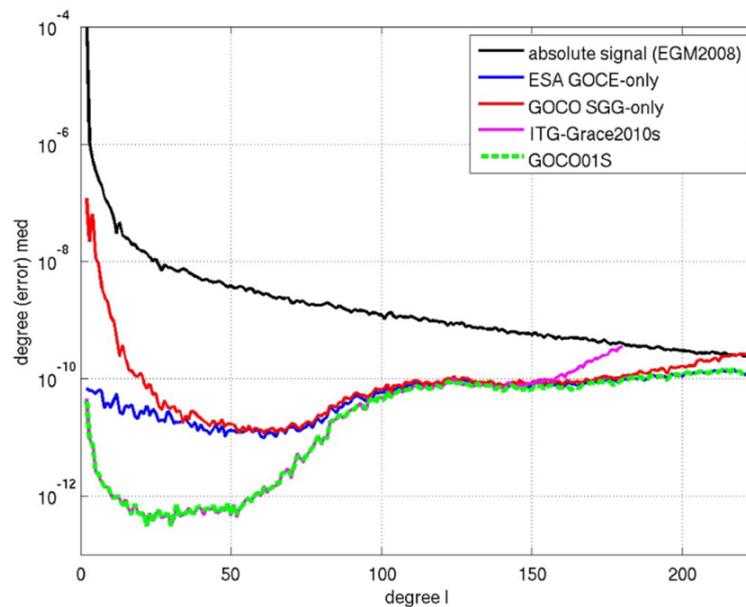


Abbildung 4.2.: Grad/Median Plot des GOCE Anteils (blau), GRACE Anteils (magenta) und die kombinierte GOCO01S Lösung (grün strichliert). Als Referenz wird die ESA GOCE SGG-only Lösung (rot) und das EGM2008 (schwarz) dargestellt

Die Unterschiede in den globalen Reduktionen zwischen dem GEOnAUT und GEOID+ Projekten resultieren aus verschiedenen globalen Schwerefeldmodellen und sind in den Abbildungen 4.3 und 4.4 als Differenzen der reduzierten Schwereanomalien Δg_{red} dargestellt. Die langwellige Struktur in den Differenzen der Reduktion ist gut zu erkennen.

Mit abnehmenden Grad/Ordnung werden sich die beiden Modelle immer ähnlicher und ab Grad/Ordnung 30 treten keine signifikanten Differenzen in den Reduktionen mehr auf. Dies gilt für jede zu reduzierende Schwerefeldgröße. Grund dafür sind die GRACE Beobachtungen, die bei einem niedrigen Grad/Ordnung dominieren und in beiden Modellen vorhanden sind. Der Unterschied liegt hier nur in der Beobachtungsdauer. Das EIGEN-GL04S1, das schon 2006 zur Verfügung stand und für GEOnAUT verwendet wurde, basiert auf GRACE Daten mit einem Beobachtungszeitraum von drei Jahren. In das aus dem Jahre 2010 stammende kombinierten GRACE/GOCE Modell GOCO01S sind sieben Jahre an GRACE Daten eingeflossen.

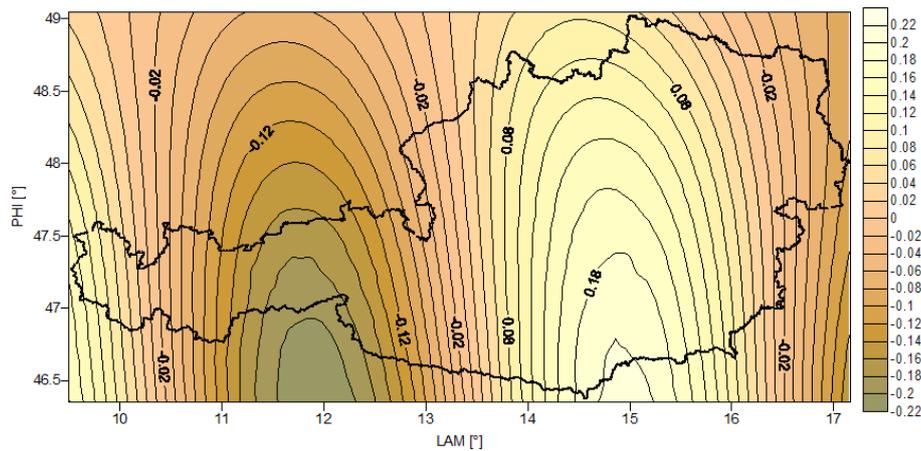


Abbildung 4.3.: Differenzen Δg_{red} GOCO01S - EIGEN-GL04S1 Grad/Ordnung 90 [mGal]

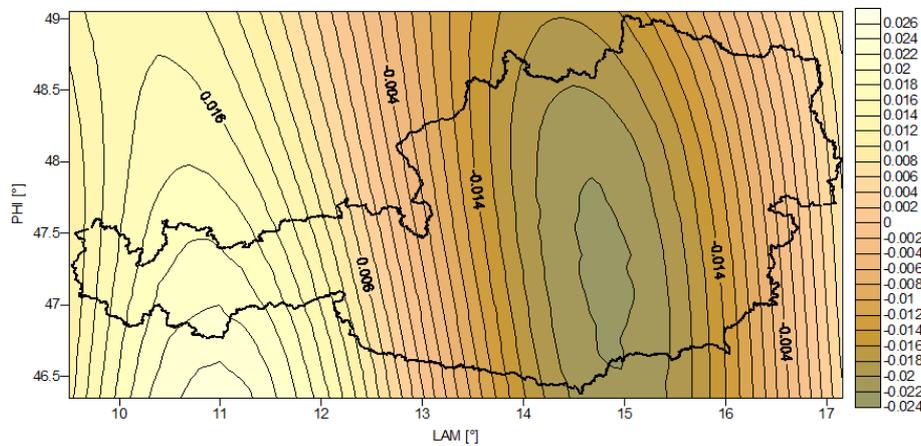


Abbildung 4.4.: Differenzen Δg_{red} GOCO01S - EIGEN-GL04S1 Grad/Ordnung 70 [mGal]

Der Ausgangsdatensatz für das Projekt GEOID+ besteht aus folgenden Schwerefeldgrößen:

- 13689 Schwereanomalien Δg
- 672 Lotabweichungen ξ, η
- 192 GPS/Nivellement Punkte N_{red}

Durch Hinzunahme hochgenauer Geländemodelle im Bereich Südtirol und Slowenien wurden die bereits für den zentraleuropäischen Raum bestehenden digitalen Geländemodelle "BEV00" und "BEV04" nochmals überarbeitet und verbessert. Auf zusätzliche Schweredaten im slowenischen Staatsgebiet konnte ebenfalls zurückgegriffen werden.

Um eine gute Qualität der verwendeten Schweredaten zu gewährleisten wurden wie im Projekt GEOAUT die Schwereanomalien mit dem neuen überarbeiteten digitalen Geländemodell verschnitten und anschließend auf 4×4 km ausgedünnt. Der maximale Offset von ± 35 m zwischen der gegebenen orthometrischer Höhe der Schwereanomalie und der interpolierten

Stationshöhe wurde für alle Schwerewerte eingehalten. Der Datensatz, der in Abbildung 4.5 zu sehen ist bildet die Grundlage für die aktuelle österreichische Geoidlösung.

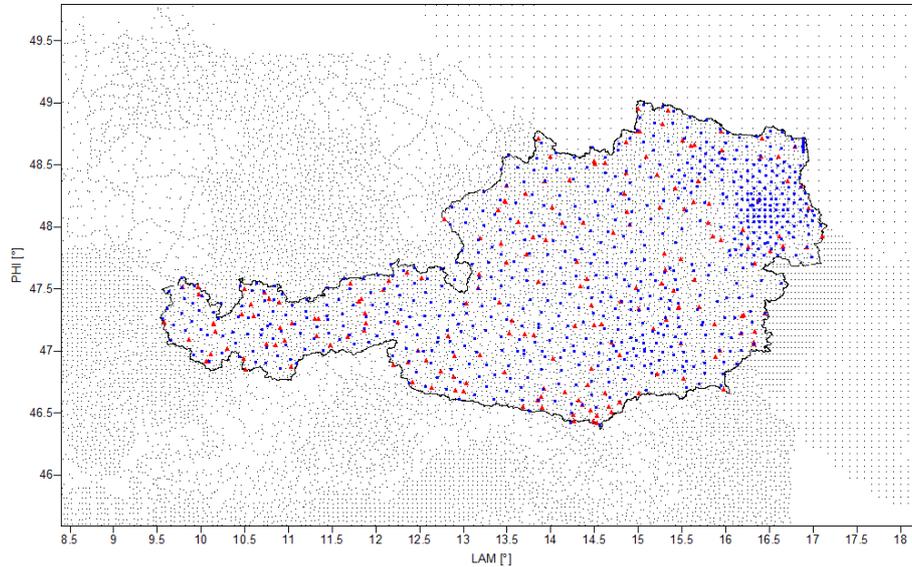


Abbildung 4.5.: Ausgangsdaten Projekt GEOID+ Schwereanomalien(schwarz), Lotabweichungen(blau), GPS/Niv. Punkte(rot)

In Abbildung 4.6 ist noch der Arbeitsablauf für das Projekt dargestellt. Alle dabei erzielten Ergebnisse können in [KUH11] nachgelesen werden.

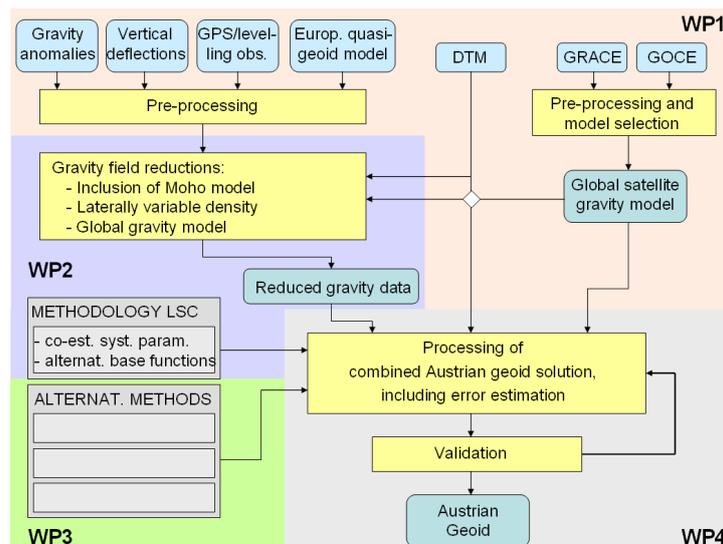


Abbildung 4.6.: Workflow Projekt GEOID+

4.2 Schwerefeldgrößen in Österreich

4.2.1 Schwereanomalien

Die Schweredatenbank der Technischen Universität Graz umfasst derzeit circa 123.000 Schwereanomalien. Diese enthält Daten aus Österreich und allen Nachbarstaaten. Aufbauend auf das in den Jahren 1960 bis 1980 vom BEV geschaffene Schweregrundnetz wurden im Laufe der Jahre von *Norbert Kühnreiber* immer mehr Schweredaten über universitären Austausch akquiriert. In den letzten Jahren übernahm das BEV die administrative Verwaltung der Schweredatenbank und die Daten können bei Bedarf angefordert werden.

Die ersten Schweremessungen in Österreich erfolgten noch mit einem Federgravimeter (Relativgravimeter) und es wurde kein besonderes Augenmerk auf die Vermarkung der Messpunkte in der Natur gelegt. Dieses dabei entstandene Netz wurde in den 80er Jahren erneut. Die Messungen erfolgten mit einem neueren Relativgravimeter, alte Messpunkte wurden überprüft und gegebenenfalls neu bestimmt.

Seit Ende der 80er Jahre werden in Österreich mit dem Absolutgravimeter *JILA_g-6* hochpräzise Absolutschweremessungen vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen durchgeführt. Mit einem Freifall-Absolutgravimeter kann die absolute Größe der Erdbeschleunigung fast auf ein Milliardstel (ca. $10\text{nm/s}^2 = 1\mu\text{Gal}$) genau bestimmt werden. Das 2010 vom BEV in Dienst gestellte neue Absolutgravimeter *FG5* wird derzeit erprobt und ist in der Lage, zukünftig noch präzisere Schweredaten zu liefern. Das durch alle diese Messungen entstandene Schweregrundnetz ÖSGN (Österreichisches Schweregrundnetz) bestehend aus ca. 800 Punkten ist in vier Stufen (0. bis 3. Ordnung) bezüglich der dabei erzielten Genauigkeiten der Messungen unterteilt. Die genauesten Messungen sind mit dem Absolutgravimeter (Netz 0. Ordnung) durchgeführt worden, während die Netze 1. bis 3. Ordnung aus relativen Messungen zwischen den Absolutmessungen gewonnen wurden. Auch zur Entstehung der Schweredatenbank beigetragen haben Messungen der OMV AG mittels Worden-Gravimeter sowie Messungen der Montanuniversität Leoben und der Universität Wien. Im Gegensatz zu den vom BEV entlang von Nivellementlinien gemessenen Schwerewerten wurden diese meist flächendeckend bestimmt. Als käufliches Produkt bietet das BEV die österreichische Schwerekarte an, die flächendeckend für das ganze österreichische Staatsgebiet verfügbar ist. Weiterführende Details über die Anfänge des österreichischen Schweregrundnetzes können in [RUE95] nachgeschlagen werden.

4.2.2 Lotabweichungen

Lotabweichungen sind vor allem für die astrogeodätische Geoidbestimmung von Bedeutung. Die ersten, etwas genaueren Lotabweichungsmessungen gehen auf *Kurt Bretterbauer* und *Gottfried Gerstbach* [BRG83] zurück, welche in den 70er bis Anfang der 80er Jahre an der Technischen Universität Wien durchgeführt wurden.

In Graz waren *Karl Rinner* und später *Herbert Lichtenegger* [LRS87] maßgeblich am Entstehen des ersten Netzes beteiligt. Das BEV führte in den 80er Jahren selbst astrogeodätische Messungen durch und 1987 veröffentlichte *Erhard Erker* [ERK87] die dabei erzielte Geoidlösung. Im Jahre 2006 wurden von *Bernadette Wasle* [WIE07] punktuell weitere Lotabweichungsmessungen im Südosten Österreichs vorgenommen, um Gründe für die Ursache der Differenzen zwischen einer rein gravimetrischen Geoidlösung und einer astrogeodätischen Lösung in diesem Teil Österreichs zu finden. Somit stehen in Österreich derzeit circa 700 Punkte mit Lotabweichungsmessungen zur Verfügung, von denen 672 Punkte für die Geoidbestimmung ausgewählt wurden. Zusammenfassend erfolgten die astrogeodätischen Messungen in Österreich wie folgt:

- 1976 - 1982 Messungen im Osten Österreichs, durchgeführt von TU-Graz, TU-Wien und BEV
- 1983 - 1986 Messungen im Westen Österreichs, durchgeführt durch BEV
- 2006 Neu- bzw. Kontrollmessungen in der Steiermark, TU-Graz

Dabei wird von einer Präzision der Messungen von $\pm 0.35''$ bei Messungen mit Astrolab oder Zenitkammermessungen ausgegangen.

4.2.3 GPS/Nivellementpunkte

Momentan liegen 192 GPS/Nivellementpunkte in Österreich vor. Sie zeichnen sich dadurch aus, sowohl über einen Nivellementanschluss zu verfügen als auch mittels GPS bestimmt worden zu sein. In diesen Punkten kann über den Nivellementanschluss mit Schwerebeobachtung die orthometrische Höhe H bestimmt werden und gleichzeitig ist die ellipsoidische Höhe h über GPS-Langzeitbeobachtungen ebenfalls bekannt. Durch Differenzbildung ist es prinzipiell möglich direkt die Geoidhöhe N zu bestimmen. Diese Punkte dienen einerseits zur Lagerung des Geoids und damit zum Übergang auf die Transformationsfläche und andererseits um die Qualität der berechneten Lösung zu kontrollieren.

Für das Projekt GEOID+ sind vom BEV 26 neue GPS/Niv. Punkte bereitgestellt worden und der für das Projekt GEOnAUT verwendete Datensatz mit 170 GPS/Niv. Punkten wurde

nochmals überprüft. Dabei wurden 4 GPS/Niv. Punkte dieses Datensatzes eliminiert und in den verbleibenden 166 Punkten sind Änderungen der gemessenen Geoidhöhe N_{gem} oder der orthometrischen Höhe H erkennbar. Die Änderungen der orthometrischen Höhe sowie der Geoidhöhe sind in den folgenden beiden Abbildungen 4.7 und 4.8 dargestellt.

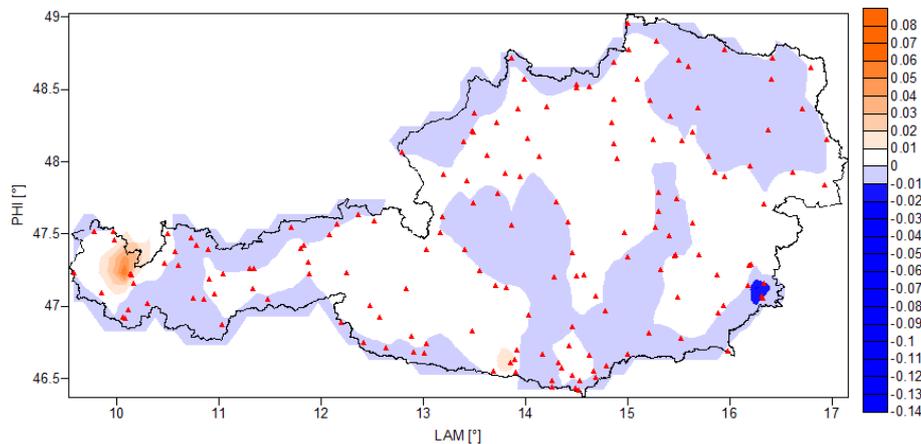


Abbildung 4.7.: *Differenzen in den orthometrischen Höhen H zwischen den GEOnAUT und GEOID+ Identpunkten [m]*

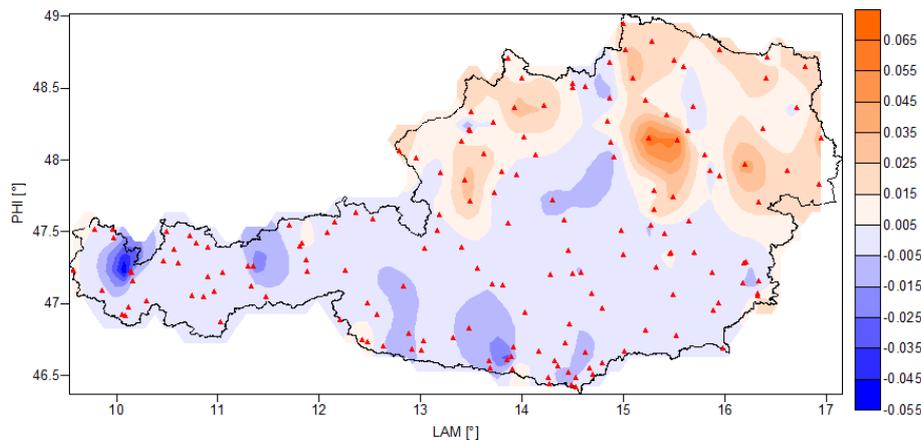


Abbildung 4.8.: *Differenzen in den Geoidhöhen N_{gem} zwischen den GEOnAUT und GEOID+ Identpunkten [m]*

Die Änderungen in der orthometrischen Höhe resultieren aus Änderungen des Nivellementnetzes. Die auftretenden Differenzen in den Geoidhöhen inkludieren sowohl die Änderung des Nivellementnetzes als auch der mittels GPS bestimmten ellipsoidischen Höhe. Die Änderungen in den gemessenen Geoidhöhen N_{gem} liegen in den 166 Identpunkten liegen bei $\pm 6\text{cm}$. Das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen gibt basierend auf der letzten Geoidlösung des Projektes GEOnAUT für den neuen Datensatz von 192 GPS/Niv. Punkten eine Genauigkeit von $\pm 5\text{cm}$ an.

5 Radiale Basisfunktionen (RBF)

Das Prinzip der Interpolation mit radialen Basisfunktionen (RBF) besteht darin, aus einer Menge $M = (x_1, \dots, x_n)$ von paarweise verschiedenen Stützstellen eine Interpolante als Linearkombination von Basisfunktionen ϕ zu finden [HAR96]. Durch ihren einfachen mathematischen Formalismus findet sich ein weites Feld an Einsatzmöglichkeiten für RBF's. Diese werden eingesetzt um beispielsweise die Effizienz von Simulationsprozessen in der Automobilindustrie zu steigern oder aber auch bei der Rekonstruktion von 3D Objekten sowie beim Ausdünnen der Punktwolken von Laserscanning Daten. Die Interpolation und Approximation von ungeordneten Punkten (scattered data interpolation and approximation) stellt somit eine Hauptanwendung für radiale Basisfunktionen dar. Eine tiefere Beschreibung der Anwendungen von radialen Basisfunktionen kann in [BUH03] nachgelesen werden.

Eine radiale Basisfunktion ist eine reelle Funktion, die nur vom Radius bzw. der Distanz abhängig ist. Dabei ist $|\cdot|$ die Euklidische Distanz (im Falle von kartesischen Koordinaten) und ϕ die Basisfunktion

$$\phi_{ij}(r) = \phi(|x - x_i|) . \quad (5.1)$$

Die zu wählenden Basisfunktionen sind mannigfaltig, abhängig von der gewählten Funktion ist im späteren Interpolationsprozess der Interpolationsfunktion ein Polynom niedrigen Grades hinzuzufügen. Beispiele für Basisfunktionen sind:

$$\textit{Linear} : \phi(r) = r \quad (5.2)$$

$$\textit{Gauss} : \phi(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.3)$$

$$\textit{Multiquadratics} : \phi(r) = \sqrt{1 + \left(\frac{r^2}{\sigma^2}\right)} \quad (5.4)$$

$$\textit{Cubic} : \phi(r) = r^3 \quad (5.5)$$

$$\textit{Thinplate} : \phi(r) = r^2 \ln(r + 1) \quad (5.6)$$

Die hier angeführten Gauss und Multiquadratics Funktionen besitzen den selbst zu wählenden Parameter σ . Dieser wird in der Literatur oft als die durchschnittliche Distanz zwischen den Punkten oder einfach mit $\sigma = 1$ angegeben [HAY71].

5.1 RBF Interpolation

Die Interpolation mit radialen Basisfunktionen erfolgt über eine gewichtete Summe als Translation um die Basisfunktionszentren. Dabei gilt folgende Interpolationsfunktion [WEN05]:

$$s(x) = p(x) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(|x - x_i|) \quad (5.7)$$

Die einzelnen Terme haben dabei folgende Bedeutung:

- s als die Interpolationsfunktion,
- p ist ein Polynom niedrigen Grades, typischerweise ersten oder zweiten,
- die λ_i sind die RBF Koeffizienten oder RBF Gewichte,
- ϕ ist die Basisfunktion,
- die x sind die Interpolationspunkte,
- die x_i sind die sogenannten RBF Zentren.

Die Interpolationsfunktion $s(x)$ setzt sich aus einer an den Zentren x_i befindlichen gewichteten Summe symmetrischer Basisfunktionen ϕ sowie einem Polynom $p(x)$ niedriger Ordnung zusammen. Ein Polynom ersten Grades würde den linearen Anteil der Funktion $s(x)$ repräsentieren und hätte die Form $p(x) = c_1 + c_2x + c_3y$. Die Euklidische Distanz wird durch Gleichung 5.1 repräsentiert oder für den Fall einer Extrapolation auf Gitterpunkte, wie es beim Wiederaufsetzen der Geoidhöhen im Restore Schritt notwendig ist, als Distanz zwischen den RBF Zentren und den Gitterpunkten.

5.2 RBF Berechnung

Aus den gegebenen N Punkten x_i mit den Funktionswerten f_i wird eine Funktion gesucht, die folgenden Zusammenhang erfüllt:

$$s(x_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.8)$$

Diese Funktion ist die in Gleichung 5.7 angegebenen Interpolationsfunktion. Wenn (p_1, \dots, p_l) eine Basis bestehend aus Polynomen vom Grad p , und $c = (c_1, \dots, c_l)$ die zugehörigen Koeffizienten von $p(x)$ darstellen, kann die Interpolationsbedingung aus Gleichung 5.8 in Matrix-Vektor Notation als lineares Gleichungssystem angeschrieben werden

$$A\lambda = f . \tag{5.9}$$

Setzt man nun zusätzlich die Polynomkoeffizienten an, folgt:

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} & 1 & x_1 & y_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} & 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} & 1 & x_n & y_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

Die Elemente c_n der Matrix sind hier für ein lineares Polynom dargestellt. Bei Polynomen höheren Grades erweitert sich das Gleichungssystem dementsprechend in den Zeilen und Spalten. In folgenden beiden Gleichungen sind die Elemente der Matrix aus Gleichung 5.10 nochmals aufgeführt

$$A_{ij} = \phi(|x_i - x_j|), \quad i, j = 1, 2, \dots, N , \tag{5.12}$$

$$P_{ij} = p_j(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, l . \tag{5.13}$$

Über das lineare Gleichungssystem (5.10) sind die RBF Gewichte λ und die Polynomkoeffizienten c und folglich $s(x)$ aus Gleichung 5.7 bestimmt. Beim Lösen eines Gleichungssystems der Form $A\lambda = f$ ist das Invertieren der Matrix A erforderlich. Dadurch stellt sich die Frage nach der Singularität von A . Eine Matrix ist singular wenn ihre Determinante verschwindet bzw. wenn sie linear abhängige Zeilen oder Spalten besitzt. Im Falle der RBF ist die Konditionierung der Matrix A von der räumlichen Distanz und der Wahl der Basisfunktion abhängig. Im Allgemeinen wird die Matrix A sehr dicht besetzt sein, aber eine generelle Aussage bezüglich der Singularitätskriterien aller Basisfunktionen lässt sich nicht treffen. Beschränkt man sich auf eine bestimmte Auswahl von RBF's, so sind diesbezügliche Aussagen aber möglich [MAR06].

Über Gleichung 5.7 kann auf beliebige Punkte auch außerhalb der RBF Zentren Extrapoliert werden. Für den Zweck der Geoidbestimmung handelt es sich streng genommen eigentlich nicht um eine Extrapolation, da noch RBF Zentren im Umfeld vorhanden sind. Im Falle von Gitterpunkten in den Grenzen des österreichischen Staatsgebiets sollte man von verdichten sprechen. Die Gesamtberechnung erfolgt in drei Schritten:

1. Wahl der RBF Zentren (Stützstellen)
2. Lösen des Gleichungssystems (5.10) um λ und c zu erhalten
3. Interpolation der RBF mit (5.7)

Für eine schnelle Berechnung der räumlichen Distanzen sind kartesische Koordinaten nötig. Bei gegebenen geodätischen Koordinaten erfolgt die Umrechnung in kartesische mittels

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{c}{V} + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (\frac{c}{V} + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ (\frac{b}{V} + h) \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

mit $c = \frac{a^2}{b}$, $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$ und $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$, wobei a und b den Halbachsen des Bezugsellipsoids entsprechen.

5.3 Praktische Anwendung der RBF

Radiale Basisfunktionen wurden in dieser Arbeit eingesetzt um die Korrekturflächen, die bei der Geoidbestimmung als Differenz zwischen den aus Schwereanomalien bestimmten Geoidhöhen und den gemessenen Geoidhöhen entstehen, zu modellieren. Aufgrund der geringen Anzahl von GPS/Niv. Punkten ist die dabei entstehende Matrix von der Dimension nicht groß und unproblematisch zu invertieren. Im Gegensatz zur sonst üblichen Parameterfläche wie beispielsweise dem Polynom dritten Grades, die die Korrekturfläche repräsentiert, entstehen beim Modellieren mit RBF's an den GPS/Niv. Punkten keine Interpolationsfehler.

In Abbildung 5.1 sind die Interpolationsfehler, also die Differenzen die durch das Verwenden eines Polynoms dritten Grades für die Korrekturfläche auftreten, beispielhaft für die GEOnAUT Korrekturfläche dargestellt. Die abgebildeten Schichtenlinien sind dabei aus den Restklaffungen in den 170 GPS/Niv. Punkten interpoliert.

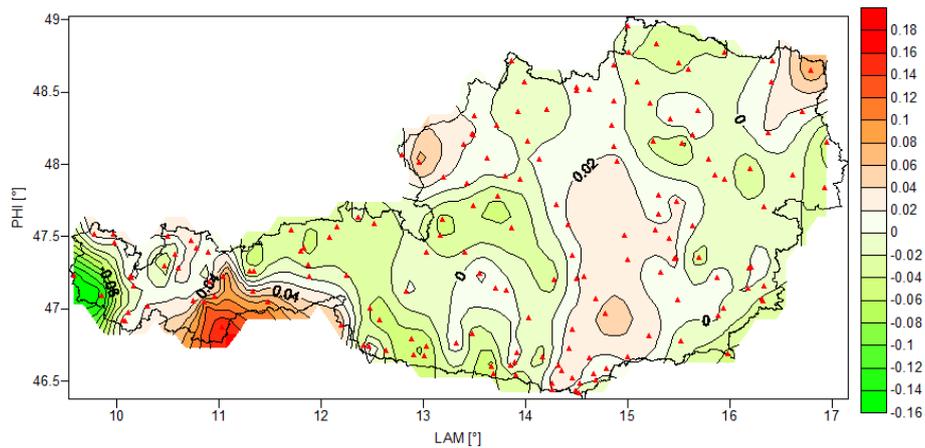


Abbildung 5.1.: Interpolationsfehler aufgrund des Polynoms dritten Grades in den 170 GPS/Niv. Punkten des Projektes GEOOnAUT [m]

5.4 Greedy Algorithmus

Bei Berechnungen mit großen Datenmengen ist es oftmals notwendig diese auszdünnen bzw. sich die Frage zu stellen, ob überhaupt die gesamte Datenmenge notwendig ist, oder ob eine Redundanz in den vorhandenen Daten vorliegt. Zu diesem Zweck wurde der Greedy Algorithmus (gieriger Algorithmus) [PAP82] entwickelt, welcher stets ein lokales Optimum errechnet. Im Falle von RBF bedeutet dies ein Vernachlässigen von RBF Zentren, ohne jedoch einen größeren Informationsverlust zu erleiden. Dieser Vorgang ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

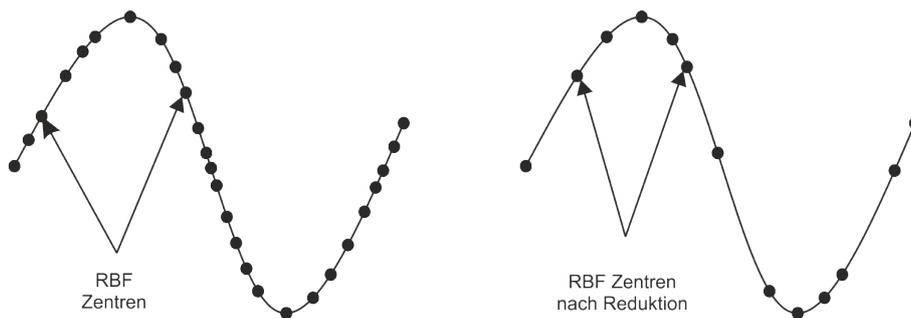


Abbildung 5.2.: Reduktion der RBF Zentren

Die Berechnung läuft dabei wie folgt ab:

1. Fehlerschranke ϵ wählen
2. Aus der Gesamtmenge Startpunkte auswählen

3. Berechne die RBF Koeffizienten aus Startpunkten, interpoliere an allen Punkten
4. Berechne für alle Punkte die Residuen $v_i = f_i - f(x_i)$
5. Wenn $\max(v_i) \geq \epsilon$ wird Punkt mit größter Abweichung dem Startpunktset hinzugefügt
6. Beginne wieder bei 3
7. Wenn $\max(v_i) \leq \epsilon$ STOP

Dieser Algorithmus bildet die Grundlage bei der Suche nach der minimalen Punktanzahl die notwendig ist, um die Korrekturflächen wieder rekonstruieren zu können. Ein einzelner Durchlauf des Greedy Algorithmus garantiert jedoch nicht die minimale Anzahl zu finden, da diese auch von der Wahl der Startpunkte abhängig ist.

Um das globale Optimum zu finden, ist es notwendig für alle GPS/Niv. Punkte alle nur möglichen Varianten durchzurechnen und jene mit den wenigsten Iterationsschritten zu bestimmen. Diese stellt das globale Optimum dar.

Die Dauer dieses sehr rechenintensiven Vorgangs ist zusätzlich noch abhängig von der Wahl der Fehlergrenze und der Anzahl der Ausgangspunkte. Für eine Fehlergrenze von $\pm 2\text{cm}$ bei 170 Startpunkten beträgt die Rechendauer dieser "strengen" Lösung des Greedy Algorithmus in etwa 2.5 Stunden. Bei gesamt circa 1.3 Millionen durchzuführenden Iterationsschritten ist diese lange Rechendauer nicht weiter verwunderlich. In Abbildung 5.3 ist die im Projekt GEOnAUT verwendete Korrekturfläche dargestellt.

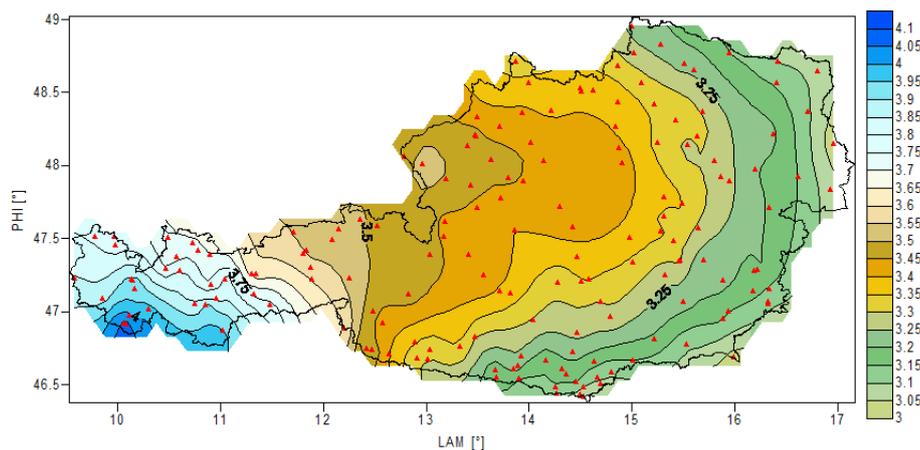


Abbildung 5.3.: Korrekturfläche bestimmt aus 170 GPS/Niv. Punkten - GEOnAUT [m]

In den beiden Abbildungen 5.4 und 5.5 sind die Ergebnisse des strengen Greedy Algorithmus für die Korrekturfläche des Projektes GEOnAUT zu sehen. In der ersten Abbildung ist die

Verteilung der benötigten Greedy Punkte sowie die beiden Startpunkte abgebildet, in der nächsten die Klaffungen, verursacht durch die Fehlergrenze.

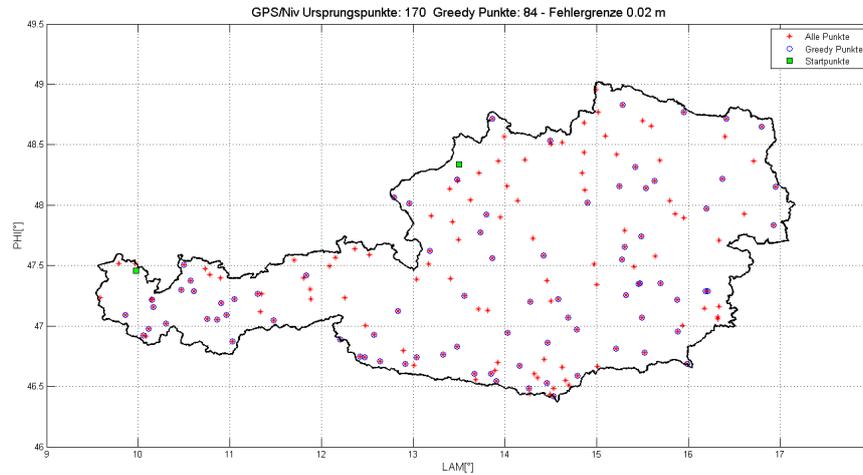


Abbildung 5.4.: Greedy Punkte und Restpunkte - GEOnAUT

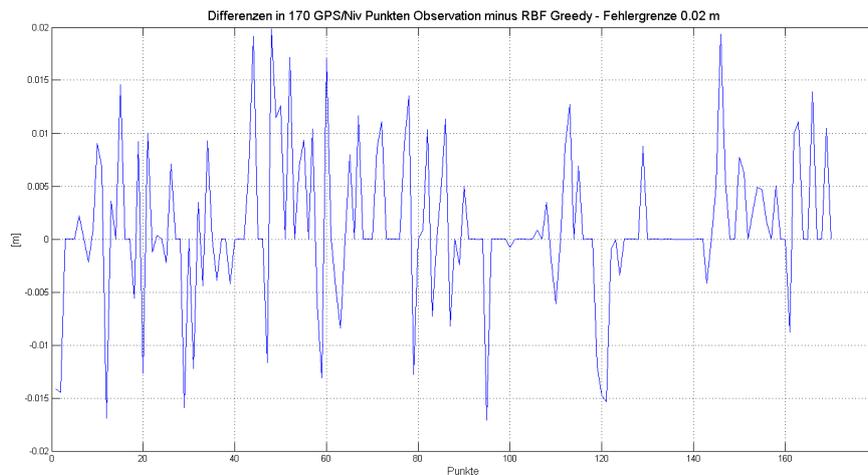


Abbildung 5.5.: Differenzen in den 170 GPS/Niv. Punkten der GEOnAUT Korrekturfläche

Die der Berechnung zu Grunde liegende radiale Basisfunktion ist linear und wie in Abbildung 5.5 dargestellt, liegen die Differenzen in den Restpunkten innerhalb der gewählten Fehlergrenze. Bei einer Fehlergrenze von $\pm 2\text{cm}$ ergeben sich für die GEOnAUT Korrekturfläche 84 Greedy Punkte die keinen Zuschlag erhalten. Die bei der Bestimmung der Korrekturfläche verwendeten Reduktionen und Kollokationseinstellungen sind in [PAI07] nachzulesen. Weitere Korrekturflächen, basierend auf den neueren GEOID+ Daten und Ergebnisse des Greedy Algorithmus sind in Kapitel 8.6 zu finden.

6 Cross Validation

Die Kreuzvalidierung oder auch Cross Validation genannt, erlaubt eine qualifizierte Aussage über die Qualität der Modellierung der Korrekturfläche. Hierbei gibt es verschiedene Möglichkeiten die Daten in Trainings und Testsets aufzuteilen. Drei dieser Möglichkeiten werden im folgenden kurz vorgestellt.

6.1 Leave-One-Out Cross Validation (LOOCV)

Der für diese Arbeit favorisierte Ansatz in Verbindung mit radialen Basisfunktionen ist die LOOCV. Bei dieser Methode wird ein GPS/Niv. Punkt temporär als Testpunkt ausgewählt. Mit den verbleibenden Trainingspunkten wird der Korrekturflächenwert \hat{N}_{korr} im Testpunkt prädiziert. Als Eingangsdaten dienen die Koordinaten der GPS/Niv. Punkte sowie ihre zugehörigen Werte der Korrekturfläche N_{korr} . Am Ende wird jeder Punkt einmal nicht in die Berechnung miteinbezogen. Die Berechnung für den Fall der LOOCV in Verbindung mit RBF läuft wie folgt ab:

1. Wähle einen Testpunkt aus dem Gesamtpunkteset mit N Punkten aus
2. Entferne den Testpunkt temporär aus dem Gesamtpunkteset
3. Berechne mit Trainingsset RBF Koeffizienten und prädiziere Korrekturflächenwert \hat{N}_{korr}
4. Bestimme die Residue $\Delta = N_{korr} - \hat{N}_{korr}$ für den Testpunkt
5. Füge Testpunkt wieder Gesamtpunkteset hinzu und entferne nächsten Punkt
6. Wiederhole für alle Punkte im Gesamtpunkteset Schritte 1 bis 5

Da immer nur einem Punkt entfernt wird, erweist sich diese Methode als relativ rechenintensiv, hat aber den Vorteil, dass keine Information verschwendet wird indem Punkte zu Gruppen zusammengefasst werden. Die Qualität des prädizierten Wertes ist sehr hoch, da bis auf $N - 1$ alle Punkte für die Berechnung der Koeffizienten der RBF bzw. des Polynoms herangezogen werden. In Abbildung 6.1 ist das Ablaufschema für die LOOCV visualisiert.

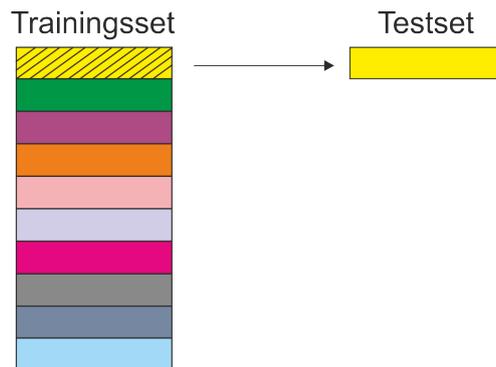


Abbildung 6.1.: LOOCV Trainings und Testdatenset

6.2 K-fold Cross Validation

Bei dieser Variante der Cross Validation wird das Gesamtpunkteset in Gruppen zu gleich vielen Beobachtungen zusammengefasst und jeweils wieder in Trainings und Testset unterteilt. Dabei wird immer eine Gruppe temporär aus dem Gesamtpunkteset eliminiert. Die Sets werden dabei sequentiell entfernt und wieder hinzugefügt. Das Zusammenfassen wird typischerweise in Gruppen mit drei (3-fold) oder mit zehn Datensätzen (10-fold) vorgenommen. Durch die gruppenhafte Einteilung wird Rechenzeit eingespart, jedoch ist die Qualität der prädizierten Werte nicht so hoch wie bei der LOOCV. Dies liegt daran, dass für die Prädiktion weniger Daten zur Verfügung stehen.

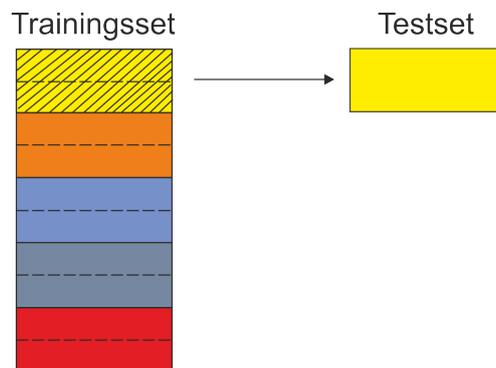


Abbildung 6.2.: K-fold Trainings und Testdatenset

6.3 Random Subsampling Cross Validation

Hier wird das Gesamtpunkteset zufällig in K Gruppen oder aber auch einzelne Beobachtungen aufgeteilt und anschließend entfernt. Im nächsten Schritt wird wieder die gleiche Anzahl von

Gruppen entfernt und die Werte erneut prädiziert. Die mit dieser Methode prädizierten Werte weisen eine ähnliche Qualität auf wie sie mit der K-fold Cross Validation zu erzielen ist. Die Subsampling Cross Validation ist in Abbildung 6.3 dargestellt.

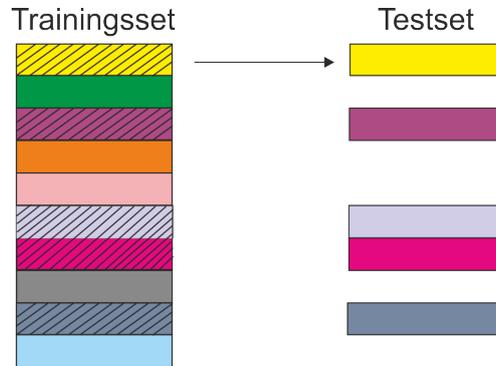


Abbildung 6.3.: *Subsampling Trainings und Testdatenset*

Abschließend kann festgehalten werden, dass die zu wählende Variante der Cross Validation immer von der Menge der vorliegenden Daten abhängig ist. Bei geringer Gesamtmenge sollte auf die LOOCV zurückgegriffen werden, bei großen Datenmengen empfiehlt die Literatur die 3-fold Cross Validation [KER99].

6.4 Root Mean Squares Error

Der Root Mean Squares Error (RMS) dient als Entscheidungshilfe bei der Wahl der optimalen Modellierungsfunktion. Hier spiegelt sich die durchschnittliche Abweichung der Prädiktion vom gegebenen Wert der Korrekturfäche wider. Dadurch kann eine qualitative Aussage über die Anpassung an die gegebenen Daten getroffen werden. Das bedeutet, mit dem RMS ist es möglich die optimale Basisfunktion für die RBF Anpassung zu finden sowie zu entscheiden ob für die vorliegende Korrekturfäche die radiale Basisfunktion oder die Polynom Anpassung besser geeignet ist. Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Kapitel 8.5 zu finden.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (N_{korr_i} - \hat{N}_{korr_i})^2} \quad (6.1)$$

Wobei N der Anzahl der Punkte, N_{korr} den gegebenen und \hat{N}_{korr} den geschätzten (prädizierten) Werten entspricht.

6.5 Gewichtung der GPS/Niv. Punkte Klassisch vs. LOOCV

Unter klassischer Gewichtung versteht man die Kollokationsberechnung mit allen Schwerefeldgrößen durchzuführen, wobei die GPS/Niv. Punkte a-priori alle die gleiche Genauigkeit erhalten. Aus Untersuchungen in Kapitel 8.4 wurde 1mm als geeignetes Gewicht für die Lagerung der GPS/Niv. Punkte ermittelt. Dieser Wert dient als Grundlage für die klassische Gewichtsbestimmung. Nach dem Wiederaufsetzen werden die Geoidhöhen N mit den gemessenen Geoidhöhen N_{gem} verglichen. Die sich so ergebenden Differenzen werden als Gewichte der GPS/Niv. Punkte in einen erneuten Kollokationsprozess eingeführt. Ergebnisse zur Gewichtsbestimmung sind in den Kapiteln 8.4.1 bzw. 8.4.2 zu finden.

Die Gewichtung zwischen den Schwerefeldgrößen muss als relativ zueinander angesehen werden. Sie spiegelt nicht die absolute Genauigkeit wider. Wird auf den GPS/Niv. Punkten gelagert, so muss die Genauigkeit dieser Punkte im Vergleich zu den anderen Schwerefeldgrößen natürlich höher sein. Durch das Lagern wird die Lösung auf diese Punkte "hingezogen". Erwähnt werden muss, dass aufgrund von Messunsicherheiten und diversen GPS Fehlereinflüssen sowie der Satellitenkonstellation, die ellipsoidische Höhe h eines Punktes nie so genau bestimmt werden kann wie die Lage. Somit sind 1mm absolute Genauigkeit in der ellipsoidischen Höhe praktisch nicht zu realisieren. Ein weiterer großer Nachteil ist, dass die GPS/Niv. Punkte, die für die Validierung der Geoidlösung verwendet werden, auch in die Berechnung einfließen. Somit sind Validierung und Berechnung nicht unabhängig voneinander.

Der Ablauf der klassischen Gewichtsbestimmung wird im folgenden beschrieben:

1. Kollokation $\Delta g_{red} \rightarrow N_{koll}$
2. Korrekturfläche N_{korr} approximiert aus $N_{koll} - N_{red}$
3. Korrekturfläche N_{korr} von N_{red} abziehen
4. Kollokation Schwerefeldgrößen $\Delta g_{red}(1mGal), \xi_{red}(0.3''), \eta_{red}(0.3''), N_{red}(1mm) \rightarrow N_{koll}$
5. N_{korr} sowie globalen N_{global} bzw. lokalen Anteil δN_{TC} zu N_{koll} addieren $\rightarrow N$
6. Gewichtsbestimmung aus $|N - N_{gem}|$

Auch die gemessenen Geoidhöhen müssen reduziert werden (siehe Gleichung 3.44), da die Kollokation die um den globalen und lokalen Anteil reduzierten Geoidhöhen liefert und dadurch nicht direkt die gemessenen Geoidhöhen N_{gem} in die Berechnung eingehen können. In Punkt 3 ist die Korrekturfläche N_{korr} von den reduzierten Geoidhöhen N_{red} abzuziehen, um

die Unterschiede zwischen den aus physikalischen Messungen bestimmten Geoidhöhen und den GPS/Niv. Punkten zu kompensieren. Diese Unterschiede sind später beim Wiederaufsetzen des Geoids wieder zu addieren. Mehr Details zur Remove-Restore Technik finden sich in Kapitel 3.5.1.

Nun ist mit Punkt 6 für jede GPS/Niv. Beobachtung ein individuelles Gewicht bestimmt worden und die Kollokation wird erneut analog zu dem in der Aufzählung erwähnten Punkt 4 durchgeführt. Der Unterschied bei dieser erneuten Berechnung liegt darin, anstatt der 1mm Gewichtung für die GPS/Niv. Punkte die zuvor bestimmten individuellen Gewichte zu verwenden. Validiert wird diese Lösung indem erneut Punkt 6 durchgeführt wird. Alle nun erhaltenen Residuen sollten unter der vom BEV angegebenen Genauigkeit der GPS/Niv. Punkte liegen. Die Problematik ist die erneute Validierung mit den nicht lösungsunabhängigen GPS/Niv. Punkten. Deshalb kann auch nur von einer "inneren Genauigkeit" der Geoidlösung gesprochen werden, da für eine absolute Genauigkeitsangabe zusätzliche nicht in die Kollokation mit eingeflossenen GPS/Niv. Punkte notwendig sind.

Der in dieser Arbeit neu eingeschlagene und alternative Weg für die Gewichtsbestimmung sieht vor, die Residuen Δ der LOOCV zu verwenden. Dies bedeutet weniger Rechenaufwand und es wird die Korrekturfläche als Basis für die Gewichtsbestimmung herangezogen und nicht direkt die GPS/Niv. Punkte. Die Idee dahinter ist in folgenden Schritten zusammengefasst:

1. Kollokation $\Delta_{red} \rightarrow N_{koll}$
2. Korrekturfläche N_{korr} aus $N_{koll} - N_{red}$
3. Gewichtsbestimmung aus LOOCV $\Delta = \left| N_{korr} - \hat{N}_{korr} \right|$

Der berechnete RMS (Gleichung 6.1) dient als Grenze für die Gewichtung. Alle Residuen, die ≤ 1 RMS sind, erhalten aufgrund von empirischen Untersuchungen 1mm als Gewicht. Darüber hinaus wird entsprechend den zunehmenden Residuen mit einem Faktor 10 abgewichtet. Dieser Faktor stammt ebenfalls aus empirischen Untersuchungen. In Kapitel 8.4 sind die Ergebnisse der klassischen Gewichtung sowie der Gewichtung mittels LOOCV Residuen aufbereitet.

7 Least Squares Collocation (LSC)

Die Kollokation nach kleinsten Quadraten geht auf *Helmut Moritz* zurück, welcher aufbauend auf den Arbeiten von *Horst Kadner* und *Torben Krarup* diese Methode für die Geoidbestimmung weiterentwickelte. Die Methodik eignet sich besonders um Daten verschiedenen Charakters, also heterogene Daten zu verarbeiten. Werden unterschiedliche Schwerefeldgrößen gemeinsam in einer Berechnung verwendet, so spricht man von Kollokation. Fließt nur eine Schwerefeldgröße in die Berechnung ein und wird diese für Gebiete berechnet wo keine Beobachtungen vorliegen, so wird dies Prädiktion genannt. Die Kollokation ist mittlerweile nicht mehr auf die Geoidbestimmung alleine beschränkt, sondern kommt auch beispielsweise in der Thermodynamik zur Anwendung [ALM09]. In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Kollokation erklärt. Ebenfalls eingegangen wird auf die Kovarianzfunktion, welche die statistische Abhängigkeit bzw. Korrelation zwischen gesuchter Größe und Messung darstellt. Eine detaillierte Beschreibung zur Herleitung der Kollokation findet sich in [MOR89] woraus auch die in diesem Kapitel verwendeten Herleitungen stammen.

7.1 Prädiktion nach kleinsten Quadraten

Es handelt sich bei der LSC um eine kombinierte Interpolations- und Ausgleichsmethode. Der Vorteil dieser Kombination liegt darin, dass das erzielte Ergebnis die beste lineare Schätzung im Sinne kleinster Fehlervarianzen σ_k^2 darstellt.

$$\sigma_k^2 = \min. \tag{7.1}$$

Gegeben sind zufällig verteilte Messungen l_n und gesucht wird das Signal s_i . Eine wichtige Voraussetzung für die Kollokation ist, dass beide Größen, also Messung und Signal einen verschwindenden Mittelwert aufweisen

$$E(l) = 0, \quad E(s) = 0. \tag{7.2}$$

Die zentrierten Größen können je nach ihrer Abhängigkeit in Kovarianz- und Kreuzkovarianzmatrizen zusammengefasst werden:

$$C_{ll} = \text{cov}(\vec{l}, \vec{l}) \quad (7.3)$$

$$C_{sl} = \text{cov}(\vec{s}, \vec{l}) \quad (7.4)$$

$$C_{ss} = \text{cov}(\vec{s}, \vec{s}) \quad (7.5)$$

Die Kovarianzmatrizen C_{ll} und C_{ss} beschreiben die Korrelation zwischen den Beobachtungen bzw. zwischen den Signalen. Die Kreuzkovarianzmatrix C_{sl} gibt den Zusammenhang zwischen der Beobachtung und dem gesuchten Signal wieder. Werden die Messungen zum Beobachtungsvektor \vec{l} zusammengefasst und ist der Zusammenhang zwischen beobachteter und gesuchter Größe über die Kovarianzfunktion gefunden, kann im Sinne kleinster Fehlervarianzen das gesuchte Signal \hat{s} geschätzt werden

$$\hat{s} = C_{sl} C_{ll}^{-1} \vec{l}. \quad (7.6)$$

Die zugehörige Fehlerinformation liegt in der Fehler-Kovarianzmatrix $C_{\varepsilon\varepsilon}$ vor

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = C_{ss} - C_{sl} C_{ll}^{-1} C_{sl}^T. \quad (7.7)$$

Aus den vorliegenden Beobachtungen ist es mit Gleichung 7.6 möglich, Beobachtungen des gleichen Typs auf beliebige Koordinaten zu präzisieren. Sind beispielsweise die Beobachtungen Schwereanomalien, sieht der Beobachtungsvektor wie folgt aus:

$$\vec{l} = [\Delta g_1, \Delta g_2, \dots, \Delta g_n]^T \quad (7.8)$$

Es liegen P_n Punkte mit n Schwereanomalien Δg vor. Soll nun eine Schwereanomalie in einen beliebigen Punkt Q präzisiert werden, so ergibt sich aus Gleichung 7.6 in Matrix-Vektor Notation:

$$\Delta \hat{g}_Q = [C_{Q1} \ C_{Q2} \ \dots \ C_{Qn}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \vdots \\ \Delta g_n \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Aus n Schwereanomalien wurde eine Schwereanomalie im Punkt Q präzisiert. Dieser Prädiktion liegt die Annahme von fehlerfreien Schwereanomalien zu Grunde. Wird in gleicher Weise für

einen Punkt P_n prädiziert, so ergibt sich wieder der Inputwert der Schwereanomalie. Die Prädiktion reproduziert sich für den fehlerfreien Fall für alle gegebenen Punkte P_n . Das Ergebnis ist somit eine Interpolation. Alle Kovarianzen basieren auf der gleichen Kovarianzfunktion, die nur von der Horizontaldistanz zwischen den Punkten abhängig ist. In Kapitel 7.3 wird darauf näher eingegangen.

7.2 Kollokation nach kleinsten Quadraten

Durch das Kombinieren von verschiedenen Schwerefeldgrößen geht die Prädiktion bzw. Interpolation nach kleinsten Quadraten in die Kollokation über. Die Prädiktion, wie sie in Kapitel 7.1 beschrieben ist, sieht fehlerfreie Messgrößen vor. Die Kollokation verallgemeinert die Berechnung und berücksichtigt einen stochastischen sowie systematischen Fehler in den Beobachtungen. Die Beobachtungsgleichung lautet

$$\vec{l} = A\vec{x} + \vec{t} + \vec{n} \quad (7.10)$$

mit \vec{l} dem Beobachtungsvektor, A der Designmatrix, \vec{x} dem Parametervektor, \vec{t} dem Signal und \vec{n} dem Messrauschen. Das Produkt aus $A\vec{x}$ repräsentiert den systematischen Anteil, beispielsweise einen Trend. Die Summe aus Signal und Rauschen stellt die stochastische, also zufällige Komponente dar. Das Signal \vec{t} ist ein lineares Funktional des Störpotentials

$$\vec{t} = BT . \quad (7.11)$$

In Gleichung 7.10 zeigt sich die Synthese zwischen Kollokation und Ausgleich. Für den Fall dass $B = 0$ oder $\vec{t} = 0$ geht die Kollokation in ein reines Ausgleichsproblem nach kleinsten Quadraten über. Für die Kollokation mit Parametern ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\hat{x} = (A^T C_u^{-1} A)^{-1} A^T C_u^{-1} \vec{l} , \quad (7.12)$$

$$\hat{s} = C_{st} C_u^{-1} (\vec{l} - A\hat{x}) . \quad (7.13)$$

Wird der systematische Anteil vernachlässigt ($A = 0$) und nur das Rauschen berücksichtigt, wird aus Gleichung 7.13 wieder die Grundgleichung der Kollokation

$$\hat{s} = C_{st} C_u^{-1} \vec{l} . \quad (7.14)$$

Das Rauschen C_{nn} steckt in der Kovarianzmatrix der Beobachtungen C_{ll} . Diese ist definiert als

$$C_{ll} = C_{tt} + C_{nn} . \quad (7.15)$$

Die Matrix C_{nn} ist eine reine Diagonalmatrix, die zur Kovarianzmatrix der Beobachtungen C_{tt} addiert wird. Diese a-priori Genauigkeitsinformation ist essentiell für die Gewichtung der Schwerefeldgrößen relativ zueinander und geht über die Kovarianzmatrix der Beobachtungen in die Berechnung ein. Für die Kollokation, in die Geoidhöhen zur Lagerung einfließen, können folgende Matrizen aufgestellt werden:

$$l = \begin{bmatrix} \Delta g_i \\ \xi_j \\ \eta_j \\ N_k \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$C_{st} = \begin{bmatrix} C_{P_i}^{N\Delta g_i} & C_{P_j}^{N\xi_j} & C_{P_j}^{N\eta_j} & C_{P_k}^{N N_k} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

$$C_{tt} = \begin{bmatrix} C_{\Delta g_i \Delta g_i} & C_{\Delta g_i \xi_j} & C_{\Delta g_i \eta_j} & C_{\Delta g_i N_k} \\ C_{\Delta g_i \xi_j} & C_{\xi_j \xi_j} & C_{\xi_j \eta_j} & C_{\xi_j N_k} \\ C_{\Delta g_i \eta_j} & C_{\xi_j \eta_j} & C_{\eta_j \eta_j} & C_{\eta_j N_k} \\ C_{\Delta g_i N_k} & C_{\xi_j N_k} & C_{\eta_j N_k} & C_{N_k N_k} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

$$C_{nn} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta g_i}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\xi_j}^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma_{\eta_j}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{N_k}^2 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Die Dimension des geschätzten Signals \hat{s} ist abhängig von der Anzahl der zu schätzenden Schwerefeldgrößen. Während die quadratische Matrix C_{ll} von der Anzahl der Einzelbeobachtungen n abhängig ist und die Dimension $n \times n$ besitzt, hat die Matrix C_{st} die Dimension $m \times n$ mit m als Anzahl der Schwerefeldgrößen.

Die Kollokation ist nicht allein auf die Schätzung von Geoidhöhen beschränkt, sondern es können alle Schwerefeldgrößen geschätzt werden. Alle Kollokationsberechnungen wurden mit dem Fortran Programm LSC durchgeführt, welches an der Technischen Universität Graz zur Geoidbestimmung verwendet wird.

7.3 Kovarianzfunktion des Störpotentials

Die Kovarianzfunktion des Störpotentials $K(P, Q)$ ist der bestimmende Parameter der Kollokation. Sind $T(P)$ und $T(Q)$ die Störpotentiale zweier Raumpunkte, so ist die Kovarianzfunktion $K(P, Q)$ zwischen diesen beiden Punkten mit M als Mittelwertoperator definiert als

$$K(P, Q) = M\{T(P)T(Q)\} . \quad (7.20)$$

In sphärischer Approximation ($r = R$) und unter der Annahme beide Punkte $P(\vartheta, \lambda)$ und $Q(\vartheta', \lambda')$ liegen auf der Erdoberfläche, ist die Funktion $K(P, Q)$ einzig von der sphärischen Distanz ψ abhängig. Die Kovarianzfunktion aus Gleichung 7.20 kann angeschrieben werden als

$$K(P, Q) = K(\psi) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} T(\vartheta, \lambda) T(\vartheta', \lambda') \sin \vartheta \, d\alpha \, d\vartheta \, d\lambda . \quad (7.21)$$

Mit α als Azimut und der Beziehung der Koordinaten gegeben über den sphärischen Kosinussatz

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda' - \lambda) . \quad (7.22)$$

In Anlehnung an Gleichung 7.2, wo die Größen einen verschwindenden Mittelwert aufweisen

$$M(T) = 0 \quad (7.23)$$

kann Gleichung 7.21 folgendermaßen vereinfacht dargestellt werden:

$$M(T) = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} T(\vartheta, \lambda) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda \quad (7.24)$$

Um Gleichung 7.24 zu lösen, bedient man sich der Entwicklung in harmonischen Kugelfunktionen, es gilt:

$$K(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n P_n(\cos \psi) \quad (7.25)$$

mit $P_n(\cos \psi)$ den Legendre'schen Polynomen und k_n den Koeffizienten der Gradvarianzen. Diese Gleichung stellt die Kovarianzfunktion des Störpotentials in sphärischer Approximation dar. Die Annahme, die getroffen wurde besagt, dass sich beide Punkte auf der Kugeloberfläche befinden. Sind die Punkte P und Q nicht auf der Kugeloberfläche sondern im Raum, gilt für diesen allgemeineren Fall die räumliche Kovarianzfunktion des Störpotentials:

$$K(P, Q) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{R^2}{r r'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) . \quad (7.26)$$

Mir r bzw. r' werden die Radien der Punkte P und Q bezeichnet, der Radius der Erde wird mit R benannt.

7.4 Kovarianzfortpflanzung der Schwerefeldgrößen

Um die Kovarianz zwischen verschiedenen Schwerefeldgrößen korrekt berechnen zu können, muss eine Kovarianzfortpflanzung durchgeführt werden. Dies ist immer möglich, wenn die gesuchte Schwerefeldgröße ein lineares Funktional des Störpotentials ist. Wird die Kovarianz einer Beobachtung zwischen zwei Punkten P und Q gesucht, wird angenommen, dass im Punkt P das Störpotential gegeben ist und im Punkt Q eine Größe l_i gemessen wurde. Die Größe l_i stellt ein lineares Funktional (L) des Störpotentials $T(Q)$ in diesem Punkt dar. Mathematisch kann dies als

$$l_i = L_i^Q T(Q) \quad (7.27)$$

angeschrieben werden. Für den Fall der Kollokation, also einer kombinierten Berechnung verschiedener Schwerefeldgrößen, gilt es T zu finden. Durch Messungen sind i lineare Funktionale L_i^T gegeben. Gleichung 7.9 kann als Kombination mehrerer Schwerefeldgrößen wie folgt angeschrieben werden:

$$\hat{T}(P) = \begin{bmatrix} C_{P1} & C_{P2} & \cdots & C_{Pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

Für C_{Pi} also der Beobachtung zwischen zwei Punkten P und Q gilt:

$$C_{Pi} = M\{T(P) L_i^Q T(Q)\} = L_i^Q M\{T(P)T(Q)\} = L_i^Q K(P, Q) \quad (7.29)$$

Das lineare Funktional L_i^Q angewandt auf die Kovarianzfunktion des Störpotentials ergibt die Kovarianz zwischen Signal und Beobachtung (C_{sl}). Die Kovarianz zwischen den Beobachtungen (C_{ll}) ergibt sich aus

$$C_{ij} = M\{L_i^P T(P) L_j^Q T(Q)\} = L_i^P L_j^Q M\{T(P)T(Q)\} = L_i^P L_j^Q K(P, Q) . \quad (7.30)$$

Da alle Schwerefeldgrößen lineare Funktionale des Störpotentials sind, kann mittels Kovarianzfortpflanzung jede beliebige Kovarianz bestimmt werden. Zu Beginn sind die linearen Funktionale L_i der Schwerefeldgrößen zu definieren:

$$N = \frac{T}{\gamma_0} \quad L_i = \frac{1}{\gamma_0} \quad (7.31)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T \quad L_i = -\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \quad (7.32)$$

$$\xi = \frac{1}{\gamma_0 r} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \quad L_i = \frac{1}{\gamma_0 r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad (7.33)$$

$$\eta = -\frac{1}{\gamma_0 r \sin \vartheta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \quad L_i = -\frac{1}{\gamma_0 r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad (7.34)$$

Diesen Gleichungen liegt wieder die sphärische Approximation zu Grunde. Dadurch wird γ_0 als die konstante mittlere Erdschwere eingeführt. Mit r wird die Distanz vom Erdmittelpunkt angegeben. Die Koordinaten werden mit ϑ bzw. λ bezeichnet, wobei $\vartheta = 90^\circ - \varphi$ entspricht.

Durch Kovarianzfortpflanzung ist es nun möglich die Kovarianzen und somit die Korrelation zwischen den Schwerefeldgrößen durch die Kovarianzfunktion des Störpotentials zu beschreiben. Die Kovarianzen sind als $cov [Output, Input]$ zu verstehen:

$$cov [N(P), \Delta g(Q)] = \frac{1}{\gamma_0} \left(-\frac{\partial K(P, Q)}{\partial r'} - \frac{2}{r'} K(P, Q) \right) \quad (7.35)$$

$$cov [N(P), \xi(Q)] = \frac{1}{\gamma_0^2 r'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \vartheta'} \quad (7.36)$$

$$cov [N(P), \eta(Q)] = -\frac{1}{\gamma_0^2 r' \sin \vartheta'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \lambda'} \quad (7.37)$$

$$\text{cov} [\Delta g(P), \Delta g(Q)] = \frac{\partial^2 K(P, Q)}{\partial r \partial r'} + \frac{2}{r'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial r'} + \frac{4}{rr'} K(P, Q) \quad (7.38)$$

$$\text{cov} [\Delta g(P), \xi(Q)] = -\frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial^2 K(P, Q)}{\partial r \partial \vartheta'} + \frac{2}{rr'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \vartheta'} \right) \quad (7.39)$$

$$\text{cov} [\Delta g(P), \eta(Q)] = \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{1}{r' \sin \vartheta'} \frac{\partial^2 K(P, Q)}{\partial r \partial \lambda'} + \frac{2}{rr' \sin \vartheta'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \lambda'} \right) \quad (7.40)$$

$$\text{cov} [\xi(P), \xi(Q)] = \frac{1}{rr'} \frac{\partial^2 K(P, Q)}{\partial \vartheta \partial \vartheta'} \frac{1}{\gamma_0^2} \quad (7.41)$$

$$\text{cov} [\xi(P), \eta(Q)] = -\frac{1}{rr' \sin \vartheta'} \frac{\partial^2 K(P, Q)}{\partial \vartheta \partial \lambda'} \frac{1}{\gamma_0^2} \quad (7.42)$$

$$\text{cov} [\eta(P), \eta(Q)] = \frac{1}{rr' \sin \vartheta \sin \vartheta'} \frac{\partial^2 K(P, Q)}{\partial \lambda \partial \lambda'} \frac{1}{\gamma_0^2} \quad (7.43)$$

Diese Beziehungen der Schwerefeldgrößen untereinander gelten zwischen den Punkten $P(r, \vartheta, \lambda)$ und $Q(r', \vartheta', \lambda')$. Für die Kovarianzfunktion des Störpotentials $K(P, Q)$ wird in dieser Arbeit auf die Modelle von *Tscherning-Rapp* zurückgegriffen.

7.4.1 Tscherning-Rapp Modellkovarianz

Neben dem Modell von *Reino Antero Hirvonen* [HIR62] ist das lokale Kovarianzmodell nach *Christian Tscherning* und *Richard Rapp* eines der etabliertesten für die Zwecke der Geoidbestimmung. Dies liegt auch an der frei verfügbaren Fortran Routine COVAXN, die es ermöglicht die Kovarianzen zu bestimmen [TSC76]. In [TSR74] sind geschlossene Funktionen, also Gleichungen aus denen weitere Kovarianzfunktionen abgeleitet werden können, für jede Schwerefeldgröße zu finden. Die verwendete Kovarianzfunktion für Schwereanomalien ist gegeben als

$$C(P, Q) = A \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-2)(n+B)} s^{n+2} P_n(\cos \psi) . \quad (7.44)$$

Der Wert für B ist nach Tscherning-Rapp mit $B = 24$ fix vorgegeben. Die Werte für A , N und s können über die Modellkovarianzangpassung bestimmt werden. Diese Thematik wird im nächsten Kapitel behandelt.

7.5 Anpassen der Modellkovarianzfunktion an die empirische Kovarianzfunktion

In einem ersten Schritt gilt es sich näher mit der empirischen Kovarianzfunktion auseinanderzusetzen. Generell ist die empirische Kovarianz für jene Schwerefeldgröße zu bestimmen, die in der Kollokation dominiert. Dies werden zumeist Schwereanomalien sein, da Lotabweichungen und Geoidhöhen nicht in dieser großen Anzahl vorliegen. Um die Grundbegriffe der Anpassung zu verstehen, dient Abbildung 7.1 zur Anschauung.

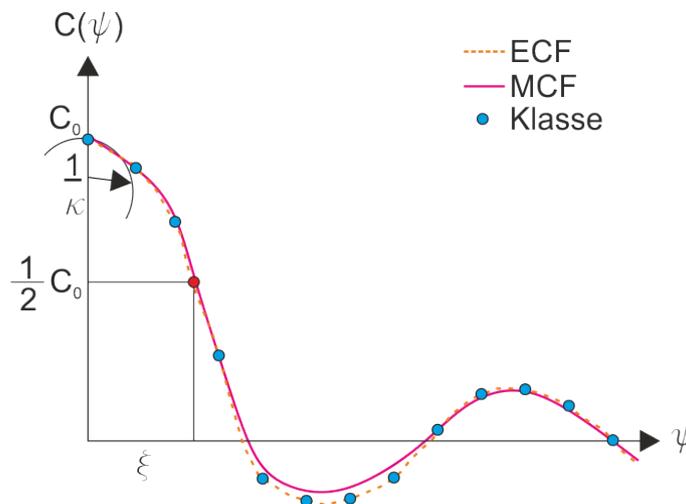


Abbildung 7.1.: Empirische und angepasste Modellkovarianzfunktion für Δg

Um die empirischen Kovarianzfunktion zu beschreiben werden drei Parameter benötigt. Der Erste, die Varianz C_0 ist der Kovarianzwert im selben Punkt, also mit der Distanz $\psi = 0$. Für diesen Punkt gilt:

$$C_0 = \text{var}\{\Delta g\} = C(0) \quad (7.45)$$

Mit zunehmender Distanz ψ nimmt die Korrelation ab. Die Strecke, bis sich die Varianz C_0 halbiert hat, wird Halbwertsbreite ξ genannt

$$C(\xi) = \frac{C_0}{2} . \quad (7.46)$$

Zwei Parameter sind nun bekannt. Um das Abfallen der Kovarianzfunktion zu beschreiben wird die Krümmung κ benötigt. In der Berechnung kann die Krümmung durch die Varianz des

Horizontalgradienten G_0 ersetzt werden. Mit $\kappa = G_0$ wird daraus der Krümmungsparameter χ wie folgt bestimmt:

$$\chi = \xi^2 \frac{G_0}{C_0} \quad (7.47)$$

Der Verlauf der ECF-Kurve gibt Aufschluss über die zuvor durchgeführte Reduktion. Ist etwa kein Ausschwingen um Null zu erkennen, sondern setzt sich das Abfallen der ECF-Kurve nach Erreichen der ψ -Linie fort, liegt noch eine starke Korrelation zwischen den Werten vor. Das Ausschwingen beschreibt einen regionalen Faktor der Geophysik, da Schwereanomalien von der Topographie abhängig sind.

Beim Bestimmen der empirischen Kovarianzfunktion muss die Distanz in Klassen mit äquidistanter Klassenbreite unterteilt werden. Dies ist notwendig um erkennen zu können, ab welcher Distanz ein Punkt zu einer bestimmten Klasse gehört. Wird die Klassenbreite zu klein gewählt, liegen zu wenige Kovarianzen vor und das Ergebnis ist nicht repräsentativ.

Für Österreich, das sich über eine Ost-West Ausdehnung von etwa 7° erstreckt, wurden 100 Klassen gewählt. Daraus ergibt sich umgerechnet eine Klassenbreite von circa 5km. Findet eine Anpassung an alle gegebenen Schwereanomalien statt, also auch an jene außerhalb Österreichs, so nimmt die Klassenbreite bei gleichbleibender Klassenanzahl auf 6km zu.

Der Output der ECF ist die Varianz und die Halbwertsbreite. Diese Werte dienen gleichzeitig als Input für die MCF. Da eine gute Anpassung von MCF an ECF für die Kollokation von entscheidender Bedeutung ist, reduziert sich der Freiheitsgrad der Anpassung alleine auf den Horizontalgradienten G_0 . Halbwertsbreite ξ und Varianz C_0 sind durch die ECF für die MCF bereits vorgegeben. Durch Variieren des Horizontalgradienten ist es möglich, die beiden Kurven hinreichend genau aneinander anzupassen und so den Übergang von der empirischen Kovarianzfunktion auf einen analytisch geschlossen Ausdruck zu ermöglichen.

Die verwendeten Fortran Programme für diesen Übergang sind das Programm EMPCOV, um die Parameter der empirischen Kovarianz zu bestimmen, sowie das Programm COVFIT, das die Modellkovarianzanpassung vornimmt.

7.6 Anpassen der MCF an reduzierte Schwereanomalien Δg_{red}

In diesem Kapitel sind einige Anpassungsergebnisse für den Schwereanomalien Datensatz aus Kapitel 4.1.2 zu sehen. Wenn nur an Daten innerhalb Österreichs angepasst wurde, bezieht sich die Anpassung auf 5104 Schwereanomalien (Abbildung 7.2). Die globalen Reduktionen unterscheiden sich durch eine unterschiedliche Wahl von Grad/Ordnung des Schwerefeldmodells GOCO01S. Mit der Faustformel 20000/Grad kann die räumliche Auflösung in Kilometern auf der Erdoberfläche bestimmt werden. Der kurzweilige Anteil wurde mittels Airy-Heiskanen topographisch/isostatisch reduziert. In den Tabellen sind die dabei bestimmten ECF/MCF Parameter zu sehen.

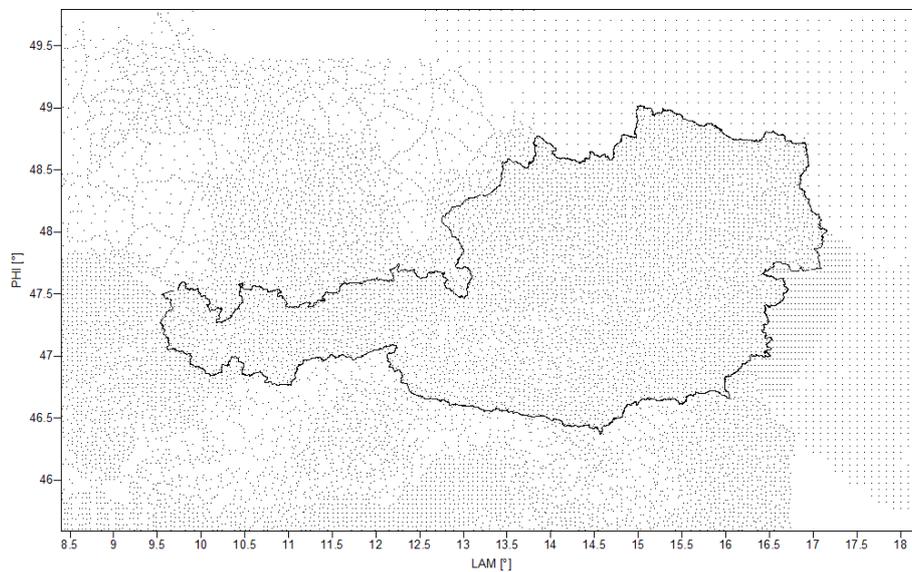


Abbildung 7.2.: Alle 13689 Schwereanomalien bzw. 5104 innerhalb Österreichs

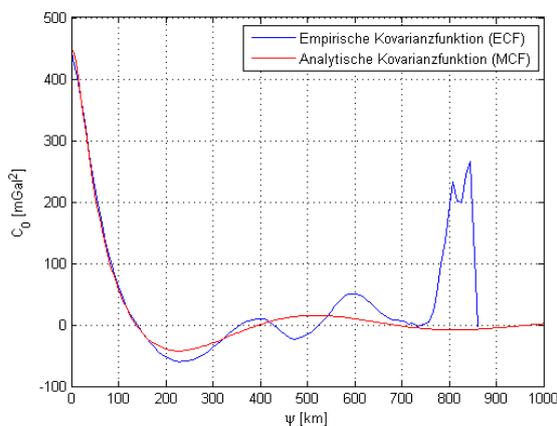


Abbildung 7.3.: GOCO25 "Alle"

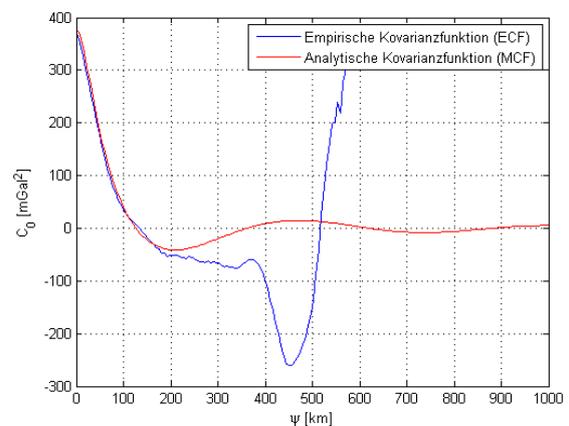


Abbildung 7.4.: GOCO25 "Österreich"

Tabelle 7.1.: ECF/MCF Anpassung GOCO25 an alle Δg_{red} bzw. nur Österreich

Anpassung	C_0 [$mGal^2$]	ζ [km]	G_0 [E^2]	A [$mGal^2$]	s	N
Alle	449.70	47.54	50	445.20	0.996857	68
Österreich	377.50	48.74	38	463.81	0.996184	75

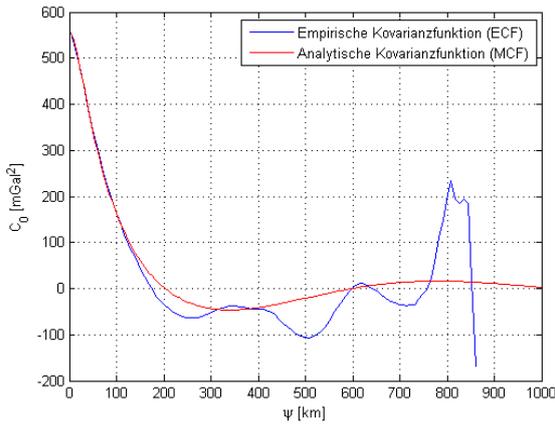


Abbildung 7.5.: GOCO50 "Alle"

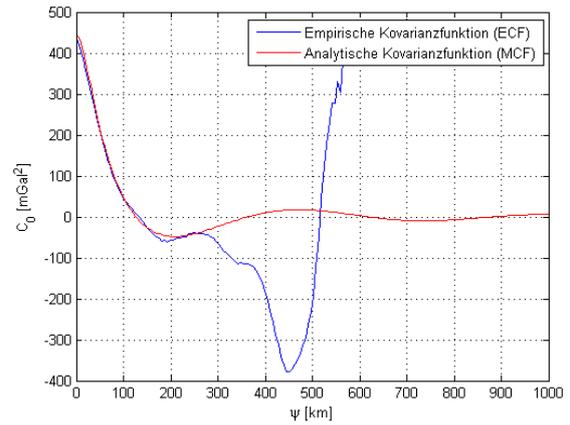


Abbildung 7.6.: GOCO50 "Österreich"

Tabelle 7.2.: ECF/MCF Anpassung GOCO50 an alle Δg_{red} bzw. nur Österreich

Anpassung	C_0 [$mGal^2$]	ζ [km]	G_0 [E^2]	A [$mGal^2$]	s	N
Alle	555.06	64.83	35	511.88	0.996064	45
Österreich	443.90	48.74	40	545.39	0.996184	75

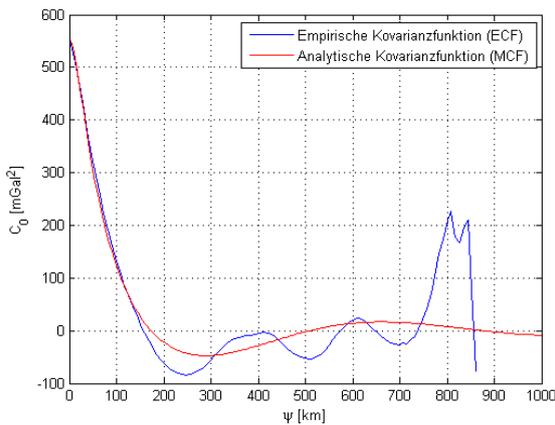


Abbildung 7.7.: GOCO70 "Alle"

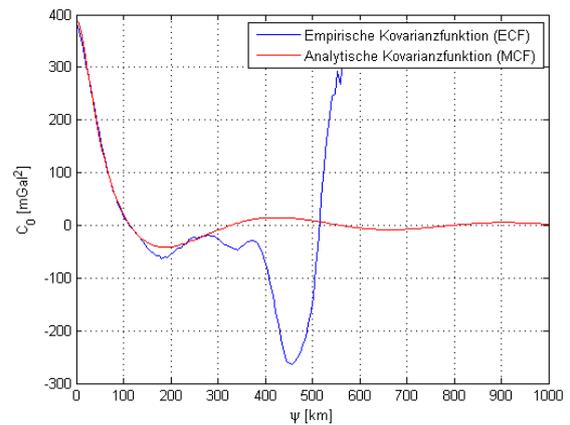
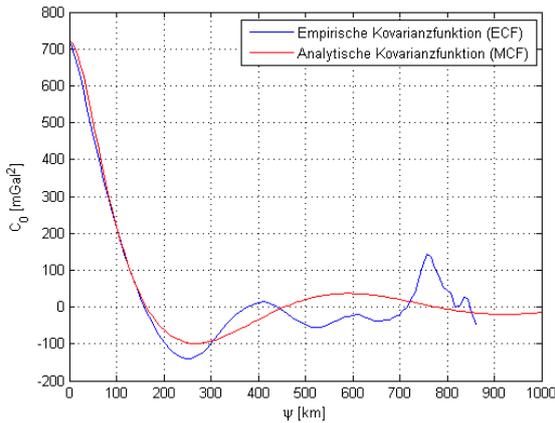
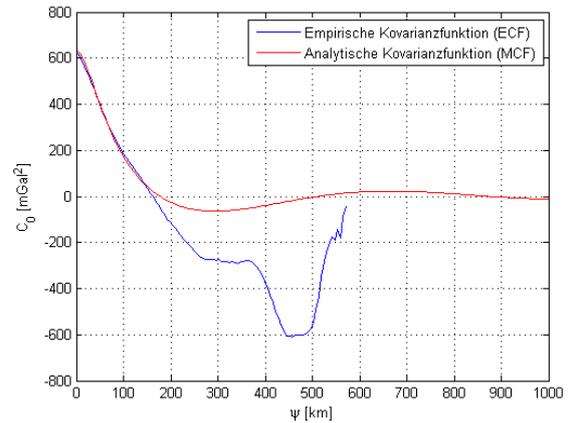


Abbildung 7.8.: GOCO70 "Österreich"

Tabelle 7.3.: ECF/MCF Anpassung GOCO70 an alle Δg_{red} bzw. nur Österreich

Anpassung	C_0 [$mGal^2$]	ζ [km]	G_0 [E^2]	A [$mGal^2$]	s	N
Alle	552.31	56.18	48	504.28	0.996577	53
Österreich	390.87	43.01	51	448.18	0.996780	83

**Abbildung 7.9.:** GOCO90 "Alle"**Abbildung 7.10.:** GOCO90 "Österreich"**Tabelle 7.4.:** ECF/MCF Anpassung GOCO90 an alle Δg_{red} bzw. nur Österreich

Anpassung	C_0 [$mGal^2$]	ζ [km]	G_0 [E^2]	A [$mGal^2$]	s	N
Alle	719.37	73.47	24	1489.07	0.992102	60
Österreich	629.43	65.94	32	766.46	0.994981	53

Wie am Ausschwingverhalten der empirischen Kovarianzfunktion deutlich wird, gelingt die Anpassung an die gesamten 13689 Schwereanomalien etwas besser als wenn nur an 5104 Schwereanomalien innerhalb Österreichs angepasst wird. Auffällig ist das erneute große Ausschwingen der ECF mit zunehmender Distanz, welches in jeder Abbildung zu erkennen ist. Dies hängt mit der Anzahl von Produkten zusammen, die pro Klasse für die Kovarianzen gebildet werden können. Da jeweils zu Beginn und am Ende der ECF weniger Produkte gebildet werden, kommt es zu numerischen Effekten und einem starken Ausschwingen. Eine weitere Auffälligkeit ist zwischen der GOCO25 und GOCO50 Anpassung an die Schwereanomalien für Österreich zu beobachten. Diese liefert die gleichen Ergebnisse für die Halbwertsbreite ζ sowie s und N . Ein möglicher Grund dafür ist der selbst zu wählende Horizontalgradient G_0 , der für beide Anpassungen fast ident ist.

Die beste Anpassung liefert Grad/Ordnung 25 wie in Abbildung 7.3 zu sehen ist. Die Halbwertsbreite ξ ist für beide Anpassungen (Alle, Österreich) ähnlich, C_0 und A liegen nahe beieinander. Eine kleinere Halbwertsbreite wurde nur für die Anpassung mit Grad/Ordnung 70 an Österreich Schweredaten erzielt, jedoch unterscheiden sich hierbei C_0 und A deutlich. Die Anpassung mit den größten Diskrepanzen lieferte Grad/Ordnung 90. Hier liegen die Halbwertsbreiten ξ über 65km, was auf eine vorhandene Korrelation in den Daten hindeutet. C_0 und A unterscheiden sich hier eklatant. Da mit Grad/Ordnung 25, was einer räumlichen Auflösung von etwa 800km entspricht, die besten Anpassungsergebnisse erzielt wurden, basieren einige weitere Untersuchungen dieser Masterarbeit auf dieser Kovarianzanpassung.

7.6.1 Berechnen der Geoidhöhen N_{koll}

Nach erfolgter Modellkovarianzanpassung (siehe Kapitel 7.6) wurden für die Anpassungen an alle 13689 Schwereanomalien die Kollokationsberechnungen durchgeführt. Die dabei erzielten Ergebnisse sind die Grundlage für die Bestimmung der Korrekturflächen (siehe Kapitel 8.5.1).

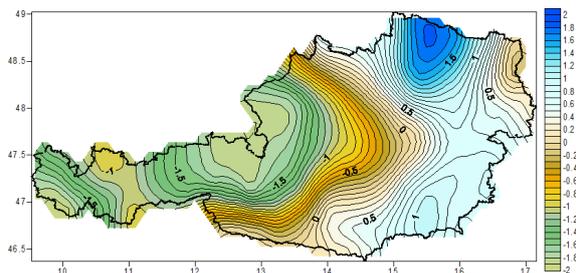


Abbildung 7.11.: N_{koll} GOCO25 [m]

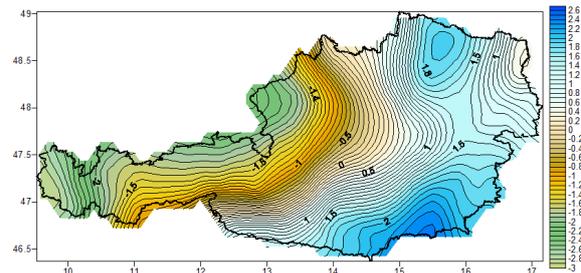


Abbildung 7.12.: N_{koll} GOCO50 [m]

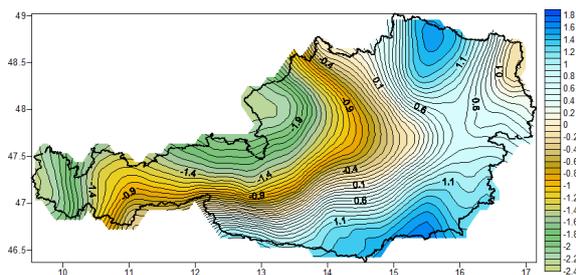


Abbildung 7.13.: N_{koll} GOCO70 [m]

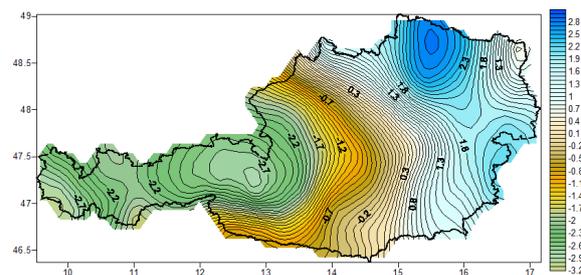


Abbildung 7.14.: N_{koll} GOCO90 [m]

Für Österreich ergeben sich Geoidhöhen N_{koll} von maximal ± 3.5 m. Dies gilt nur falls Geoidhöhen aus reduzierten Schwereanomalien Δg_{red} berechnet werden. Die Berechnung ist abhängig von der zuvor durchgeführten Reduktion sowie der Kovarianzanpassung. Als a-priori Genauigkeitsinformation ist für alle Schwereanomalien ± 1 mGal angenommen worden.

8 Ergebnisse

8.1 Untersuchungen zum Verhalten radialer Basisfunktionen und des Polynoms in Bezug auf die Korrekturfläche

Das Verhalten von RBF's und des Polynoms dritten Grades stehen im Fokus dieses Kapitels. Basierend auf den 170 GPS/Niv. Punkten des GEOnAUT Projektes und der dabei verwendeten Korrekturfläche (Abbildung 5.3) wurde mittels Surfer Kriging [CRE90] auf $10 \times 10\text{km}$ Gitterpunktstand interpoliert. In diesem Gitter wurden nun Bereiche ausgespart auf die in einem ersten Schritt ausgehend von den umliegenden 1296 Gitterpunkten auf 55 Punkte in den ausgesparten Bereichen interpoliert werden soll. Dieser Schritt wird für die Extrapolation umgekehrt durchgeführt. Abbildung 8.1 zeigt die Ausgangssituation.

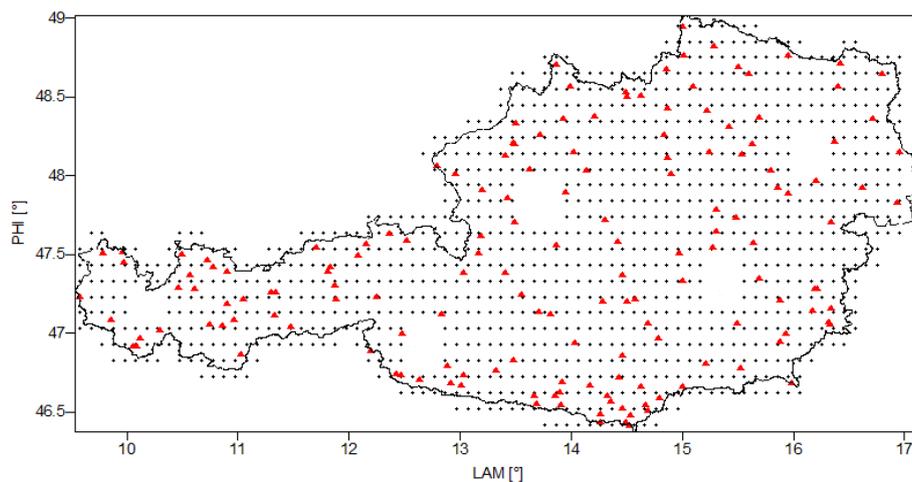


Abbildung 8.1.: Gitterpunkte $10 \times 10\text{km}$ (schwarz) - GPS/Niv. Punkte(rot)

Ein Polynom dritten Grades, das für die Modellierung der Korrekturfläche verwendet wird, ist definiert als

$$p = a + b(\lambda - \bar{\lambda}) + c(\varphi - \bar{\varphi}) + d(\lambda - \bar{\lambda})^2 + e(\varphi - \bar{\varphi})^2 + f(\lambda - \bar{\lambda})(\varphi - \bar{\varphi}) + g(\lambda - \bar{\lambda})^3 + h(\varphi - \bar{\varphi})^3 + i(\lambda - \bar{\lambda})^2(\varphi - \bar{\varphi}) + j(\lambda - \bar{\lambda})(\varphi - \bar{\varphi})^2 \quad (8.1)$$

mit $\bar{\lambda}$ bzw. $\bar{\varphi}$ als Mittelwerte der geographischen Koordinaten der GPS/Niv. Punkte und a, \dots, j den gesuchten Polynomkoeffizienten welche über einen Ausgleich bestimmt werden können.

Ziel dieser Untersuchung ist es aufzuzeigen wie sich die verschiedenen Funktionen (RBF's und Polynom) im Vergleich zum Kriging Verhalten und mit welcher Funktion die Krigingwerte am ehesten reproduziert werden können. In den folgenden Abbildungen 8.2 und 8.3 sind die dabei erzielten Abweichungen durch RBF Interpolation und Polynominterpolation zu sehen.

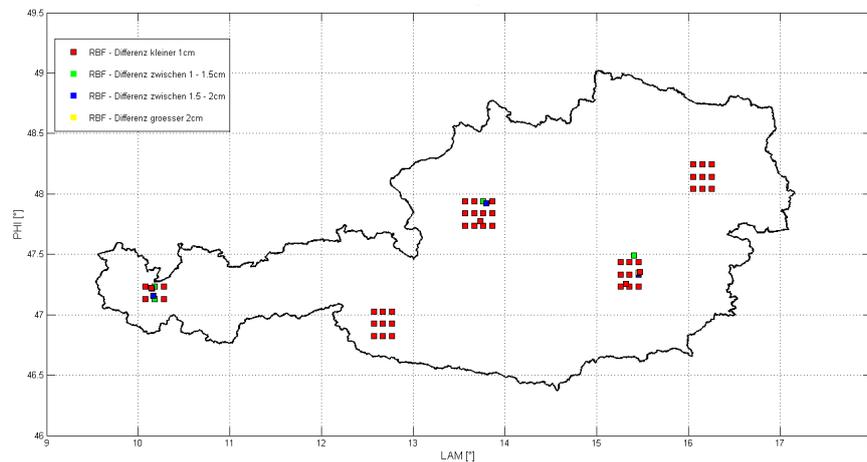


Abbildung 8.2.: Abweichungen RBF "Linear" zu Krigingwerten

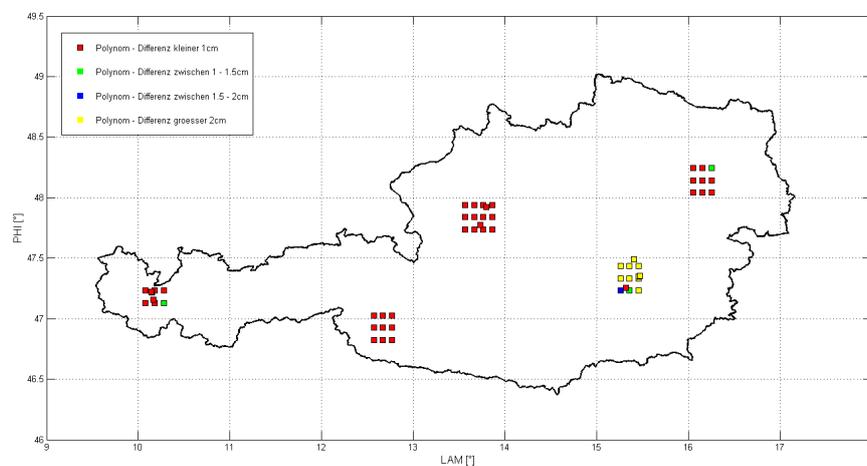


Abbildung 8.3.: Abweichungen Polynom dritten Grades zu Krigingwerten

Es ist zu erkennen, dass die Differenzen zwischen der linearen RBF und den Krigingwerten geringer sind als zwischen dem Polynom dritten Grades und den Krigingwerten. Um eine generelle Aussage treffen zu können, welche nun die geeignetere Methode für die Korrekturflächenmodellierung ist, sind für das gleiche Gitter auch andere radiale Basisfunktionen zur Berechnung herangezogen worden. Jede dieser in den Gleichungen 5.2 bis 5.6 angeführten

RBF's erzielt an den 55 ausgesparten Punkten kleinere Differenzen als das Polynom. Ebenfalls von Interesse ist die Größenordnung der Differenzen. Wie in den Abbildungen 8.4 und 8.5 zu sehen ist, kommt es beim Polynom (rote Linie) zu einem Ausschlagen in den Randbereichen der Darstellung, während die RBF relativ gleich verteilte Abweichungen aufweist.

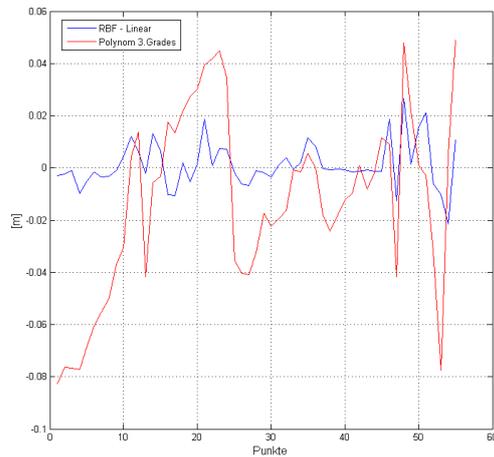


Abbildung 8.4.: *Abweichungen von RBF Linear und Polynom*

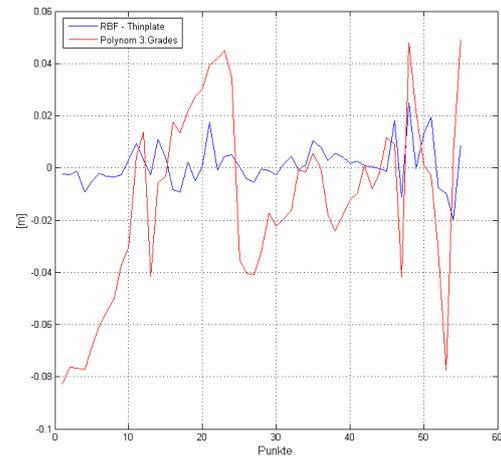


Abbildung 8.5.: *Abweichungen von RBF Thinplate und Polynom*

Das Verhalten der beiden radialen Basisfunktionen ist in diesem Fall ähnlich, was sich auch an den fast gleichen Abweichungen ablesen lässt. Grund dafür ist der relativ glatte Werteverlauf in den 55 Punkten durch die Interpolationsfunktion Kriging.

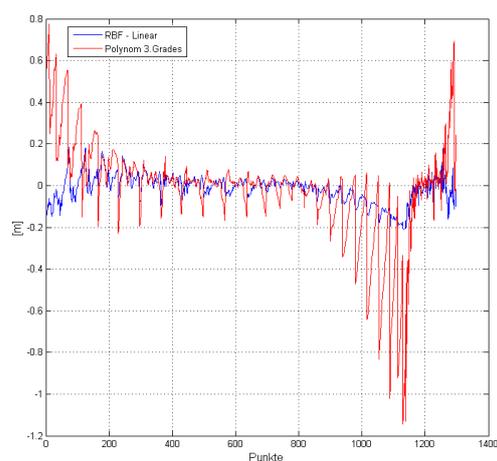


Abbildung 8.6.: *Extrapolation RBF Linear und Polynom*

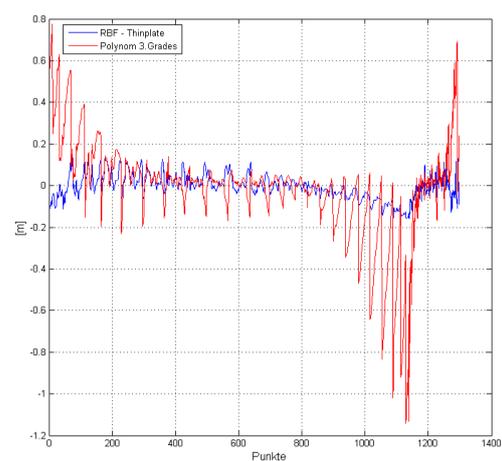


Abbildung 8.7.: *Extrapolation RBF Thinplate und Polynom*

Gleiches spiegelt sich auch wider, wenn eine Extrapolation ausgehend von den 55 zuvor ausgesparten Punkten auf die umliegenden 1296 Gitterpunkte erfolgt. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 8.6 und 8.7 dargestellt. Es zeigt sich wieder ein starkes Schwingen des Polynoms und die relativ gleichmäßigen Residuen der radialen Basisfunktion. Es ist auch zu erkennen, dass die beiden RBF's mit wenig Ausgangsinformation deutlich besser umgehen können als das Polynom. Das dies jedoch nicht für jede RBF zutrifft zeigen die Abbildungen 8.8 und 8.9. Während für die Berechnung der Abweichung in den 55 ausgesparten Gitterpunkten mit der kubischen Basisfunktion ein ähnliches Verhalten wie bei der linearen und der Thinplate Basisfunktionen auftritt, sind die Residuen bei der Extrapolation auf das Gitter viel größer als in den Abbildungen 8.6 und 8.7.

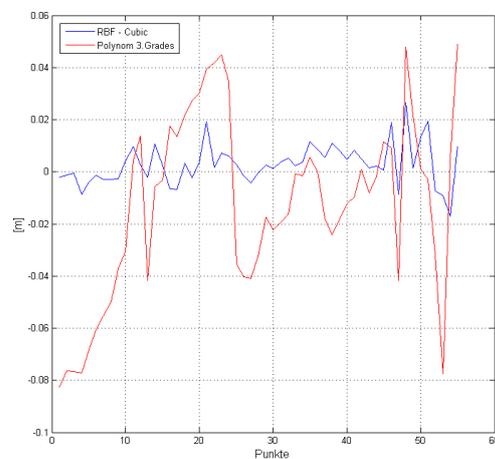


Abbildung 8.8.: *Abweichungen RBF Cubic und Polynom*

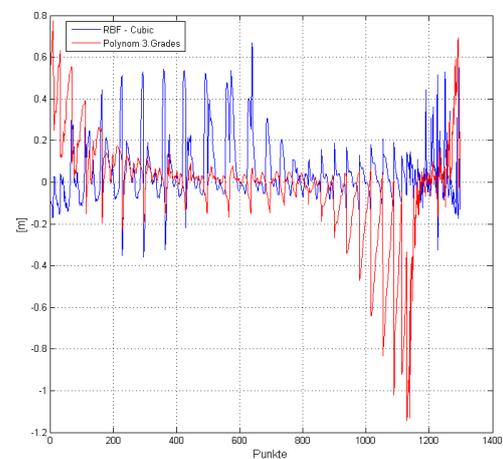


Abbildung 8.9.: *Extrapolation RBF Cubic und Polynom*

Ganz entscheidend für die Wahl der radialen Basisfunktion ist die zu interpolierende Fläche. Ein Maß für die am besten geeignete RBF ist der RMS, der in Kapitel 6.4 beschrieben ist. Da es jedoch beim Modellieren mit Polynomen dritten Grades oder auch höheren Grades häufig zum Ausschwingen kommt, scheinen bestimmte RBF's für die Modellierung von Korrekturflächen die bessere Wahl zu sein. Ein Beispiel für auftretende Differenzen durch das Ausschwingverhalten an den Grenzgebieten Österreichs liefert Abbildung 8.53.

8.2 Unterschiede der Interpolationsfunktionen bei der Modellierung der Korrekturfläche

Es soll nun gezeigt werden, wo die in Kapitel 8.1 festgestellten Differenzen an den Gitterpunkten auftreten. Zu diesem Zweck wurde das gleiche 10×10 km Gitter wie in Abbildung 8.1 verwendet, ohne jedoch künstliche Aussparungen zu erzeugen. Die Ausgangsdaten sind hier ebenfalls die 170 GPS/Niv. Punkte des GEOnAUT Projektes bzw. die daraus resultierende Korrekturfläche. Anschließend wurde ausgehend von diesen GPS/Niv. Punkten, nur auf das Gitter mit 1181 Punkten interpoliert und die Differenzen zu den zuvor ermittelten Krigingwerten aus Kapitel 8.1 gebildet.

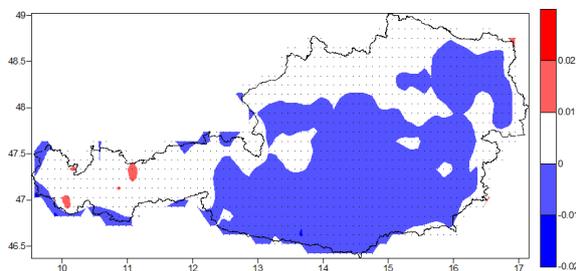


Abbildung 8.10.: Differenzen RBF Linear zu Krigingwerten [m]

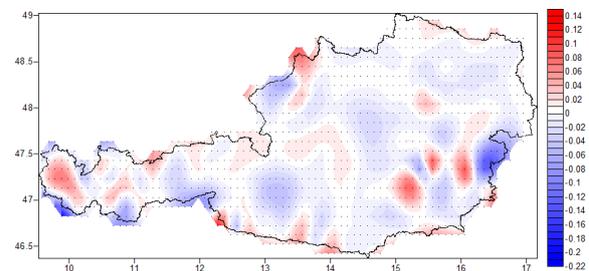


Abbildung 8.11.: Differenzen RBF Cubic zu Krigingwerten [m]

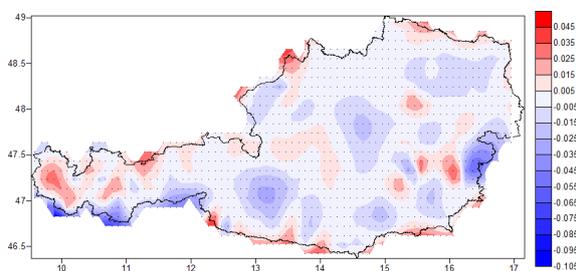


Abbildung 8.12.: Differenzen RBF Thinpl. zu Krigingwerten [m]

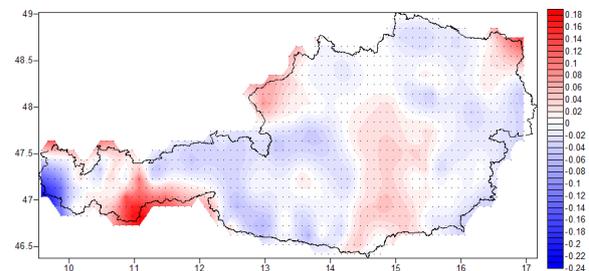


Abbildung 8.13.: Differenzen Polynom zu Krigingwerten [m]

Wie in den obigen Abbildungen zu erkennen, streut die Differenz je nach verwendeter Basisfunktion. Für die lineare RBF ergab sich die beste Anpassung mit einer Streuung von weniger als ± 2 cm und somit weist diese RBF die kleinsten Differenzen auf. Auffällig sind auch hier wieder die relativ großen Abweichungen der kubischen Basisfunktion zu den Krigingwerten. Das im Projekt GEOnAUT für die Korrekturfläche verwendete Polynom scheint aufgrund der Form Österreichs vor allem im Westen (Tirol und Vorarlberg) Probleme bei der Modellierung zu haben (Abbildung 8.13). Hier kommt es zu den größten Abweichungen, während für den Rest Österreichs mit ± 4 cm passable Ergebnisse zu erzielen sind.

8.3 Auswirkung der RBF auf den Greedy Algorithmus

Ausgehend von dem in Kapitel 8.1 erzeugten Gitter gilt es zu klären ob und vor allem wie die Wahl einer bestimmten radialen Basisfunktion den Greedy Algorithmus (Kapitel 5.4) beeinflusst. Für diese Untersuchungen durchlaufen die Gitterpunkte den Greedy Algorithmus einmal mit der linearen Basisfunktion und ein anderes mal mit der kubischen Basisfunktion. Es zeigte sich, dass für eine Fehlergrenze von $\pm 2\text{cm}$ eine Modellierung mit beiden Basisfunktionen möglich ist, jedoch die lineare Basisfunktion weniger als halb soviel Greedy Punkte benötigt wie die kubische Basisfunktion. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in den folgenden beiden Abbildungen 8.14 und 8.15 zu sehen.

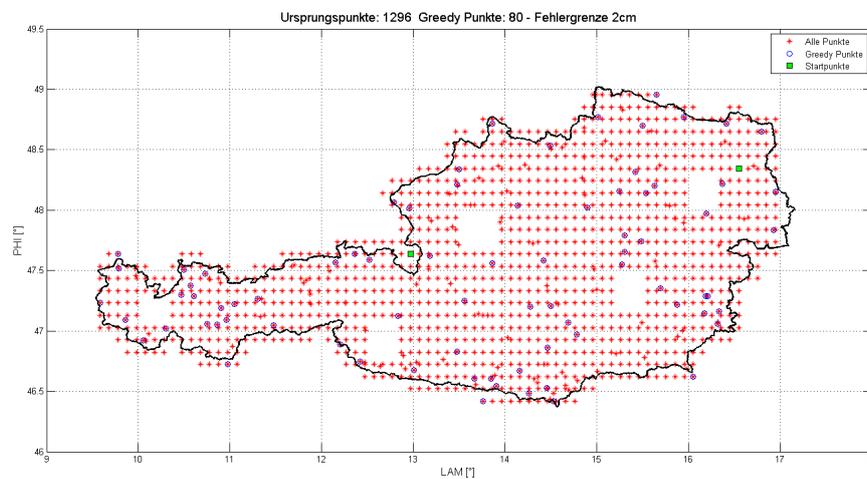


Abbildung 8.14.: Greedy Algorithmus berechnet mit RBF "Linear"

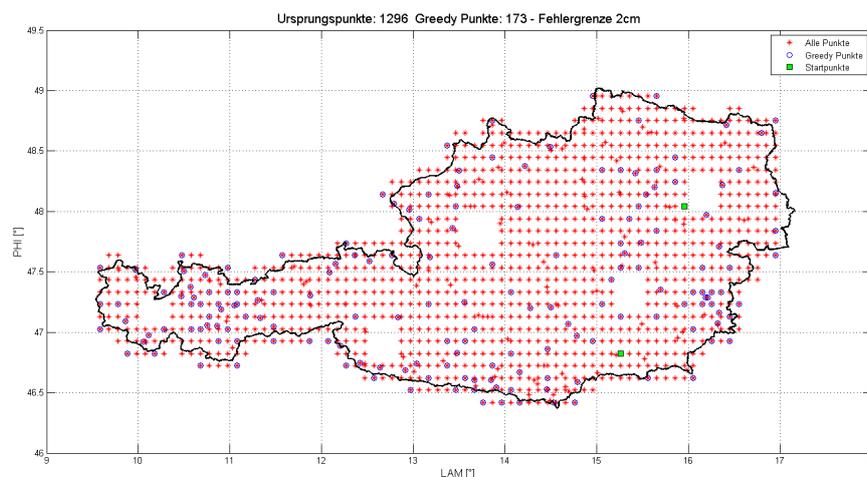


Abbildung 8.15.: Greedy Algorithmus berechnet mit RBF "Cubic"

Somit hat eine passende Auswahl der Basisfunktion sehr wohl Einfluss auf den Greedy Algorithmus. Eine Modellierung ist mit unterschiedlichen Basisfunktionen möglich, jedoch wird bei einer nicht optimalen Wahl der RBF zu viel an Information benötigt. Das bedeutet, es werden mehr Greedy Punkte verwendet als eigentlich notwendig.

Bei 1296 Ausgangspunkten sind mit der linearen RBF 80 Greedy Punkte notwendig um die verbleibenden 1216 Restpunkte innerhalb der Fehlergrenze zu rekonstruieren. Wird die kubische RBF verwendet, so werden 173 Greedy Punkte benötigt. Je besser die Wahl der RBF, desto weniger Punkte sind notwendig um die Korrekturfläche zu modellieren. Umgelegt auf die Remove-Restore Technik (Kapitel 3.5.1) bedeutet dies, dass bei RBF Modellierung weniger GPS/Niv. Punkte in den Kollokationsprozess einfließen und mehr Punkte für die abschließende Validierung des Geoids bzw. der Transformationsfläche zur Verfügung stehen.

8.3.1 Adaptierter Greedy Algorithmus

Der Greedy Algorithmus liefert abhängig von der Wahl der Startpunkte und der radialen Basisfunktion ein lokales Optimum an Greedy Punkten (Kapitel 5.4). Ob dieses lokale Optimum gleichzeitig auch ein globales Optimum darstellt, zeigt sich erst nachdem alle Varianten von Startpunkten mit allen Varianten von RBF's kombiniert durchgerechnet und verglichen worden sind. Ist dies wie in Abbildung 5.4 geschehen, stellt sich nun die Frage wie hoch der Informationsverlust und damit verbunden, der Genauigkeitsverlust am Gitter ist. Gesucht ist also der Unterschied zwischen einer Berechnung, in die alle 170 GPS/Niv. Punkte als Ausgangsinformation einfließen im Vergleich zur Variante, die der adaptierte Greedy Algorithmus als Ergebnis liefert. Die Ergebnisse sind hier für die lineare RBF dargestellt.

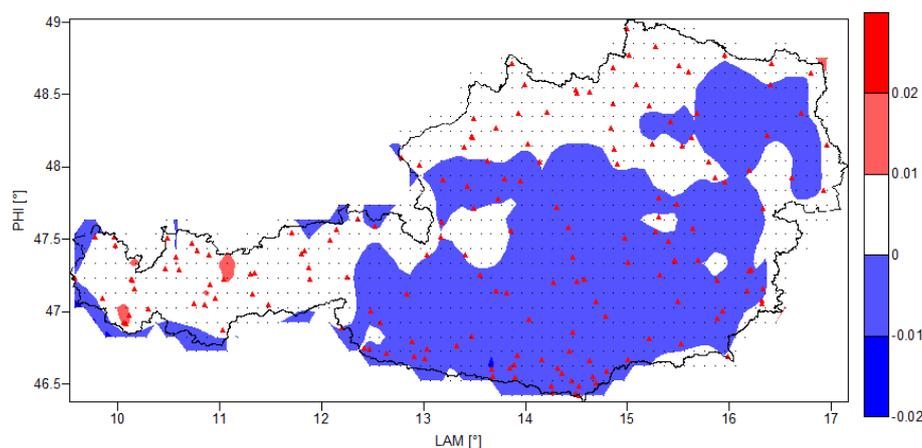


Abbildung 8.16.: *Differenzen an den Gitterpunkten berechnet mit RBF "Linear" - Input 170 GPS/Niv. Punkte [m]*

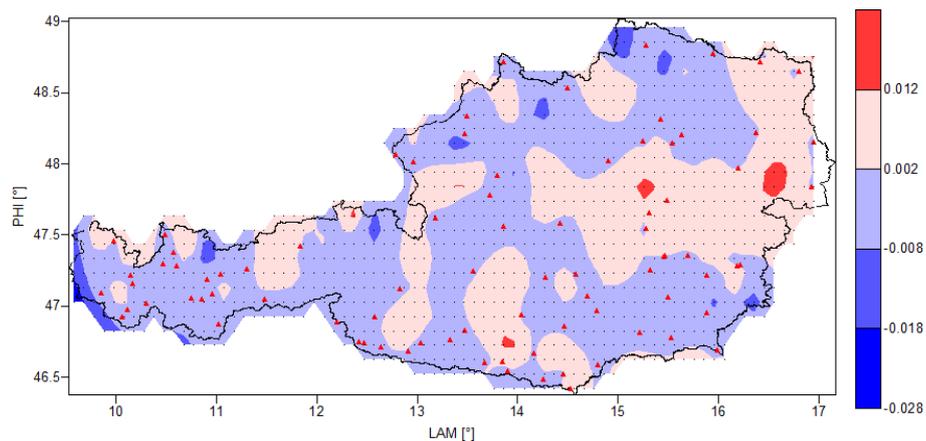


Abbildung 8.17.: *Adaptierter Greedy Algorithmus - Differenzen an den Gitterpunkten berechnet mit RBF "Linear" - Input 84 GPS/Niv. Punkte [m]*

Die Reduktion der GPS/Niv. Punkte durch den Greedy Algorithmus verursacht natürlich auch einen Verlust von Information für die Bestimmung der RBF Koeffizienten. Dies spiegelt sich in den leicht größer werdenden Residuen wider (Abbildung 8.17). Diese Residuen werden wie schon in Kapitel 8.1 als Differenzen zu den Krigingwerten gebildet.

Trotz der Halbierung der Ausgangsdaten kommt es nicht zu signifikant anderen Ergebnissen als bei der Berechnung mit allen 170 GPS/Niv. Punkten. Somit kann festgehalten werden, dass der Greedy Algorithmus für die Rekonstruktion der Korrekturfläche bei der Geoidbestimmung und für das Wiederaufsetzen der Geoidhöhen (Restore Schritt) am Gitter durchaus geeignet ist.

Von Interesse ist auch das Verhalten eines Polynoms dritten Grades für die gleiche Konstellation. Wie aus dem Vergleich zwischen Abbildung 8.18 und Abbildung 8.19 zu erkennen, ist auch das Polynom robust gegenüber einer Verminderung der GPS/Niv. Punkte und könnte somit auch zum Wiederaufsetzen der Geoidhöhen in Verbindung mit dem adaptierten Greedy Algorithmus verwendet werden.

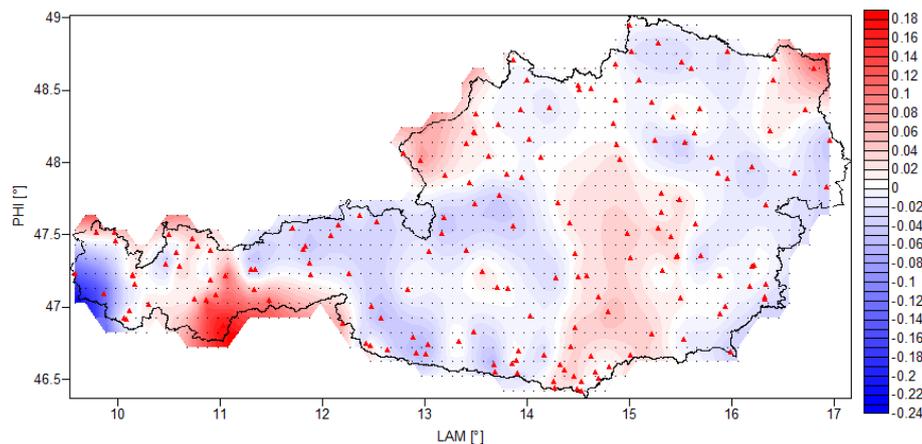


Abbildung 8.18.: *Differenzen an den Gitterpunkten berechnet mit Polynom dritten Grades - Input 170 GPS/Niv. Punkte [m]*

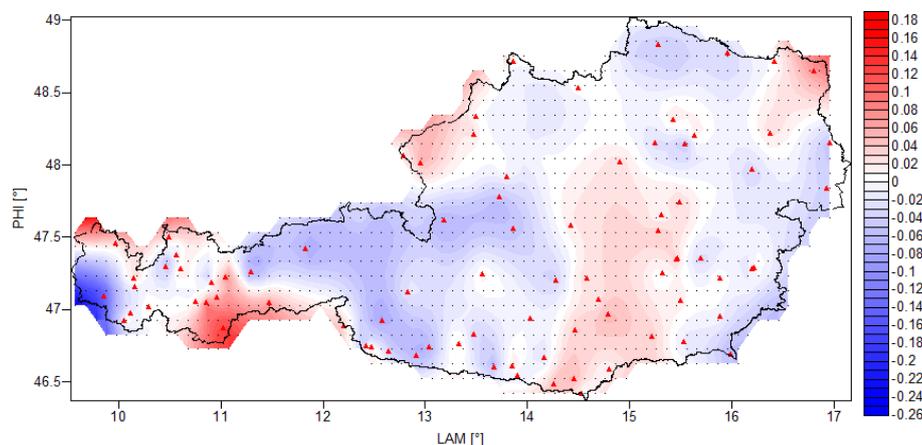


Abbildung 8.19.: *Adaptierter Greedy Algorithmus - Differenzen an den Gitterpunkten berechnet mit Polynom dritten Grades - Input 84 GPS/Niv. Punkte [m]*

Auffällig sind auch wieder die großen Differenzen, die im Westen Österreichs auftreten. Diese Abweichungen am Gitter in Abbildung 8.19 sind allerdings nicht signifikant größer als bei der Berechnung mit allen 170 GPS/Niv. Punkten.

8.4 Gewichtung von GPS/Nivellement Punkten im Kollokationsprozess

Dieses Kapitel erörtert die Frage des optimalen Gewichts der Schwerefeldgrößen relativ zueinander. Für die Schwereanomalien und Lotabweichungen ergeben sich nach [KUH02] als optimales Gewicht 1mGal bzw. 0.3". Die kombinierte Lösung des GEOnAUT Projektes setzte das Gewicht für GPS/Niv. Punkte auf 1mm fest. Diese damals getroffene Festlegung wurde erneut nachvollzogen und basierend auf RBF und Polynom Modellierung verifiziert. Ein weiterer Punkt war die alternative Gewichtung der GPS/Niv. Punkte über Residuen, die sich aus der LOOCV ergeben (Kapitel 6.1). Für alle Untersuchungen wurde das globale Schwerefeldmodell GOCO01S bis Grad/Ordnung 25 zur Reduktion des langwelligen Anteils verwendet sowie für den kurzwelligen Anteil eine topographisch/isostatische Reduktion nach Airy-Heiskanen durchgeführt. Die sich dabei ergebenden Parameter der Kovarianz Anpassung aus Kapitel 7.6 sind in folgender Tabelle 8.1 noch einmal dargestellt.

Tabelle 8.1.: ECF/MCF Anpassung GOCO25 an alle Δg_{red} bzw. nur Österreich

Anpassung	C_0 [mGal ²]	ζ [km]	G_0 [E ²]	A [mGal ²]	s	N
Alle	449.70	47.54	50	445.20	0.996857	68
Österreich	377.50	48.74	38	463.81	0.996184	75

8.4.1 Gewichtung bei der Modellierung mit RBF

Die Kovarianz Anpassung der Schwereanomalien für das gravimetrische Geoid N_{koll} erfolgte einerseits an alle 13689 Schweredaten bzw. an 5104 Schwereanomalien innerhalb Österreichs. Die Gewichtsbestimmung in dieser Untersuchung erfolgte auf Basis der an alle 13689 Schwereanomalien angepassten Modellkovarianzfunktion. Weiters wurde die Modellierung der Korrekturfläche mit der linearen RBF durchgeführt und das Geoid bzw. die Transformationsfläche bestimmt. Die Lagerung des Geoids erfolgte auf allen 192 GPS/Niv. Punkten. In den folgenden Abbildungen sind die absoluten Differenzen des wieder aufgesetzten Geoids N zu den GPS/Niv. Punkten N_{gem} zu sehen. Die absoluten Differenzen werden im folgenden mit ΔN bezeichnet und repräsentieren das berechnete Gewicht. Als Input für die Berechnung wurde dem klassischen Algorithmus zur Gewichtsbestimmung aus Kapitel 6.5 folgend, N_{red} mit 20mm, 10mm, 5mm bzw. 1mm in die Kollokation eingeführt.

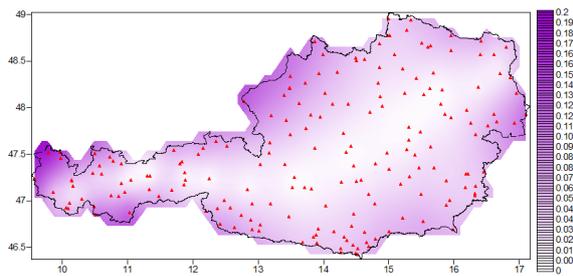


Abbildung 8.20.: Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 20mm und RBF "Linear" [m]

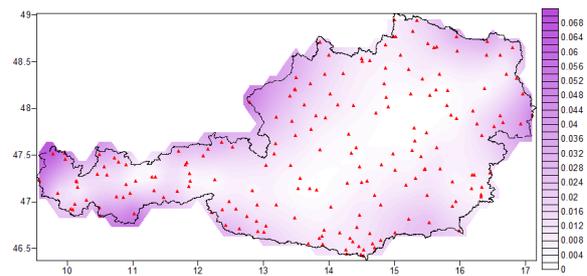


Abbildung 8.21.: Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 10mm und RBF "Linear" [m]

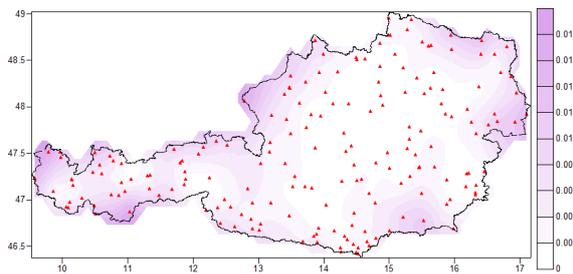


Abbildung 8.22.: Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 5mm und RBF "Linear" [m]

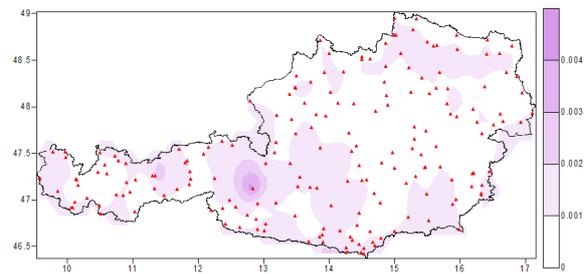


Abbildung 8.23.: Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 1mm und RBF "Linear" [m]

Hierbei kristallisiert sich die 1mm Lösung (Abbildung 8.23) als die brauchbarste für diese Art der Lagerung heraus, da die Differenzen zu den gemessenen Geoidhöhen N_{gem} am geringsten ausfallen. Sie betragen absolut gesehen maximal 4mm, während für die 20mm Gewichtung Abweichungen von bis zu 20cm zu den gemessenen Werten auftreten (Abbildung 8.20). Die in diesem Kapitel durchgeführten Berechnungen unterscheiden sich lediglich durch die jeweils veränderte relative Genauigkeit, also dem gewählten Gewicht der reduzierten Geoidhöhen N_{red} .

8.4.2 Gewichtung bei der Modellierung mit Polynom dritten Grades

Die Eingangsdaten und die Gewichtung sind für diese Untersuchung gleich gewählt worden wie im vorherigen Kapitel 8.4.1. Die Modellierung der Korrekturfläche erfolgt nun jedoch klassisch mit Polynom dritten Grades.

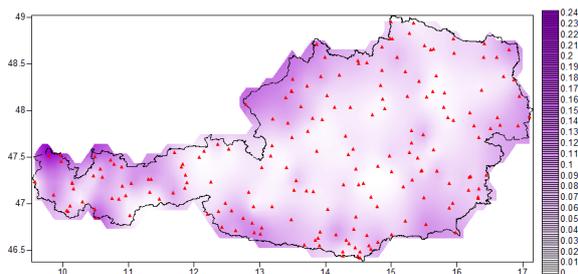


Abbildung 8.24.: Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 20mm und Polynom [m]

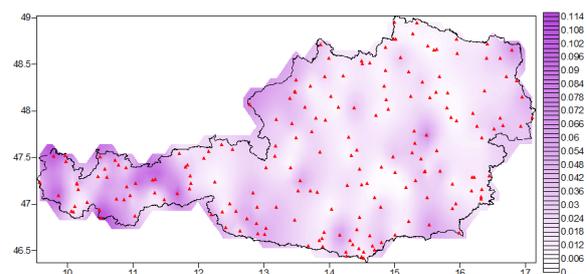


Abbildung 8.25.: Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 10mm und Polynom [m]

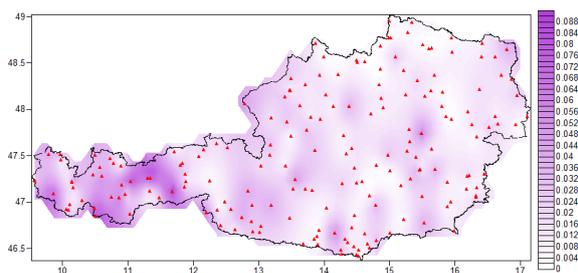


Abbildung 8.26.: Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 5mm und Polynom [m]

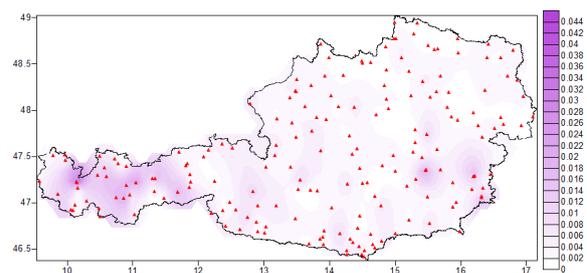


Abbildung 8.27.: Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 1mm und Polynom [m]

Wie in den obigen Abbildungen zu sehen ist, ist die Anpassung mittels Polynomfläche im Bereich Tirol/Vorarlberg problematisch. Das beste Ergebnis liefert auch hier die 1mm Gewichtung. Dabei ergeben sich absolute Differenzen von maximal 4.5cm zu den gemessenen Geoidhöhen N_{gem} . Dieses Ergebnis liegt noch innerhalb der Genauigkeit die vom BEV für die GPS/Niv. Punkte angegeben wurde (± 5 cm). Auffällig ist das Auftreten der größten Fehler wenn GPS/Niv. Punkte sehr nahe beieinander liegen (weniger als 4km). Dieses Phänomen tritt bei RBF Modellierung nicht auf. In der Steiermark und in Tirol gibt es 4 Paare von GPS/Niv. Punkten wo dieser Effekt auftritt. Diese Punktpaare sind in folgender Abbildung 8.28 besser ersichtlich dargestellt.

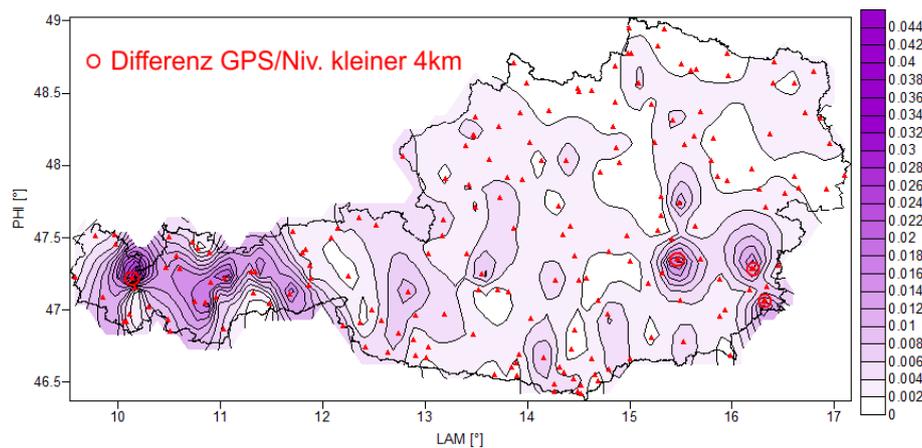


Abbildung 8.28.: Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 1mm und Polynom; auffällige GPS/Niv. Punkte Tirol/Steiermark [m]

Nun gilt es die Frage zu beantworten, ob die Nähe der Punkte und die hohe relative Genauigkeit zu künstlichen Fehlern in der Berechnung führen. Dazu wurde immer ein Punkt des Paares für die Geoidbestimmung eliminiert, jedoch die Geoidhöhen mittels Kollokation auf die Koordinaten des eliminierten Punktes prädiziert. Nach dem Restore Schritt wurden die Differenzwerte zwischen Prädiktion und weggelassenen GPS/Niv. Punkten gebildet. Dieser Vorgang wurde für den zweiten Punkt des Paares wiederholt und die GPS/Niv. Punkte mit der größeren Abweichung sind letztendlich eliminiert worden. In Abbildung 8.29 ist das nun erzielte Ergebnis für die verbleibenden 188 GPS/Niv. Punkte dargestellt.

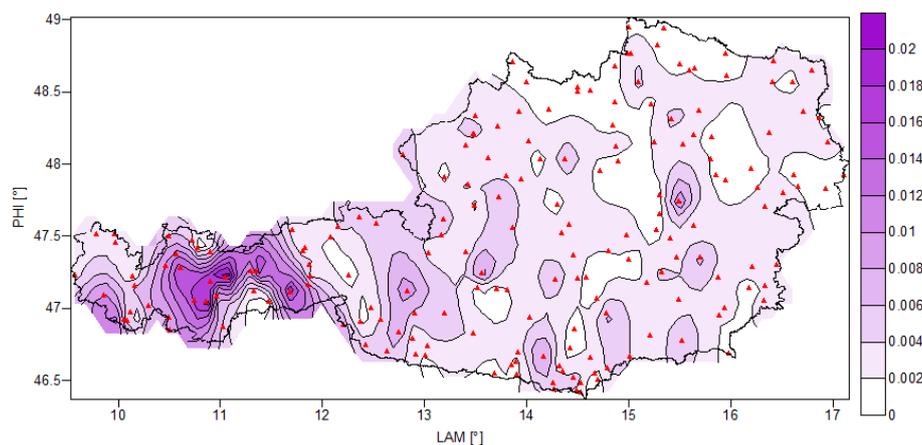


Abbildung 8.29.: Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 1mm und Polynom; verbleibende 188 GPS/Niv. Punkte [m]

Deutlich zu erkennen sind die kleineren Gewichte und das Verschwinden der Struktur in der Steiermark und Tirol (vergleiche mit Abbildung 8.28). Die maximale absolute Abweichung

beträgt nun 2cm. Dies entspricht auch der Differenz die durch das individuelle Gewichten mittels LOOCV wie in Kapitel 8.4.3 beschrieben, erzielt wurde, jedoch ohne GPS/Niv. Punkte zu eliminieren.

Diese Untersuchung zeigt eine weitere Schwäche bei der Modellierung mit Polynomen auf. Für die Geoidbestimmung mit Polynomflächenmodellierung empfiehlt sich deshalb keine GPS/Niv. Punkte zuzulassen, die näher beisammen liegen als die ausgedünnten Schwereanomalien Δg .

Um die Auswirkungen der klassisch bestimmten Gewichte aus der 1mm Lösung (Abbildung 8.28) zu zeigen, ist eine erneute Geoidbestimmung durchgeführt worden. Die nun erzielten Ablagen im Vergleich zu den gemessenen Geoidhöhen bewegen sich absolut bei 11cm. Zugleich stellt Abbildung 8.30 die Validierung der klassischen Geoidbestimmung bzw. Transformationsflächenbestimmung dar.

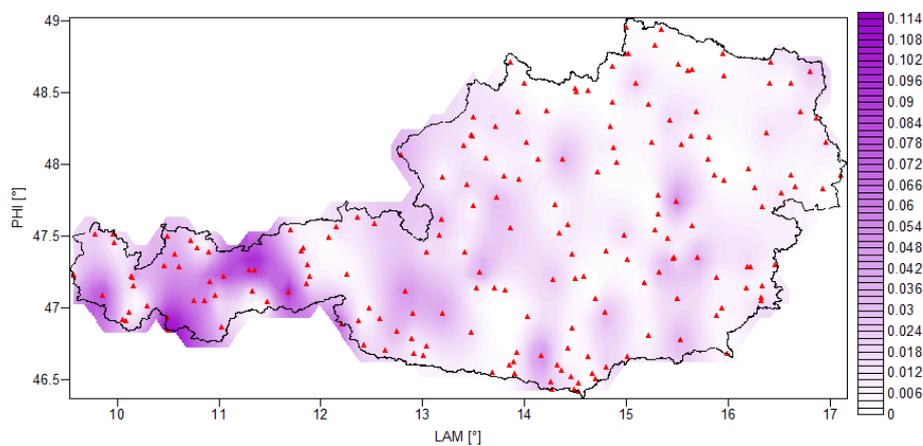


Abbildung 8.30.: Ablagen zu gemessenen GPS/Niv. Punkten, Gewichtung klassisch [m]

Als Fazit kann festgehalten werden, dass bei einer Lagerung auf allen GPS/Niv. Punkten und Gewichtung mit 1mm kein weiterer "Iterationsschritt" der Kollokation notwendig ist. Grund dafür ist, dass durch die Lagerung auf allen GPS/Niv. Punkten diese praktisch als fehlerfrei anzusehen sind. Deshalb ist es nicht sinnvoll wie in Abbildung 8.30 die Kollokation erneut durchzuführen und dieses Ergebnis zu validieren, unter anderem auch deshalb, weil die GPS/Niv. Punkte bereits in die Berechnung eingeflossen sind und keine unabhängige Validierung möglich ist. Man kann höchstens von einer "innerer Genauigkeit" der Berechnung sprechen.

Es empfiehlt sich auch für die Modellierung die RBF zu verwenden, da diese im Vergleich zum Polynom bei einer 1mm Gewichtung nur mehr Ablagen im Millimeterbereich zu den gemessenen GPS/Niv. Punkten zulässt. Bei der Annahme fehlerfreier Messungen soll der Messwert N_{gem} reproduziert werden und nicht ein um einige Zentimeter veränderter Wert wie in Abbildung 8.27.

8.4.3 Individuelle Gewichtung mittels LOOCV

Die individuelle Gewichtung mit Leave-One-Out Cross Validation beruht darauf, dass die Residuen der LOOCV die die Modellierungsabweichungen widerspiegeln in die Gewichtung der GPS/Niv. Punkte eingehen. In einem ersten Schritt wird die geeignetste Basisfunktion für die Modellierung der Korrekturfläche gesucht und der RMS bestimmt. In Abbildung 8.31 ist das Ergebnis für die GOCO25 Korrekturfläche (siehe Kapitel 8.5.1) dargestellt. Den kleinsten RMS für diese Korrekturfläche lieferte die lineare Basisfunktion. In Tabelle 8.2 ist der RMS für alle untersuchten Funktionen ersichtlich.

Tabelle 8.2.: *RMS der Basisfunktionen und Polynom dritten Grades für die GOCO25 Korrekturfläche*

Funktion	RBF Linear	RBF Cubic	RBF Thin-plate	Polynom
RMS [cm]	3.25	8.33	3.86	5.24

Bei der individuellen Gewichtung werden alle Punkte die Werte ≤ 1 RMS aufweisen, mit 1mm gewichtet und die verbleibenden, größeren Residuen mit einem empirisch bestimmten Faktor 10 kleiner in die Gewichtung eingeführt. Punkte deren Wert über 3 RMS liegt, werden in dieser Untersuchung nicht eliminiert. Die bestimmten Gewichte sind flächenhaft in Abbildung 8.31 dargestellt.

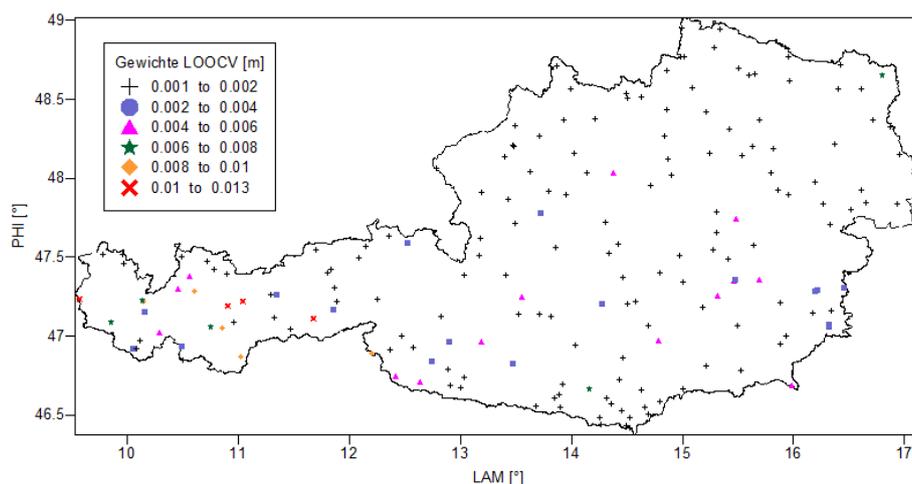


Abbildung 8.31.: *Individuelle Gewichtung über LOOCV Residuen [m]*

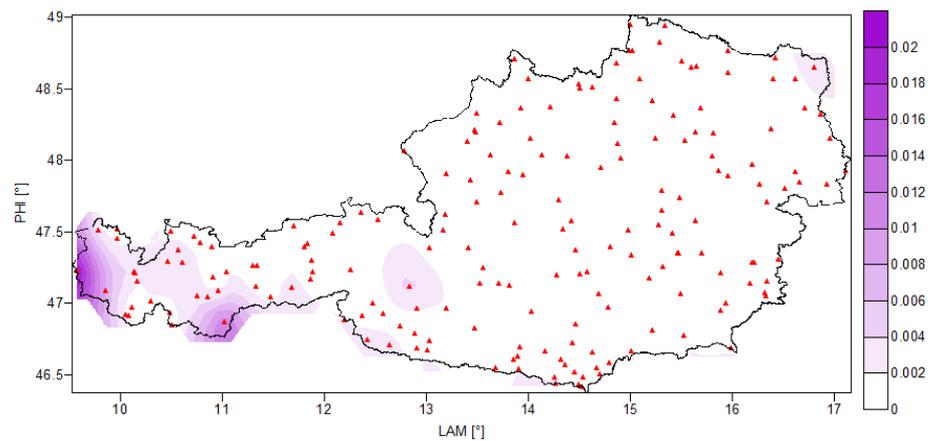


Abbildung 8.32.: Ablagen zu gemessenen GPS/Niv. Punkten, Gewichtung LOOCV individuell [m]

Das Ergebnis der individuellen Gewichtung mittels LOOCV ist in Abbildung 8.32 zu sehen. Die maximalen Abweichungen zu den gemessenen Geoidhöhen N_{gem} liegen bei ± 2 cm. Die Abweichungen treten dort auf, wo auch die größten Gewichte zugelassen wurden. Diese Art der Gewichtsbestimmung ist ein Versuch eine Alternative zur klassischen Vorgehensweise zu etablieren.

8.5 Detektion von auffälligen GPS/Nivellement Punkten

In diesem Kapitel steht der Algorithmus zur Detektion von auffälligen GPS/Niv. Punkten im Mittelpunkt. Wie schon einleitend in Kapitel 3.5 erwähnt, ist die Korrekturfläche N_{korr} im Remove Schritt definiert als

$$N_{korr} = N_{koll} - N_{red} \quad (8.2)$$

also der Differenz zwischen den aus Schwereanomalien berechneten Geoidhöhen N_{koll} und den reduzierten Geoidhöhen N_{red} . Im Restore Schritt ergibt sich die Korrekturfläche

$$N_{korr} = N_{gem} - N \quad (8.3)$$

aus der Differenz zwischen den gemessenen Geoidhöhen in den GPS/Niv. Punkten und den wieder aufgesetzten Geoidhöhen N . Im folgenden wird N_{korr} für den Remove Schritt näher betrachtet. In Gleichung 8.2 sind die vielen Abhängigkeiten der Korrekturfläche zu erkennen. Sie ist abhängig von der Kollokation und dadurch von der durchgeführten Modellkovarianz-anpassung sowie von der globalen als auch lokalen Reduktion und den gemessenen GPS/Niv. Punkten. Einen eventuellen Fehler in der Berechnung exakt einer dieser Komponenten zuzuordnen ist nicht möglich.

In den letzten Jahren hat sich aber gezeigt, dass es durch die hochgenaue Geoidbestimmung möglich ist, Fehler in den GPS Messungen aufzudecken. Lokal vermutete Fehler im Geoid entpuppten sich als Messfehler der GPS Messung. Änderungen, die vom BEV zwischen dem GEOOnAUT und GEOID+ Projekt in den identen 166 GPS/Niv. Punkten durchgeführt wurden, sind in den Abbildungen 4.7 und 4.8 dargestellt. Da die Änderung in der orthometrischen Höhe H nur für 3 GPS/Niv. Punkte $\geq 1\text{cm}$ ist, kommen die restlichen Änderungen aus der mit GPS bestimmten ellipsoidischen Höhe h .

Um nun auffällige Punkte zu identifizieren, wurde ein Algorithmus entwickelt, der aufbauend auf die LOOCV verschiedene radiale Basisfunktionen sowie ein Polynom dritten Grades an die Korrekturfläche anpasst. Über eine sogenanntes Scoring werden den sich dabei ergebenden Residuen Werte zugeordnet. Dies passiert sobald die Residue in einem Punkt größer oder gleich 2 RMS ist. Abschließend erfolgt das Addieren der einzelnen Scores und die Punkte mit den größten Werten werden als auffällig markiert. Der Berechnungsalgorithmus inkludiert auch das Bestimmen der Funktion, die sich am besten an die gegebene Korrekturfläche anpasst

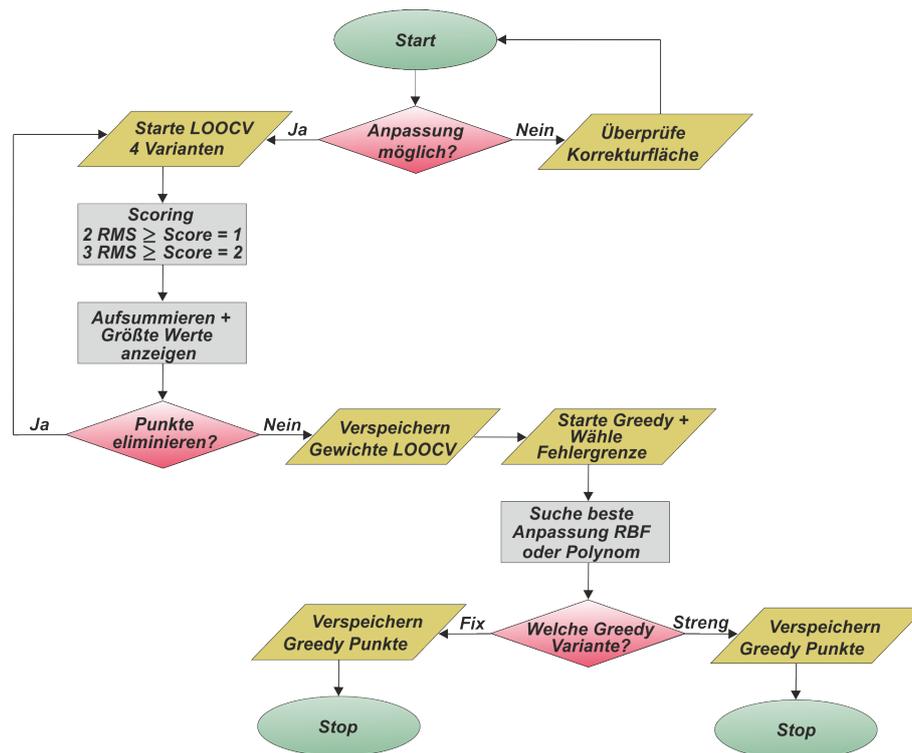


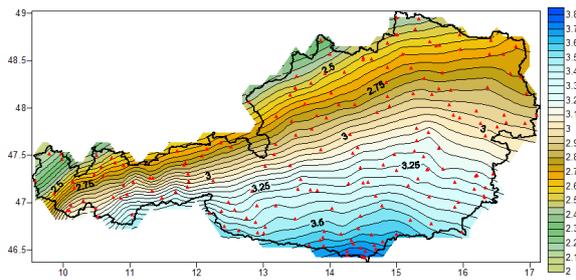
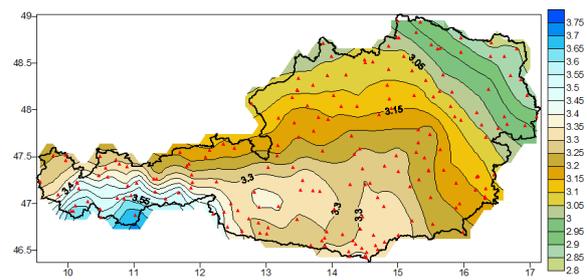
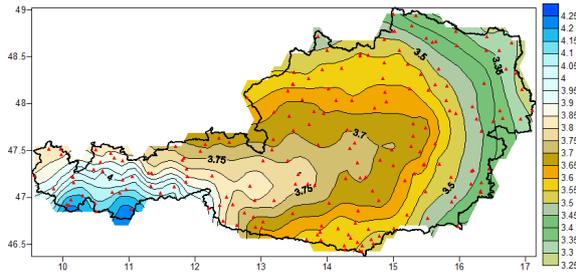
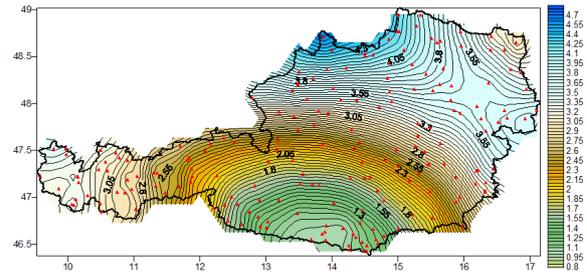
Abbildung 8.33.: Flussdiagramm des Berechnungsalgorithmus

sowie die individuelle Gewichtung und den Greedy Algorithmus. In Abbildung 8.33 ist der Berechnungsablauf als Flussdiagramm dargestellt.

Den maximalen Wert, den ein GPS/Niv. Punkt durch das Scoring erzielen kann, ist 8. Dies ergibt sich durch die 4 LOOCV Funktionen (Linear, Kubisch, Thinplate und Polynom dritten Grades) multipliziert mit dem größtmöglichen Scorewert 2 (für Punkte ≥ 3 RMS). Obwohl die kubische Funktion in den vorhergehenden Untersuchungen meist den größten RMS aufweist, wird sie der Vollständigkeit halber in den Algorithmus inkludiert. Wird ein Punkt aufgrund eines hohen Scorewertes eliminiert, startet die Detektion erneut.

8.5.1 Korrekturflächen

In den folgenden Abbildungen sind Korrekturflächen für verschiedene globale Reduktionen zu sehen. Die Kovarianzanzpassung für die Kollokation erfolgte für alle Korrekturflächen auf Basis des gesamten Schwereanomalien Datensatzes (siehe Kapitel 7.6). Die Reduktion des kurzwelligen Anteils wurde topographisch/isostatisch nach Airy-Heiskanen durchgeführt. Eine Beschreibung hierzu ist dem Kapitel 3.5.3 zu entnehmen. Die Berechnungen der Korrekturflächen basiert auf den 192 GPS/Niv. Punkten.

Abbildung 8.34.: N_{korr} GOCO25 [m]Abbildung 8.35.: N_{korr} GOCO50 [m]Abbildung 8.36.: N_{korr} GOCO70 [m]Abbildung 8.37.: N_{korr} GOCO90 [m]

Der Range, also die Spanne vom kleinsten bis zum größten Wert, variiert wie in den Abbildungen zu sehen, je nach Art der durchgeführten Reduktion. Für die Reduktion mit dem globalen Schwerefeldmodell GOCO01S bis Grad/Ordnung 25 ergibt sich ein leicht modellierbarer Nord-Süd Trend. Das Ergebnis für GOCO70 ähnelt der in GEOnAUT verwendeten Korrekturfläche (Abbildung 5.3), was nicht weiter verwundert, da mit dem selben Grad/Ordnung reduziert wurde. Die Kovarianz Anpassung als auch die verwendeten Schwereanomalien und GPS/Niv. Punkte unterscheiden sich jedoch leicht. Für Grad/Ordnung 90 scheint durch die globale Reduktion ein langwelliger Anteil in die Korrekturfläche zu kommen. Dies ist der Fall, wenn sich kurz und langwellige Reduktion spektral überschneiden und beispielsweise durch einen zu hohen Grad/Ordnung Anteile im Spektrum doppelt reduziert werden.

8.5.2 Durchführen der Detektion

Die Detektion wird im ersten Fall für die Korrekturfläche GOCO25 (Abbildung 8.34) durchgeführt. In den Abbildungen ist die Lage der detektierten Punkte für die jeweilige Basisfunktion und das Polynom dargestellt. In Blau sind die Punkte mit LOOCV Residuen ≥ 3 RMS und in Rot ≥ 2 RMS dargestellt. Des Weiteren ist auch die Lage der größten Abweichung zu sehen. Wie die Abbildungen 8.38 bis 8.41 belegen, ist die Modellierung im westlichen Teil Österreichs wesentlich schwieriger als im östlichen. Betrachtet man den RMS der in Abbildung 8.42 des Logfiles dargestellt ist, zeigt sich, dass die lineare radiale Basisfunktion für die Modellierung am besten geeignet ist.

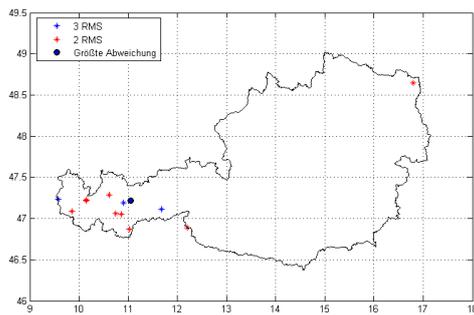


Abbildung 8.38.: Detektion RBF "Linear"

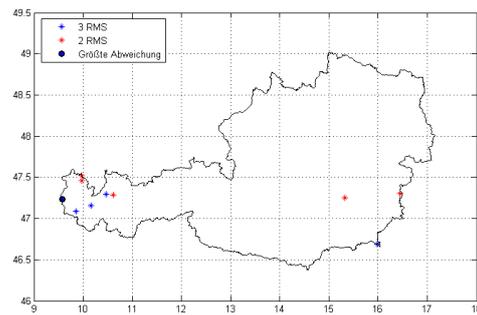


Abbildung 8.39.: Detektion RBF "Cubic"

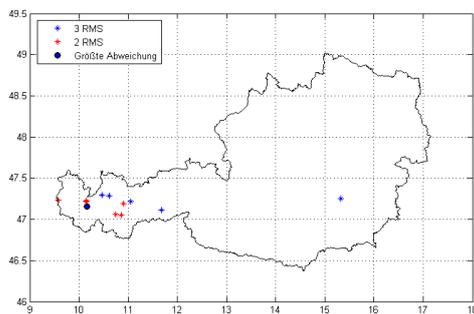


Abbildung 8.40.: Detektion RBF "Thinpl."

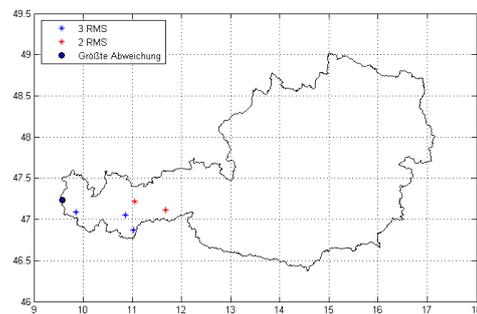


Abbildung 8.41.: Detektion "Polynom"

Wie in Abbildung 8.42 zu erkennen ist, ergeben sich vier auffällige Punkte mit einem Scorewert ≥ 5 . Um wirklich sicher zu gehen, dass es sich dabei nicht um Effekte der Reduktion handelt, die die Auffälligkeiten bedingen, wird die Detektion mit den weiteren Korrekturflächen GOCO50 und GOCO70 erneut durchgeführt. Durch die langwelligen Effekte in der GOCO90 Korrekturfläche (Abbildung 8.37) scheidet diese für weitere Untersuchungen aus.

In Tabelle 8.3 sind die auffälligsten Punkte für die GOCO50 und GOCO90 Korrekturfläche zu sehen. Das dabei erzielte Ergebnis ist für beide Korrekturflächen ident.

Tabelle 8.3.: Ergebnis Detektion mit Korrekturflächen GOCO50 und GOCO70

PNr.	Linear	Cubic	Thinplate	Polynom	Score
1150035	2	1	2	0	5
1420236	1	2	0	2	5
1460123	2	0	2	1	5
100017	2	0	2	1	5

```

C:\Users\Christian\Desktop\RBFFtest_greedy_rbf_ausreisser\LOOCV_2011_03311630.log
Donnerstag, 31. März 2011 16:48
-----
greedy_rbf_ausreisser.m Logfile LOOCV GOCO 25 Detektion 4 Varianten kombiniert: 31-Mar-2011 16:30:32
-----
PNr.          PHI [°]          LAM [°]          H[m]          Linear  Cubic  Thinplate  Polynom  Score
-----
250092        48.650873088     16.796567049    274.7230      1       0       0           0         1
830018        47.519133056     9.966304111     642.5550      0       1       0           0         1
1120320       47.456966919     9.973436814     801.6060      0       1       0           0         1
1140049       47.296641710     10.465210731    1030.0250     0       2       2           0         4
1150035       47.285893835     10.604770978    1385.9720     1       1       2           0         4
1330347       47.255859549     15.320805313    425.4980      0       1       2           0         3
100016        47.307099579     16.452150066    337.7460      0       1       0           0         1
1400022       47.231345265     9.580598070     522.7860      2       2       1           2         7
1420236       47.091161453     9.857355368     713.9330      1       2       0           2         5
1430111       47.156925604     10.164463078    1773.3410     0       2       2           0         4
1430115       47.218106804     10.146616693    1563.3130     1       0       1           0         2
1430184       47.224053877     10.139075683    1772.8420     1       0       1           0         2
1450255       47.057128095     10.749716035    1230.4110     1       0       1           0         2
1460049       47.050706120     10.858184341    1413.2260     1       0       1           2         4
1460123       47.221213920     11.045461711    1972.6020     2       0       2           1         5
1460194       47.189466429     10.905959515    842.7790      2       0       1           0         3
100017        47.113821994     11.680225535    1485.2950     2       0       2           1         5
1730126       46.871445390     11.026577456    1922.0180     1       0       0           2         3
1770094       46.888831516     12.200421916    2082.9480     1       0       0           0         1
2090039       46.688586714     15.984043960    206.3390      0       2       0           0         2
-----
Auffaelligste Punkte: >=2RMS=1 >=3RMS=2
-----
1400022       47.231345265     9.580598070     522.7860      2       2       1           2         7
1420236       47.091161453     9.857355368     713.9330      1       2       0           2         5
1460123       47.221213920     11.045461711    1972.6020     2       0       2           1         5
100017        47.113821994     11.680225535    1485.2950     2       0       2           1         5
-----
RMS                                     3.25   8.33   3.86   5.24   [cm]
-----
Info:
-----
Gesamtpunkte: 192
Es wurden keine Punkte eliminiert!
-----

```

Abbildung 8.42.: Logfile der Detektion GOCO25

In allen Varianten werden drei gleiche GPS/Niv. Punkte detektiert. Der Punkt 1400022, der für die GOCO25 Detektion den größten Scorewert aufweist, lieferte für die GOCO50 und GOCO70 Detektion einen Scorewert von 4. Umgekehrt wurde der Punkt 1150035 bei der GOCO50 und GOCO70 Korrekturfläche mit einem Score von 5 detektiert, bei GOCO25 jedoch nur mit 4. Somit zählen diese Punkte nur mehr zur erweiterten Auswahl detektierter Punkte. Eine Erklärung für den anfänglich sehr hohen Scorewert des Punktes 1400022 könnte seine geographische Lage liefern. Er ist der westlichste GPS/Niv. Punkt Österreichs und eine Modellierung ist im Westen aufgrund der Form Österreichs sowie der Verteilung der GPS/Niv. Punkte ohnehin schwierig. Die verbleibenden GPS/Niv. Punkte wurden unabhängig von der Reduktion detektiert, sie sind möglicherweise noch fehlerbehaftet.

8.5.3 Sensitivität der Detektion

Die Auswirkungen einer Änderung der Geoidhöhen auf den entwickelten Algorithmus werden im folgenden untersucht. Dazu wird ein einzelner GPS/Niv. Punkt, der zuvor als fehlerfrei detektiert wurde, in seiner gemessenen Geoidhöhe N_{gem} stufenweise verändert. Dieser eingeführte Offset simuliert einen GPS Messfehler in der ellipsoidischen Höhe h . Die Auswirkungen dieser künstlich herbeigeführten Veränderung der Geoidhöhe auf den Algorithmus werden am Beispiel der GOCO25 Korrekturfläche aufgezeigt. Durchgeführt wurde diese Untersuchung mit dem GPS/Niv. Punkt 980284.

Die Detektion mittels linearer RBF erkannte diesen Punkt schon nach einer Änderung in der Geoidhöhe von $\pm 4\text{cm}$. In den restlichen Varianten blieb der Offset noch unerkannt. Ab einem Offset von $\pm 6\text{cm}$ schlägt auch die Thinplate LOOCV Detektion an und die LOOCV mit der linearen RBF setzt diesen Punkt auf 3 RMS. Als Ergebnis lieferte diese Untersuchung die Erkenntnis, dass es einer Änderung von $\pm 10\text{cm}$ in der Geoidhöhe bedarf, um sicher als Fehler aufgedeckt zu werden. In Abbildung 8.43 sind alle nun detektierten Punkte dargestellt.

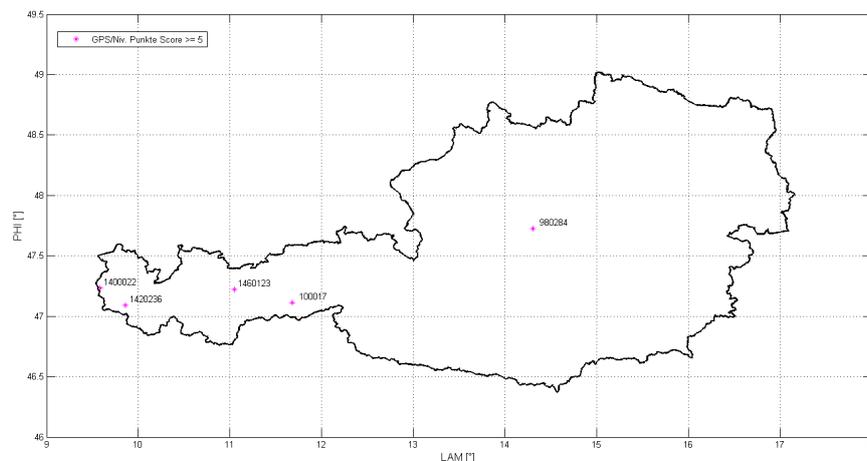


Abbildung 8.43.: Detektierte Punkte GOCO25 Korrekturfläche, N_{gem} PNr. 980284 um $\pm 10\text{cm}$ verändert

In Abbildung 8.44 ist das Logfile für diesen Versuch zu sehen. Der RMS steigt durch den eingeführten Offset für alle Punkte leicht (vergleiche mit Abbildung 8.42).

Der gleiche Versuch wurde auch auf Basis der anderen beiden Korrekturflächen GOCO50 und GOCO70 durchgeführt. Auch hier konnten simulierte Messfehler erst ab $\pm 10\text{cm}$ aufgedeckt werden. Abschließend wurden noch andere GPS/Niv. Punkte für diesen Versuch herangezogen

```

C:\Users\Christian\Desktop\RBFtest_greedy_rbf_ausreisser\LOOCV_2011_03311847.log
Donnerstag, 31. März 2011 19:06
-----
greedy_rbf_ausreisser.m Logfile LOOCV GOCO 25 Detektion 4 Varianten kombiniert: 31-Mar-2011 18:47:55
-----
PNr.          PHI [°]          LAM [°]          H[m]          Linear          Cubic          Thinplate          Polynom          Score
-----
250092        48.650873088      16.796567049    274.7230      1          0          0          0          1
830018        47.519133056      9.966304111     642.5550      0          1          0          0          1
980284        47.722895776     14.302184380    593.0390      2          0          2          1          5
1120320       47.456966919     9.973436814     801.6060      0          1          0          0          1
1140049       47.296641710     10.465210731    1030.0250     0          2          2          0          4
1150035       47.285893835     10.604770978    1385.9720     1          1          2          0          4
1330347       47.255859549     15.320805313    425.4980      0          1          2          0          3
100016        47.307099579     16.452150066    337.7460      0          1          0          0          1
1400022       47.231345265     9.580598070     522.7860      2          2          1          2          7
1420236       47.091161453     9.857355368     713.9330      1          2          0          2          5
1430111       47.156925604     10.164463078    1773.3410     0          2          2          0          4
1430115       47.218106804     10.146616693    1563.3130     1          0          1          0          2
1430184       47.224053877     10.139075683    1772.8420     1          0          1          0          2
1450255       47.057128095     10.749716035    1230.4110     0          0          1          0          1
1460049       47.050706120     10.858184341    1413.2260     1          0          1          2          4
1460123       47.221213920     11.045461711    1972.6020     2          0          2          1          5
1460194       47.189466429     10.905959515    842.7790      2          0          1          0          3
100017       47.113821994     11.680225535    1485.2950     2          0          2          1          5
1730126       46.871445390     11.026577456    1922.0180     1          0          0          2          3
1770094       46.888831516     12.200421916    2082.9480     1          0          0          0          1
2090039       46.688586714     15.984043960    206.3390      0          2          0          0          2
-----
Auffaelligste Punkte: >=2RMS=1 >=3RMS=2
-----
980284        47.722895776     14.302184380    593.0390      2          0          2          1          5
1400022       47.231345265     9.580598070     522.7860      2          2          1          2          7
1420236       47.091161453     9.857355368     713.9330      1          2          0          2          5
1460123       47.221213920     11.045461711    1972.6020     2          0          2          1          5
100017       47.113821994     11.680225535    1485.2950     2          0          2          1          5
-----
RMS                                     3.39      8.39      3.98      5.30      [cm]
-----
Info:
-----
Gesamtpunkte: 192
Es wurden keine Punkte eliminiert!
-----
-1-

```

Abbildung 8.44.: Logfile der Detektion GOCO25, N_{gem} PNr. 980284 um $\pm 10\text{cm}$ verändert

und stufenweise verändert, diese Versuche ergaben jedoch keine signifikanten Änderungen zu den zuvor erzielten Ergebnissen.

Als Fazit kann somit festgehalten werden, dass sich der entwickelte Algorithmus eignet um einzelne grob falsche Punkte zu detektieren, jedoch ist er nicht sensitiv genug um Fehler in der Größenordnung des RMS aufzudecken.

8.5.4 Auswirkungen einer Punktelimination auf die Detektion

Aufbauend auf den in Kapitel 8.5.2 erzielten und in Abbildung 8.42 dargestellten Detektionsergebnis werden einzelne GPS/Niv. Punkte eliminiert und die sich dadurch ergebenden Veränderungen dokumentiert. Zu Beginn wird der Punkt 1400022, der den größten Scorewert aufweist, eliminiert. Dem Algorithmus folgend startet die Detektion erneut. Die nun erzielten Detektionsergebnisse sind in folgender Tabelle ersichtlich.

Tabelle 8.4.: *Ergebnis Detektion mit Korrekturfläche GOCO25 PNr. 1400022 eliminiert*

PNr.	Linear	Cubic	Thinplate	Polynom	Score
1420236	2	2	0	2	6
1460123	2	1	2	1	6
100017	2	0	2	2	6
RMS[cm]	3.30	7.22	3.80	4.84	

Durch das Entfernen ergeben sich keine neu detektierten Punkte, lediglich der Score der verbleibenden Punkte steigt. Im nächsten Schritt wird zusätzlich Punkt 1420236 entfernt und der Detektionsalgorithmus erneut gestartet.

Tabelle 8.5.: *Ergebnis Detektion mit Korrekturfläche GOCO25 PNr. 1400022 und 1420236 eliminiert*

PNr.	Linear	Cubic	Thinplate	Polynom	Score
1150035	2	1	2	0	5
1460123	2	1	2	2	7
100017	2	0	2	2	6
RMS[cm]	3.19	7.10	3.82	4.42	

Für den Punkt 1460123 ergibt sich nun der größte Scorewert. Grund dafür ist die zuvor erfolgte Elimination des Punktes 1420236, da sich Punkte in der Nachbarschaft durch die RBF Koeffizienten stärker auswirken als weiter entfernte Punkte. So kann es vorkommen, dass ein einzelner grob falscher Punkt auch eigentlich passende Punkte in seiner Nachbarschaft verfälscht. Aus diesem Grund werden die Punkte immer nur einzeln und nicht gruppenweise eliminiert. Abschließend wurde noch PNr. 1460123 entfernt, als Ergebnis verbleibt der einzelne Punkt 100017 (siehe Tabelle 8.6).

Tabelle 8.6.: *Ergebnis Detektion mit Korrekturfläche GOCO25 PNr. 1400022, 1420236 und 1460123 eliminiert*

PNr.	Linear	Cubic	Thinplate	Polynom	Score
100017	2	0	2	2	6
RMS[cm]	2.98	6.97	3.61	4.31	

Wird nun auch noch PNr. 100017 entfernt sind keine auffälligen GPS/Niv. Punkte mehr detektierbar und der RMS nimmt weiter ab.

8.6 Geoidbestimmung mit Greedy Algorithmus

Die Eigenschaften der radialen Basisfunktionen wurden schon in den Kapiteln 8.1 bis 8.3 näher beschrieben. Auch auf grundlegendes zum Greedy Algorithmus wurde bereits in Kapitel 5.4 eingegangen. In diesem Kapitel geht es um die praktische Geoidbestimmung mit dem Greedy Algorithmus. Die Berechnungen basieren auf den 192 GPS/Niv. Punkten des GEOID+ Projektes.

8.6.1 Auswirkung der gewählten Fehlergrenze auf die Greedy Punkte

Bevor der Greedy Algorithmus startet ist zuerst eine Fehlergrenze festzulegen. Die Fehlergrenze ist jener Wert, den die Restpunkte maximal als Zuschlag bekommen dürfen und um den sie vom ursprünglichen Wert der Korrekturfläche abweichen. Dieses Kapitel zeigt die Auswirkungen von unterschiedlichen Fehlergrenzen auf das Ergebnis des Greedy Algorithmus. Berechnet wurde Abbildung 8.33 folgend mit der Variante "fix". Aus dem Berechnungsablauf ergibt sich auch die optimale radiale Basisfunktion für den Greedy Algorithmus. Die Funktion, die den kleinsten RMS erzielte, war die lineare Basisfunktion. Für diesen Versuch wurde die GOCO25 Korrekturfläche verwendet. In der ersten Untersuchung wird eine Fehlergrenze von $\pm 1\text{cm}$ angenommen. Das Ergebnis ist in Abbildung 8.45 dargestellt.

Bei einer Fehlergrenze von $\pm 1\text{cm}$ sind 130 Greedy Punkte nötig, um die Korrekturfläche in den verbleibenden 62 Restpunkte innerhalb der Fehlergrenze rekonstruieren zu können. Die sich jetzt neu ergebende Fläche ist durch die Fehlergrenze auch etwas glatter als die Ursprungsfläche N_{korr} .

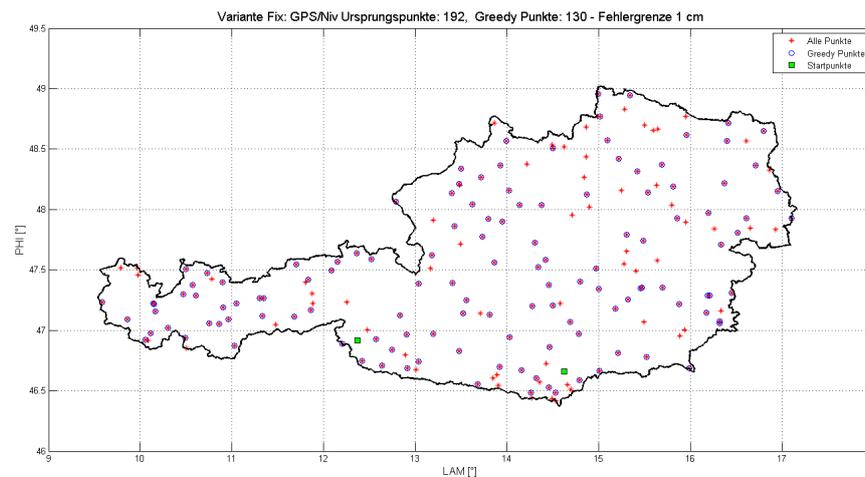


Abbildung 8.45.: Lage Greedy Punkte vs. Restpunkte, Fehlergrenze ± 1 cm

Wird die Fehlergrenze auf ± 2 cm verdoppelt, so ist das Ergebnis der Greedy Punkte in Abbildung 8.46 zu sehen. Ebenfalls dargestellt sind die beiden Startpunkte, die für den Greedy Algorithmus verwendet wurden.

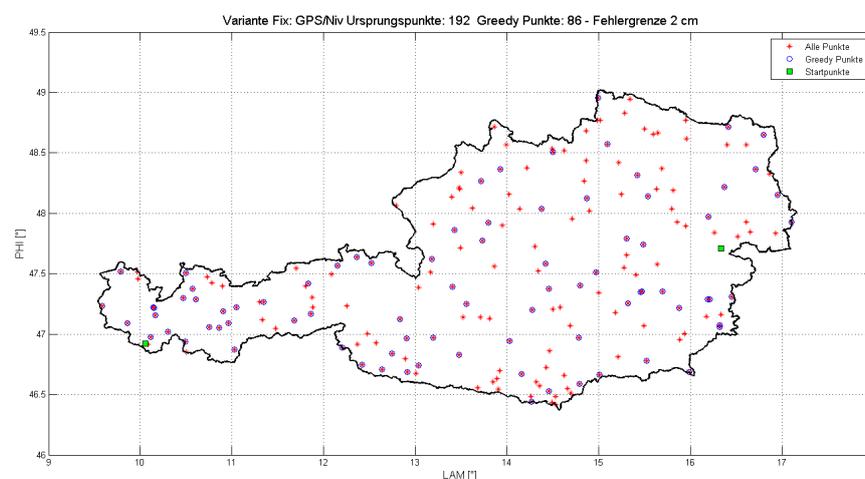


Abbildung 8.46.: Lage Greedy Punkte vs. Restpunkte, Fehlergrenze ± 2 cm

Im Vergleich zur ± 1 cm Fehlergrenze werden bei der ± 2 cm Fehlergrenze nur mehr 86 Punkte "festgehalten". Die restlichen 106 Punkte erhalten einen Zuschlag, der innerhalb der Fehlergrenze liegt. In den beiden Abbildungen 8.47 und 8.48 ist dieser Zuschlag in den Restpunkten flächenhaft dargestellt.

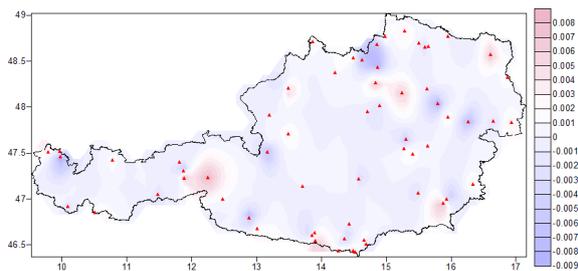


Abbildung 8.47.: Fehlergrenze $\pm 1\text{cm}$,
Zuschlag in Restpunk-
ten [m]

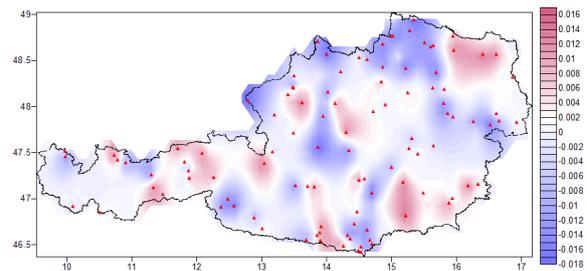


Abbildung 8.48.: Fehlergrenze $\pm 2\text{cm}$,
Zuschlag in Restpunk-
ten [m]

Es ist zu erkennen, dass der Algorithmus nicht alle Restpunkte mit der maximal möglichen Fehlergrenze rekonstruiert, sondern dass einige Punkte nur einen sehr geringen Zuschlag erhalten. Um dies zu untermauern, zeigt die folgende Darstellung eine statistische Auswertung dieser beiden Varianten.

Variante: Fehlergrenze $\pm 1\text{cm}$

Gesamtpunkte: 192

67.71% Greedy Punkte

32.29% Restpunkte

Restpunkte: 62

davon 62.90% unter 5mm

und 37.10% über 5mm

Variante: Fehlergrenze $\pm 2\text{cm}$

Gesamtpunkte: 192

44.79% Greedy Punkte

55.21% Restpunkte

Restpunkte: 106

davon 30.19% unter 5mm

bzw. 19.81% über 5mm

bzw. 35.85% 1cm - 1.5cm

bzw. 14.15% über 1.5cm

Wird die Fehlergrenze noch weiter nach oben gesetzt, setzt sich die Glättung der Korrekturfäche weiter fort. Die nächsten Untersuchungen sollen zeigen welche Punkte der Greedy Algorithmus auswählt um innerhalb der Fehlergrenze zu approximieren. Dazu werden die durch die LOOCV erhaltenen Residuen mit den ausgewählten Greedy Punkten verglichen. In den beiden Abbildungen 8.49 und 8.50 sind die Ergebnisse für die jeweilige Variante abgebildet.

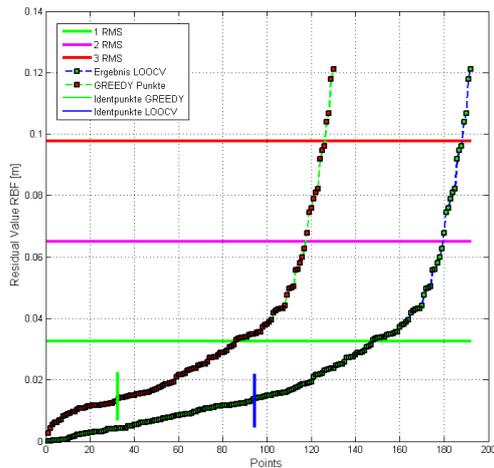


Abbildung 8.49.: LOOCV und Greedy-punkte Fehlergrenze $\pm 1\text{cm}$

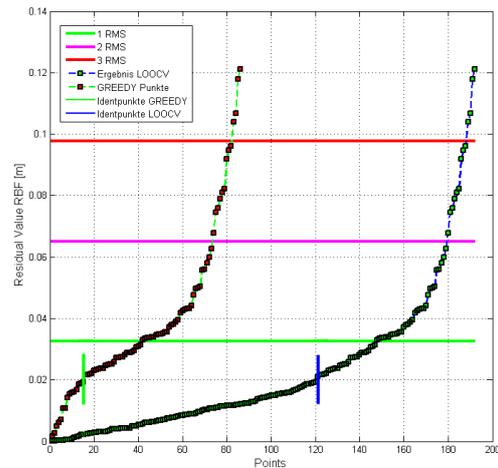


Abbildung 8.50.: LOOCV und Greedy-punkte Fehlergrenze $\pm 2\text{cm}$

Die Greedy Punkte sind also jene, die bei der LOOCV die größten Abweichungen ergeben. Da es sich beim Greedy Algorithmus um einen geometrischen Algorithmus handelt, leuchtet dies ein. Geometrisch müssen also jene Punkte "festgehalten" werden, die die meiste Struktur aufweisen um die restlichen Punkte innerhalb der Fehlergrenze approximieren zu können.

Sollen mehr GPS/Niv. Punkte in die Kollokation einfließen, muss eine relativ kleine Fehlergrenze gewählt werden. Dies hat natürlich den Nachteil, dass dadurch weniger Validierungspunkte zur Verfügung stehen. Bei einer Fehlergrenze ≥ 3 RMS kippt der Algorithmus und es werden nur mehr sehr wenige Greedy Punkte für die Rekonstruktion benötigt, zusätzlich sind diese Punkte nicht automatisch die mit den größten LOOCV Residuen wie dies bei einer Fehlergrenze ≤ 3 RMS der Fall ist.

Die Punkte rechts von den beiden vertikalen Linien (grün und blau) in den Abbildungen 8.49 und 8.50 sind also ident und weisen die größten LOOCV Residuen auf. Aufbauend auf dieser Erkenntnis werden im folgenden Kapitel 8.6.2 diese Greedy Punkte gewichtet in die Kollokation eingeführt und die dabei erzielte Lösung mit den Restpunkten validiert.

8.6.2 Ergebnisse der Geoidbestimmung mit Greedy Algorithmus

Basierend auf der $\pm 1\text{cm}$ und $\pm 2\text{cm}$ Fehlergrenze und den in den vorangegangenen Kapitel 8.6.1 erzielten Ergebnissen wurden nun die Geoidbestimmungen mit GOCO25 Korrekturfläche und individueller LOOCV Gewichtung der Greedy Punkte durchgeführt. In den folgenden Abbildungen sind die Abweichungen in den Validierungs- bzw. Restpunkten zu den gemessenen Geoidhöhen N_{gem} zu sehen.

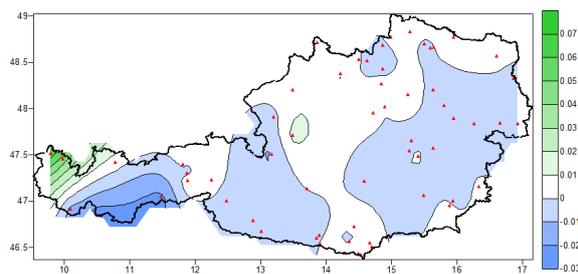


Abbildung 8.51.: Fehlergrenze $\pm 1\text{cm}$ Differenzen in Validierungspunkten [m]

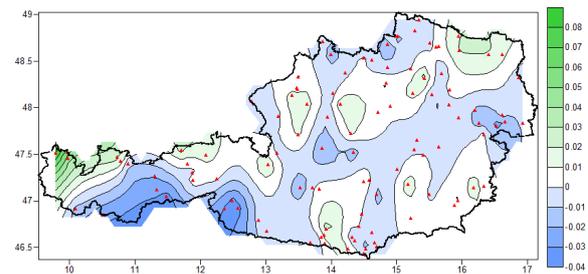


Abbildung 8.52.: Fehlergrenze $\pm 2\text{cm}$ Differenzen in Validierungspunkten [m]

Die verwendeten Restpunkte sind nicht Teil der Kollokationsberechnung, somit ist diese Lösung unabhängig validierbar und stellt eine "äußere Genauigkeit" dar. Durch das Verdoppeln der Fehlergrenze auf $\pm 2\text{cm}$ entstehen keine signifikant größeren Abweichungen als bei $\pm 1\text{cm}$, jedoch ist der Fehleranteil des Greedy Algorithmus durch die höhere Fehlergrenze größer. Dafür liegen fast doppelt so viele unabhängige Validierungspunkte vor (62 vs. 106). In den Anhängen A und B sind die durch die Lagerung entstandenen finalen Transformationsflächen abgebildet.

8.7 Geoidbestimmung mit RBF und Polynom dritten Grades

Diese Berechnung erfolgt ebenfalls mit 192 GPS/Niv. Punkten und einer Gewichtung von 1mm für alle Punkte. Für beide Varianten ist der Berechnungsvorgang exakt gleich, der einzige Unterschied liegt in der Modellierung der Korrekturfläche (GOCO25). In Abbildung 8.53 sind die Unterschiede zwischen den mittels RBF erzielten Ergebnis und dem Polynomergebnis dargestellt. Dabei handelt es sich um die Differenzen zwischen den beiden Geoidlösungen am gesamten Gitter.

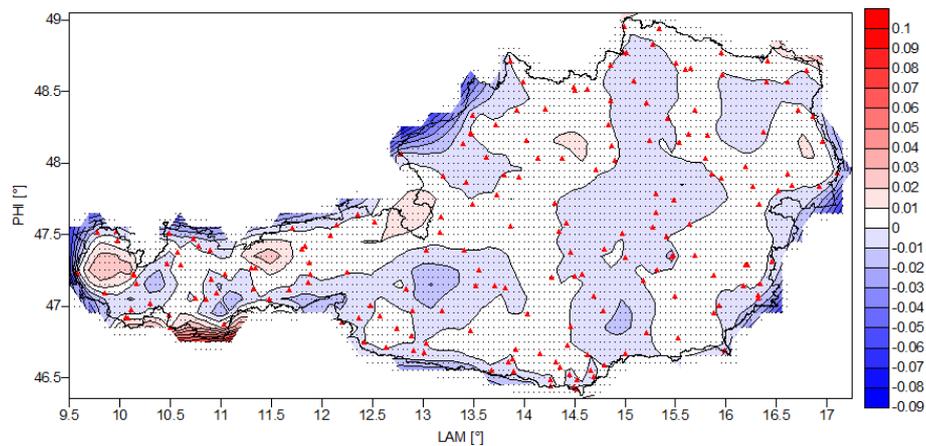


Abbildung 8.53.: Differenzen der Geoidhöhen N , RBF "Linear" - Polynom dritten Grades, 5018 Gitterpunkte [m]

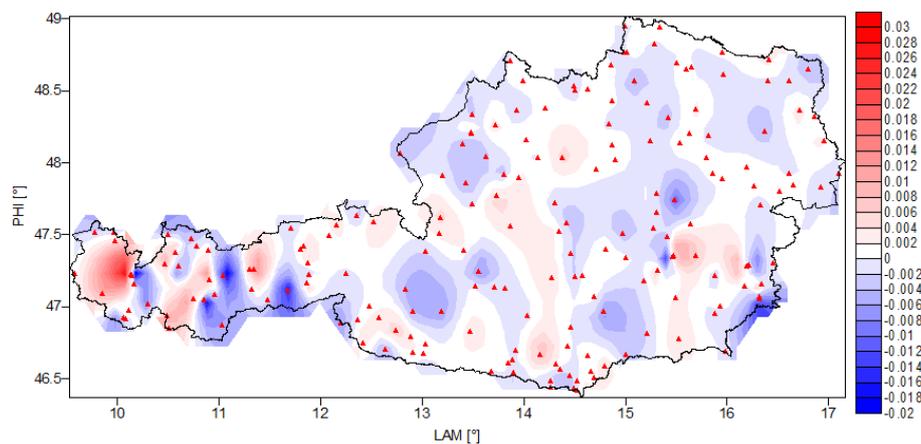


Abbildung 8.54.: Differenzen der Geoidhöhen N , RBF "Linear" - Polynom dritten Grades, 192 GPS/Niv. Punkte [m]

Die Differenzen bezogen auf die 192 GPS/Niv. Punkte als Teil der 5018 Gitterpunkte sind in Abbildung 8.54 zu sehen. Die Abweichungen bewegen sich bei ± 3 cm, während die Gesamtabweichung bei ± 10 cm liegt. Es ist festzustellen, dass die größten Abweichungen in den

Grenzgebieten Österreichs auftreten. Im östlichen Teil Österreichs treten die kleinsten Unterschiede auf, während für den Westen deutliche Abweichungen zu erkennen sind. Als Ergebnis sind die Transformationsflächen in den Anhängen C und D zu finden.

8.8 Geoidbestimmung ohne Korrekturfläche

Eine Geoidbestimmung ist prinzipiell auch ohne Korrekturfläche möglich. Die Lagerung erfolgt erneut auf allen 192 GPS/Niv. Punkten. Die Gewichtung der GPS/Niv. Punkte lag bei 1mm. Die globale Reduktion wurde bis Grad/Ordnung 25 durchgeführt und die kurzwellige Komponente mittels Airy-Heiskanen topographisch/isostatisch reduziert. Die verwendeten Kollokationsparameter sind in Tabelle 7.1 für die Anpassung an alle Schwereanomalien nachzulesen.

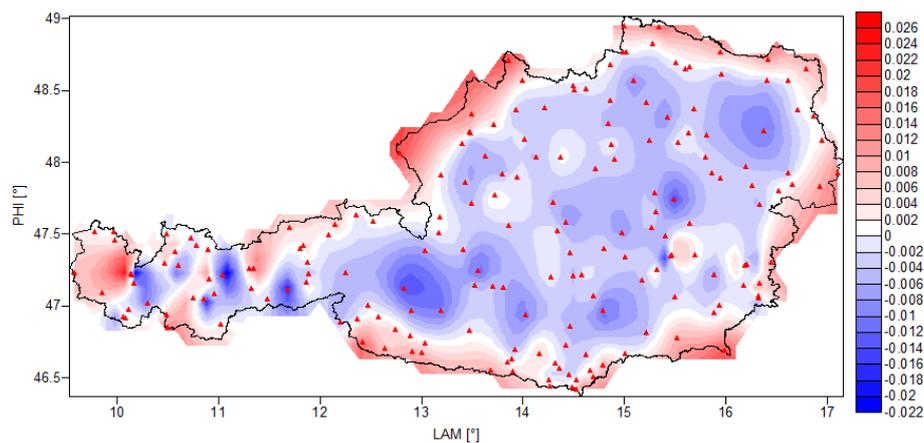


Abbildung 8.55.: Differenzen der Geoidhöhen N , 192 GPS/Niv. Punkte [m]

Die Differenzen zwischen den gemessenen und den wieder aufgesetzten Geoidhöhen, die mit dieser Variante erzielt wurden, unterscheiden sich in ihrer Größenordnung nicht von anderen Ergebnissen mit 1mm Gewichtung. Die Entscheidung 1mm als passendes Gewicht zu wählen bestätigt sich somit. Aufgrund der fehlenden Korrekturfläche ist diese Lösung nur im Bereich der 192 GPS/Niv. Punkte passend, während für die Zwischenbereiche nicht garantiert werden kann. Das zeigt sich auch an den Differenzen, die an den Grenzen Österreichs fast ausschließlich positiv sind, während in Österreich größtenteils negative Differenzen auftreten. In Anhang E ist die mit dieser Variante bestimmte Transformationsfläche abgebildet.

8.9 Gebrauchsgeoid

Dem Gebrauchsgeoid liegen die Gebrauchshöhen (siehe Kapitel 2) die ebenfalls für alle 192 GPS/Niv. Punkte vorliegen zu Grunde. Die Geoidhöhen N_{gem} werden nun nicht mehr über orthometrische Höhen, sondern über

$$N_{gem} = h - H_{geb} \quad (8.4)$$

bestimmt. Die Reduktionen erfolgten wieder bis Grad/Ordnung 25 bzw. mit Airy-Heiskanen topographisch/isostatisch. Gelagert wurde mit 1mm auf allen GPS/Niv. Punkten. Die für diese Berechnung verwendete Korrekturfläche musste aufgrund der sich ändernden Geoidhöhen neu angepasst werden. Für die Modellierung der Korrekturfläche wurde die lineare radiale Basisfunktion gewählt. In Abbildung 8.56 sind die sich ergebenden Differenzen nach dem Restore Schritt zu sehen.

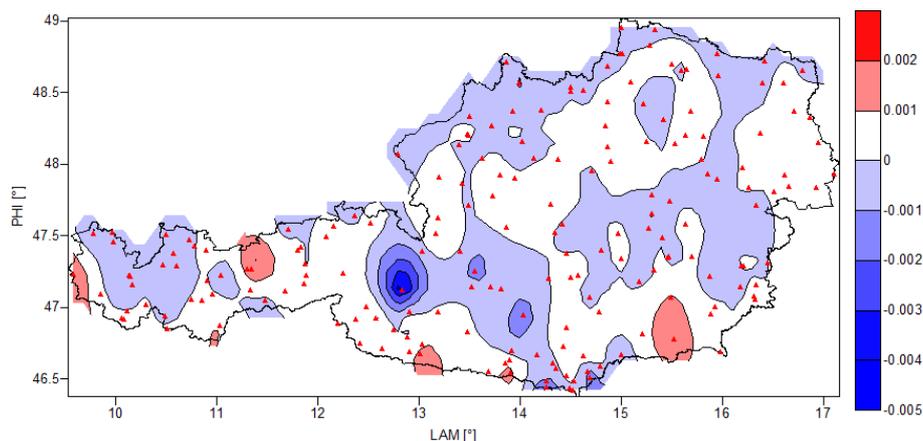


Abbildung 8.56.: *Differenzen der Geoidhöhen N bestimmt aus Gebrauchshöhen, 192 GPS/Niv. Punkte [m]*

Die Differenzen liegen bei wenigen Millimetern. Dies ist auf die Modellierung der Korrekturfläche mittels linearer RBF sowie auf die 1mm Gewichtung zurückzuführen. Vielfach liegen in der Praxis nicht die orthometrischen Höhen des BEV, sondern Gebrauchshöhen vor, welche allerdings auch orthometrische Höhen sind. Die kann bei Laien zu Missverständnissen führen.

Wie in Abbildung 8.57 dargestellt unterscheiden sich die Gebrauchshöhen und die orthometrischen Höhen des BEV um bis zu $\pm 0.7\text{m}$. Auffällig ist auch, dass in Gebieten mit wenig

Topographie (Niederösterreich) die größten Differenzen auftreten während in Tirol die Unterschiede am geringsten ausfallen. Die abgebildete Fläche entspricht dem Unterschied der in Anhang C dargestellten Transformationsfläche im Vergleich zur Transformationsfläche, bestimmt aus den Gebrauchshöhen, die dem Anhang F zu entnehmen ist.

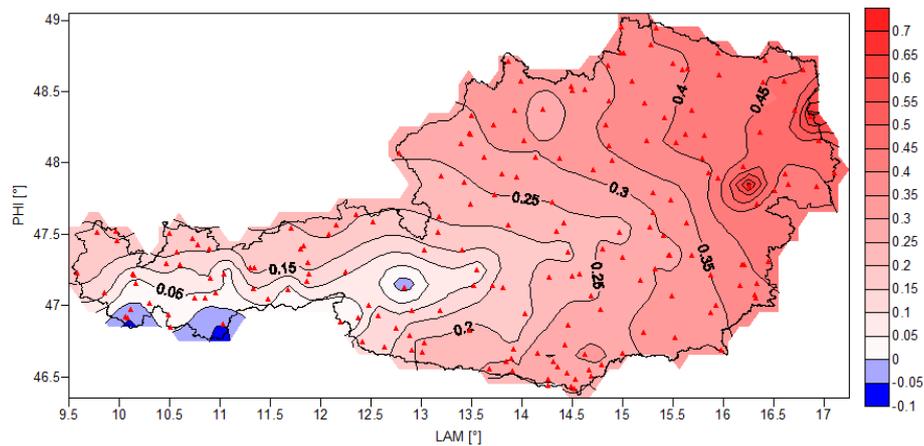


Abbildung 8.57.: *Differenzen zwischen den Geoidhöhen N basierend auf orthometrischen Höhen und dem Gebrauchsgeoid [m]*

8.10 Geoidbestimmung mit nachträglicher Lagerung

Die Kollokationsberechnung erfolgt nun ohne die GPS/Niv. Punkte. Der Kollokationsinput besteht aus 13689 Schwereanomalien und 672 Lotabweichungen. Die Reduktion der Schwerefeldgrößen wurde analog zu Kapitel 8.8 durchgeführt. Das dadurch bestimmte Geoid ist zunächst nicht gelagert und in Anhang G dargestellt. Eine Lagerung auf die GPS/Niv. Punkte findet erst nach dem Restore Schritt statt. Die durch die nachträgliche Lagerung entstandene Korrekturfläche ist in Abbildung 8.58 dargestellt. Diese Korrekturfläche unterscheidet sich von der GOCO25 Fläche (siehe Abbildung 8.34). Diese Unterschiede sind in Abbildung 8.59 zu sehen. Die verwendeten Schwereanomalien und Lotabweichungen sind mittelwertszentriert.

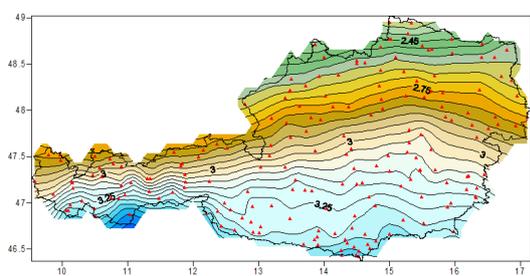


Abbildung 8.58.: $N_{\text{kor}} nachträglich$ gelagert [m]

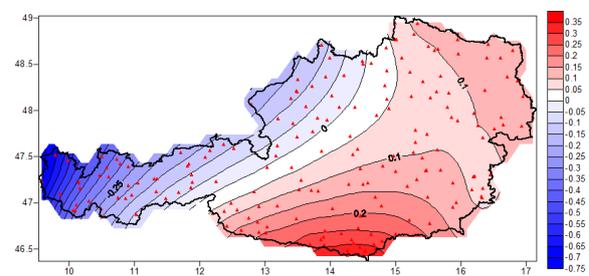


Abbildung 8.59.: Differenzen N_{kor} zu GOCO25 [m]

Werden die Werte der beiden Abbildungen miteinander addiert, ergibt sich die GOCO25 Korrekturfläche. Bei einer nachträglichen Lagerung entspricht die Korrekturfläche nicht jener, die bei einer Geoidbestimmung mit GPS/Niv. Punkten entsteht, sondern es treten wie in Abbildung 8.59 zu sehen, Differenzen auf. Dies ist auf die unterschiedlichen spektralen Anteile von Schwereanomalien und Lotabweichungen zurückzuführen. Die spektralen Anteile der Schwereanomalien sind mittelwellig während bei Lotabweichungen kurzwellige Anteile dominieren. Die Korrekturfläche wurde zur Lagerung von dem ungelagerten Geoid abgezogen. Die daraus entstandene Transformationsfläche ist in Anhang H zu finden. Mit dieser Art der Lagerung auf allen GPS/Niv. Punkten lässt sich jedoch keine Qualitätsinformation über die Geoidbestimmung gewinnen, da die GPS/Niv. Punkte als fehlerfrei angesehen werden und somit nach Abzug der Korrekturfläche keine Differenzen zwischen N_{gem} und den berechneten Geoidhöhen auftreten. Soll mit dieser Lagerungsart eine Validierung durchgeführt werden, so sind hochqualitative GPS/Niv. Punkte mittels statistische Verfahren zu bestimmen und auf diesen zu lagern. Über die Residuen der Restpunkte lässt sich dann die Qualitätsinformation der Lösung gewinnen.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Masterarbeit wurden verschiedene Aspekte und Problemstellungen der Geoid bzw. Transformationsflächenbestimmung näher untersucht. Der entwickelte Algorithmus zur Grobfehlersuche in den GPS/Niv. Punkten ermöglicht es, Abweichungen ab $\pm 10\text{cm}$ mit Sicherheit aufzudecken. Durch das Einbeziehen von weiteren radialen Basisfunktionen in den Algorithmus kann die Zuverlässigkeit möglicherweise noch weiter gesteigert werden, jedoch geht dies zu Lasten der Rechenzeit.

Die Modellierung der Korrekturfläche gelingt mit radialen Basisfunktionen besser als mit einem Polynom dritten Grades. Ein Polynom approximiert die Werte nur, während mit der RBF eine Interpolation möglich ist. Wird auf allen GPS/Niv. Punkten gelagert, unterscheiden sich die erzielten Ergebnisse im Zentimeterbereich. Generell hat die RBF den Vorteil, nach dem Restore Schritt nur mehr Ablagen im Millimeterbereich zu den gemessenen Geoidhöhen N_{gem} aufzuweisen, während für das Polynom Ablagen im Zentimeterbereich zu erzielen sind. Da beim Lagern auf allen GPS/Niv. Punkten diese aber als fehlerfrei anzusehen sind, muss die Größenordnung der Abweichungen gering sein. Ist also die innere Genauigkeit der Geoidlösung hoch wie dies mit der linearen RBF und der 1mm Gewichtung der Fall ist, so sind die Abweichungen gering. Ein weiterer Vorteil der RBF im Vergleich zum Polynom ergibt sich aus Kapitel 8.4.2. Beim Modellieren mit dem Polynom kann es zu künstlichen Fehlern in der Korrekturfläche kommen wenn die GPS/Niv. Punkte nahe beisammen liegen. Mit der RBF treten diese Effekte nicht auf. Ebenfalls ergeben sich Unterschiede in den Grenzgebieten Österreichs. Hier kann es zu größeren Abweichungen kommen, da das Polynom in den Randbereichen zum Ausschwingen neigt (Kapitel 8.53).

Die Frage, ob überhaupt eine Korrekturfläche verwendet werden soll, ist mit Ja zu beantworten. Bei der Berechnung ohne Korrekturfläche (Kapitel 8.8) treten aufgrund der Lagerung auf allen GPS/Niv. Punkten nur geringe Differenzen zu den gemessenen Geoidhöhen N_{gem} auf. Jedoch kommt es in den Bereichen zwischen den GPS/Niv. Punkten fast ausschließlich zu negativen Differenzen. Dieser Effekt ist auf die fehlende Korrekturfläche zurückzuführen, da die Korrekturfläche, die in diesen Bereichen die Geoidlösung stützen würde, nicht vorhanden ist.

Eine Geoidbestimmung mit nachträglicher Lagerung ist sinnvoller wenn nicht auf allen Punkten gelagert wird, sondern über statistische Verfahren qualitativ sehr hochwertige GPS/Niv. Punkte bestimmt werden auf denen die Lösung dann zu lagern ist. Die Qualität der Lösung

lässt sich anschließend über die entstehenden Residuen in den Validierungspunkten auf denen nicht gelagert wurde, bestimmen. Wird direkt die Korrekturfläche, die aus allen GPS/Niv. Punkten bestimmt wurde von der erzielten Geoidlösung abgezogen, lässt sich keine äußere Qualitätsinformation mehr gewinnen, die hohe innere Genauigkeit der Lösung ist jedoch unbestritten.

Die Anpassung der Kovarianzfunktion der Kollokation gelingt für die GOCO25 Reduktion am besten (siehe Kapitel 7.6). Die Varianz C_0 und der für den Übergang auf eine analytisch geschlossene Form notwendige Parameter A sind fast ident. Ebenfalls lässt die geringe Halbwertsbreite auf eine passende Reduktion der Schweredaten schließen. Im Gegensatz dazu tritt bei der GOCO90 Reduktion eine sehr große Halbwertsbreite auf, was auf eine noch vorhandene Korrelation in den reduzierten Schwereanomalien schließen lässt. Auch die Varianz und der Parameter A weichen deutlich voneinander ab. Dies spiegelt sich auch in der erzielten Korrekturfläche (Abbildung 8.37) wider.

Das schon in GEOnAUT untersuchte optimale Gewicht für die Lagerung der GPS/Niv. Punkte konnte mit 1mm bestätigt werden. Dies gilt sowohl für die Modellierung mit RBF als auch mit Polynom dritten Grades. Um die innere Genauigkeit der Geoidlösung zu validieren sind die aus der 1mm Lösung erhaltenen Gewichte bzw. Ablagen durchaus geeignet. Die Ablagen dieser Lösung zu den GPS/Niv. Punkten sollte direkt zur Validierung herangezogen werden und nicht als Gewicht für eine neue, zusätzliche Iteration der Kollokation. Bei einer Berechnung und anschließenden Validierung mit den selben GPS/Niv. Punkten besteht jedoch allgemein eine starke Korrelation zwischen diesen Daten. Eine unabhängige Validierung ist somit nicht möglich, jedoch kann aufgrund dessen, dass es sich dabei größtenteils um GPS-Permanentstationen handelt, von einer hohen Genauigkeit der Messungen N_{gem} ausgegangen werden. Die neu entwickelte unabhängige Variante der Gewichtsbestimmung mittels LOOCV Residuen lieferte durchaus brauchbare Ergebnisse. Die Abweichungen zu den GPS/Niv. Punkten lagen bei einer Modellierung mit der linearen RBF bei ± 2 cm.

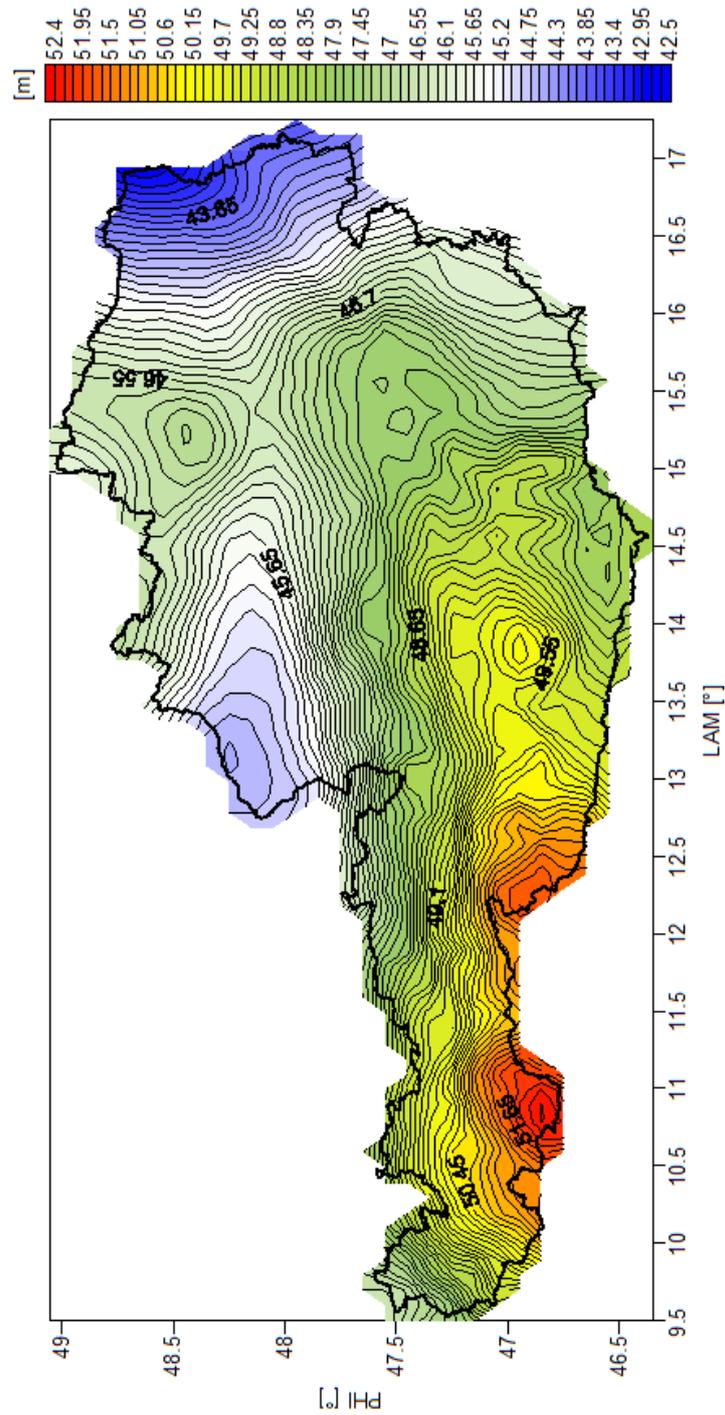
Die Geoidbestimmung mit Greedy Algorithmus erfolgte mit zwei Fehlergrenzen. Für die ± 1 cm Fehlergrenze ergaben sich absolute Ablagen von maximal 7cm in den Validierungspunkten, bei der Verdoppelung der Fehlergrenze auf ± 2 cm sind Ablagen von absolut gesehen maximal 8cm zu erzielen, jedoch liegen doppelt so viele Validierungspunkte vor. Bei dieser Variante der Geoidbestimmung sind die Validierungspunkte nicht in den Kollokationsprozess mit eingebunden und somit lösungsunabhängig.

Im Bereich der globalen Reduktion kann durch die zunehmende Beobachtungsdauer der GOCE Mission das derzeit verwendete globale Schwerfeldmodell GOCO01S sicher noch verbessert oder durch ein neueres GOCO02S ersetzt werden. Der Vorteil eines neuen globalen Modells für

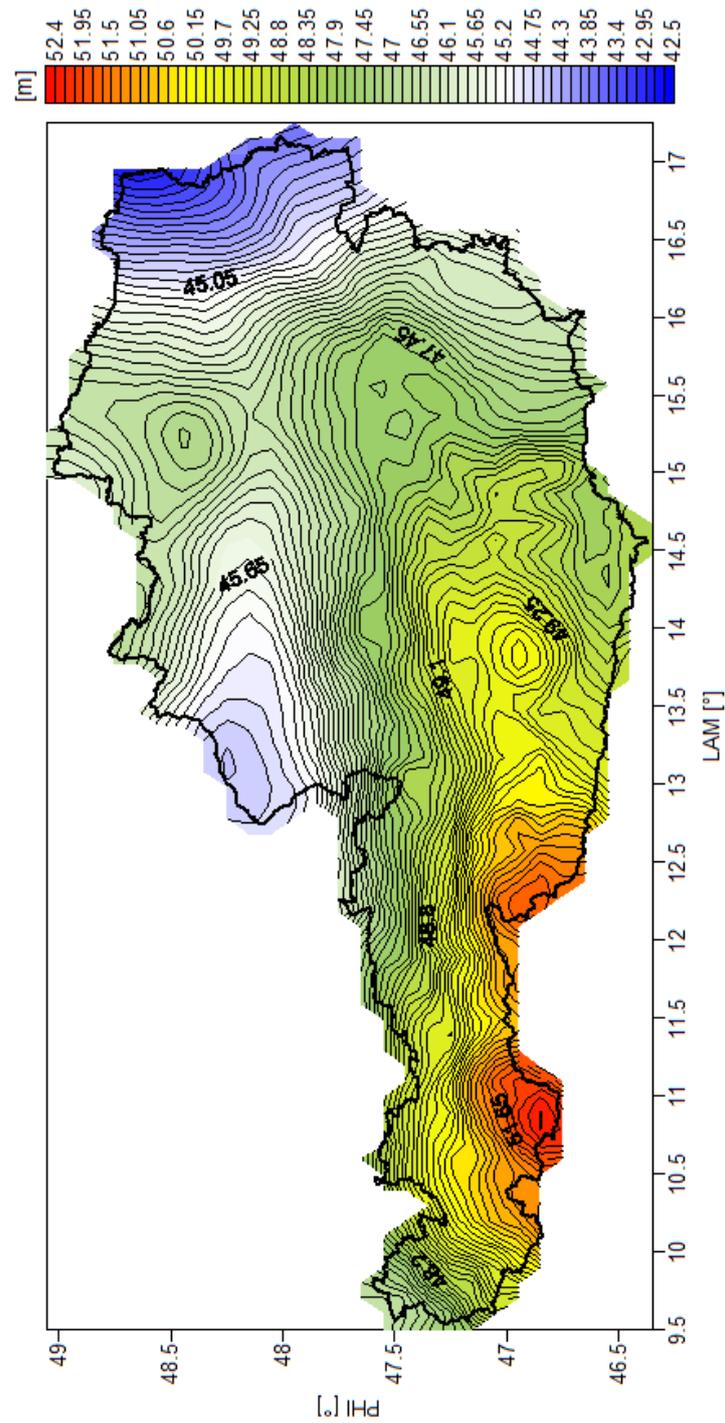
die Geoidbestimmung bzw. Remove-Restore Technik ist aber wie in Kapitel 4.1.2 beschrieben, abhängig vom gewählten Grad/Ordnung.

Für die lokale Reduktion liefert ein Oberflächendichtemodell kaum bessere Ergebnisse als eine einheitliche mittlere Dichte für Gesamtösterreich. Zu diesem Schluss gelangte *Norbert Kühtreiber* bei seinen Untersuchungen zur Geoidbestimmung und diese Einschätzung wurde durch das GEOID+ Projekt bestätigt. Die möglichen Vorteile, die die Verwendung eines 3D-Dichtemodells für Österreich bringen, gehen bei einer Berechnung mit GPS/Niv. Punkten und Lagerung unter. Sicherlich wert wäre eine Untersuchung der Auswirkungen dieses Modells auf eine ungelagerte rein gravimetrische Geoidlösung.

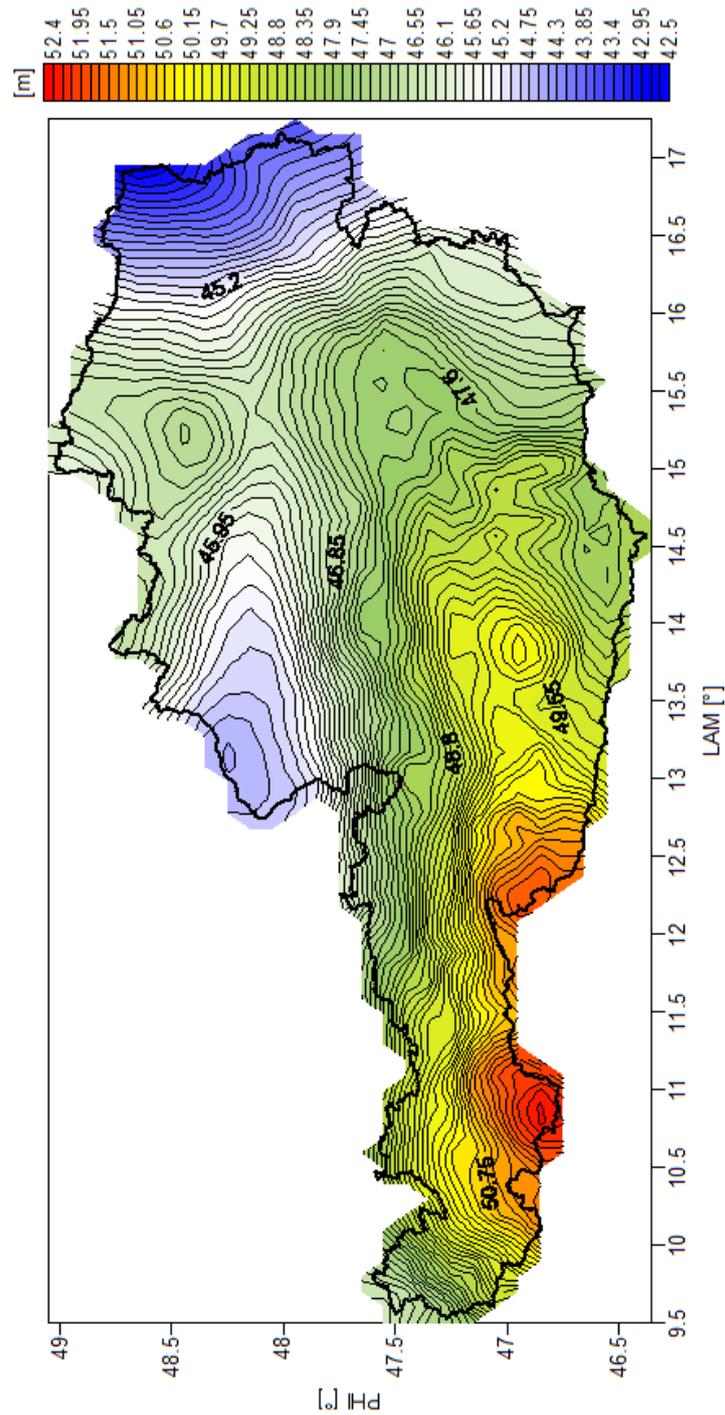
A Anhang - Transformationsfläche berechnet mit $\pm 1\text{cm}$ Fehlergrenze



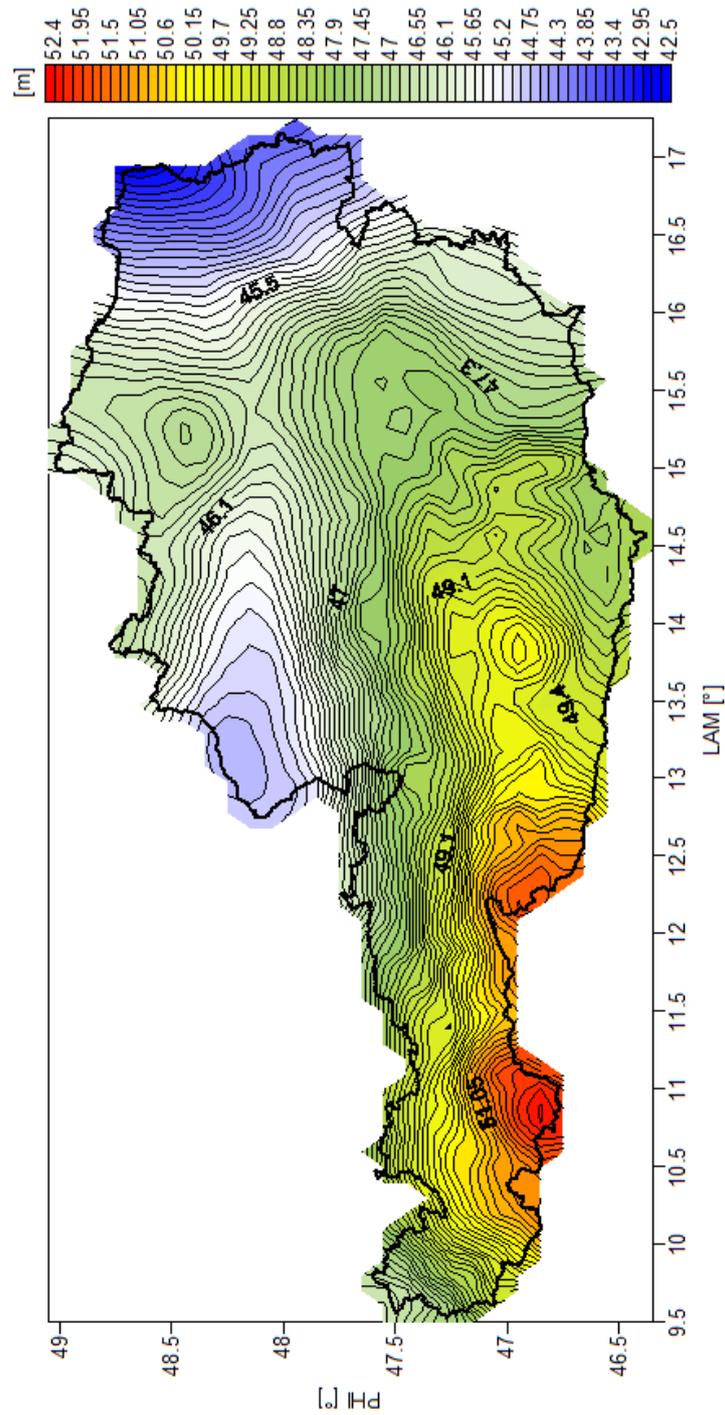
B Anhang - Transformationsfläche berechnet mit $\pm 2\text{cm}$ Fehlergrenze



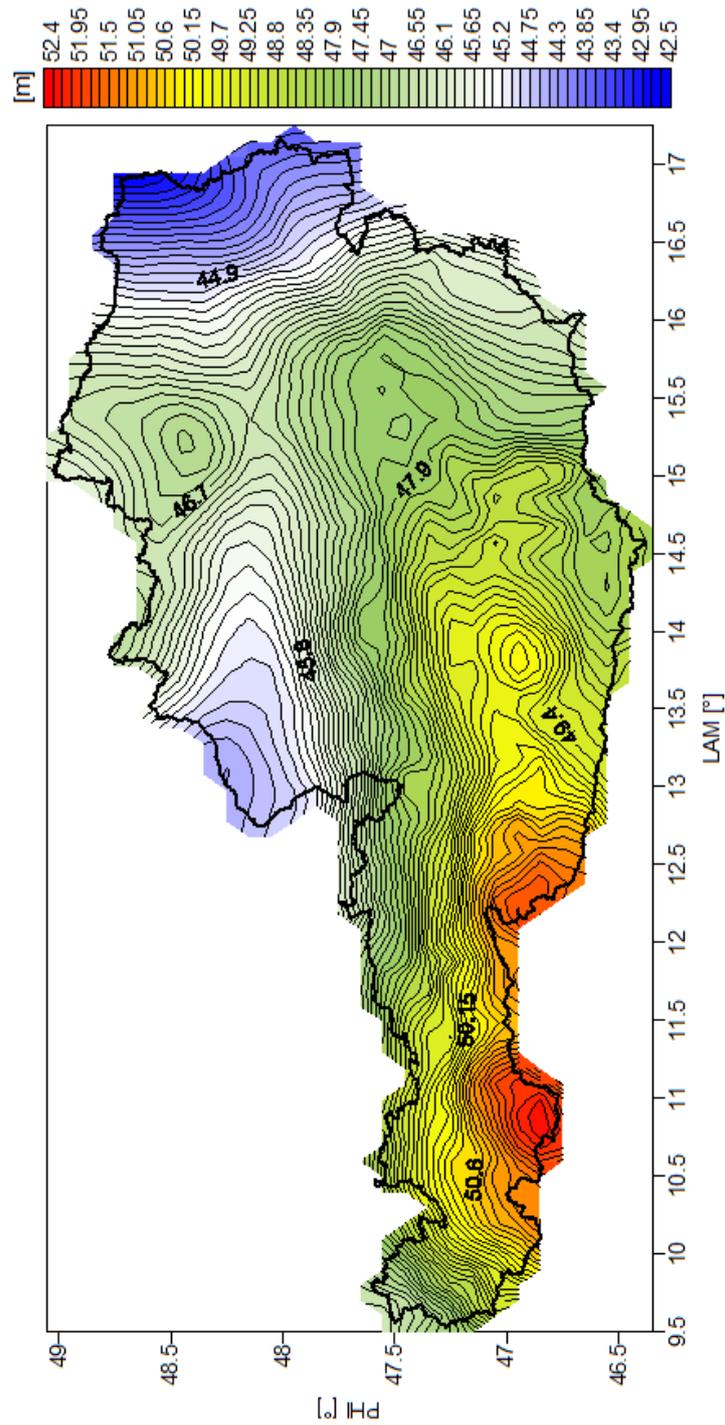
C Anhang - Transformationsfläche berechnet mit RBF "Linear"



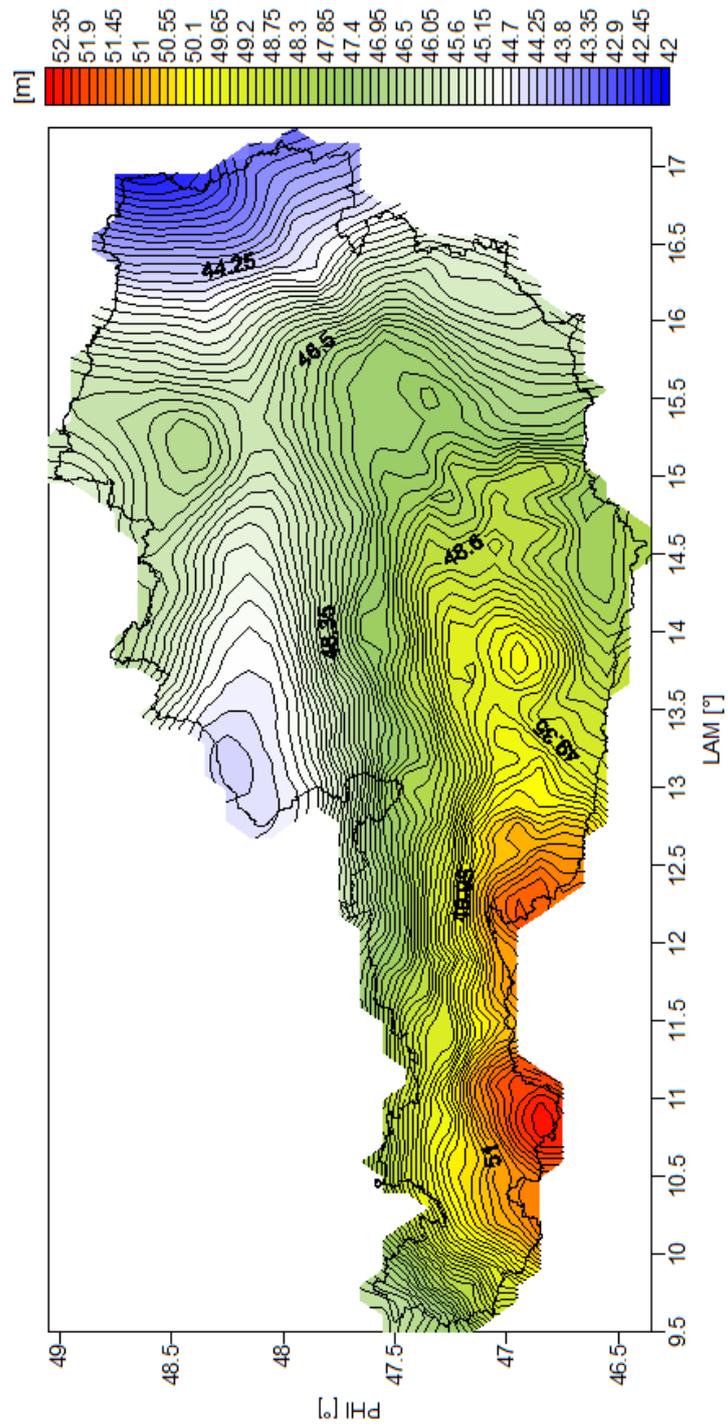
D Anhang - Transformationsfläche berechnet mit Polynom dritten Grades



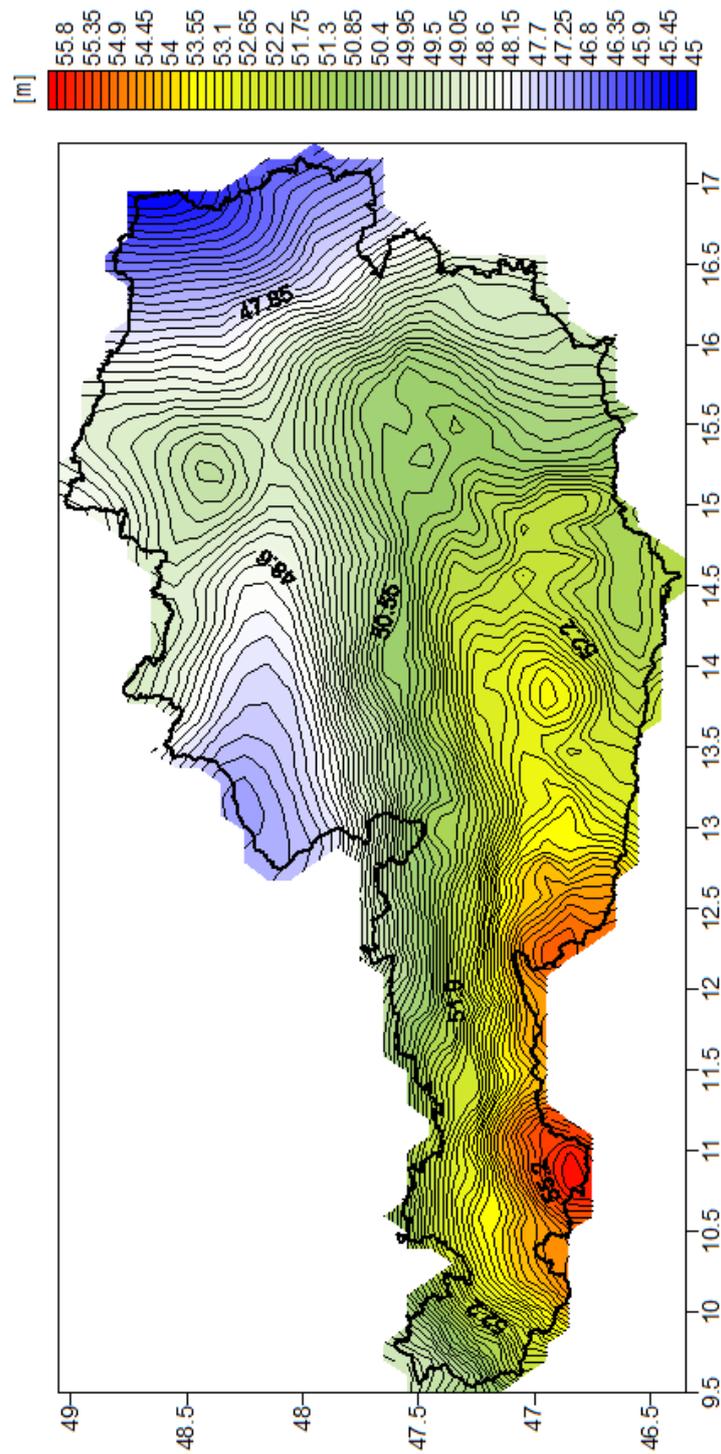
E Anhang - Transformationsfläche berechnet ohne Korrekturfläche



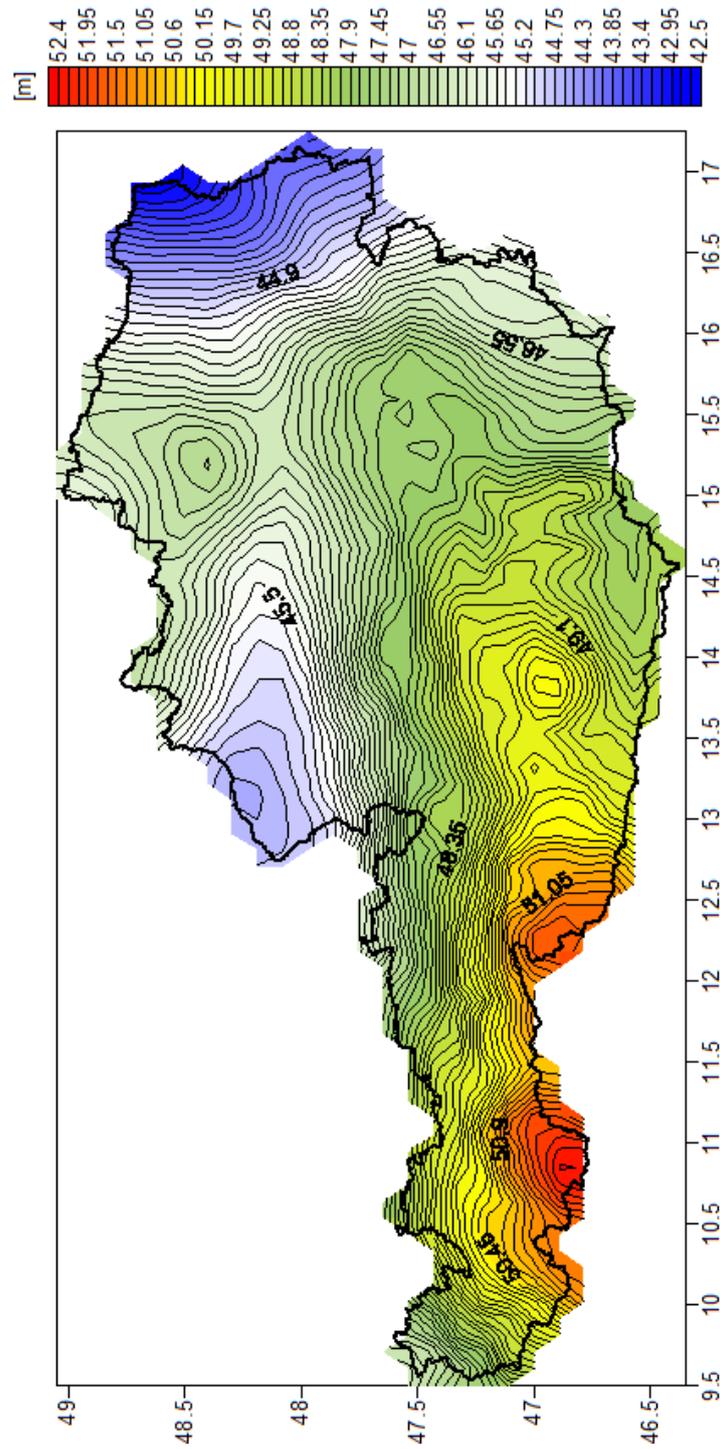
F Anhang - Transformationsfläche berechnet aus Gebrauchshöhen



G Anhang - Geoid ungelagert, berechnet aus Schwereanomalien und Lotabweichungen



H Anhang - Transformationsfläche nachträglich gelagert



Abbildungsverzeichnis

2.1	<i>Definition der ellipsoidischen Höhe h, der orthometrischen Höhe H und der Geoidhöhe N</i>	6
2.2	<i>Definition der Normalhöhe</i>	8
2.3	<i>Messprinzip GPS Levelling [TOR03]</i>	9
3.1	<i>Äquipotentialflächen und Lotlinien</i>	15
3.2	<i>Geoid und Referenzellipsoid</i>	16
3.3	<i>13689 Schwereanomalien Δg_{red} reduziert mit GOCO01S Grad/Ordnung 25 - Airy-Heiskanen topographisch/isostatisch [mGal]</i>	23
3.4	<i>Berechnungsablauf Remove-Restore Technik [KUH11]</i>	24
3.5	<i>Airy-Heiskanen Isostasiemodell</i>	27
4.1	<i>Ausgangsdaten Projekt GEOnAUT: Schwereanomalien(schwarz), Lotabweichungen(blau), GPS/Niv. Punkte(rot)</i>	29
4.2	<i>Grad/Median Plot des GOCE Anteils (blau), GRACE Anteils (magenta) und die kombinierte GOCO01S Lösung (grün strichliert). Als Referenz wird die ESA GOCE SGG-only Lösung (rot) und das EGM2008 (schwarz) dargestellt</i>	31
4.3	<i>Differenzen Δg_{red} GOCO01S - EIGEN-GL04S1 Grad/Ordnung 90 [mGal]</i>	32
4.4	<i>Differenzen Δg_{red} GOCO01S - EIGEN-GL04S1 Grad/Ordnung 70 [mGal]</i>	32
4.5	<i>Ausgangsdaten Projekt GEOID+ Schwereanomalien(schwarz), Lotabweichungen(blau), GPS/Niv. Punkte(rot)</i>	33
4.6	<i>Workflow Projekt GEOID+</i>	33
4.7	<i>Differenzen in den orthometrischen Höhen H zwischen den GEOnAUT und GEOID+ Identpunkten [m]</i>	36
4.8	<i>Differenzen in den Geoidhöhen N_{gem} zwischen den GEOnAUT und GEOID+ Identpunkten [m]</i>	36
5.1	<i>Interpolationsfehler aufgrund des Polynoms dritten Grades in den 170 GPS/-Niv. Punkten des Projektes GEOnAUT [m]</i>	41
5.2	<i>Reduktion der RBF Zentren</i>	41
5.3	<i>Korrekturfläche bestimmt aus 170 GPS/Niv. Punkten - GEOnAUT [m]</i>	42
5.4	<i>Greedy Punkte und Restpunkte - GEOnAUT</i>	43
5.5	<i>Differenzen in den 170 GPS/Niv. Punkten der GEOnAUT Korrekturfläche</i>	43

6.1	<i>LOOCV Trainings und Testdatenset</i>	45
6.2	<i>K-fold Trainings und Testdatenset</i>	45
6.3	<i>Subsampling Trainings und Testdatenset</i>	46
7.1	<i>Empirische und angepasste Modellkovarianzfunktion für Δg</i>	57
7.2	<i>Alle 13689 Schwereanomalien bzw. 5104 innerhalb Österreichs</i>	59
7.3	<i>GOCO25 "Alle"</i>	59
7.4	<i>GOCO25 "Österreich"</i>	59
7.5	<i>GOCO50 "Alle"</i>	60
7.6	<i>GOCO50 "Österreich"</i>	60
7.7	<i>GOCO70 "Alle"</i>	60
7.8	<i>GOCO70 "Österreich"</i>	60
7.9	<i>GOCO90 "Alle"</i>	61
7.10	<i>GOCO90 "Österreich"</i>	61
7.11	<i>N_{koll} GOCO25 [m]</i>	62
7.12	<i>N_{koll} GOCO50 [m]</i>	62
7.13	<i>N_{koll} GOCO70 [m]</i>	62
7.14	<i>N_{koll} GOCO90 [m]</i>	62
8.1	<i>Gitterpunkte 10×10km(schwarz) - GPS/Niv. Punkte(rot)</i>	63
8.2	<i>Abweichungen RBF "Linear" zu Krigingwerten</i>	64
8.3	<i>Abweichungen Polynom dritten Grades zu Krigingwerten</i>	64
8.4	<i>Abweichungen von RBF Linear und Polynom</i>	65
8.5	<i>Abweichungen von RBF Thinplate und Polynom</i>	65
8.6	<i>Extrapolation RBF Linear und Polynom</i>	65
8.7	<i>Extrapolation RBF Thinplate und Polynom</i>	65
8.8	<i>Abweichungen RBF Cubic und Polynom</i>	66
8.9	<i>Extrapolation RBF Cubic und Polynom</i>	66
8.10	<i>Differenzen RBF Linear zu Krigingwerten [m]</i>	67
8.11	<i>Differenzen RBF Cubic zu Krigingwerten [m]</i>	67
8.12	<i>Differenzen RBF Thinpl. zu Krigingwerten [m]</i>	67
8.13	<i>Differenzen Polynom zu Krigingwerten [m]</i>	67
8.14	<i>Greedy Algorithmus berechnet mit RBF "Linear"</i>	68
8.15	<i>Greedy Algorithmus berechnet mit RBF "Cubic"</i>	68
8.16	<i>Differenzen an den Gitterpunkten berechnet mit RBF "Linear" - Input 170 GPS/Niv. Punkte [m]</i>	69
8.17	<i>Adaptierter Greedy Algorithmus - Differenzen an den Gitterpunkten berechnet mit RBF "Linear" - Input 84 GPS/Niv. Punkte [m]</i>	70

8.18	Differenzen an den Gitterpunkten berechnet mit Polynom dritten Grades - Input 170 GPS/Niv. Punkte [m]	71
8.19	Adaptierter Greedy Algorithmus - Differenzen an den Gitterpunkten berechnet mit Polynom dritten Grades - Input 84 GPS/Niv. Punkte [m]	71
8.20	Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 20mm und RBF "Linear" [m]	73
8.21	Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 10mm und RBF "Linear" [m]	73
8.22	Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 5mm und RBF "Linear" [m]	73
8.23	Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 1mm und RBF "Linear" [m]	73
8.24	Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 20mm und Polynom [m]	74
8.25	Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 10mm und Polynom [m]	74
8.26	Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 5mm und Polynom [m]	74
8.27	Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 1mm und Polynom [m]	74
8.28	Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 1mm und Polynom; auffällige GPS/Niv. Punkte Tirol/Steiermark [m]	75
8.29	Berechnete Gewichte ΔN - Input N_{red} 1mm und Polynom; verbleibende 188 GPS/Niv. Punkte [m]	75
8.30	Ablagen zu gemessenen GPS/Niv. Punkten, Gewichtung klassisch [m]	76
8.31	Individuelle Gewichtung über LOOCV Residuen [m]	77
8.32	Ablagen zu gemessenen GPS/Niv. Punkten, Gewichtung LOOCV individuell [m]	78
8.33	Flussdiagramm des Berechnungsalgorithmus	80
8.34	N_{korrr} GOCO25 [m]	81
8.35	N_{korrr} GOCO50 [m]	81
8.36	N_{korrr} GOCO70 [m]	81
8.37	N_{korrr} GOCO90 [m]	81
8.38	Detektion RBF "Linear"	82
8.39	Detektion RBF "Cubic"	82
8.40	Detektion RBF "Thinpl."	82
8.41	Detektion "Polynom"	82
8.42	Logfile der Detektion GOCO25	83
8.43	Detektierte Punkte GOCO25 Korrekturfläche, N_{gem} PNr. 980284 um $\pm 10cm$ verändert	84
8.44	Logfile der Detektion GOCO25, N_{gem} PNr. 980284 um $\pm 10cm$ verändert	85
8.45	Lage Greedy Punkte vs. Restpunkte, Fehlergrenze $\pm 1cm$	88
8.46	Lage Greedy Punkte vs. Restpunkte, Fehlergrenze $\pm 2cm$	88
8.47	Fehlergrenze $\pm 1cm$, Zuschlag in Restpunkten [m]	89
8.48	Fehlergrenze $\pm 2cm$, Zuschlag in Restpunkten [m]	89
8.49	LOOCV und Greedypunkte Fehlergrenze $\pm 1cm$	90

8.50	<i>LOOCV und Greedypunkte Fehlergrenze $\pm 2\text{cm}$</i>	90
8.51	<i>Fehlergrenze $\pm 1\text{cm}$ Differenzen in Validierungspunkten [m]</i>	91
8.52	<i>Fehlergrenze $\pm 2\text{cm}$ Differenzen in Validierungspunkten [m]</i>	91
8.53	<i>Differenzen der Geoidhöhen N, RBF "Linear" - Polynom dritten Grades, 5018 Gitterpunkte [m]</i>	92
8.54	<i>Differenzen der Geoidhöhen N, RBF "Linear" - Polynom dritten Grades, 192 GPS/Niv. Punkte [m]</i>	92
8.55	<i>Differenzen der Geoidhöhen N, 192 GPS/Niv. Punkte [m]</i>	93
8.56	<i>Differenzen der Geoidhöhen N bestimmt aus Gebrauchshöhen, 192 GPS/Niv. Punkte [m]</i>	94
8.57	<i>Differenzen zwischen den Geoidhöhen N basierend auf orthometrischen Höhen und dem Gebrauchsgeoid [m]</i>	95
8.58	<i>N_{korrr} nachträglich gelagert [m]</i>	96
8.59	<i>Differenzen N_{korrr} zu GOCO25 [m]</i>	96

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameter WGS-84	5
2.2	Charakterisierung der Höhensysteme [MAS02]	9
7.1	ECF/MCF Anpassung GOCO25 an alle Δg_{red} bzw. nur Österreich	60
7.2	ECF/MCF Anpassung GOCO50 an alle Δg_{red} bzw. nur Österreich	60
7.3	ECF/MCF Anpassung GOCO70 an alle Δg_{red} bzw. nur Österreich	61
7.4	ECF/MCF Anpassung GOCO90 an alle Δg_{red} bzw. nur Österreich	61
8.1	ECF/MCF Anpassung GOCO25 an alle Δg_{red} bzw. nur Österreich	72
8.2	RMS der Basisfunktionen und Polynom dritten Grades für die GOCO25 Korrekturfläche	77
8.3	Ergebnis Detektion mit Korrekturflächen GOCO50 und GOCO70	82
8.4	Ergebnis Detektion mit Korrekturfläche GOCO25 PNr. 1400022 eliminiert . . .	86
8.5	Ergebnis Detektion mit Korrekturfläche GOCO25 PNr. 1400022 und 1420236 eliminiert	86
8.6	Ergebnis Detektion mit Korrekturfläche GOCO25 PNr. 1400022, 1420236 und 1460123 eliminiert	87

Literaturverzeichnis

- [AEH91] Abd-Elmotaal H. (1991): *Gravity anomalies based on the Vening Meinesz isostatic model and their statistical behaviour*. Mitteilungen der Geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Vol 71, Graz
- [AEH98] Abd-Elmotaal H. (1998): *An alternative Capable Technique for the Elavuation of Geopotential from Spherical Harmonic Explansions*. Bollettino di Geodesia e Scinze Affini, Vol 57, No.1, p.25.38
- [ALM09] Almbauer R. (2009): *Numerische Methoden in der angewandten Thermodynamik*. Technische Universität Graz, Lecture Notes, Graz
- [BRG83] Bretterbauer K., Gerstbach G. (1983): *Die astro-geodätische Arbeiten der TU-Wien*. Das Geoid in Österreich - Geodätische Arbeiten Österreichs für die internationale Erdmessung, Band III, pages 61–72, Wien
- [BUH03] Buhmann M. D. (2003): *Radial Basis Functions*, Cambridge University Press
- [CRE90] Cressie N.A.C. (1990): *The Origins of Kriging*, Mathematical Geology, v. 22, p. 239-252
- [ERK87] Erker E. (1987): *The Austrian geoid – local geoid determination using modified conservative algorithms*. The Gravity Field in Austria - Geodätische Arbeiten Österreichs für die internationale Erdmessung, Band IV, pages 19–46
- [FOE06] Förste Ch. et.al. (2006): *A mean global gravity field model from the combination of satellite mission and altimetry/gravimetry surface data - EIGEN-GL04*, Geophysical Research Abstracts, Vol. 8, Potsdam
- [FOR84] Forsberg R. (1984): *A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling*. OSU Report No. 5
- [GOI10] Goiginger H., Rieser D., Höck E. (2010): *Combined high-resolution global gravity field model from satellite mission COCE and GRACE, complemented by terrestrial gravity, altimetry and SLR date (GOCO_nAUT)*. Midterm Report, Graz University of Technology, Graz

- [GRA96] Graf J. (1996): *Das digitale Geländemodell für Geoidberechnungen und Schwerereduktionen in Österreich*, Proceedings of the 7th International Meeting on Alpine Gravimetry, Vienna, Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, 14, p. 121–136.
- [GER03] Gerstbach G. (2003): *Geoid monitoring by zenith camera and geology - geoscientific cooperation projects of Austria, Slovakia and Hungary*. veröffentlicht von der TU Bratislava, Bratislava
- [HAR96] Hartman S. (1996): *Hierarchische Interpolation mit radialen Basisfunktionen*, Diplomarbeit, Universität Göttingen
- [HAY71] Hardy R.L. (1971): *Multiquadratic equations of topography and other irregular surfaces*, J. Geophy. Res., Vol 76., pp. 1905-1915
- [HIR62] Hirvonen R.A. (1962): *On the statistical analysis of gravity anomalies*, Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy, Vol 76., Helsinki
- [HWM05] Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. (2005): *Physical Geodesy*. Springer, Wien, New York.
- [HWB06] Hofmann-Wellenhof B. et al. (2006): *Skriptum zur Lehrveranstaltung Bezugssysteme*. Technische Universität Graz, Graz.
- [KUH98] Kührtreiber N. et al. (1998): *The Geoid for the Central Part of the Alps-Adria Area*, Proceedings of the 2nd International Symposium Geodynamics of the Alps-Adria Area by Means of Terrestrial and Satellite Methods, Dubrovnik, Croatia, September 29-October 2, 1998; pp. 153-162
- [KUH99] Kührtreiber N. (1999): *Combining Gravity Anomalies and Deviations of the Vertical for a Precise Austrian Geoid*, Bollettino di Geofisica teorica ed applicata, 40, 545–553.
- [KUH02] Kührtreiber N. (2002): *High precision geoid determination of Austria using heterogeneous data*. Gravity and Geoid 2002, pages 144–149
- [KUH10] Kührtreiber N. (2010): *Physikalische Geodäsie*. Institut für Navigation, Technische Universität Graz, Lecture notes
- [KUH11] Kührtreiber N., Pail R., Wasle B., Pock Ch., Wirnsberger H., Hofmann-Wellenhof B., Of G., Steinbach O., Höggerl N., Imrek E., Ruess D., Ullrich C. (2011): *Improved*

Austrian geoid solution combining terrestrial and satellite gravity data (GEOID+)
ASAP Phase VI Project, Final Report, Graz

- [KER99] Kearns M., Dana R. (1999): *Algorithmic Stability and Sanity-Check Bounds for Leave-One-Out Cross-Validation*. Neural Computation, Vol. 11, No. 6, pp. 1427-1453
- [KRA82] Kraiger G. (1982): *Prädiktion von Freiluftanomalien in Österreich*. Diplomarbeit, Technische Universität Graz, Institut für theoretische Geodäsie, Graz
- [LRS87] Lichtenegger H., Rinner K., Sünkel H. (1987): *Das Geoid in Österreich - Geodätische Arbeiten Österreichs für die internationale Erdmessung*, Band III. Dbv-Verlag für die Technische Universität Graz, Graz
- [MAS02] Marti U., Schlatter A. (2002): *Höhenreferenzsysteme - und Rahmen*, Vermessung - Photogrammetrie, Vol. 1, pp. 8-12
- [MAR06] Maresch T. (2006): *Mathematische Verknüpfung von 2D und 3D Punktwolken*, Dissertation, Universität Gießen
- [MOR89] Moritz H. (1989): *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe
- [PAP82] Papadimitriou C.H., Steiglitz K. (1982): *Combinatorial Optimization*. Algorithm and Complexity. Prentice Hall Inc. ISBN 0-13-152462-3
- [PAI07] Pail R., Kühtreiber N., Wiesenhofer B., Hofmann-Wellenhof B., Of G., Steinbach O., Höggerl N., Imrek E., Ruess D., Ullrich C. (2007): *The Austrian Geoid 2007 (GEOOnAUT)*. ASAP Phase III Project, ALR-OEWP-CO-329/06. Final Report, 165p., Graz
- [PAI10] Pail R., Goiginger H., Schuh W.-D., Höck E., Brockmann J.M., Fecher T., Gruber T., Mayer-Gürr T., Kusche J., Jäggi A., Rieser D. (2010): *Combined satellite gravity field model GOCO01S derived from GOCE and GRACE*, Geophys. Res. Lett., 37, L20314, doi:10.1029/2010GL044906
- [RIN83] Rinner K. (1983): *Stand und Zielsetzung der Geoidforschung in Österreich*. Das Geoid in Österreich - Geodätische Arbeiten Österreichs für die internationale Erdmessung, Band III, pages 7–19
- [RUE95] Ruess D. (1995): *Das Schweregrundnetz in Österreich*. EVM, Eich und Vermessungsmagazin, 80:24–36, Wien

- [SUN87] Sünkel H., Bartelme N., Fuchs H., Hanafy M., Schuh W., Wieser M. (1987): *The Gravity Field in Austria*, In: Gravity Field in Austria, Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Graz
- [TOR03] Torge W. (2003): *Geodäsie*. Sammlung Göschen, Walter de Gruyter & Co, Berlin
- [TSR74] Tscherning Ch., Rapp H. (1974): *Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoidundulations and defections of the vertical implied by anomaly degree-variance models*. Department of Geodetic Science, Ohio State University, Report No.208.
- [TSC75] Tscherning Ch. (1975): *Covariance expressions for second and lower order derivatives of the anomalous potential*. Department of Geodetic Science, Ohio State University, Report No.225.
- [TSC76] Tscherning Ch. (1976): *Implementation of Algo-procedures for covariance computation on the RC 4000 computer*. Danish Geodetic Institute, Vol 12., Copenhagen
- [WEN05] Wendland H. (2005): *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press
- [WIE07] Wiesenhofer B. (2007): *Untersuchungen zur astrogeodätischen Geoidlösung im Südosten Österreichs*. Master Thesis, Graz University of Technology, Graz