



Valentino Sliskovic, BSc.

Zweiaxiales Tragverhalten von Schalenkonstruktionen aus UHPC – Konzept eines Großversuches

MASTERARBEIT

Zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Bauingenieurwissenschaften – Konstruktiver Ingenieurbau

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Univ.Doz. Dipl.Ing. Dr.techn. Bernhard Freytag

Labor für Konstruktiven Ingenieurbau

Mitbetreuender Assistent

Dipl.Ing. Gerhard Santner

Graz, September 2015

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Datum

Unterschrift

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen ein großes Danke an Dipl.Ing. Dr.techn. Bernhard Freytag auszusprechen. Durch seine kompetente und freundliche Art konnte er mich für dieses Thema begeistern, und bei der Verfassung unterstützte er mich stets mit gutem Rat und hilfreichen Tipps. Er ermöglichte mir auch die Räumlichkeiten am LKI zu nutzen. Für diese vorbildliche Unterstützung und Förderung bin ich ihm sehr dankbar.

Auch Dipl. Ing. Gerhard Santner möchte ich an dieser Stelle danken. Mit seinem Fachwissen konnte er mir bei Unklarheiten weiterhelfen und auch bei sonstigen Fragen fand er stets Zeit und Rat für mich.

Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern des LKI. Durch die freundliche Atmosphäre am Arbeitsplatz war es eine Freude die Arbeit zu verfassen.

Bei meinen Studienkollegen und Freunden möchte ich mich für eine unvergessliche Zeit an der TU Graz bedanken. Dank euch machte das Studieren Spaß.

Mein größter Dank gilt meinen Eltern und meinem Bruder. Durch ihre beispiellose Unterstützung während meiner gesamten Ausbildungszeit haben sie mir stets den Rücken gestärkt.

Kurzfassung

UHPC (Ultra High Performance Concrete) als neuer Werkstoff gewinnt zunehmend an Bedeutung im baupraktischen Einsatz. Schlanke Bauteile herzustellen und dabei eine hohe Tragfähigkeit zu gewährleisten, ermöglicht beim Entwurf von Gebäuden größeren Spielraum und Kreativität. Das in Fertigbauweise von der Österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft FFG geförderte Forschungsprojekt „UHPC-Schalen“ an der TU Graz in Kooperation mit mehreren Industriepartnern beschäftigt sich mit Freiformschalenkonstruktionen aus UHPC.

Das Projekt umfasst die Entwicklung eines Herstellprozesses durch eine digitale Prozesskette und Einsatz von CAM-basierenden Robotern. Dabei werden auch die Verbindungselemente entwickelt und das Tragverhalten von UHPC-Schalenelementen untersucht. Der Herstellprozess und die Verbindungstechnik werden in anderen Arbeiten thematisiert. Die vorliegende Diplomarbeit behandelt die Untersuchung des Tragverhaltens der UHPC-Schalensegmente in einem Gesamtsystem. Es wird ein Konzept für einen rotationssymmetrischen Großversuch erarbeitet.

Zweck des Versuchsaufbaus soll sein, ein Systemtragverhalten der hergestellten UHPC-Schalensegmente zu untersuchen und das Verhalten der Verbindungselemente im Gesamtsystem zu beobachten. Im Zuge dessen wird in der vorliegenden Arbeit zunächst die Theorie der Statik von rotationssymmetrischen Schalenkonstruktionen aufbereitet. Anschließend wird das zweiachsiges Tragvermögen von UHPC-Schalen numerisch ermittelt (speziell die zweiachsiges Momenten-Normalkraft-Interaktion). Als Basis zur Analyse des Tragverhaltens dient ein fiktives Schalenbauwerk, welches auf seine Lastabtragung mittels des Statikprogramms RFEM© untersucht wird. Die maßgebenden Spannungszustände dieser Freiformkonstruktion werden in einem rotationssymmetrischen Versuchskonzept rekonstruiert.

Das Modell der rotationssymmetrischen Schalenkonstruktion wird mittels der Software Abaqus© erstellt und simuliert, welches auch als Grundlage für weitere CAD-basierende Bearbeitung zur Verfügung steht.

Abstract

UHPC (Ultra High Performance Concrete) as a material becomes increasingly relevant in the practical construction field. Producing thin shaped components and simultaneously guaranteeing a high carrying capacity, offers higher range and creativity to the design. The research project, funded by the Austrian Research Promotion Agency (FFG), "UHPC-shells" at the Graz University of Technology in cooperation with several industrial partners analyzes the characteristics of shell structures made of UHPC.

The research project includes the development of a production process with a digital process chain including the use of CAM-based robots. At the same time the joint elements were developed and the loading behavior of UHPC shell elements analyzed. The development of the joint elements is discussed in another thesis. The present thesis contains the analysis of the carrying behavior of UHPC shells elements in a total system. In doing so, a concept for a rotation-symmetrical large-scale experiment is being developed.

The purpose of the experiment is to analyze a system carrying behavior of the produced UHPC shell elements and to monitor the behavior of the joint elements in a total system. To accomplish this, the present thesis firstly prepares the necessary theory of statics for rotation-symmetrical shell constructions. Afterwards the biaxial carrying capacity for UHPC is being numerical calculated (particular the biaxial force-moment interaction diagram). A virtual shell construction serves as an example for the analysis of the carrying behavior. The construction is being monitored with the static program RFEM© in terms of the structural behavior. The leading tension state of this free-form construction will be reconstructed in a rotation-symmetrical experiment.

The digital model of the rotation-symmetrical shell construction is generated and simulated with the software Abaqus©, which then serves as a basis for further CAD-based development.

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemein	8
1.1	Aufgabenstellung / Motivation / Ziel	8
1.2	Aufbau der Arbeit.....	10
2	Stand der Technik	11
2.1	Ultrahochfester Beton - UHPC	11
2.2	Literatur zu Betonschalen bzw. Schalenversuchen	14
2.2.1	Herstellung von Schalentragerwerken aus Beton mit der „Pneumatic Wedge Method“ [8].....	14
2.2.2	Parapluie – Realisierung einer ultraschlanken Betonschale durch Aktivierung einer Membrantragwirkung [9]	15
2.2.3	Wind force coefficients on hexagonal free form shell [10].....	18
2.2.4	Zusammenfassung der Literatur	18
3	Theoretische Grundlagen - Statik von rotationssymmetrischen Schalenkonstruktionen	19
3.1	Spannungszustände	19
3.1.1	Membranzustand / Membrantheorie	19
3.1.2	Biegezustand / Biegetheorie	22
3.1.3	Herleitung der Differentialgleichungen an einer Kugelschale.....	31
3.2	Qualitative Schnittkraftverläufe an rotationssymmetrischen Systemen - Variantenstudie.....	36
3.2.1	Vergleich Meridiankraft n_ϕ [kN/m]	37
3.2.2	Vergleich Ringkraft n_θ [kN/m]	38
3.2.3	Vergleich Meridianmoment m_ϕ [kNm/m]	39
3.2.4	Vergleich Ringmoment m_θ [kNm/m].....	40
3.2.5	Zusammenfassung der Variantenstudie	41
4	Beanspruchungszustände und Tragverhalten einer Freiformschale	42
4.1	Ausgangslage	42
4.2	Tragverhalten des Wellendaches.....	42
4.2.1	Scheibenlagerung.....	44
4.2.2	Lagerungsänderung – Horizontal verschiebliche Lager.....	55
4.2.3	Lagerungsänderung – allseitige Festlager („membrangerechte Lagerung“)	61
4.2.4	Zusammenfassung der Systemvergleiche	67
5	Biaxiale Versagenszustände auf Schnittkraftebene	68
5.1	Materialeigenschaften.....	68
5.2	Versagensformen	69
5.3	Verhalten von UHPC bei zweiachsialer Beanspruchung	70
5.3.1	Druck-Druck-Beanspruchung.....	70
5.3.2	Druck-Zug-Beanspruchung.....	71
5.3.3	Zug-Zug-Beanspruchung	72
5.4	Bruchkriterien	73
5.5	Zweiachsale Momenten-Normalkraft-Interaktion	74
5.5.1	m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion.....	77
5.5.2	m_1 - n_1 - m_2 -Interaktion.....	85
6	Versuchskonzept Großversuch	90
6.1	Formfindungsschritte	90
6.2	Kritische Schnittkraftkombinationen im Wellendach	90
6.2.1	Formfindung für Druck-Zug-Kombination (Bereich 5)	95

6.2.2	Formfindung für Zug-Zug-Kombination (Bereich 4)	108
7	Zusammenfassung und Ausblick	111
7.1	Zusammenfassung	111
7.2	Ausblick	112
8	Literatur	113
9	Abbildungsverzeichnis	116
10	Tabellenverzeichnis	121
11	Anhang	122
11.1	M ₁ -N ₁ -N ₂ -Interaktionen	122
11.1	M ₁ -N ₁ -M ₂ -Interaktionen	137

1 Allgemein

1.1 Aufgabenstellung / Motivation / Ziel

Schalenkonstruktionen bzw. die Schalenform gelten als architektonisch anspruchsvolle und elegante Form von Bauteilen. Durch die Möglichkeit von doppeltgekrümmten dünnen Bauteilen lassen sich die verschiedensten Formen realisieren. In Kombination mit Beton und seiner Möglichkeit des Gießens, sind Konstruktionen möglich, welche die Einsatzmöglichkeiten dieser Bauform vergrößern.

Im Zuge des von der Österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft FFG geförderten Forschungsprojektes „UHPC-Schalen“, welches die TU Graz in Kooperation mit Fa. Max Bögl, Fa. BASF Performance Products, Fa. SGL Group, Fa. Dyckerhoff, Fa. ABB AG, Fa. Nomotec durchführt, wird in dieser Arbeit ein Konzeptentwurf für einen Großversuch erstellt. Bei diesem Großversuch soll eine Freiformschale aus ultrahochfestem Beton (UHPC) auf seine Tragfähigkeit untersucht, und dabei gleichzeitig die Verbindungstechnik, die dafür entwickelt und bereits an vielen Kleinversuchen getestet wurde, zwischen den Schalelementen überprüft werden.

Da ein konkretes Bauprojekt in Freiformbauweise nicht zur Verfügung stand, wurde eine fiktive Bauaufgabe als Grundlage für die weiteren Bearbeitungsschritte festgelegt. Die daraus entstandene Basis-Geometrie „Wellendach“ wurde in Abhängigkeit von Belastungssituationen entworfen und kann als repräsentativ für zeitgenössische Formensprache erachtet werden.

Aus dieser Geometrie soll ein Spannungszustand infolge einer EUROCODE-konformen Beanspruchung ermittelt werden und in einem vereinfachten rotationssymmetrischen Versuchsaufbau reproduziert werden. Dabei gelten, neben der Rotationssymmetrie, eine ringförmige horizontal-verschiebliche Lagerung am unteren Rand und eine ringförmige vertikale Lasteinleitung als Randbedingungen für das Versuchskonzept (siehe Abbildung 1).

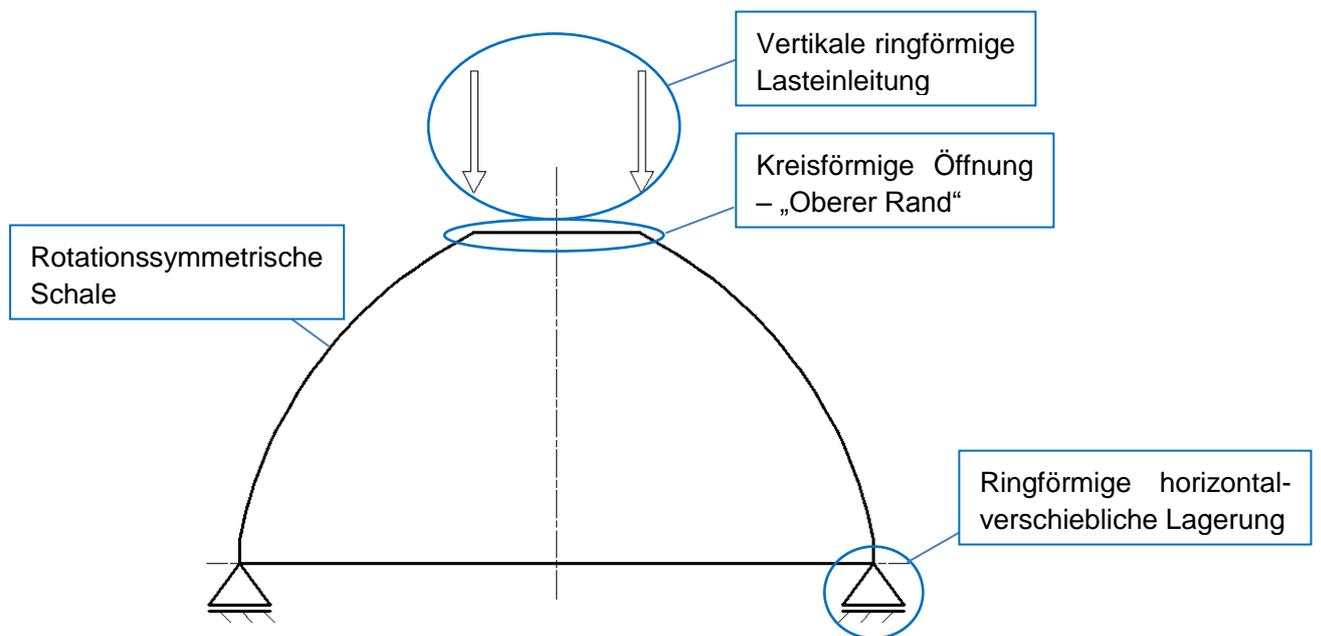


Abbildung 1 - Randbedingungen Versuchskonzept

Um den maßgebenden Spannungszustand aus dem Wellendach selektieren zu können, muss ein zweiaxiales Versagenskriterium für den verwendeten UPHC erstellt werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Der Aufbau dieser Arbeit ist so gestaltet, dass schrittweise die nötigen Informationen aufbereitet werden um zum gewünschten Ergebnis, dem Versuchskonzept, zu gelangen.

Zunächst wird der Stand der Technik bezüglich des Materials UHPC erläutert und es wird versucht, ähnliche Versuchsaufbauten in der Literatur zu finden, um eventuell auf daraus gewonnenen Erfahrungen aufzubauen.

Da es sich beim Versuchsaufbau um ein rotationssymmetrisches Schalensystem handelt, werden dahingehend die Grundlagen der Statik aufbereitet. Neben der Herleitung der Formeln zur Schnittkraftermittlung werden auch Beispiele angeführt, um eine geeignete Grundform für die schlussendliche Formfindung der Schalenkonstruktion zu finden.

Anschließend wird anhand des Beispiels der Basis-Geometrie „Wellendach“ das Systemtragverhalten analysiert, um ein allgemeines Verständnis der Lastabtragung von Schalenkonstruktionen im System zu erhalten.

Im nächsten Kapitel werden die Versagenszustände von UHPC bei verschiedener Beanspruchung erläutert und anschließend uniaxiale und zweiachiale Momenten-Normalkraft-Interaktionen ermittelt. Diese werden dann zur Beurteilung der Beanspruchungszustände aus dem Wellendach benötigt.

Schlussendlich erfolgt die Formfindung des Versuchsaufbaus, bei der die zuvor als kritisch beurteilten Beanspruchungszustände aus dem Wellendach rekonstruiert werden.

Als Abschluss folgt eine Zusammenfassung der Ergebnisse und Erkenntnisse dieser Arbeit, sowie ein Ausblick über weitere etwaige Vorgehensweisen.

2 Stand der Technik

2.1 Ultrahochfester Beton - UHPC

Als ultrahochfest bezeichnet man Betone, die eine Druckfestigkeit von über 150 N/mm² aufweisen können. Betone oberhalb der Druckfestigkeitsklasse C100/115 werden nicht in der DIN 1045-2 geregelt. Somit erfordert der Einsatz von UHPC im baupraktischen Bereich eine allgemeine bauaufsichtliche Zulassung.

Eine allgemeine Unterscheidung erfolgt anhand des Größtkörndurchmessers. Bei einem Größtkorn von etwa 0,5 mm spricht man von ultrahochfestem Feinkornbeton (RPC – Reactive Powder Concrete). Ultrahochfester Grobkornbeton (Ultra High Performance Concrete, UHPC) besitzt ein Größtkorn von höchstens 16 mm. [1]

Ultra-Hochfester Beton, UHPC, ist ein extrem gefügedichter Beton, der es ermöglicht Bauteile im Vergleich zu Normalbeton sehr schlank und bezüglich des Gewichts vergleichsweise leicht herzustellen. Um dies zu erreichen, sind bei der Herstellung des UHPCs besondere Maßnahmen erforderlich. Zum einen spielt der Wasserzementwert eine große Rolle. In Abbildung 2 ist ersichtlich, dass für Ultrahochleistungsbeton im Vergleich zu den anderen Betonsorten der Wasserzementwert signifikant reduziert werden muss ($w/b \approx 0,20$) [2].

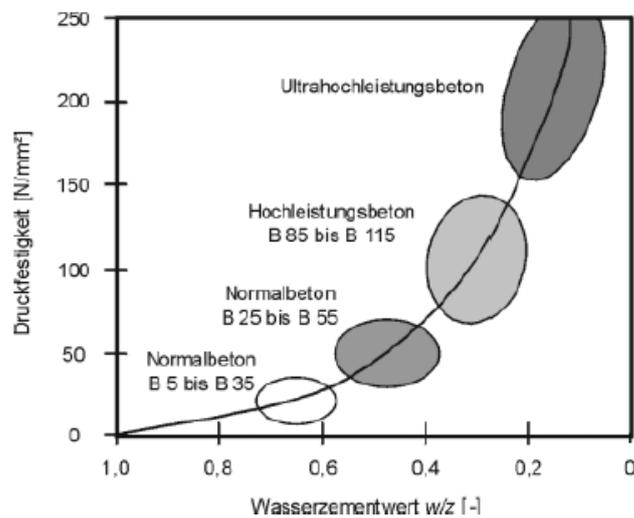


Abbildung 2 - Betondruckfestigkeiten in Abhängigkeit des W/Z-Wertes [3]

Zum anderen ist die Zusammensetzung der Ausgangsstoffe maßgebend. Die bei der Herstellung üblichen Ausgangsstoffe sind in Abbildung 3 zu sehen.



Abbildung 3 – Übliche Ausgangsstoffe von UHPC

Um die geforderten Druckfestigkeiten im ultrahochfesten Bereich zu erreichen, ist eine maximale Gefügedichtigkeit erforderlich. Diese wird wie schon erwähnt durch eine mengenmäßig optimierte Zusammensetzung der Ausgangsstoffe erreicht. Dabei werden die Gesteinskörnung und die einzelnen Zuschlagsstoffe so aufeinander abgestimmt, dass eine optimale Packungsdichte mit möglichst geringem Porenanteil zustande kommt. Die Mikrofüller (Mikrosilica, Quarzsand/-mehl) dienen neben der Hohlraumfüllung auch als zusätzliches Bindemittel. Der daraus entstehende hohe Bindemittelgehalt, kombiniert mit dem geringen Wassergehalt erfordert den Einsatz von hochwirksamen Fließmitteln.

UHPC-Bauteile ohne Fasern verhalten sich unter Belastung nahezu linearelastisch und versagen beim Erreichen der Belastungsgrenze schlagartig. Durch Zugabe von Fasern zum Frischbeton verbessern sich die Zugfestigkeit sowie das spröde Nachbruchverhalten des erhärteten Betons.

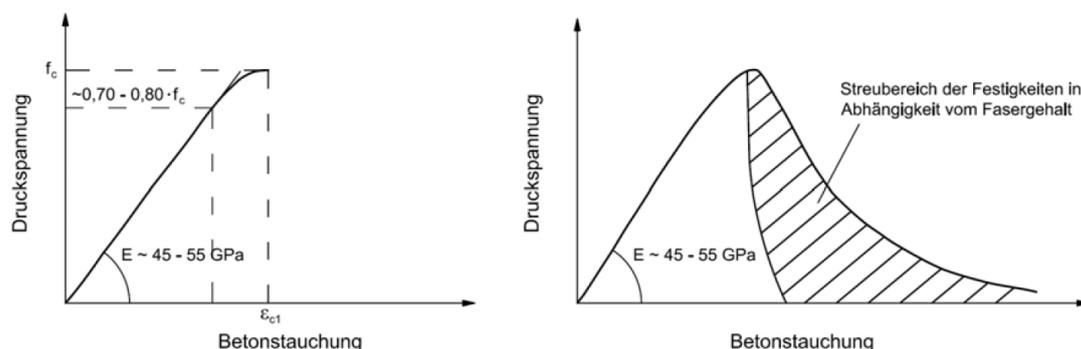


Abbildung 4 - Vergleich der Spannungs-Dehnungslinie von UHPC ohne (links) und mit (rechts) Faserbewehrung [4]

Abbildung 4 zeigt, dass UHPC mit Faserbewehrung ein deutlich duktileres Verhalten aufweist. Abhängig vom Fasergehalt des Materials kann der UHPC im Nachbruchbereich weiterhin Spannungen aufnehmen. Neben der Erhöhung der

Duktilität im Druck- und Zugbereich steigern die Fasern auch die Zugfestigkeit des Betons. Durch die Verbundwirkung der Fasern mit dem Betongefüge, nehmen die Fasern zwischen den Rissen des Betons die Zugspannungen auf. [5]

Das Materialverhalten von Faserbewehrtem UHPC lässt sich durch folgende Parameter steuern:

- Fasergehalt
Richtet sich nach Verarbeitbarkeit und Einmischbarkeit (0,8 – 3,0 Vol.-% üblich).
- Fasergeometrie
Ist das Verhältnis der Faserlänge l_f zum Faserdurchmesser d_f . Versuche aus der Literatur empfehlen eine Faserschlankheit λ_f zwischen 50 und 100. [6]
- Faserlänge in Relation zum Größtkorn
Verhältnis der Faserlänge l_f zum vorhandenen Größtkorndurchmesser d_{max} .
Günstige Werte liegen zwischen 4 und 20mm. [4]
- Verbundeigenschaften zwischen Fasern und Beton
Versagensart der Fasern unterscheidet sich zwischen Herausziehen oder Bruch der Faser. Aus Duktilitätsgründen ist ein Herausziehen der Fasern erstrebenswert, daher werden Fasern mit hoher Festigkeit verwendet. [6]
- Fasersteifigkeit
Fasern benötigen ein Mindestmaß an Biegesteifigkeit, um beim Mischvorgang nicht zerstört zu werden.
- Faserorientierung
Optimal für das Zugtragverhalten ist eine Längsbeanspruchung der Fasern. Eine Steuerung der Faserorientierung ist durch z.B. die Fließrichtung des Frischbetons bei der Herstellung möglich.

Weiterführende Literatur zum Thema UHPC Allgemein und UHPC mit Stahlfaserbewehrung finden Sie in [2], [3], [4], [7], [6].

2.2 Literatur zu Betonschalen bzw. Schalenversuchen

Im Folgenden werden Versuche an Betonschalen aus der Literatur zitiert. Eventuell können daraus relevante Erfahrungswerte und Informationen für den Konzeptentwurf herangezogen werden.

2.2.1 Herstellung von Schalentragwerken aus Beton mit der „Pneumatic Wedge Method“ [8]

Die Arbeit befasst sich mit einem neuen Bauverfahren zur Herstellung von zweifach gekrümmten Betonflächen. Dabei wird mit Hilfe von pneumatischen Schalungen die gewünschte Form hergestellt.

Der große Vorteil dieses Bauverfahrens ist, dass der aufwendige Aufbau einer Schalung und das Abbauen derselben entfallen. Beim Einsatz von pneumatischen Schalungen entfallen diese Arbeitsschritte größtenteils. Die Membran wird bereits werkseitig hergestellt und kann nach dem Erhärten der Betonschale einfach wieder entfernt werden.

Beim Prinzip der „Pneumatic Wedge Method“ wird aus einer ebenen Ausgangslage eine mehrfach gekrümmte Schale hergestellt. (Abbildung 5)

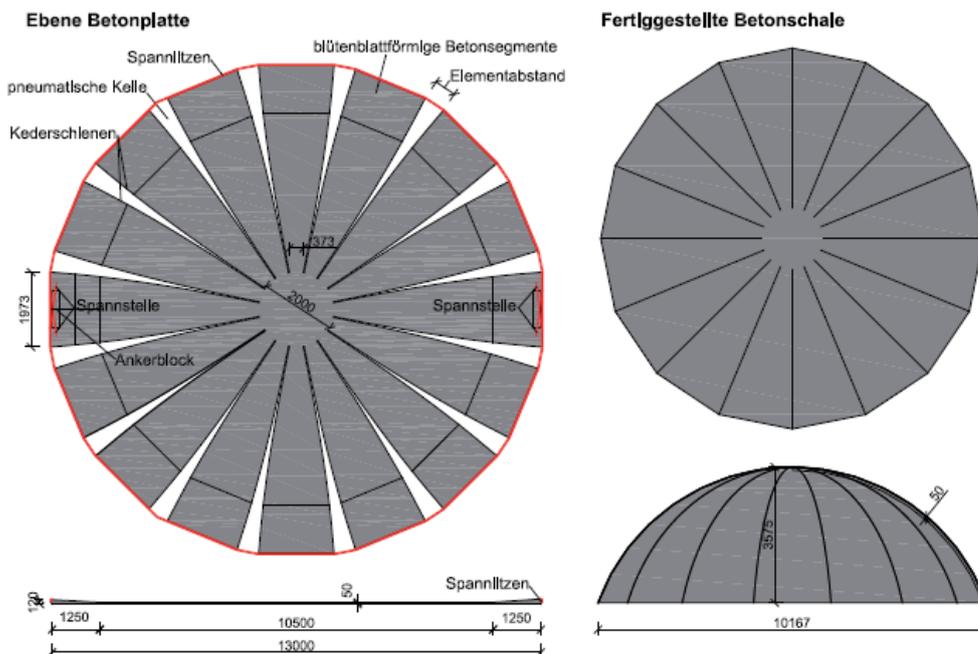


Abbildung 5 - "Pneumatic Wedge Method" [8]

Die einzelnen Betonelemente werden bei diesem Herstellungsvorgang sehr stark verkrümmt. Im Zuge der Forschungsarbeit an der TU Wien wurde ein 4-Punkt-Biegeversuch an unterschiedlich bewehrten rechteckigen Betonplatten durchgeführt.



Abbildung 6 - Biegeversuch Betonplatte [8]

Ziel dieser Versuche war es eine geeignete Beton-Bewehrungskombination für einen Großversuch zu finden. Für die Ergebnisse des Biegeversuchs wird auf den Bericht verwiesen. Neben den Kleinversuch an den Betonplatten wurde auch ein Großversuch zur Herstellung einer Betonschale mit 13 m Durchmesser durchgeführt. [8]

2.2.2 Parapluie – Realisierung einer ultraschlanken Betonschale durch Aktivierung einer Membrantragwirkung [9]

Die Parapluie ist eine Sichtbetonschale, die auf einer Stütze aufsitzt und als Haltestellenüberdachung dienen soll.



Abbildung 7 - Prototyp des Parapluie [9]

Als Randbedingung für diese Konstruktion war eine große Festigkeit bei hoher Duktilität gefordert, wobei eine mehrfach gekrümmte Fläche realisiert werden sollte.

Die Herstellung der Betonschale erfolgte mittels gefräster Konterschaltung in einem Stück. An den 2 Schalungshälften wurde vor dem Verschluss eine Mikroarmierung eingebaut. Das Einfüllen des flüssigen Betons erfolgte in Horizontaler Lage an den Hochpunkten (Eckpunkten, siehe Abbildung 8) der Schale.



Abbildung 8 – Zwei Schalungshälften bei der Herstellung der Parapluie

Das Material welches diese Anforderungen erfüllte war der sogenannte DUCON (DUctile CONcrete), ein mikrobewehrter, ultrahochfester Beton. Durch Justierung der Stahlgüte, Stahlgehalt und Zusammensetzung der Mikroarmierung beim DUCON lässt sich die Duktilität steuern. Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung 9 zeigt die Duktilität des DUCON mit verschiedenen Justierungen im Vergleich mit Normalbeton und Faserbeton.

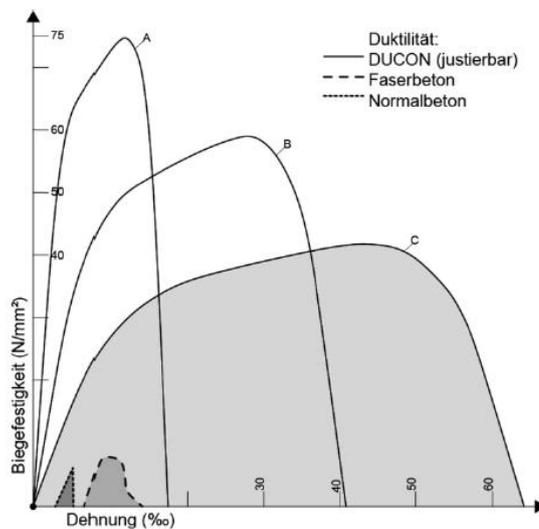


Abbildung 9 - Spannungs-Dehnung-Diagramm für DUCON um Vergleich zu Normalbeton und Faserbeton [9]

Nach Montage der Schale an die Stütze wurde ein Belastungstest durchgeführt, wobei die Größe der Last der maßgebenden Bemessungslast entsprach. Ziel war es die Gebrauchstauglichkeit und Tragfähigkeit unter erwarteten Nutzlasten zu testen.



Abbildung 10 – Belastungstest des Parapulie [9]

Die Ergebnisse des Tests zeigten, dass die Schale keine sichtbaren Schäden und Risse erfuhr und daher als z.B. Haltestellendach einsetzbar ist.

2.2.3 Wind force coefficients on hexagonal free form shell [10]

Dieser Forschungsbericht behandelt das Verhalten von Freiformschalen unter der Einwirkung von Wind.

Als Testmodell wurde eine Hexagonale Freiformschale entworfen (siehe Abbildung 11).

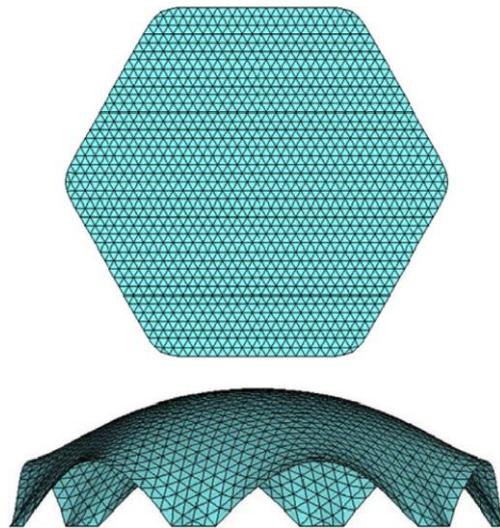


Abbildung 11 - FE-Modell der Hexagonalen Freiformschale [10]

Die Herstellung eines Maßstabmodells aus Fiberglas erfolgte durch eine CNC-Maschine. Für den Versuchsaufbau im Windkanal und die daraus resultierenden Beobachtungen bezüglich Tragverhalten und Verformung wird auf den Forschungsbericht verwiesen. [10]

2.2.4 Zusammenfassung der Literatur

Mangels Anzahl an Versuchen aus der Literatur und geringer Vergleichbarkeit mit dem rotationssymmetrischen Versuchsaufbau, können keine relevanten Erkenntnisse für den in dieser Arbeit behandelten Versuchsaufbau gewonnen werden.

3 Theoretische Grundlagen - Statik von rotationssymmetrischen Schalenkonstruktionen

Um einen Spannungszustand aus einer Freiformschale in einer vergleichsweise simplen rotationssymmetrischen Form abzubilden, wird ein Grundverständnis der Statik von Schalenkonstruktionen benötigt. Das folgende Kapitel soll die Herleitung der Schnittkräfte an einfachen rotationssymmetrischen Systemen zeigen, sowie eine Begriffserklärung bieten. Weiters werden analytisch die Schnittkraftverläufe an ausgewählten rotationssymmetrischen Systemen gezeigt, um ein Verständnis von der Abhängigkeit der Form und Lasteinwirkung zu bekommen.

3.1 Spannungszustände

Die Geometrie einer rotationssymmetrischen Schale entsteht durch die Rotation einer Linie begrenzter Länge, der sogenannten Erzeugenden, um eine Rotationsachse. Erzeugende und Rotationsachse liegen dabei in derselben Ebene.

Für Spannungsberechnungen an Schalenkonstruktionen wird grundsätzlich zwischen 2 Zuständen unterschieden. Da wäre zunächst der einfache Membranzustand, bei dem die Kräfte nur in Tangentialebene der Membran wirken. Der andere Fall wäre der Biegezustand, der z.B. sogenannte Randstörungen hervorruft, da die Kräfte nicht mehr nur in der Tangentialebene wirken.

Im folgenden Abschnitt werden diese 2 Zustände kurz erläutert sowie deren Berechnungsmethoden näher erklärt.

3.1.1 Membranzustand / Membrantheorie

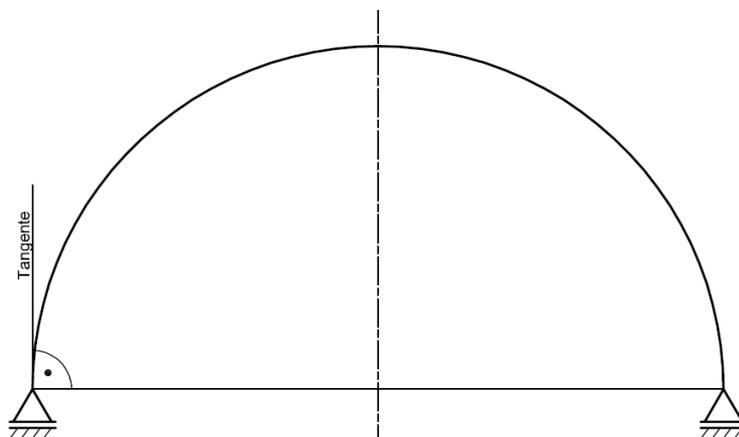


Abbildung 12 – Beispiel für membrangerechte Lagerung

Vom Membranzustand wird dann gesprochen wenn ein Flächentragwerk bzw. eine Schalenkonstruktion nur in Tangentialeben der Membran beansprucht wird, oder eine gleichmäßig verteilte Last entlang der Erzeugenden (Stützlinie) wirkt (z.B. Eigengewicht, hydrostatischer Druck oder Luftdruck). Als Beispiele seien hier ein Torbogen unter Eigengewicht (nur Druckkraft entlang der Stützlinie) oder der Innendruck eines Luftballons (nur Zugkräfte in der gesamten Membran) erwähnt.

Weiters muss die Lagerung ebenfalls ausschließlich tangential zur Erzeugenden erfolgen. Bei solch einer Lagerung spricht man von „membrangerechter Lagerung“ (Abbildung 12).

Das heißt, bei einer Tangentialbeanspruchung oder gleichmäßig verteilten Belastung der Schale, treten ausschließlich Schnittkräfte in Membranrichtung auf. Diese werden bei rotationssymmetrischen Schalen mit Meridiankraft n_φ und Ringkraft n_θ bezeichnet.

Die Meridiankraft lässt sich über die Summe aller vertikalen Kräfte am Gesamtsystem ermitteln.

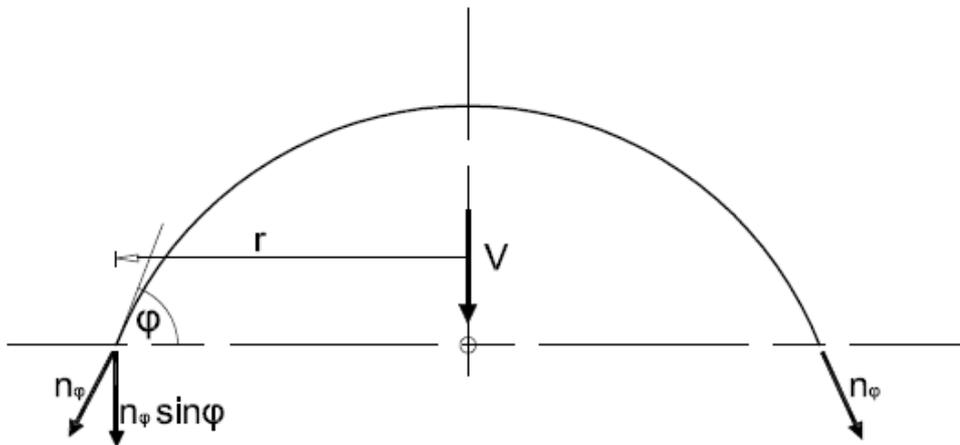


Abbildung 13 - Membranzustand – Schnittgrößen am Gesamtsystem

$$\sum V = V + 2 \cdot n_\varphi \cdot \sin\varphi \cdot 2\pi \cdot r = 0 \quad (1)$$

mit $V =$ Resultierende aus vertikaler Belastung

Durch Umformen erhält man die Meridiankraft:

$$n_\varphi = -\frac{V}{2\pi \cdot r \cdot \sin\varphi} \quad (2)$$

Für die Herleitung der Ringkraft n_ϑ wird ein infinitesimales Schalenelement herangezogen und ein Kräftegleichgewicht aufgestellt.

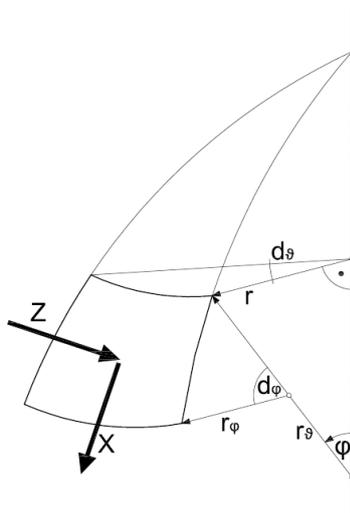


Abbildung 14 - Membrantheorie - Infinitesimales Schalenelement

Der dazugehörige Vertikal- und Horizontalschnitt sieht wie folgt aus:

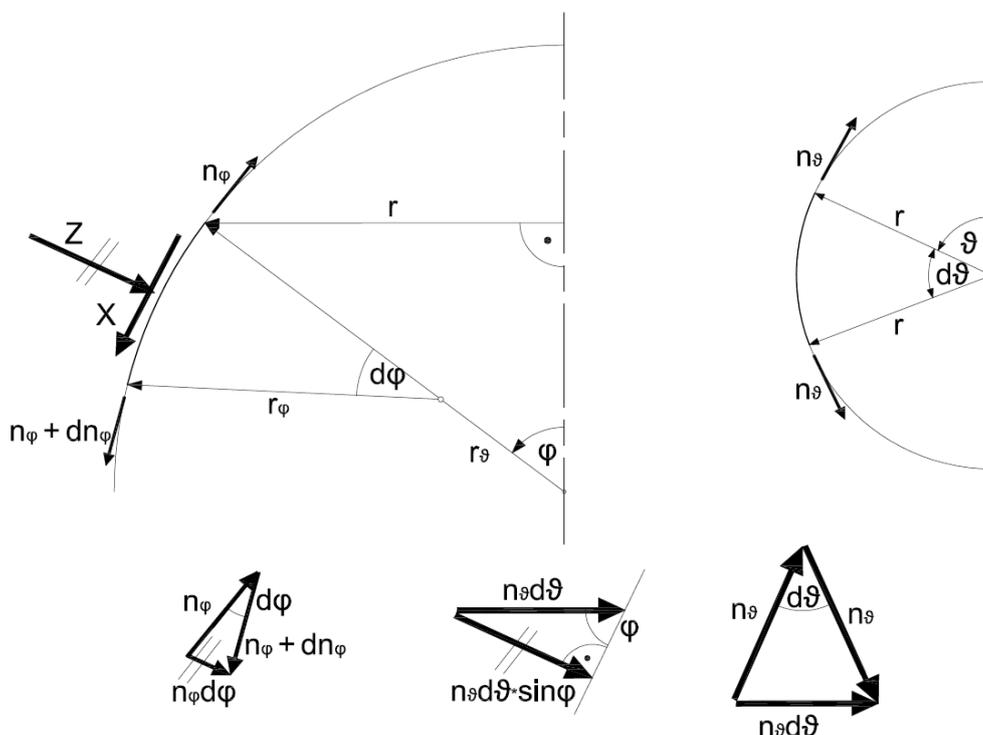


Abbildung 15 - Vertikal- und Horizontalschnitt des infinitesimalen Schalenelements im Membranzustand

Mit Hilfe dieser Schnitte lässt sich nun das Gleichgewicht senkrecht zur Schalenfläche aufstellen:

$$\sum Z = Z \cdot r_\varphi d\varphi \cdot r d\vartheta + n_\varphi d\varphi \cdot r d\vartheta + n_\vartheta d\vartheta \sin\varphi \cdot r_\varphi d\varphi = 0 \quad (3)$$

Wie aus der Abbildung 15 ersichtlich, ist $r = r_\vartheta \sin\varphi$. Daraus folgt:

$$\frac{n_\varphi}{r_\varphi} + \frac{n_\vartheta}{r_\vartheta} + Z = 0 \quad (4)$$

Nun kann nach der Ringkraft n_ϑ aufgelöst werden:

$$n_\vartheta = -\left(r_\vartheta Z + \frac{r_\vartheta}{r_\varphi} n_\varphi\right) \quad (5)$$

3.1.2 Biegezustand / Biegetheorie

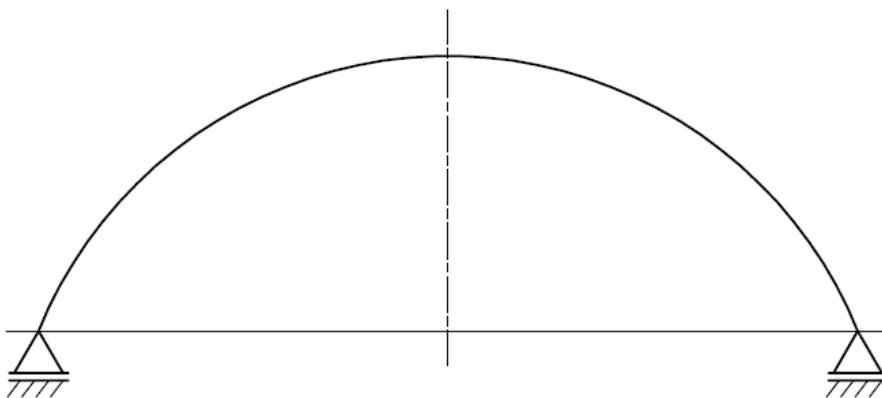


Abbildung 16 - Biegezustand

Ein Biegezustand ist vorhanden wenn lokale Lastenwirkungen oder die Lagerung der Schalkonstruktion nicht tangential erfolgen (gilt nicht für gleichmäßig verteilte Lasten entlang der Erzeugenden, wie z.B. Eigengewicht, hydrostatische Druck, Luftdruck).

Daraus resultieren Querkräfte sowie Biegemomente. Diese werden als Biegestörungen (im Randbereich auch als „Randstörungen“) bezeichnet.

Um die Schnittkräfte für eine Schalenkonstruktion im Biegezustand bzw. nach der Biegetheorie zu ermitteln, werden das Gleichgewicht, die geometrische Verträglichkeit sowie das Stoffgesetz benötigt. Im Folgenden werden zunächst die Grundgleichungen für eine Rotationsschale mit beliebiger Erzeugender hergeleitet. Dabei wird das lineare Stoffgesetz von HOOKE verwendet.

Gleichgewichtsbedingungen

Zunächst am Gesamtsystem, um die Meridiankraft n_φ auszudrücken.

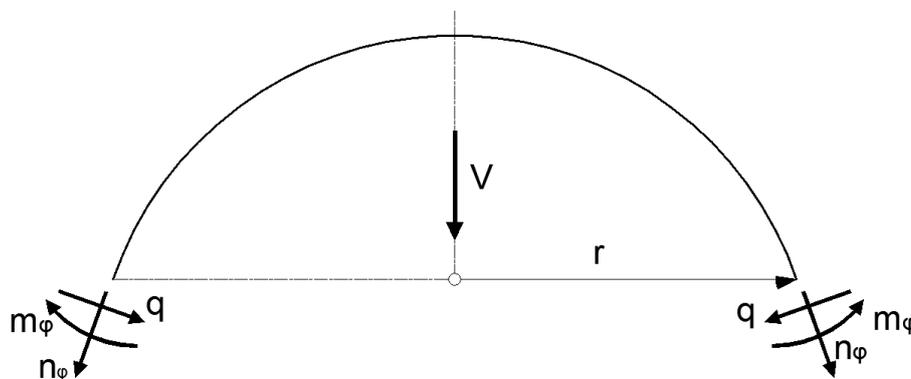


Abbildung 17 – Biegetheorie – Schnittgrößen am Gesamtsystem

Anders als beim Membranzustand sind nun zusätzlich die Schnittgrößen m_φ und q im Kräftegleichgewicht zu berücksichtigen:

Um das Gleichgewicht zu gewährleisten ist die Summe der vertikalen Kräfte wie folgt:

$$\sum V = V + 2\pi r(n_\varphi \sin\varphi + q \cos\varphi) = 0 \quad (6)$$

mit $V =$ Resultierende aus vertikaler Belastung

vereinfacht ergibt dies die erste Grundgleichung:

$$n_\varphi = -q \cot\varphi - \frac{V}{2\pi r} \quad (7)$$

Um die weiteren Schnittkräfte zu erhalten, wird wieder die Betrachtung eines infinitesimalen Schalenelementes benötigt; nun allerdings unter Berücksichtigung der Querkräfte und Biegemomente.

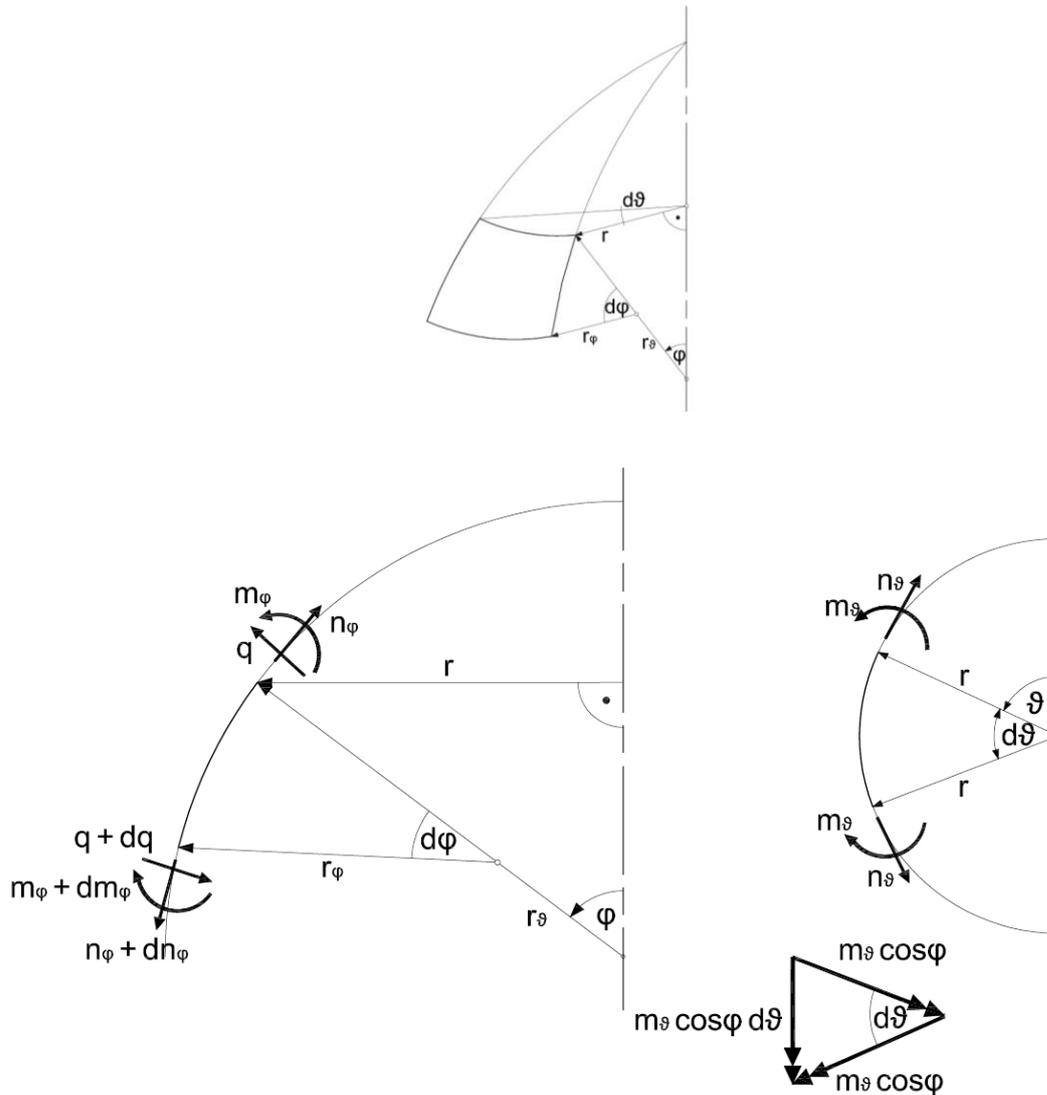


Abbildung 18 – Infinitesimales Schalenelement im Biegezustand

Wie bei Gleichung (3) wird hier wiederum das Kräftegleichgewicht senkrecht zur Schalenfläche gebildet:

$$n_{\varphi} d\varphi \cdot r d\vartheta + n_{\vartheta} d\vartheta \sin\varphi \cdot r_{\varphi} d\varphi - q \cdot r d\vartheta + (q + dq)(r + dr)d\vartheta = 0 \quad (8)$$

Durch Multiplizieren der Klammerausdrücke ergeben sie vereinfacht

$$qr + \left(q \frac{dr}{d\varphi} + r \frac{dq}{d\varphi} \right) d\varphi + \frac{dq}{d\varphi} \cdot \frac{dr}{d\varphi} d\varphi^2 \approx qr + \frac{d}{d\varphi} q \cdot r d\varphi \quad (9)$$

Somit erhält man die zweite Grundgleichung:

$$n_{\varphi} r + n_{\vartheta} r_{\varphi} \sin\varphi + \frac{d}{d\varphi} qr = 0 \quad (10)$$

Infolge des Momentengleichgewichts um die Unterkante des infinitesimalen Schalenelements kann man die dritte Grundgleichung aufstellen:

$$\sum M_{\varphi} = m_{\varphi} \cdot r d\vartheta - (m_{\varphi} + dm_{\varphi})(r + dr) \cdot d\vartheta + m_{\vartheta} d\vartheta \cos\varphi \cdot r_{\varphi} d\varphi + q \cdot r d\vartheta \cdot r_{\varphi} d\varphi = 0,$$

was wiederum vereinfacht

$$-\frac{d}{d\varphi} (m_{\varphi} \cdot r) + m_{\vartheta} r_{\varphi} \cos\varphi + q \cdot r \cdot r_{\varphi} = 0 \quad (11)$$

ergibt.

Anhand der Gleichgewichtsbedingungen stehen nun 3 Gleichungen zur Verfügung, allerdings beinhalten diese 5 Unbekannte. Um weitere Gleichungen zu erhalten und das System lösen zu können, werden nun die Verformungs-Beziehungen zur Hilfe genommen.

Dehnungs-Verformungs-Beziehungen

Die Biegemomente erzeugen keine zusätzliche Dehnung, daher gilt die Dehnungs-Verformungs-Beziehung sowohl für den Membran-, als auch den Biegezustand.

Im Folgenden wird diese Beziehung hergeleitet (nach [11])

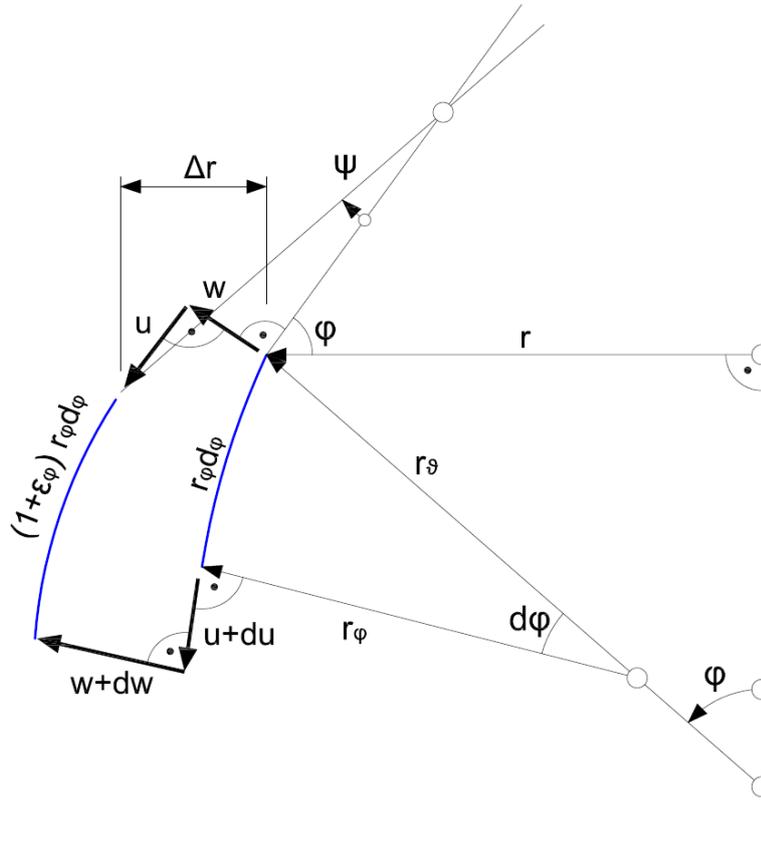


Abbildung 19 – Vertikaler Schnitt eines Infinitesimalen Schalenelements in unverformtem und verformtem Zustand

Durch die Umfangsdehnung

$$\varepsilon_{\vartheta} = \frac{2\pi\Delta r}{2\pi r} \quad (12)$$

lässt sich die Radialverschiebung ausdrücken:

$$\Delta r = r \cdot \varepsilon_{\vartheta} \quad (13)$$

Die Meridianverdrehung ψ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Zum Ersten aus der Drehung u/r_φ , welche aus der Verschiebung u entgegen der Richtung von ψ folgt. Und zum Zweiten aus der Drehung $dw/(r_\varphi d\varphi)$ infolge der unterschiedlichen Verschiebung der beiden Elementenden senkrecht zur Schalenfläche. Somit ergibt sich:

$$\psi = \frac{1}{r_\varphi} \left(-u + \frac{dw}{d\varphi} \right) = \frac{1}{r_\varphi} (w' - u) \quad (14)$$

Nun hat man die Unbekannten Funktionen u und w in der Gleichung. Um diese zu eliminieren, werden die Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen herangezogen:

Wie in der Abbildung 19 ersichtlich, ist die Radialverschiebung Δr gleich der Summe der horizontalen Anteile von u und w :

$$\Delta r = u \cdot \cos\varphi + w \cdot \sin\varphi \quad (15)$$

Mit Gleichung (13) und $r = r_\vartheta \cdot \sin\varphi$ folgt dann:

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{r_\vartheta} (u \cdot \cot\varphi + w) \quad (16)$$

Die zweite Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung ergibt sich aus folgendem Längenvergleich, ebenfalls in Abbildung 19 ersichtlich:

$$(1 + \varepsilon_\varphi) r_\varphi d\varphi + u = r_\varphi d\varphi + (u + du) + w d\varphi \quad (17)$$

Diese Gleichung lässt sich auf folgenden Term vereinfachen:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right) = \frac{1}{r_\varphi} (u' + w) \quad (18)$$

Die Größen u und w' in der Gleichung (14) werden nun durch Dehnungen aus den Gleichungen (16) und (18) ersetzt. Zunächst stehen folgenden 2 Gleichungen zur Verfügung:

$$\varepsilon_{\varphi} r_{\varphi} = u' + w \quad (19)$$

$$\varepsilon_{\vartheta} r_{\vartheta} = u \cot \varphi + w \quad (20)$$

Wenn man diese miteinander subtrahiert, erhält man:

$$\varepsilon_{\varphi} r_{\varphi} - \varepsilon_{\vartheta} r_{\vartheta} = u' - u \cot \varphi \quad (21)$$

Nun wird (20) nach φ differenziert, woraus sich (22) ergibt

$$w' = (\varepsilon_{\vartheta} r_{\vartheta})' * u' \cot \varphi + \frac{u}{\sin^2 \varphi} \quad (22)$$

Darin kann nun u' aus (21) eingesetzt werden, sodass man folgende Gleichung erhält:

$$w' = (\varepsilon_{\vartheta} r_{\vartheta})' - (\varepsilon_{\varphi} r_{\varphi} - \varepsilon_{\vartheta} r_{\vartheta}) \cot \varphi + u \quad (23)$$

Die Beziehung (23) wird in die Gleichung (14) eingesetzt, woraus sich dann die endgültige Meridianverdrehung ergibt:

$$\psi = \left(\varepsilon_{\vartheta} \frac{r_{\vartheta}}{r_{\varphi}} - \varepsilon_{\varphi} \right) \cot \varphi + \frac{1}{r_{\varphi}} \frac{d}{d\varphi} (\varepsilon_{\vartheta} r_{\vartheta}) \quad (24)$$

Durch das HOOKsche Gesetz sind die Dehnungen ε_{φ} und ε_{ϑ} folgendermaßen definiert:

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{Eh} (n_{\varphi} - \mu n_{\vartheta}) \quad (25)$$

$$\varepsilon_{\vartheta} = \frac{1}{Eh} (n_{\vartheta} - \mu n_{\varphi}) \quad (26)$$

Verkrümmungs-Verformungs-Beziehungen

Durch Betrachtung des unverformten und des verformten Elements kann die Krümmungsänderung der Schale ermittelt werden. Daraus ergeben sich die Verkrümmungen κ_φ und κ_ϑ :

$$\kappa_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} - \frac{1}{r_\varphi + \Delta r_\varphi} \quad (27)$$

$$\kappa_\vartheta = \frac{1}{r_\vartheta} - \frac{1}{r_\vartheta + \Delta r_\vartheta} \quad (28)$$

Wie aus der Abbildung 18 zu erkennen ist, gilt für den unverformten Zustand

$$ds = r_\varphi d\varphi \quad (29)$$

$$r = r_\vartheta \sin\varphi \quad (30)$$

Weiters gilt für den verformten Zustand

$$ds(1 + \varepsilon_\varphi) = (r_\varphi + \Delta r_\varphi)(d\varphi - d\psi) \quad (31)$$

$$r + \Delta r = (r_\vartheta + \Delta r_\vartheta)\sin(\varphi - \psi) \quad (32)$$

Durch Berücksichtigung dieser Beziehungen ergeben sich die Krümmungen

$$\kappa_\varphi = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\varphi - d\psi}{ds(1 + \varepsilon_\varphi)} \approx \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{r_\varphi} \frac{d\psi}{d\varphi} \quad (33)$$

$$\text{mit } d\varphi \ll \rightarrow 0$$

$$\kappa_\vartheta = \frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi}{r + \Delta r} \approx \frac{\psi \cos\varphi}{r} = \frac{\psi \cot\varphi}{r_\vartheta} \quad (34)$$

$$\text{mit } \begin{matrix} \cos\psi \ll \rightarrow 1 \\ \sin\psi \ll \rightarrow \psi \end{matrix}$$

Momenten-Verkrümmungs-Beziehungen

Die Gleichungen für die Schalenmomente lauten

$$m_\varphi = K(\kappa_\varphi + \mu\kappa_\vartheta) \quad (35)$$

$$m_\vartheta = K(\kappa_\vartheta + \mu\kappa_\varphi) \quad (36)$$

mit der Plattensteifigkeit

$$K = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (37)$$

Wenn man nun die Krümmungen in die Gleichung für die Schalenmomente einsetzt, erhält man die beiden letzten Grundgleichungen:

$$m_\varphi = K \left(\frac{1}{r_\varphi} \frac{d\psi}{d\varphi} + \mu \frac{\psi \cot\varphi}{r_\vartheta} \right) \quad (38)$$

$$m_\vartheta = K \left(\frac{\psi \cot\varphi}{r_\vartheta} + \frac{\mu}{r_\varphi} \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \quad (39)$$

Nun stehen 6 Grundgleichungen für 6 Unbekannte zur Verfügung mit denen die Differentialgleichungen zur Ermittlung der Schnittkräfte aufgestellt werden können. Dies erfolgt hier am einfachen Beispiel der Kugelschale.

3.1.3 Herleitung der Differentialgleichungen an einer Kugelschale

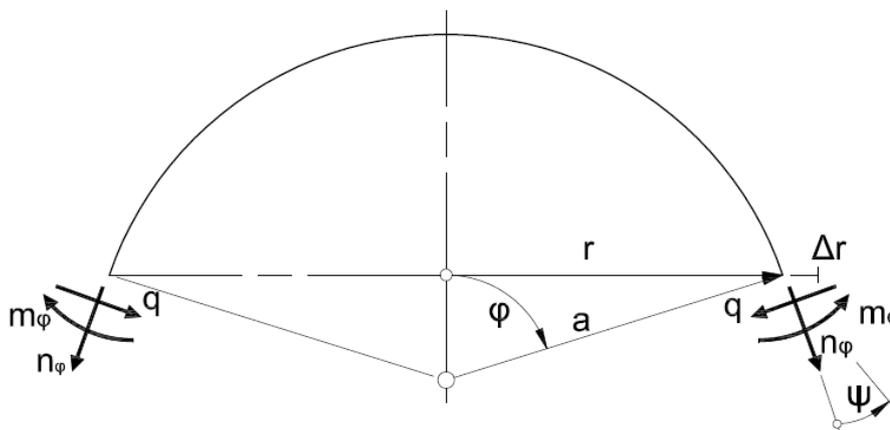


Abbildung 20 – Kugelschale

Für die Kugelschale gelten folgende Beziehungen

$$r_\varphi = r_\vartheta = a \quad \text{und} \quad r = a \sin\varphi$$

Somit gelten für die Schalkonstruktion Kugelschale folgende 6 Grundgleichungen:

$$n_\varphi = -q \cot\varphi \quad (40)$$

$$(n_\varphi + n_\vartheta) \sin\varphi + \frac{d}{d\varphi}(q \sin\varphi) = 0 \quad (41)$$

$$-\frac{d}{d\varphi}(m_\varphi \sin\varphi) + m_\varphi \cos\varphi + qa \sin\varphi = 0 \quad (42)$$

$$\psi = \frac{1}{Eh} \left[(1 + \mu)(n_\vartheta - n_\varphi) \cot\varphi + \frac{d}{d\varphi}(n_\vartheta - \mu n_\varphi) \right] \quad (43)$$

$$m_\varphi = \frac{K}{a} \left(\frac{d\psi}{d\varphi} + \mu \psi \cot\varphi \right) \quad (44)$$

$$m_\vartheta = \frac{K}{a} \left(\psi \cot\varphi + \mu \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \quad (45)$$

Mit Hilfe dieser 6 Grundgleichungen lassen sich 2 gekoppelte Differentialgleichungen aufstellen mit denen die Normalkräfte und Biegemomente ermittelt werden.

Die erste Differentialgleichung erhält man durch Einsetzen von (44) und (45) in (42):

$$-\frac{K}{a}(\psi'' \sin \varphi + \psi' \cos \varphi + \mu \psi' \cos \varphi - \mu \psi \sin \varphi) + \frac{K}{a}(\psi \cot \varphi + \mu \psi') \cos \varphi + qa \sin \varphi = 0$$

Vereinfacht ergibt dies folgende DGL:

$$\psi'' + \psi' \cot \varphi - \psi (\cot^2 \varphi + \mu) - \frac{qa^2}{K} = 0 \quad (46)$$

Wobei die Ableitung nach φ durch einen Kopfstrich gekennzeichnet ist.

Die zweite Differentialgleichung ergibt sich, wenn man zunächst die Gleichungen (40) und (41) zusammenfügt:

$$-q \cos \varphi + n_{\vartheta} \sin \varphi + q' \sin \varphi + q \cos \varphi = 0 \quad (47)$$

was wiederum vereinfacht folgendes ergibt

$$n_{\vartheta} = -q' \quad (48)$$

In Gleichung (43) können jetzt die Normalkräfte ersetzt werden durch die Ausdrücke aus (40) und (47). Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{Eh} \left[(1 + \mu)(-q' + q \cot \varphi) \cot \varphi + \left(-q'' + \mu q' \cot \varphi - \frac{\mu q}{\sin^2 \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{Eh} \left[-q' \cot \varphi + q \left(\cot^2 \varphi + \mu \cot^2 \varphi - \frac{\mu}{\sin^2 \varphi} \right) - q'' \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Nach Umformen ergibt dies dann die zweite Differentialgleichung:

$$q'' + q' \cot \varphi - q (\cot^2 \varphi + \mu) + Eh \psi = 0 \quad (50)$$

Durch Ausdrücken von q und ψ aus den beiden Differentialgleichungen und Einsetzen in die jeweils andere, lassen sich die Ausdrücke entkoppeln. Das Ergebnis wären zwei

Differentialgleichungen 4. Ordnung, welche jedoch nur durch schlecht konvergierende Reihen lösbar wären und somit zu ungenauen bzw. unbrauchbaren Lösungen führen.

Durch eine Einschränkung des Anwendungsbereiches auf Schalen, deren belastete Ränder um mindestens 30° geneigt sind (siehe Abbildung 21), kann eine Vereinfachung nach GECKELER eingeführt werden.

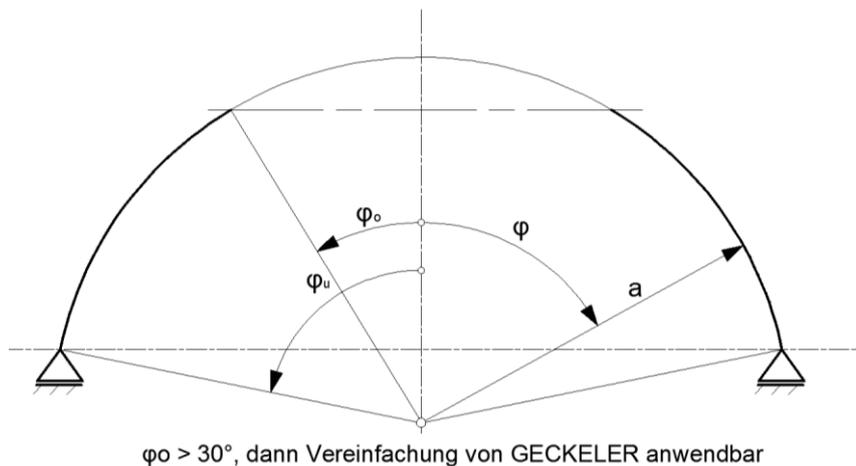


Abbildung 21 - Kugelzonenschale für Vereinfachung nach GECKELER

Die Vereinfachung berücksichtigt das schnelle Abklingen der Randstörungen. Dies führt dazu, dass im Störbereich

$$\psi'' \gg \psi' \gg \psi \quad \text{und} \quad q'' \gg q' \gg q$$

gilt, und somit die Ausdrücke q und ψ sowie deren erste Ableitungen vernachlässigt werden dürfen. Berücksichtigt man dies, lauten die zwei Differentialgleichungen

$$\psi'' - \frac{qa^2}{K} = 0 \quad (51)$$

$$q'' + Eh\psi = 0 \quad (52)$$

Die Einschränkung des Gültigkeitsbereichs beruht darauf, dass q , q' , ψ und ψ' in (46) und (50) den Faktor $\cot\varphi$ beinhalten, welcher bei kleinen Winkeln φ hohe Werte annimmt.

Trennt man die Ausdrücke q und ψ und differenziert zweimal nach φ :

$$q = \frac{K}{a^2} \psi'' \quad \rightarrow \quad q'' = \frac{K}{a^2} \psi'''' \quad (53)$$

$$\psi = -\frac{1}{Eh} q = 0 \quad \rightarrow \quad \psi'' = -\frac{1}{Eh} q'''' \quad (54)$$

ergeben sich durch Einsetzen dieser beiden Ableitungen in (51) und (52) die beiden Differentialgleichungen 4.Ordnung:

$$\psi'''' + \frac{Eha^2}{K} \psi = 0 \quad (55)$$

$$q'''' + \frac{Eha^2}{K} q = 0 \quad (56)$$

Durch Lösen dieser Differentialgleichungen lassen sich die Normalkräfte und Biegemomente in Abhängigkeit von q und ψ ermitteln. Die Gleichungen für die Normalkräfte und Biegemomente ergeben sich aus (40),(44),(45) und (48) zu

$$n_\varphi = -q \cot \varphi \quad (57)$$

$$n_\vartheta = -q' \quad (58)$$

$$m_\varphi = \frac{K}{a} (\psi' + \mu \psi \cot \varphi) \quad (59)$$

$$m_\vartheta = \frac{K}{a} (\psi \cot \varphi + \mu \psi') \quad (60)$$

Mit Hilfe dieser Werkzeuge lassen sich nun die Schnittkräfte von rotationssymmetrischen Kugelzonenschalen ermitteln, allerdings nur für Systeme mit einem Öffnungswinkel von größer als 30° (siehe Abbildung 21). Da eine Geometrie mit solch einem Öffnungswinkel für den Versuchsaufbau nicht realistisch ist, und eine analytische Lösung für Öffnungswinkel kleiner 30° zu keinen brauchbaren Ergebnissen führt, werden im nächsten Kapitel verschiedene rotationssymmetrische Systeme numerisch gelöst und analysiert.

Der Vollständigkeit halber werden hier noch die Gleichungen für die Ermittlung der Schnittgrößen an einer Kugelzonenschale mit vertikaler Belastung am oberen Rand gezeigt.

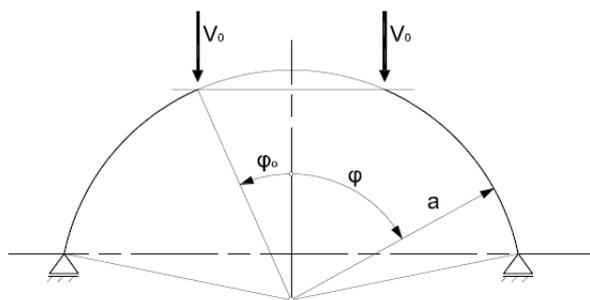
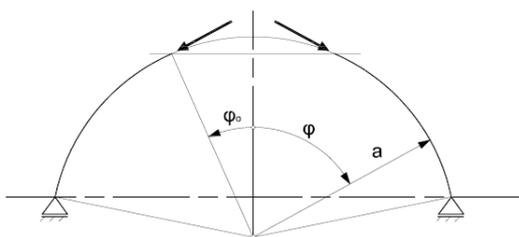


Abbildung 22 – Kugelzonenschale mit vertikaler Belastung

Damit die Gleichungen zur Anwendung kommen können muss die Belastung aufgeteilt werden in Tangentialkraft (Membrananteil) und Horizontalkraft (Biegeanteil).

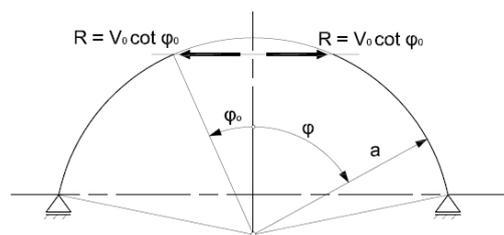
Membrananteil:



$$n_{\varphi} = -V_0 \frac{\sin \varphi_0}{\sin^2 \varphi}$$

$$n_{\vartheta} = +V_0 \frac{\sin \varphi_0}{\sin^2 \varphi}$$

Biegeanteil:



$$n_{\varphi} = -R \sin \varphi_0 * \cot \varphi * \eta''(\xi)$$

$$n_{\vartheta} = 2R * \kappa * \sin \varphi_0 * \eta'''(\xi)$$

$$m_{\varphi} = \frac{R * a}{\kappa} * \sin \varphi_0 * \eta'(\xi)$$

$$m_{\vartheta} = -\frac{R * a}{2 \kappa^2} * \sin \varphi_0 * \cot \varphi * \eta(\xi) + \mu m_{\varphi}$$

$$q = R * \sin \varphi_0 * \eta''(\xi)$$

Diese Formeln sind Lösungen aus den Differentialgleichungen von GECKELER, und gelten somit, wie schon erläutert, nur für einen Öffnungswinkel $\varphi_0 > 30^\circ$. Für die Ermittlung der Schnittkräfte des Biegeanteils gelten für η folgende Gleichungen:

$$\eta = e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi) \quad (61)$$

$$\eta' = e^{-\xi}\sin\xi \quad (62)$$

$$\eta = e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi) \quad (63)$$

$$\eta = e^{-\xi}\cos\xi \quad (64)$$

Für die Herleitung und Erläuterung dieser Funktionen wird an dieser Stelle auf [11] verwiesen, da dies den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde. Zusammengefasst beschreiben diese 4 Funktionen den Verlauf der Randstörungen von Rotationsschalen.

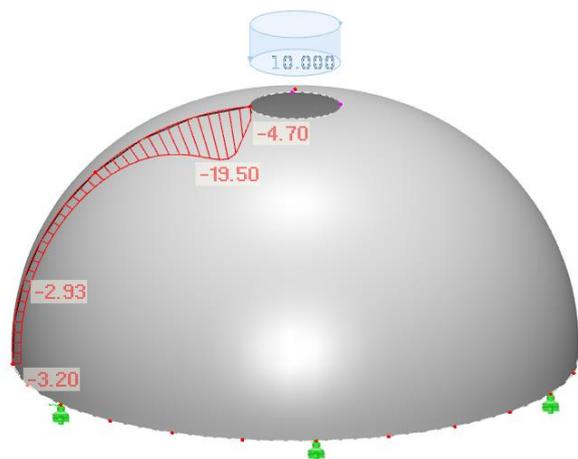
3.2 Qualitative Schnittkraftverläufe an rotationssymmetrischen Systemen - Variantenstudie

Da die analytische Ermittlung der Schnittkraftverläufe für den weiteren Vorgang nicht möglich bzw. nicht geeignet ist, wird hier numerisch mittels der FE Software RFEM© an beispielhaften Systemen das Tragverhalten analysiert. Dies soll in weiterer Folge einen Überblick darüber geben, welche Grundformen für den Versuchsaufbau in Frage kommen.

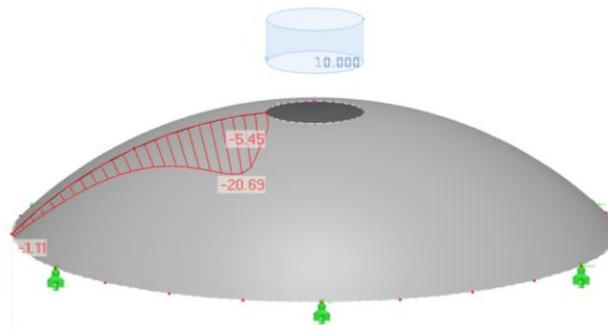
Es folgen einige qualitative Vergleiche von Schnittkraftverläufen bei unterschiedlichen rotationssymmetrischen Systemen, bestehend aus einer Kugelzonenschalen, einer abgeflachten Variante sowie Schalen mit Krümmungswendungen in der Erzeugenden. Die Last greift bei jedem System vertikal am oberen Rand an. Sie ist ringförmig mit 10 kN/m entlang der Öffnung angesetzt, welche bei jedem System einen Radius von 0,20 m hat. Die Lagerung ist am unteren Rand, ebenfalls ringförmig, vertikal fest und horizontal verschieblich angebracht, mit einem Radius von 1,25 m. Mit Ausnahme bei Form 4, da beträgt der Radius 0,50 m um die Trichterform zu bewahren. Weiters ist das Eigengewicht der Schale (UHPC mit 5 cm Dicke) ebenfalls angesetzt.

3.2.1 Vergleich Meridiankraft n_φ [kN/m]

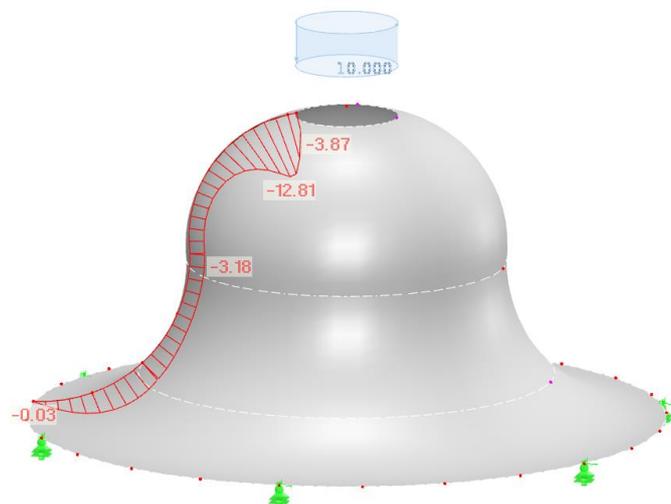
Form 1 - Halbkugelschale



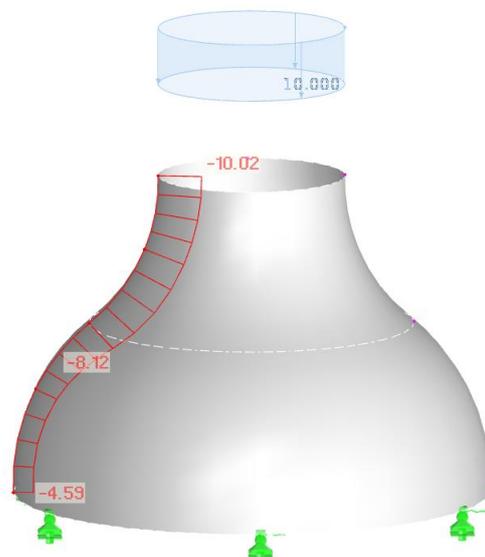
Form 2 - Abgeflachte Kugelschale



Form 3 - Glockenförmige Schale



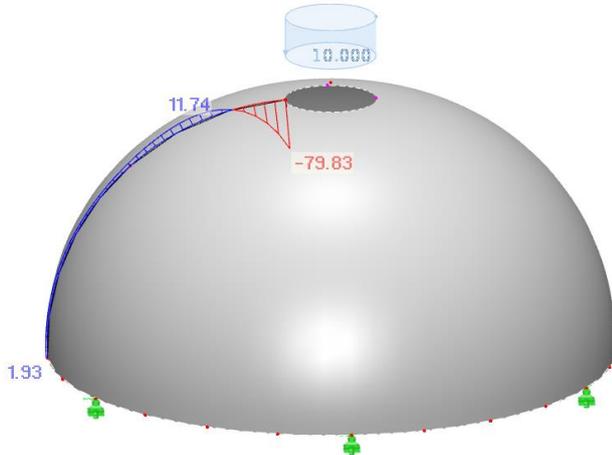
Form 4 - Trichterschale



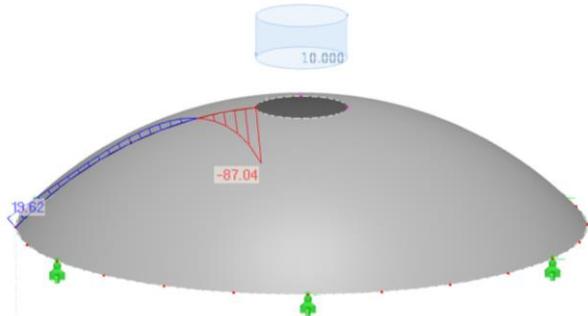
Beim Verlauf der Meridiankraft sind bei den betrachteten Schalenformen keine großen Unterschiede erkennbar. Bei allen Varianten treten im gesamten Querschnitt Druckkräfte auf. Die Druckkraft wird zum gelagerten Rand hin kleiner. Dies ist besonders bei Form 2 und 3 zu sehen, da dort die Lagerung nicht in Membranrichtung erfolgt. Die geringste Variation vom Meridiankraftverlauf ist bei der Trichterschale (Form 4) zu erkennen.

3.2.2 Vergleich Ringkraft n_θ [kN/m]

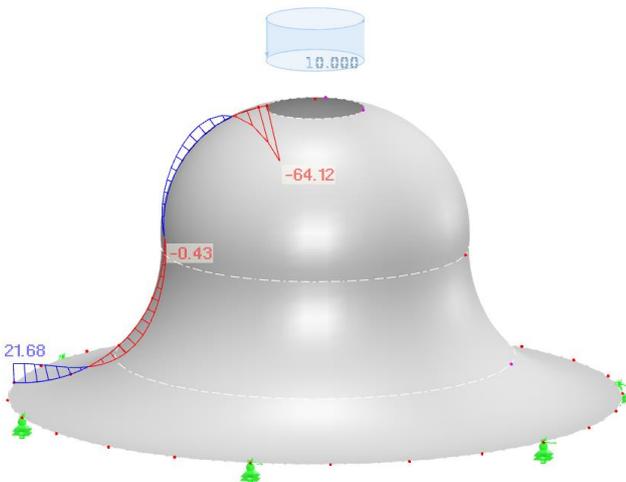
Form 1 - Halbkugelschale



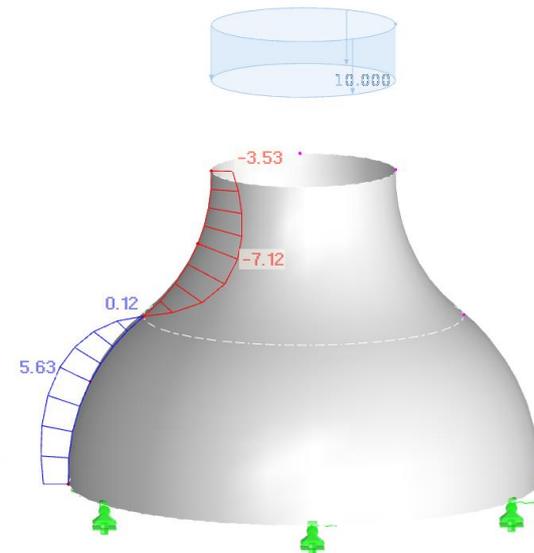
Form 2 - Abgeflachte Kugelschale



Form 3 - Glockenförmige Schale



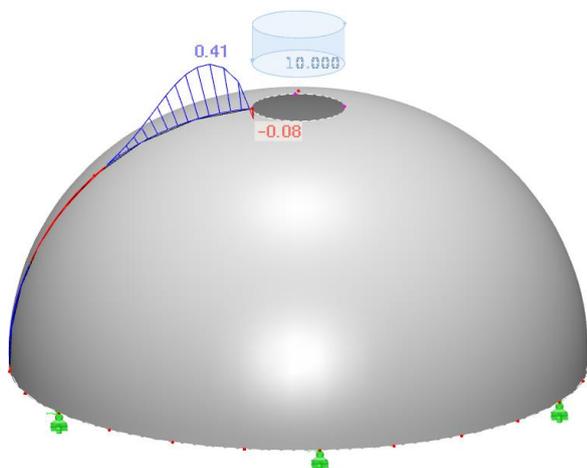
Form 4 - Trichterschale



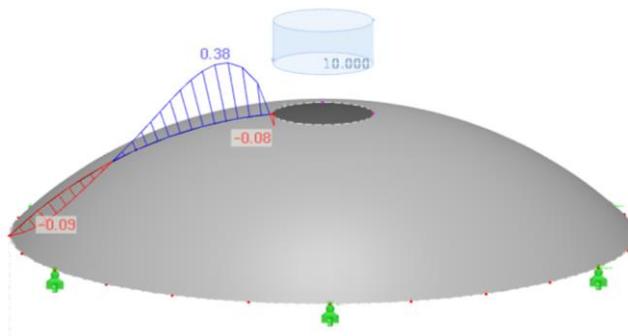
Beim Ringkraftverlauf ist zu erkennen, dass bei der Öffnung (Ort der Lasteinleitung) eine Druckkraft herrscht (Ring wird „gequetscht“), welche dann zu einer Zugkraft überläuft (Form 1 und 2). Dieses Verhalten ist auch bei Form 3 zu erkennen, allerdings kommt es dort aufgrund des Krümmungswechsels in der Schalengeometrie (Wendepunkt in der Erzeugenden) zu weiteren Vorzeichenwechseln. Bei Form 4 ist ein schöner Druck- und Zugbereich zu erkennen, die genau beim Wendepunkt der Schalenform ihren Nullpunkt haben.

3.2.3 Vergleich Meridianmoment m_φ [kNm/m]

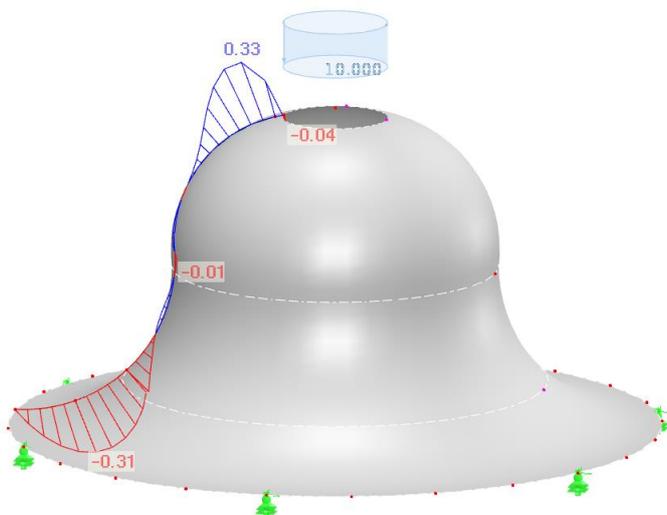
Form 1 - Halbkugelschale



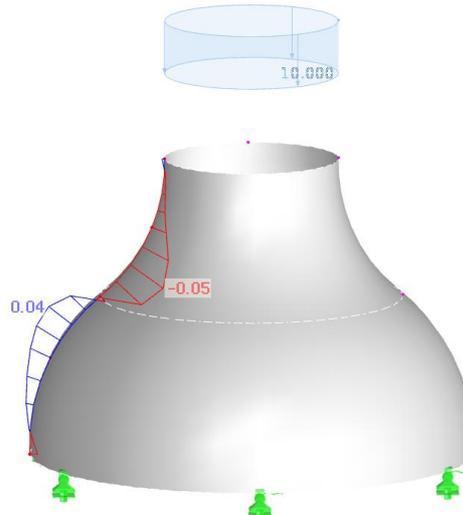
Form 2 - Abgeflachte Kugelschale



Form 3 - Glockenförmige Schale



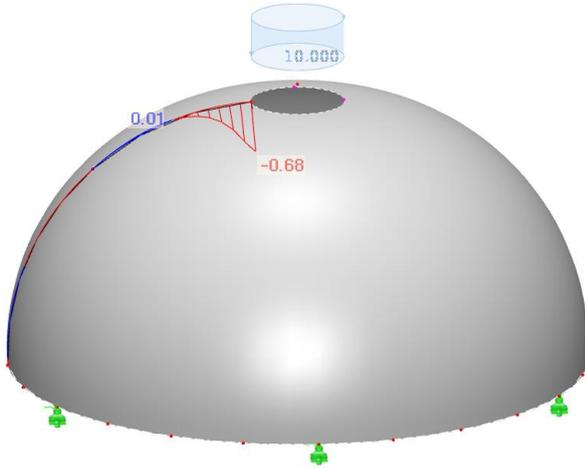
Form 4 - Trichterschale



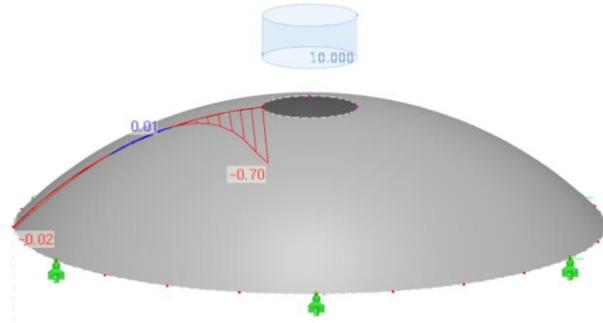
Das Meridianmoment ist stark abhängig von der Richtung der Lasteinleitung und Lagerung. Erfolgt die Belastung nicht in Membranrichtung entstehen die bereits erwähnten Biegestörungen im Randbereich (siehe Form 1, 2 und 3). Diese Störungen klingen relativ schnell ab (Form 1). Ist die Lagerung ebenfalls nicht in Membranrichtung entstehen auch dort Biegestörungen (Form 2 und 3). In Form 4 treten keine Randstörungen auf und das maximale Moment befindet sich in Schalenmitte.

3.2.4 Vergleich Ringmoment m_θ [kNm/m]

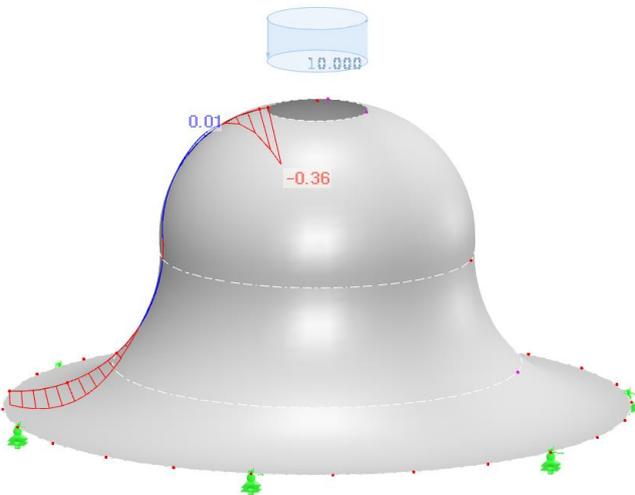
Form 1 - Halbkugelschale



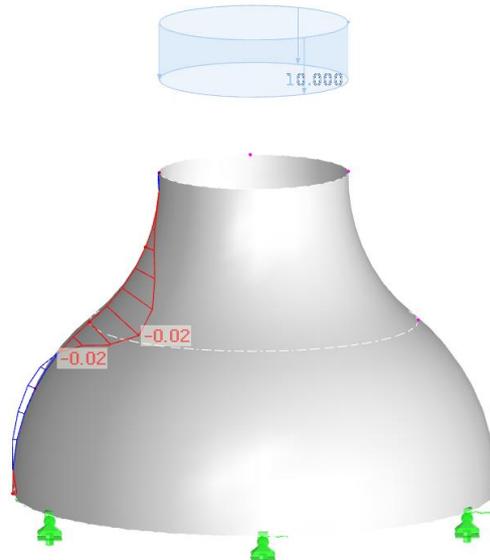
Form 2 - Abgeflachte Kugelschale



Form 3 - Glockenförmige Schale



Form 4 - Trichterschale



Ein ähnliches Bild wie beim Meridianmoment ist auch beim Ringmoment zu beobachten. Randstörungen treten bei ungünstiger (nicht in Membranrichtung liegender) Lasteinleitung bzw. Lagerung auf.

3.2.5 Zusammenfassung der Variantenstudie

Die Tabelle 1 zeigt qualitativ die Schnittgrößen im jeweiligen System. Dafür werden die Systeme grob in unteren/oberen Randbereich und untere/obere Mittelzone unterteilt und die Schnittgrößenvorzeichen gelistet.

		Schnittgröße															
		Rand unten				Mittelzone unten				Mittelzone oben				Rand oben			
		n_φ	n_ϑ	m_φ	m_ϑ	n_φ	n_ϑ	m_φ	m_ϑ	n_φ	n_ϑ	m_φ	m_ϑ	n_φ	n_ϑ	m_φ	m_ϑ
System	Halbkugelschale	-	+	∅	∅	-	+	∅	∅	-	+	+	∅	--	--	++	--
	Abgeflachte Kugelschale	-	+	-	∅	-	+	-	∅	-	+	+	∅	--	--	++	--
	Glockenförmige Schale	∅	+	-	-	-	-	∅	∅	-	+	∅	∅	--	--	++	--
	Trichterschale	-	+	∅	∅	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	∅	∅

- ... Druckkraft bzw. negatives Moment
- + ... Zugkraft bzw. positives Moment
- ... qualitativ hohe Druckkraft bzw. hohes negatives Moment
- ++ ... qualitativ hohe Zugkraft bzw. hohes positives Moment
- ∅ ... vernachlässigbar kleiner Wert

Tabelle 1 - Übersicht der Schnittkraftvorzeichen für die Systeme aus der Variantenstudie

Die Halbkugelschale erfährt hauptsächlich einen zweiaxialen Druck-Zug mit geringer Momentenbeanspruchung. Mit Ausnahme des oberen Randbereichs, wo hohe Momente aufgrund von Biegestörungen (Lasteinleitung erfolgt nicht tangential zur Erzeugenden) auftreten.

Die abgeflachte Kugelschale zeigt ein ähnliches Verhalten wie die Halbkugelschale. Einziger Unterschied ist, dass sich durch die nicht tangential zur Erzeugenden Lagerung ein Meridianmoment im unteren Bereich bildet.

Die glockenförmige Schale weist im Ringkraftverlauf einige Vorzeichenwechsel auf. Allerdings tritt kein Meridianzug auf. Somit entsteht auch hier kein zweiaxialer Zug, welcher für einen Versuchsaufbau interessant wäre. Auch hier kommt es zu Randstörungen, sowohl im unteren als auch oberen Randbereich.

Die Trichterschale erfährt dank der tangentialen Lasteinleitung und Lagerung keine Biegestörungen im Randbereich. In der unteren Mittelzone herrscht ein zweiaxialer Druck-Zug-Zustand, und im oberen Bereich zweiaxialer Druck. Die Biegemomente treten in Schalenmitte auf, was für den Versuchsaufbau geeignet wäre. Allerdings sind diese Momente betragsmäßig sehr gering, welche durch die Erhöhung der Krümmung der Erzeugenden verändert werden kann.

Aufgrund der günstigen und unterschiedlichen Schnittkraftkombinationen sowie dem Fehlen der Randstörungen, wird die Form 4 - Trichterschale als Grundlage für die Formfindung gewählt und in einem späteren Abschnitt dieser Arbeit behandelt. Für einen zweiaxialen Zug-Zug-Zustand werden, falls relevant, bei der finalen Formfindung dahingehend Überlegungen getroffen.

4 Beanspruchungszustände und Tragverhalten einer Freiformschale

4.1 Ausgangslage

Der Ausgangspunkt für den Konzeptentwurf des Großversuchs war die Wellendachform. Diese fiktive Bauaufgabe galt als Grundlage für die weiteren Bearbeitungsschritte des Forschungsprojekts „UHPC-Schalen“

Die Geometrie wurde anhand festgelegter, vielschichtiger Belastungssituationen entworfen, und kann repräsentativ als zeitgenössische Formensprache erachtet werden.

An dieser Basisgeometrie „Wellendach“ wird eine Eurocode-konforme Lastfallkombination angesetzt, und zunächst das Tragverhalten beobachtet. Daraus können dann maßgebende Bereiche mit kritischen Spannungszuständen gefunden werden, die in weiterer Folge im Großversuch realisiert werden sollen.

4.2 Tragverhalten des Wellendaches

Im Folgenden wird das Tragverhalten des Wellendachs (Grundmodell erstellt von ITE-TUGraz, M.Groß [12]) mittels der FE-Software RFEM© analysiert. Bei diesem Modell wurde ein linear-elastisches Materialverhalten angewendet, welches als ausreichend genau befunden wurde um Aussagen über das Tragverhalten treffen zu können. Aus analytischen Zwecken werden unter anderem Änderungen an der Systemlagerung vorgenommen und dabei die Reaktion des Bauwerks beobachtet.

Die Form des Bauwerks ist einer Welle nachempfunden die ihren Ursprung im Eckpunkt B hat (Abbildung 23).

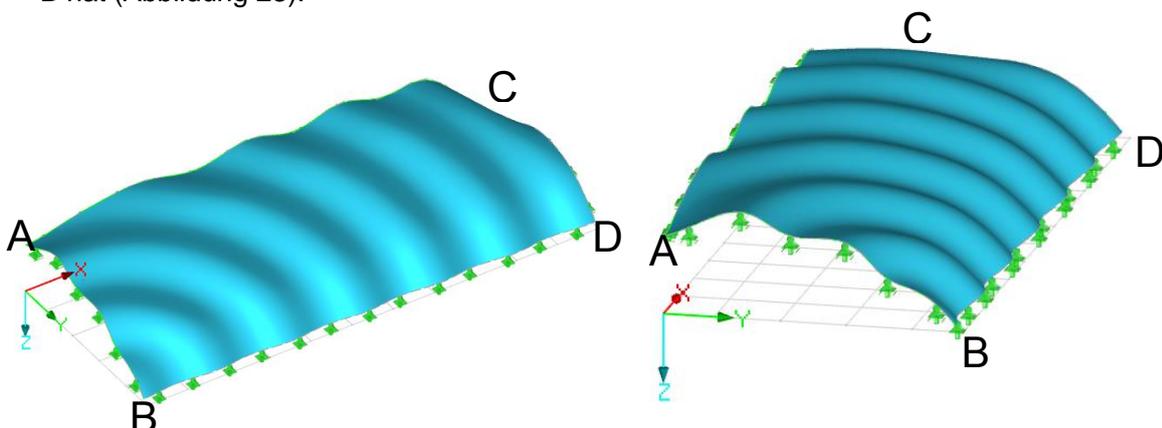


Abbildung 23 – Veranschaulichung der Wellenausbreitung mit Eckbezeichnungen

Es befindet sich eine Längskante in Bodennähe und die gegenüberliegende Kante wird mit einer Traufhöhe ausgeführt. Die Lagerung erfolgt entlang der Bauwerkskanten als

Linienlager. Die Art der Lagerung (ob verschieblich oder fest) wird aus analytischen Zwecken in dieser Arbeit variiert.

Lastaufstellung

Es wird die Lastfallkombination $1,35 \cdot \text{Eigengewicht} + 1,50 \cdot \text{Schneelast} + 0,75 \cdot \text{Windlast}$ über die gesamte Schalenfläche angesetzt. Dabei wirkt die Schneelast vertikal auf die projizierte Grundrissfläche der Schale. Die Windlast greift in jedem Punkt normal auf die Membranfläche an (Abbildung 24). Für die Ermittlung der Lastgrößen wird an dieser Stelle auf den Projektbericht von Groß verwiesen [13].

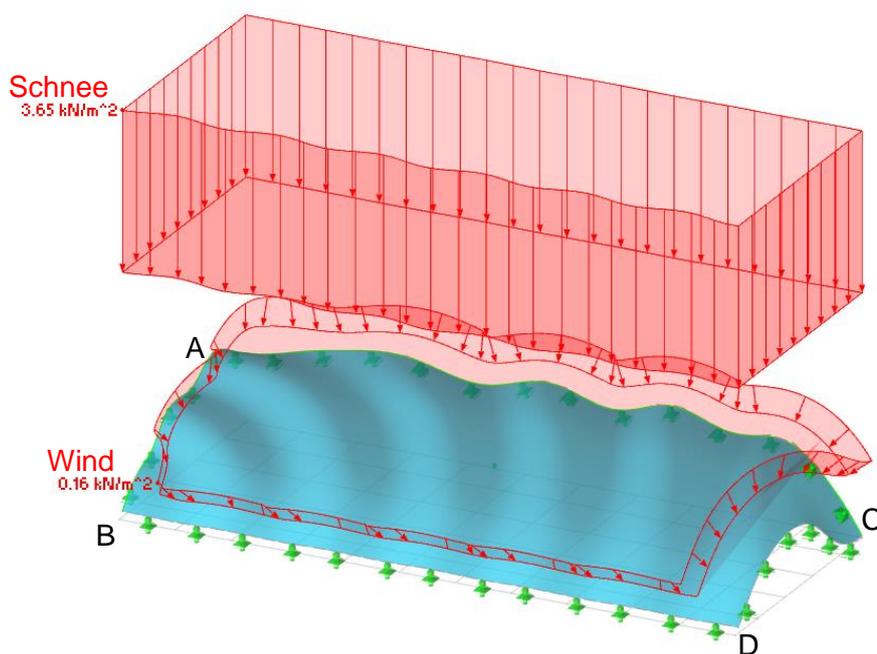


Abbildung 24 - Lastaufstellung für LFK $1,35 \cdot g_k + 1,50 \cdot s_k + 0,75 \cdot w_k$

Wellenverlauf

Die Abbildung zeigt den Verlauf der Wellentäler. Die Nummerierung der Wellen wird in den nachfolgenden Ausführungen verwendet.

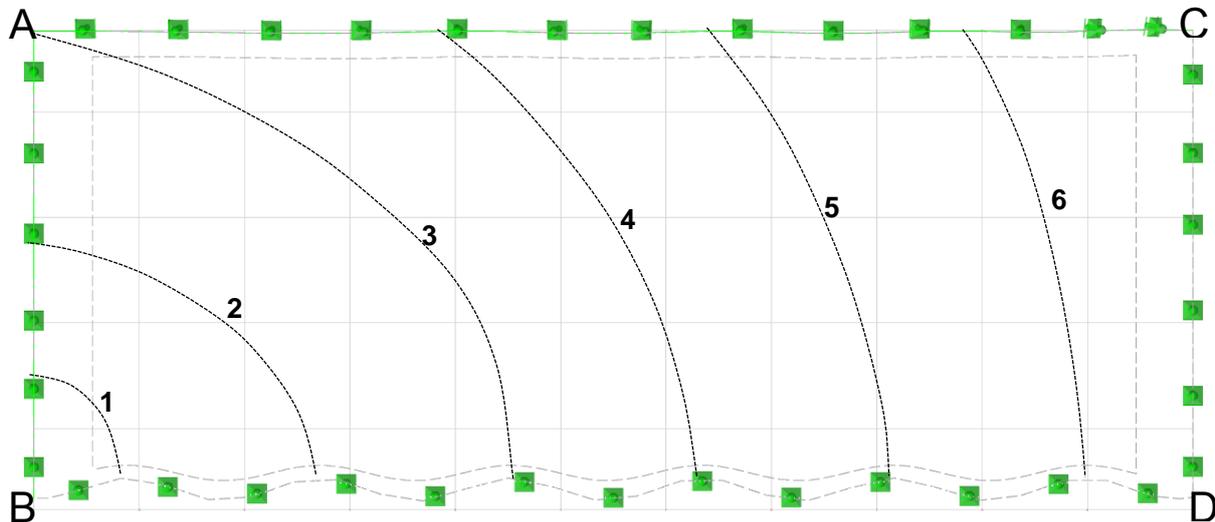


Abbildung 25 – Nummerierter Wellenverlauf im betrachteten Tragwerk

4.2.1 Scheibenlagerung

Zunächst erfolgt die Betrachtung des Tragverhaltens mit einer „Scheibenlagerung“ entlang der erhöhten Bauteilkanten (Abbildung 26, rot markiert). Die Lagerung in Bodennähe wird als Festlager ausgeführt (schwarz markiert). Unter Scheibenlagerung ist zu verstehen, dass die Lager in Längsrichtung (entlang der Schalenkante) unverschieblich, wie eine Wandscheibe wirken. Das bedeutet dass z.B. die Scheibenlagerung bei Kante A-C Kräfte in X- und Z-Richtung aufnehmen kann. Quer zur Schalenkante können sie keine Kräfte aufnehmen. Im Falle der Kante A-C ist dies die Y-Richtung (Abbildung 27 bis Abbildung 29 zeigen die Lage der Koordinatensysteme der Lager). Wie in Abbildung 26 zu sehen, wird die Lagerung an der Kante A-C um 10° gegen die Horizontale geneigt ausgeführt.

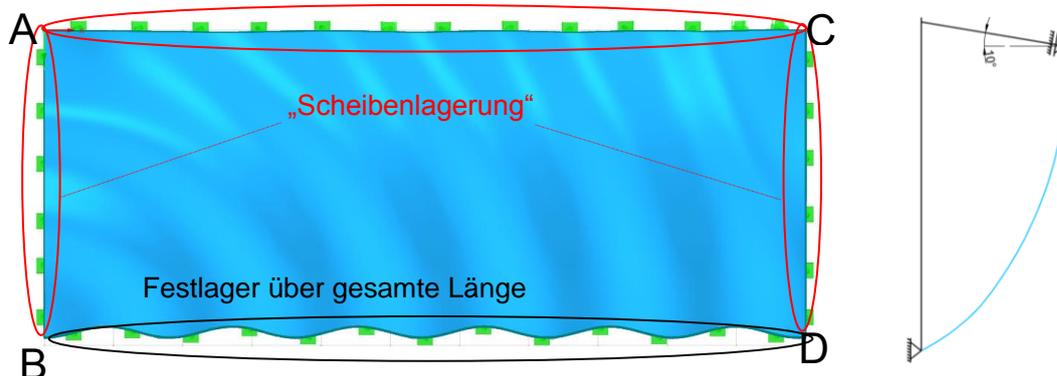


Abbildung 26 - Lagerung Wellendach – „Scheibenlagerung“

Auflagerreaktion

Resultierend aus der Belastung ergeben sich die in Abbildung 30 bis Abbildung 32 dargestellten Auflagerreaktionen. Diese sind bezogen auf die lokalen Achsensysteme der Lager, welche in den folgenden Abbildungen in verschiedenen Ansichten veranschaulicht werden.

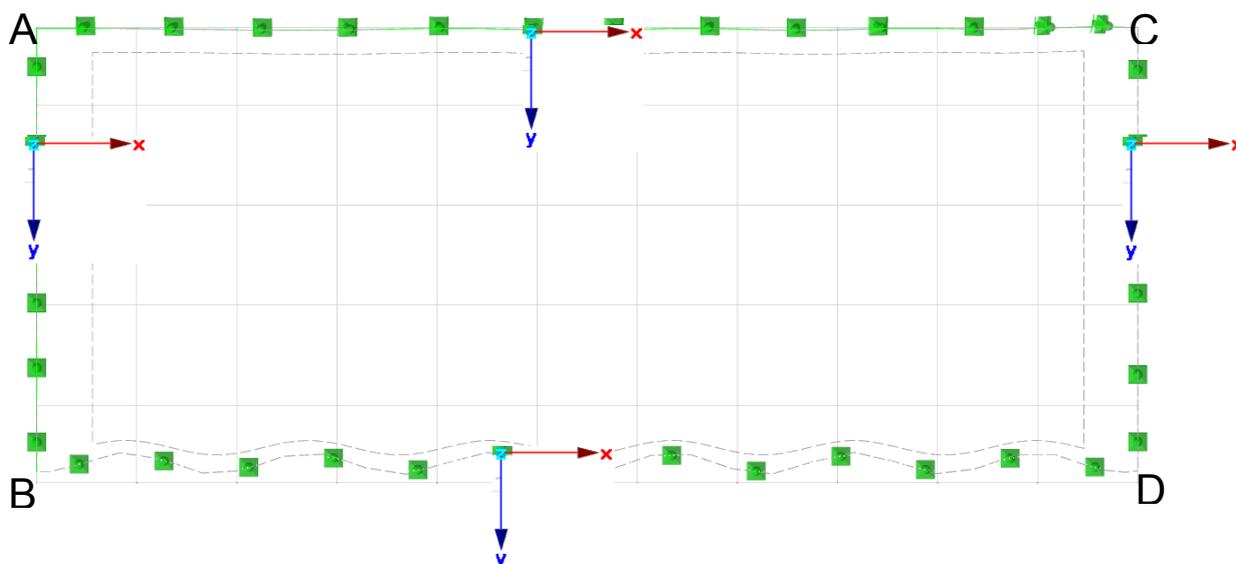


Abbildung 27 – Lage der lokalen Linienlagerachsensysteme - Draufsicht

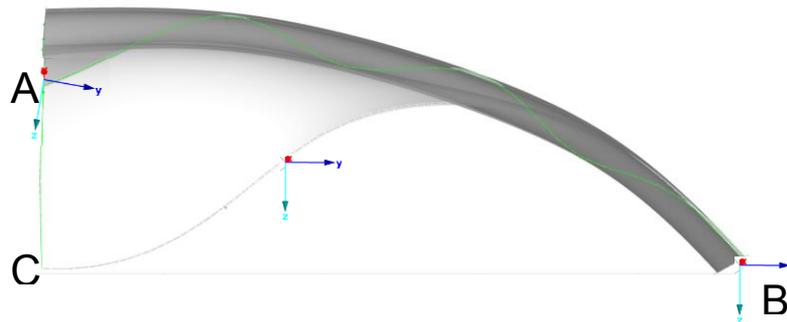


Abbildung 28 - Lage der lokalen Linienlagerachsensysteme – Ansicht von links

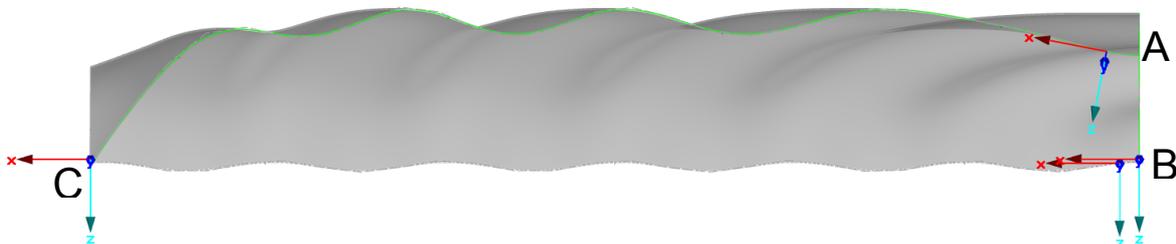


Abbildung 29 - Lage der lokalen Linienlagerachsensysteme - Ansicht von hinten

Der Verlauf der Lagerreaktionen spiegelt größtenteils den Wellenverlauf des Systems wider (Wellentäler „drücken“ auf die Lager, Wellenberge „ziehen“ daran). Dies entsteht durch einen Einspanneffekt, welcher in Abbildung 35 erläutert ist. Der Verlauf zwischen C und D zeigt, dass der Auflagerbereich bei C kaum belastet wird, aber nahe dem Eckpunkt D eine erhöhte Beanspruchung herrscht. Die Ursache dafür wird später anhand des Schnittkraftverlaufs erläutert.

Die Reaktionskräfte in X-Richtung (Abbildung 30) zeigen Auffälligkeiten im Eckbereich A und D. Da die Schale sich global wie eine Platte verformt (siehe Verformungsverhalten), entsteht ein abhebender Effekt in den beiden Ecken.

Bei den Auflagerreaktionen in Y-Richtung spiegelt sich entlang des Festlagers bei Kante B-D, wie schon erwähnt, der Wellenverlauf aufgrund eines Einspanneffekts wider (Grund des Einspanneffekts siehe Abbildung 35). Bei den „kurzen“ Wellen (alle mit Ausnahme von Welle 3) wird der Zuganteil des Einspanneffektes durch die Tragwirkung in Querrichtung des Wellendaches beinahe überdrückt.

In Z-Richtung ist der abhebende Effekt der Ecken in A und D sowie der Einspanneffekt ebenfalls erkennbar.

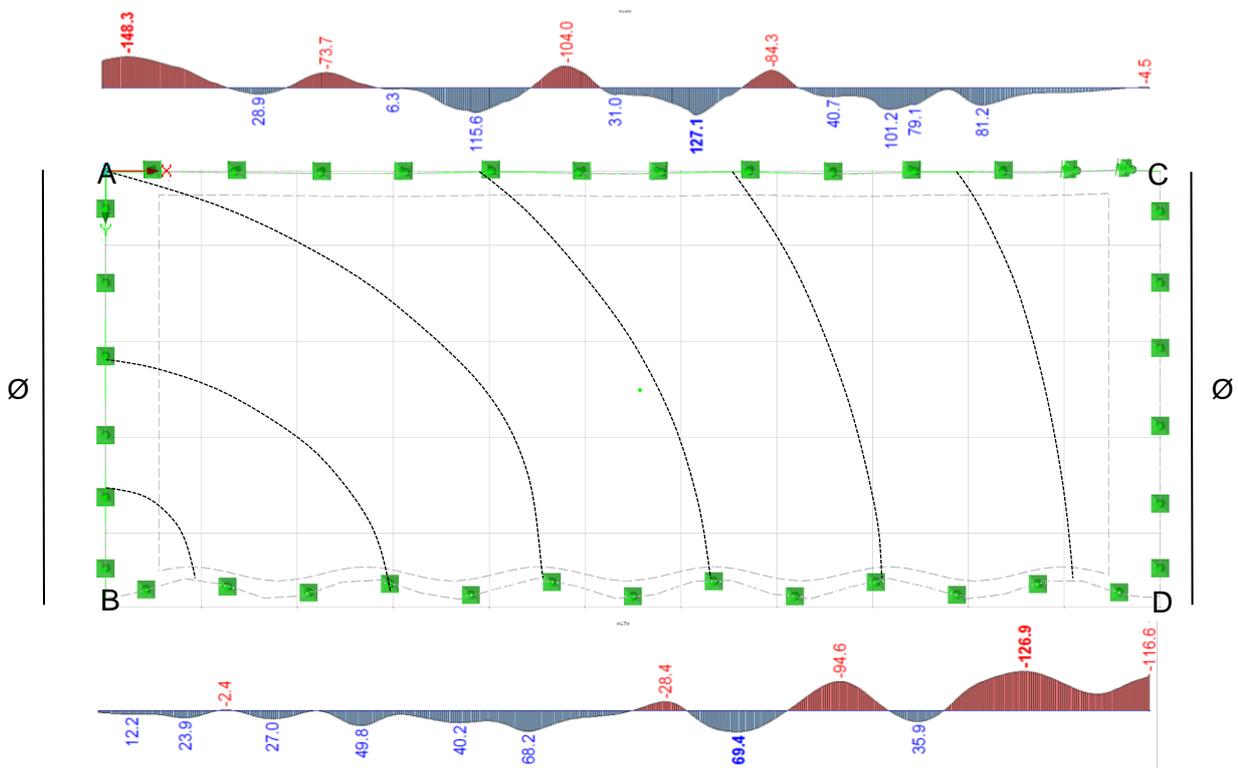


Abbildung 30 - Auflagerreaktion in X-Richtung bei Scheibenlagerung (Werte in kN/m)

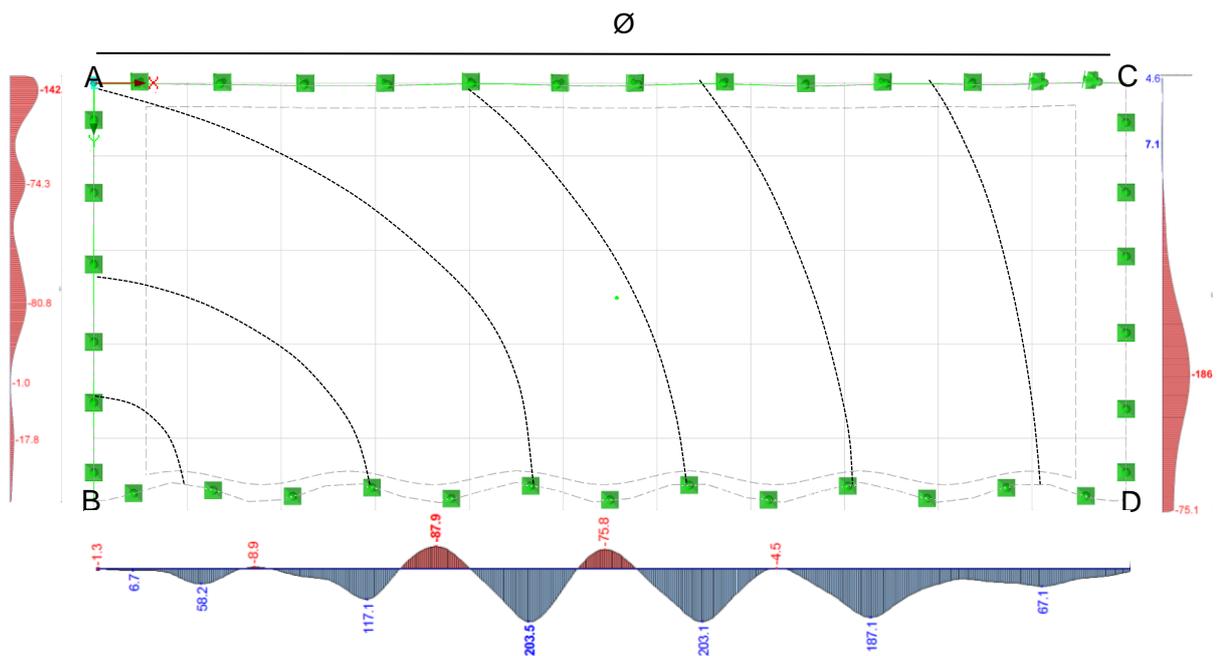


Abbildung 31 - Auflagerreaktion in Y-Richtung bei Scheibenlagerung (Werte in kN/m)

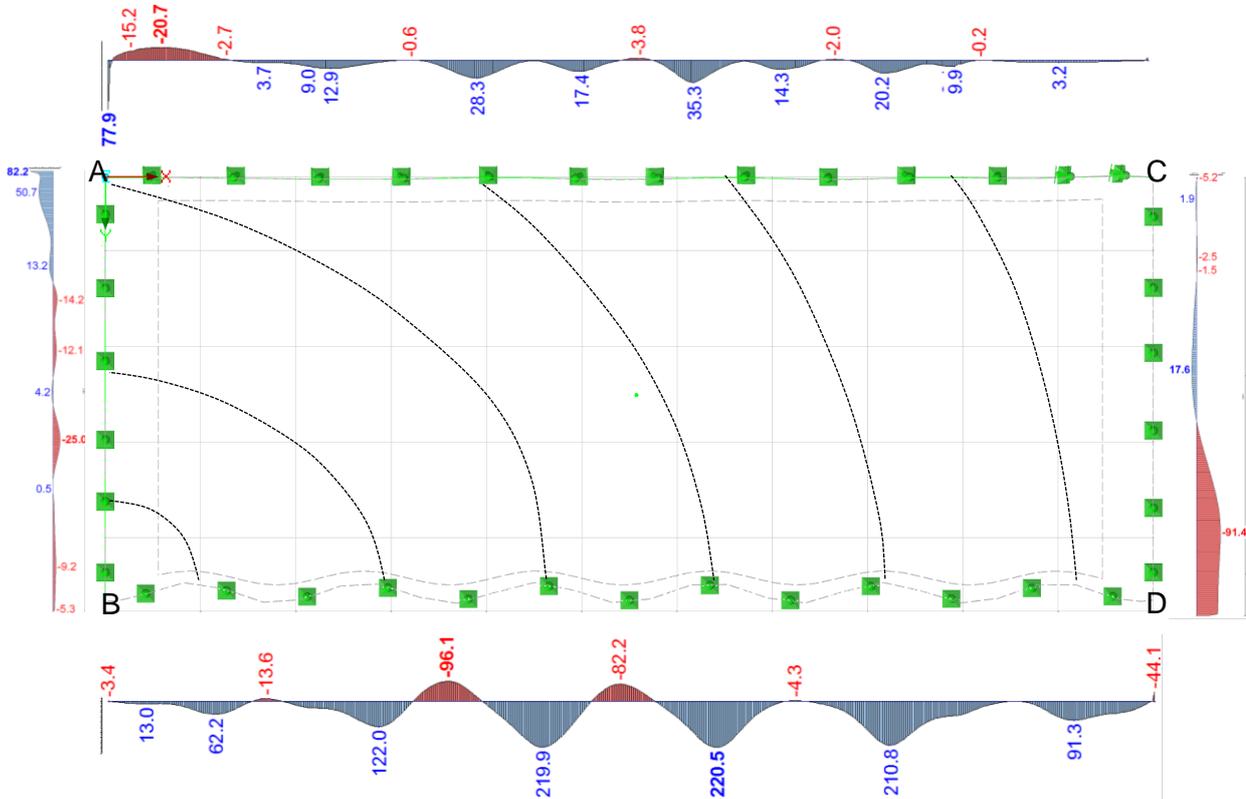


Abbildung 32 - Auflagerreaktion in Z-Richtung bei Scheibenlagerung (Werte in kN/m)

Verformungsverhalten

Beobachtet man nun das Tragwerk nach Ansetzen der Belastung, ist zu erkennen dass das globale Verformungsverhalten dem einer Platte entspricht. Es stellt sich nur bedingt eine Membranwirkung ein. In der Ecke C reicht die Betonschale zum Boden, was eine aussteifende Wirkung hat. Erkennen kann man dies anhand der Verformungsfigur. Die maximale Verformung tritt nicht in Bauteilmitte auf, sondern entfernt sich leicht vom aussteifenden Eckpunkt. Erkennbar ist dies in Abbildung 33, welche die vertikale Verformung des Systems zeigt.

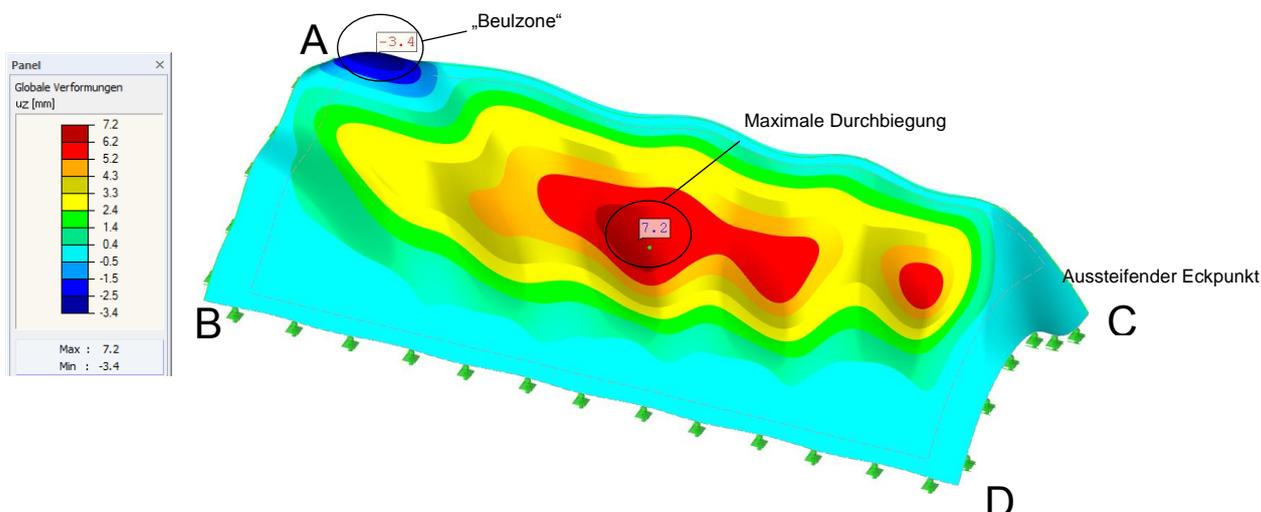


Abbildung 33 – Vertikale Verformung des Wellendachs mit Bereich der max. Durchbiegung, Beulzone und aussteifendem Eckpunkt

Da die bodennahe Längsseite unverschieblich gelagert ist, und die Schale in Querrichtung ähnlich wie ein Bogen geformt ist (siehe Abbildung 26, rechts), wird durch die angesetzte Lasteinwirkung die Schale „flach gedrückt“. Infolgedessen weicht die, unter 10° geneigte, verschiebliche Schalenseite in Querrichtung (Y-Richtung) aus (Abbildung 35). Auffallend ist der Bereich nahe des Eckpunktes A (In Abbildung 33 als „Beulzone“ bezeichnet). Dieser wölbt sich nach oben. Die Ursache dieser Verformung wird später anhand des Spannungsverlaufs bzw. Schnittkraftverlaufs erläutert.

Da die Schale unter einer normal auf die Membran (Wind) bzw. vertikal (Schnee) wirkenden Flächenlast steht, entsteht eine globale „Plattenbiegung“ im System. Dabei führt die Wellenform dazu, dass am Tiefpunkt einer Welle (Wellental) vermehrt Biegezugspannungen auftreten, und sich am Hochpunkt (Wellenberg) Biegedruckzonen einstellen. Allgemein ist zu erkennen, dass die globale Biegetragwirkung entlang der Wellen verläuft (Prinzip ähnlich eines Trapezprofils). Zu erkennen ist dies in Abbildung 34. Dargestellt sind die Spannungen in Hauptrichtung 1 (Spannungszustände ohne Schubspannungsanteil) an der Unterseite der Schale. Im oberen Bereich, nahe des verschieblichen Lagers, treten in den Wellentälern erwartungsgemäß Zugspannungen und auf den Wellenbergen Druckspannungen auf. Die Orientierung der Hauptspannungsrichtung verläuft prinzipiell entlang des Wellenganges. Der Verlauf in Abbildung 37 zeigt den Normalkraftverlauf in den Hauptrichtungen, was auch der Richtung der Hauptspannungen entspricht.

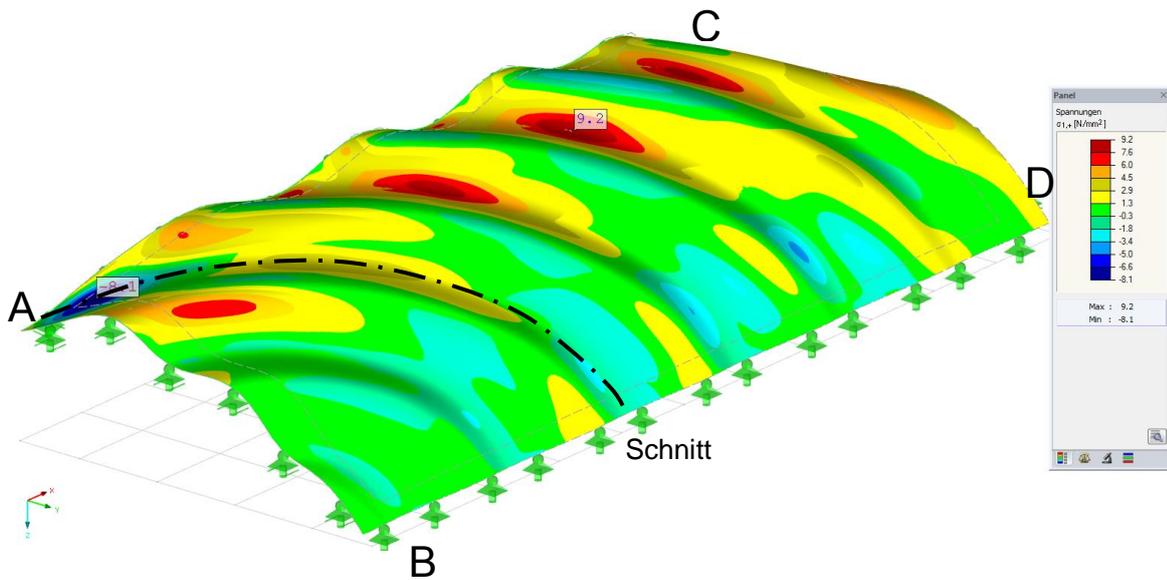


Abbildung 34 – Hauptspannungsverlauf in Hauptrichtung 1 für die Unterseite der Schale – Scheibenlagerung

Betrachtet man nun den Bereich nahe dem Festlager (entlang der Tragwerkskante zwischen B und D), sieht man, dass die Zugspannungen nun im Wellenberg und die Druckspannungen im Wellental auftreten. Dieser Spannungswechsel tritt bei jedem Wendepunkt der Biegelinie der Schale auf. In Abbildung 35 ist der Verlauf der Biegelinie des Tragwerks entlang einer Welle zu sehen.

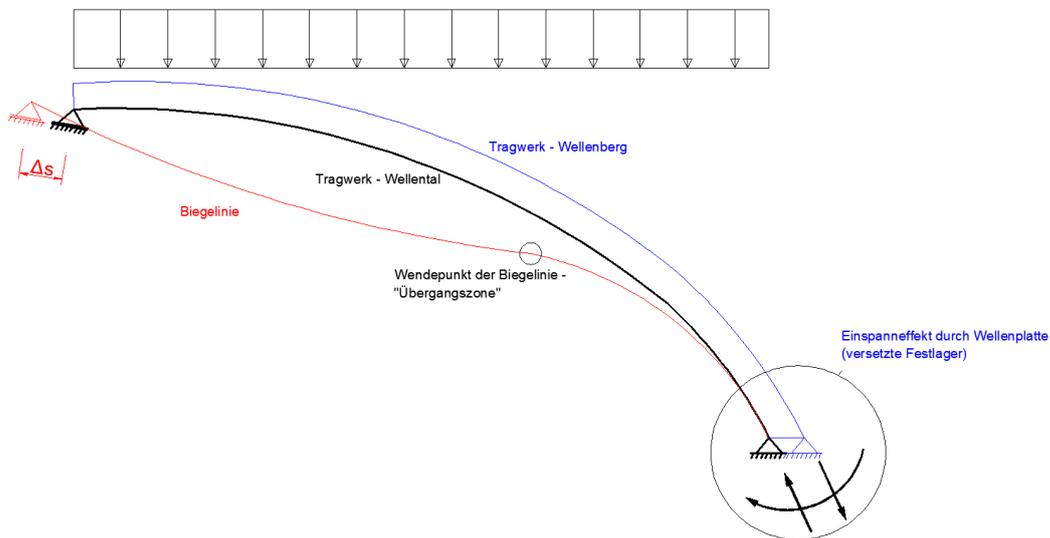


Abbildung 35 - Prinzipskizze für "Spannungswechsel" und Einspanneffekt - Schnitt entlang einer Welle (z.B. Welle 4-6)

Entlang der Kante B-D (unverschiebliche Lager) entsteht ein Einspanneffekt aufgrund der versetzten Lagerung, welche durch die Wellenform gegeben ist. Dadurch kann entlang dieser Kante keine Verdrehung erfolgen, obwohl eine gelenkige Lagerung vorhanden ist. Der Einspanneffekt führt zu Druckkräften in den Wellenbergen und

Zugkräfte in den Wellentälern, und daraus resultierenden Einspannmomenten (siehe Abbildung 35).

Für die Welle die zum Eckpunkt A führt (gestrichelte Linie in Abbildung 34), ist das Verformungsverhalten getrennt zu betrachten. Da hier die Lagerscheiben aufeinandertreffen, entsteht ein unverschieblicher Punkt. Dadurch verändert sich das Verformungsverhalten der gebogenen Welle und somit auch der Spannungsverlauf.

Die Verschiebung der Kante (Δ_s in Abbildung 35) kann sich im Eckpunkt A aufgrund der Lagerungsbedingungen nicht einstellen, wodurch die Aufwölbung in diesem Bereich erzwungen wird (siehe Abbildung 36).

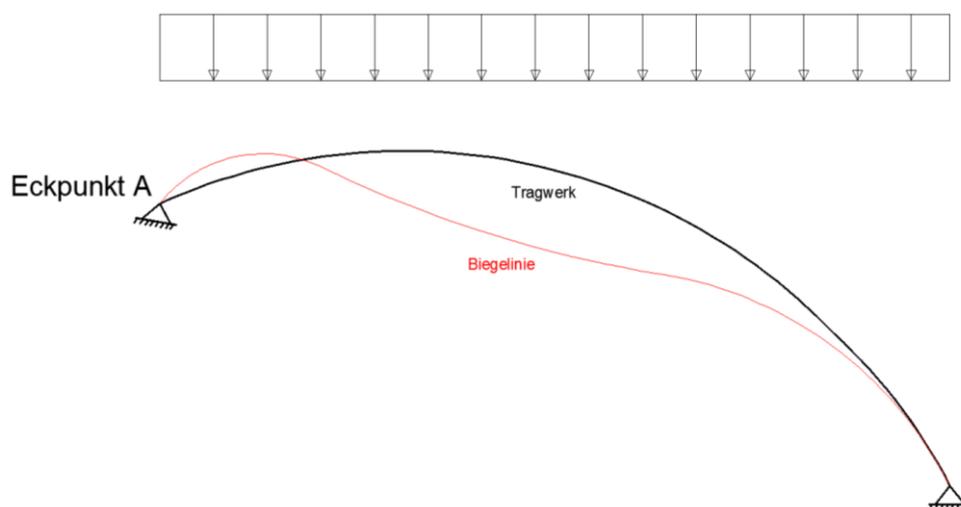


Abbildung 36 - Biegelinie – Schnitt entlang der gebogenen Welle durch A

Schnittkräfte

Auch die Normalkräfte in der Schale ändern ihre geometrische Lage. Dies soll anhand Abbildung 37 gezeigt werden.

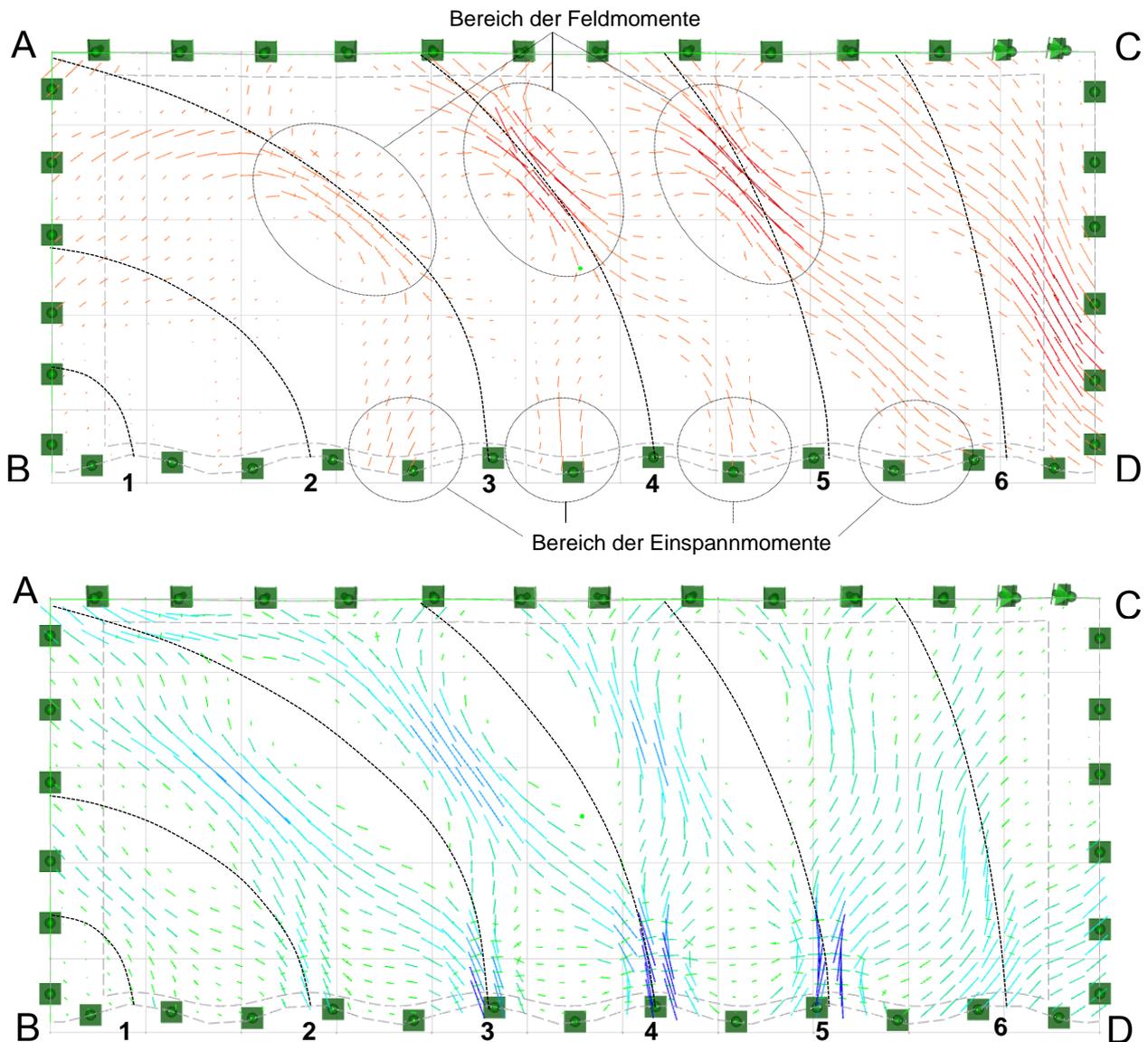


Abbildung 37 - Verlauf der Zugvektoren (oben) und Druckvektoren (unten) bei Scheibenlagerung

Hier ist die globale Biegetragwirkung entlang der Wellen sehr schön erkennbar. Zugkräfte treten im erhöhten Bereich bei den Wellentälern im „Feld“ auf, welche sich dann im Bereich der Festlagerkante zu den Wellenbergen wandern (besonders bei Welle 3, 4 und 5).

Für Welle 6 gilt dies jedoch nicht. Dort sind entlang des rechts gelegenen Wellenbergs Zugkräfte vorhanden, welche aus der verformungsbedingten Zwängung zwischen der

Längs- und Querscheibe entstehen. Dies bildet eine „gebogenes Zugband“, welches den Eckbereich C entlastet. Folglich kommen in Punkt C praktisch keine Druckkräfte an. Zu sehen ist dies auch in den Abbildung 30-32, welche die Auflagerreaktionen zeigen. Der Auflagerbereich mit erhöhten Reaktionskräften zwischen Punkt C und D zeigt (siehe Abbildung 31), wo das „Zugband“ angreift. Es ist ebenfalls zu erkennen dass der Auflagerbereich bei Punkt C in alle Richtungen vergleichsweise geringe Kräfte aufnimmt.

Sieht man sich den Verlauf der Momente in Hauptrichtung 1 für das Wellendach an (Abbildung 38, oben), findet man bei Welle 6 zwischen dem Wellental und -berg ein erhöhtes Moment vor. Dies entsteht durch einen Einhängeneffekt des Wellentals und -berges (ähnlich wie bei Trapezprofil). Durch diesen Effekt wird die Tragfläche zwischen Tal und Berg wie eine Platte beansprucht und dadurch auch verdreht (Abbildung 39). Durch den geringeren Stützabstand in Welle 6 ist dieser Effekt verstärkt.

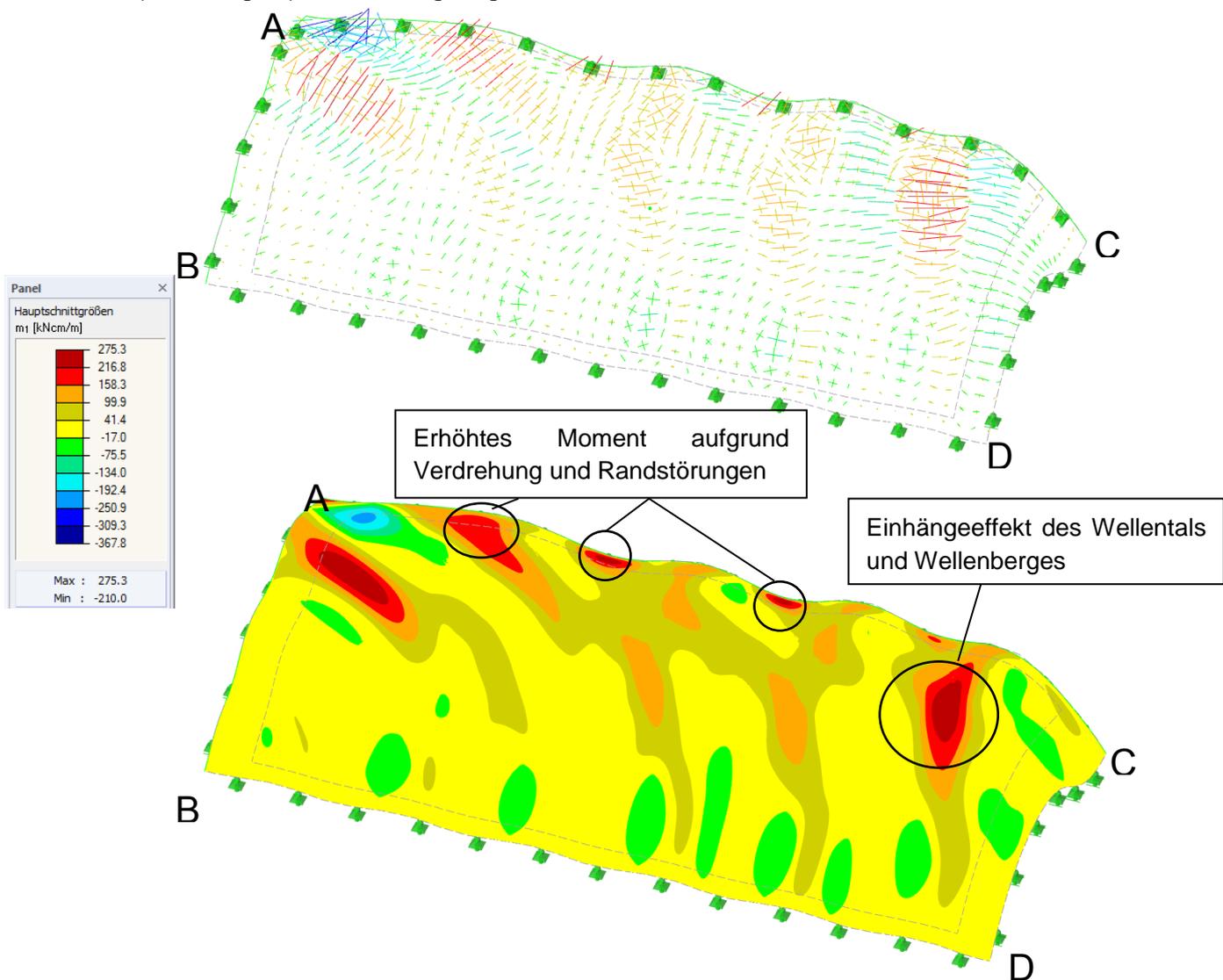


Abbildung 38 - Momentenverlauf m_1 (unten) und Orientierung der Drehrichtung der Momente (oben)

Abbildung 39 zeigt die Verdrehung des Tragwerks um die globale Y-Achse. Es ist auch ersichtlich, dass in anderen Bereichen mit erhöhter Verdrehung ein erhöhtes Biegemoment vorhanden ist (Vergleich Abbildung 39 und Abbildung 38).

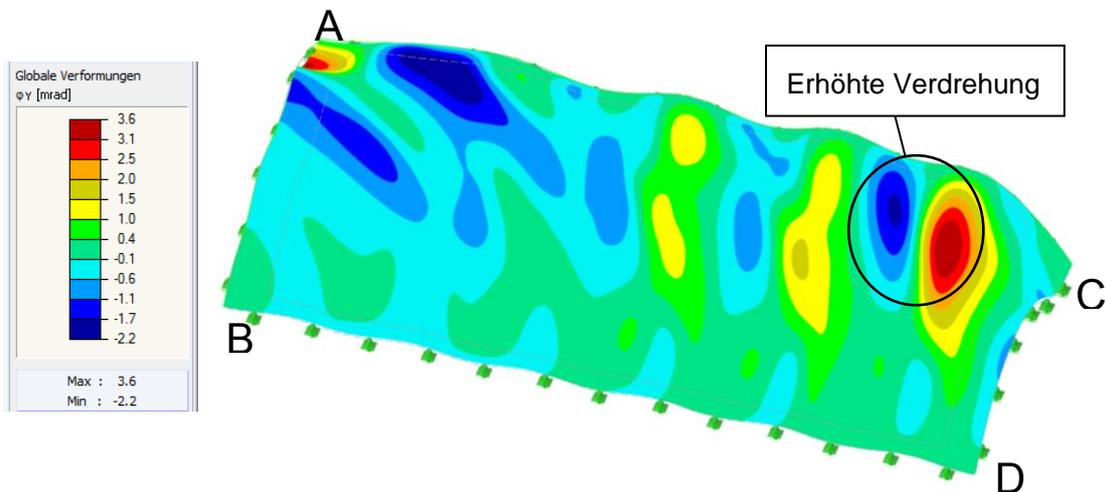


Abbildung 39 - Querschnittsverdrehung um Y-Achse im Wellendach - Scheibenlagerung

In Abbildung 38, oben, ist die Orientierung der Momente zu sehen. Dabei entspricht die Richtung der Linien der Drehrichtung der Biegemomente. Daraus lässt sich erkennen dass bei der Kante A-C erhöhte Momente auftreten. Der Grund ist die erhöhte Verdrehung um die X-Achse in diesem Bereich (siehe Abbildung 40) und die Randstörungen, welche durch die nicht membrangerechte Lagerung auftreten (siehe Kapitel 3.1.2).

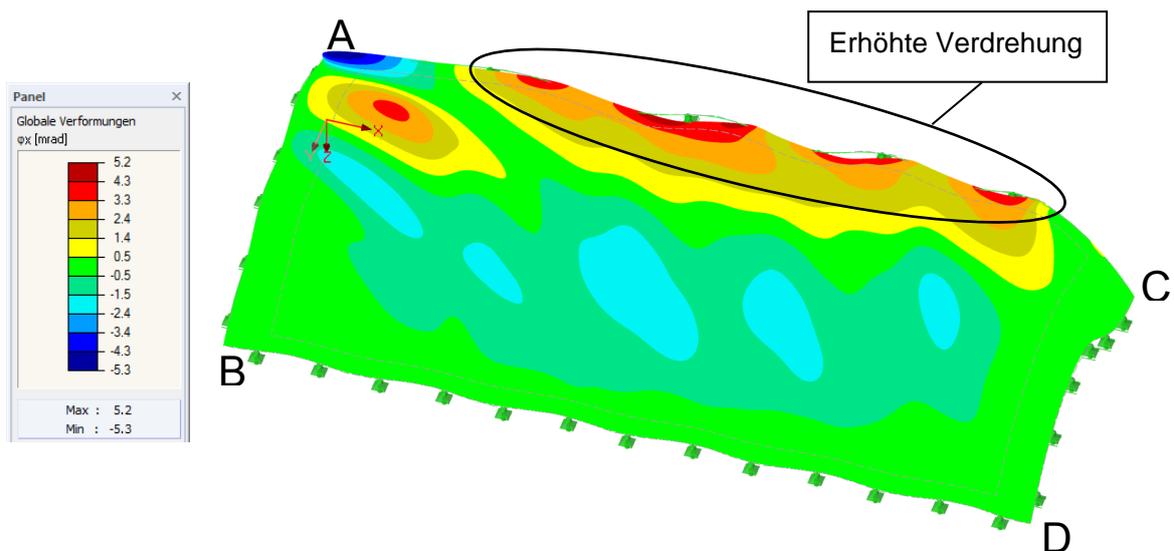


Abbildung 40 – Querschnittsverdrehung um X-Achse im Wellendach - Scheibenlagerung

4.2.2 Lagerungsänderung – Horizontal verschiebliche Lager

Es werden nun die Lagerungsbedingungen des Systems verändert, und dabei Änderungen am Tragverhalten beobachtet. Wie in Abbildung 41 dargestellt, werden die Lager bei den erhöhten Kanten als horizontal verschieblich angesetzt (vergleichbar mit aneinander gereihten Pendelstützen). Außerdem wird bei der zum Boden reichenden Ecke ein Festlager vorgesehen.

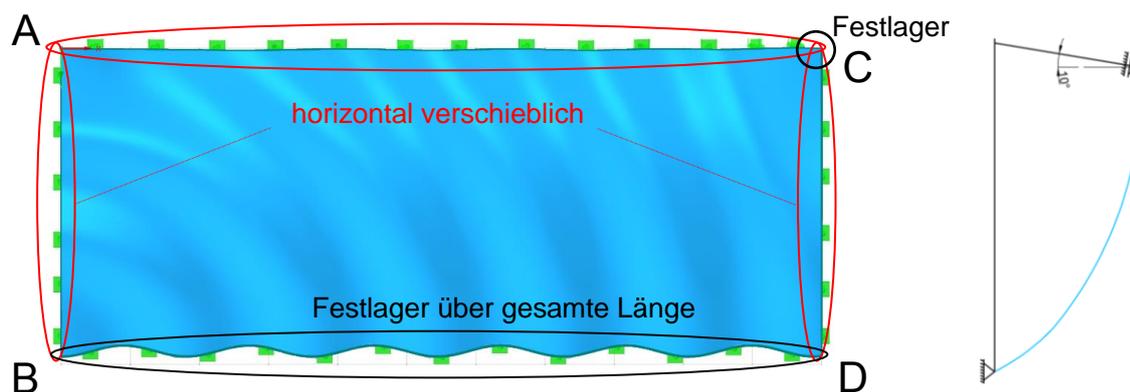


Abbildung 41 - Lagerung Wellendach - horizontal verschieblich

Auflagerreaktionen

Die Auflagerreaktionen zeigen, dass in X-Richtung die Unterschiede zur Scheibenlagerung gering sind. Die Reaktionskräfte bewegen sich in derselben Größenordnung (Ausnahme: Lagerung zwischen A und C kann keine Kräfte in X-Richtung aufnehmen, Eckpunkt C allerdings schon).

Der Unterschied zeigt sich in Y-Richtung deutlicher. Da die Scheibenlager an den kurzen Seiten fehlen, muss die Lagerung zwischen B und D diese Kräfte aufnehmen. Dies resultiert in einer Steigerung der Reaktionskräfte in negativer Y-Richtung (von -70 kN auf -200 kN). Auch in positiver Y-Richtung steigt die Reaktionskraft um bis zu 100%. Der Einspanneffekt an der Kante B-D ist unverändert (siehe Abbildung 43 und 44). Anhand der Lagerungskräfte erkennt man auch dass bei dieser Lagerungsvariante Kräfte zum Eckpunkt C ankommen.

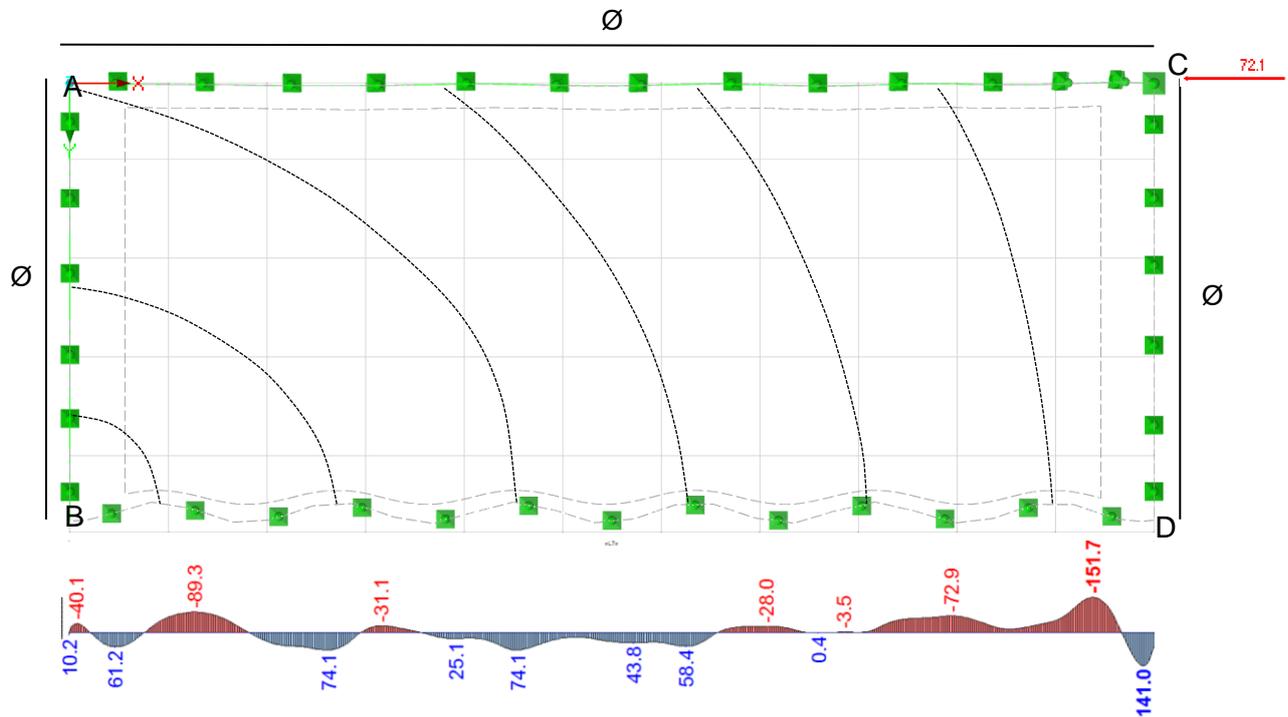


Abbildung 42 - Auflagerreaktion in X-Richtung bei horizontal verschieblichen Lagerung (Werte in kN/m)

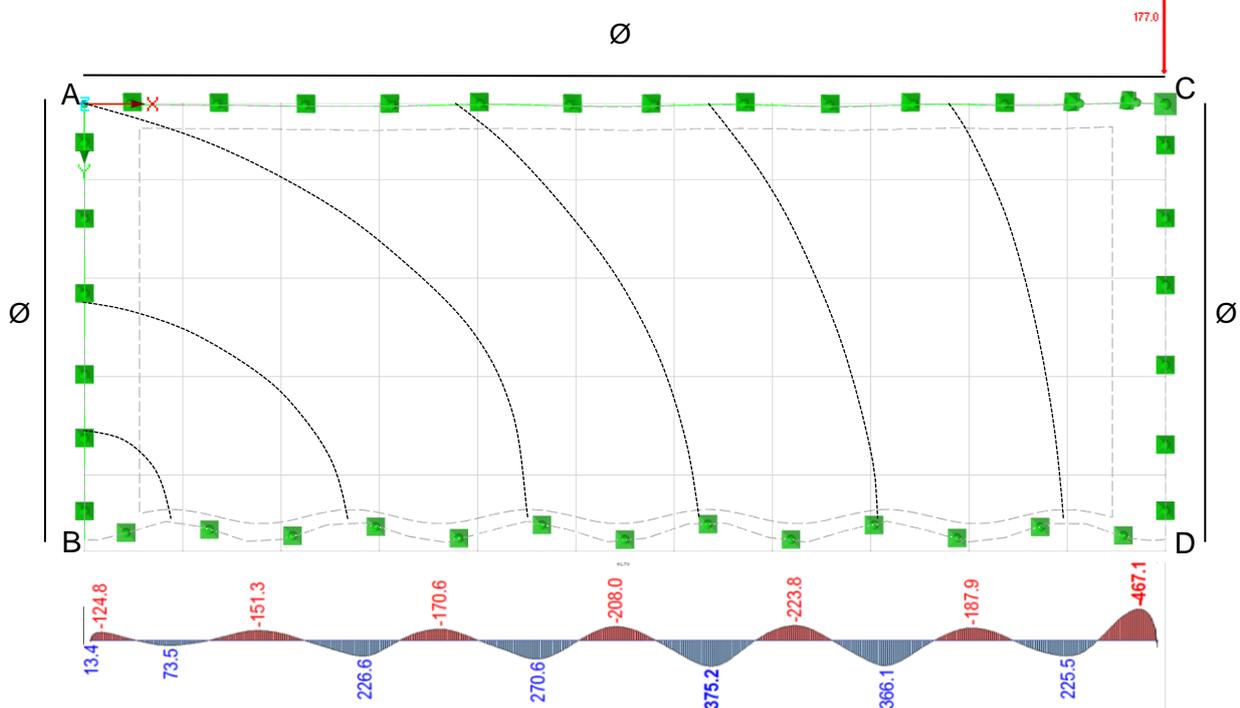


Abbildung 43 - Auflagerreaktion in Y-Richtung bei horizontal verschieblichen Lagerung (Werte in kN/m)

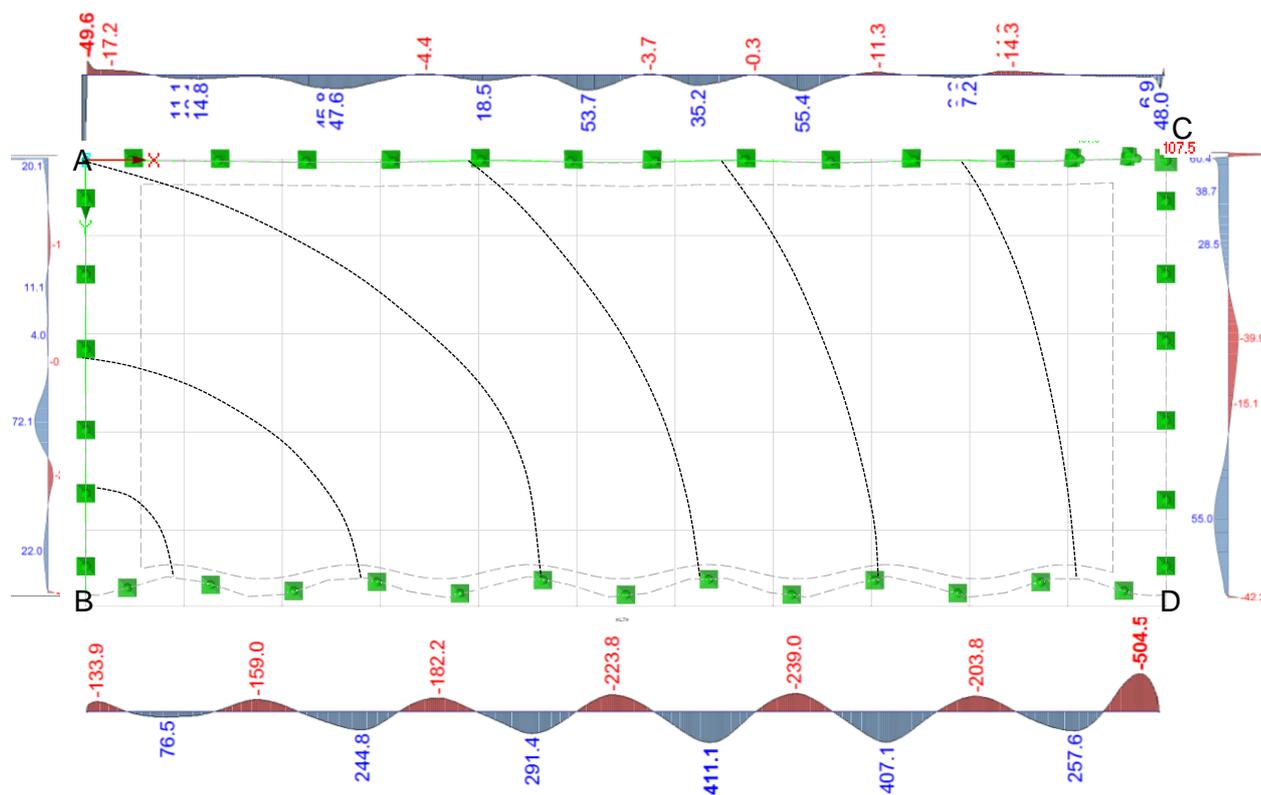


Abbildung 44 - Auflagerreaktion in Z-Richtung bei horizontal verschieblichen Lagerung (Werte in kN/m)

Verformungsverhalten

Das Fehlen der Scheibenlager macht auch die erhöhte Ecke A horizontal frei beweglich. Die Folge ist, dass sich keine „Beulzone“ wie in Abbildung 33 bildet. Das Wellendach erfährt eine maximale Durchbiegung von 9,6 mm (siehe Abbildung 45). Verglichen mit der Variante Scheibenlagerung (maximale Durchbiegung 7,2 mm, siehe Abbildung 33) ist somit die Verformung um 33 größer.

Die Verschiebung Δ_s aus Abbildung 35 (Betrachtung bei Welle 4) beträgt bei der horizontal verschieblichen Lagerung 5,5 mm. Verglichen mit der Scheibenlagerung ($\Delta_s = 3,7$ mm bei Welle 4) ist diese um 49% größer.

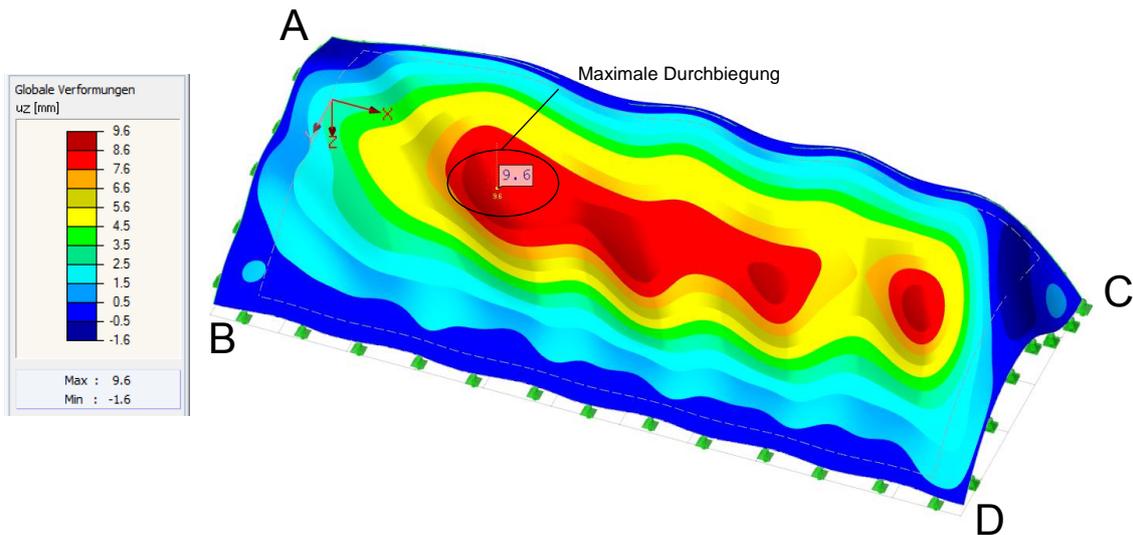


Abbildung 45 - Vertikale Verformung des Wellendaches bei horizontal verschieblichen Lagerung

Betrachtet man nun den Spannungsverlauf in Abbildung 46, erkennt man ein ähnliches Bild wie bei der Variante mit Scheibenlagerung, allerdings mit bis zu 40% höheren Spannungen in Feldmitte (Vergleich mit Abbildung 34). Im erhöhten Randbereich ist der Unterschied deutlicher. Dort kommt es zu einer Erhöhung der Spannungen in Hauptrichtung 1 von bis zu 150% (Vergleich Abbildung 46 mit Abbildung 34).

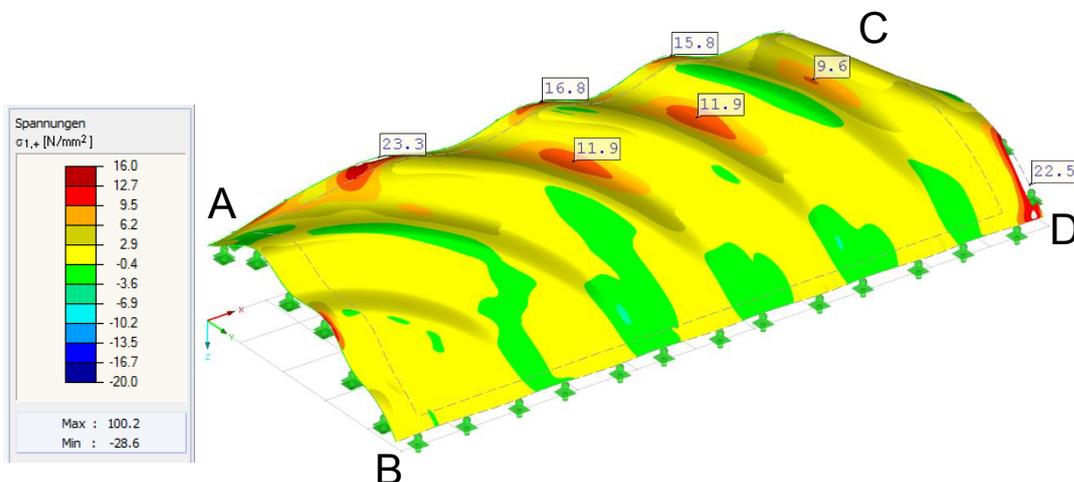


Abbildung 46 – Hauptspannungsverlauf in Hauptrichtung 1 für die Unterseite der Schale – horizontal verschiebliche Variante (Werte in N/mm²)

Durch die erhöhte Durchbiegung und Verschiebung der Lager erfährt das System, verglichen mit der Scheibenlagerung, eine um bis zu 100% höhere Verdrehung um die x-Achse (Vergleich Abbildung 40 mit Abbildung 47). Daraus folgen erhöhte Biegespannungen in diesen Bereichen.

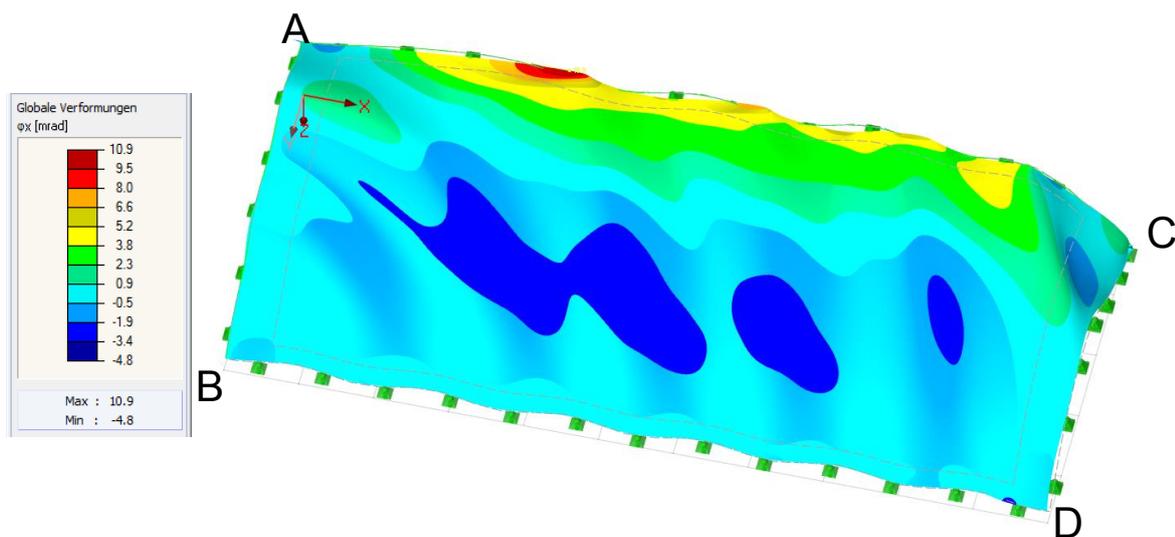


Abbildung 47 – Querschnittverdrehung um die X-Achse – horizontal verschiebliche Lagerung

Augenmerk ist noch auf die hohe Zugspannung im Eckbereich D in Abbildung 46 zu legen. Durch die große Verformung in Welle 6 und die feste (unverschiebliche) Lagerung in Eckpunkt D entstehen dort sehr hohe Zugkräfte (zu sehen in Abbildung 48, oben).

Schnittkräfte

Auch beim Verlauf der Vektoren für die Normalkräfte verhält sich das System ähnlich der Variante mit Scheibenlagern. Die Biegetragwirkung folgt dem Wellenverlauf.

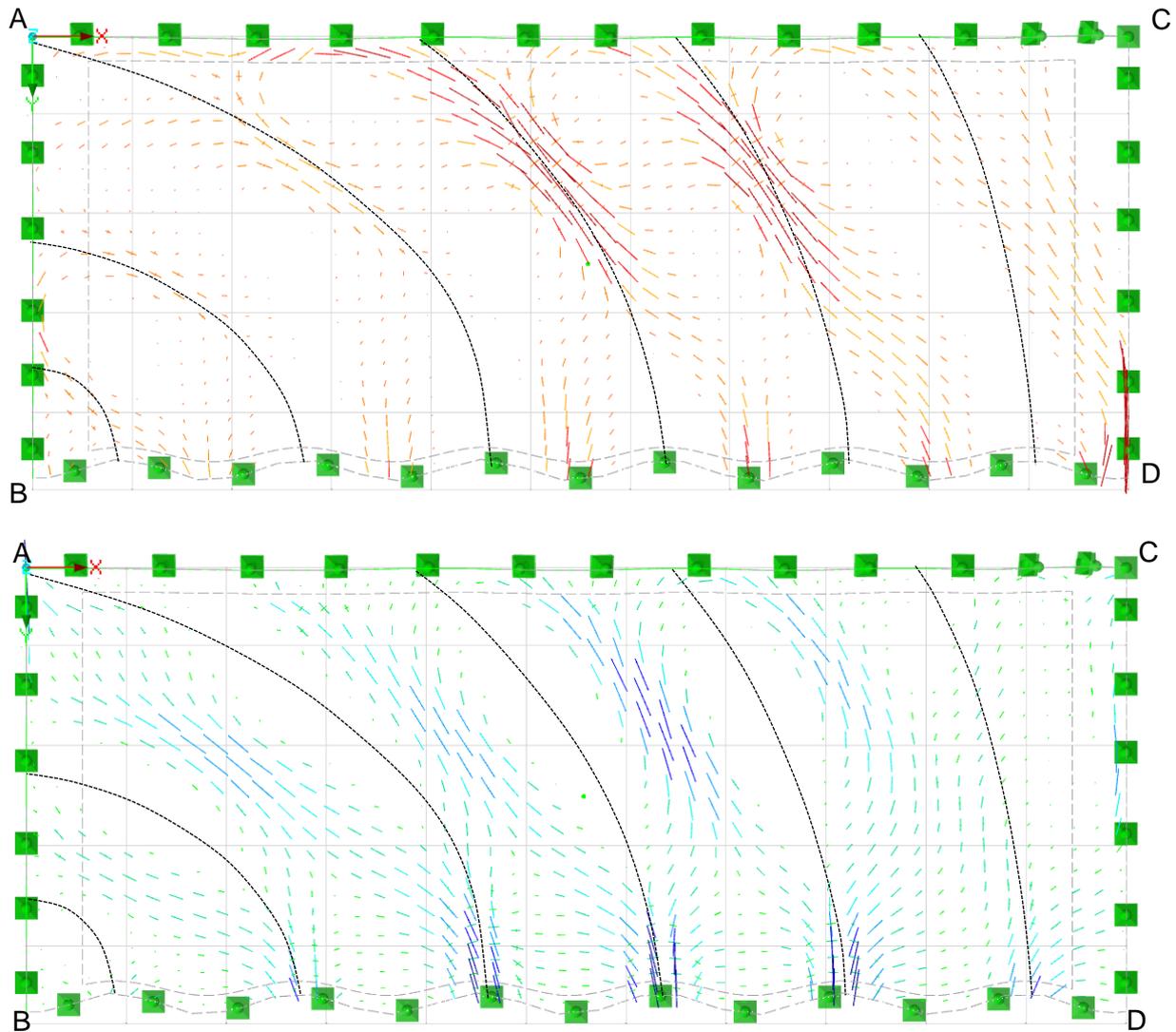


Abbildung 48 - Verlauf der Zugvektoren (oben) und Druckvektoren (unten) mit Wellentalverlauf (gestrichelte schwarze Linie) für horizontal verschiebliche Variante

4.2.3 Lagerungsänderung – allseitige Festlager („membrangerechte Lagerung“)

Für die dritte Variante wurden auf allen Seiten über die gesamte Länge unverschiebliche Festlager angesetzt. Dies ermöglicht ein „membrangerechte Lagerung“, was bedeutet dass die Kraftübertragung in die Auflager tangential zur Membranrichtung bzw. Schalenrichtung erfolgen kann (siehe auch Kapitel 3.1.1 – Membranzustand).

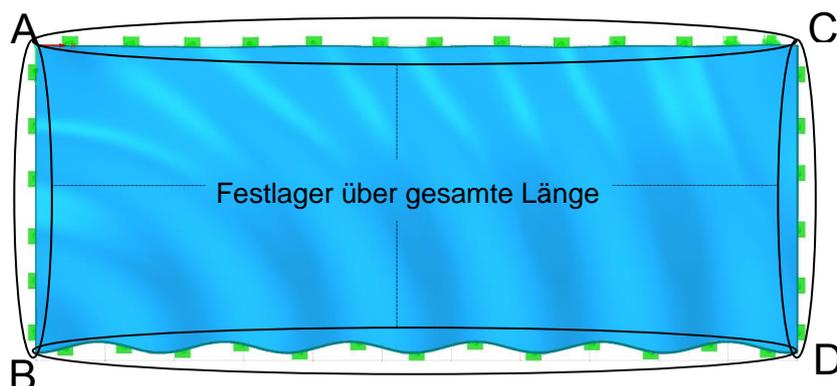


Abbildung 49 - Lagerung Wellendach – membrangerechte Lagerung

Auflagerreaktionen

Die Auflagerreaktionen zeigen im Vergleich zur Scheibenlagerung eine Verringerung, da alle Seiten die Belastungen mit aufnehmen können. Durch die erhöhte Steifigkeit im System verteilen sich die Kräfte besser auf die Lager. Die Tragwirkung orientiert sich, im Vergleich zur Scheibenlagerung, mehr in globaler Querrichtung (globaler Y-Richtung) als entlang der Wellenrichtung. Erkennbar ist dies an den geringen Auflagerreaktionen an den kurzen Seiten (zwischen A und B bzw. C und D). Durch die erhöhte Steifigkeit des Systems verringert sich die plattenähnliche Tragwirkung und wird von einer Bogentragwirkung in Querrichtung überlagert. Dadurch kommt es in den Eckbereichen A und D nicht mehr zu den abhebenden Kräften, wie bei der Scheibenlagerung.

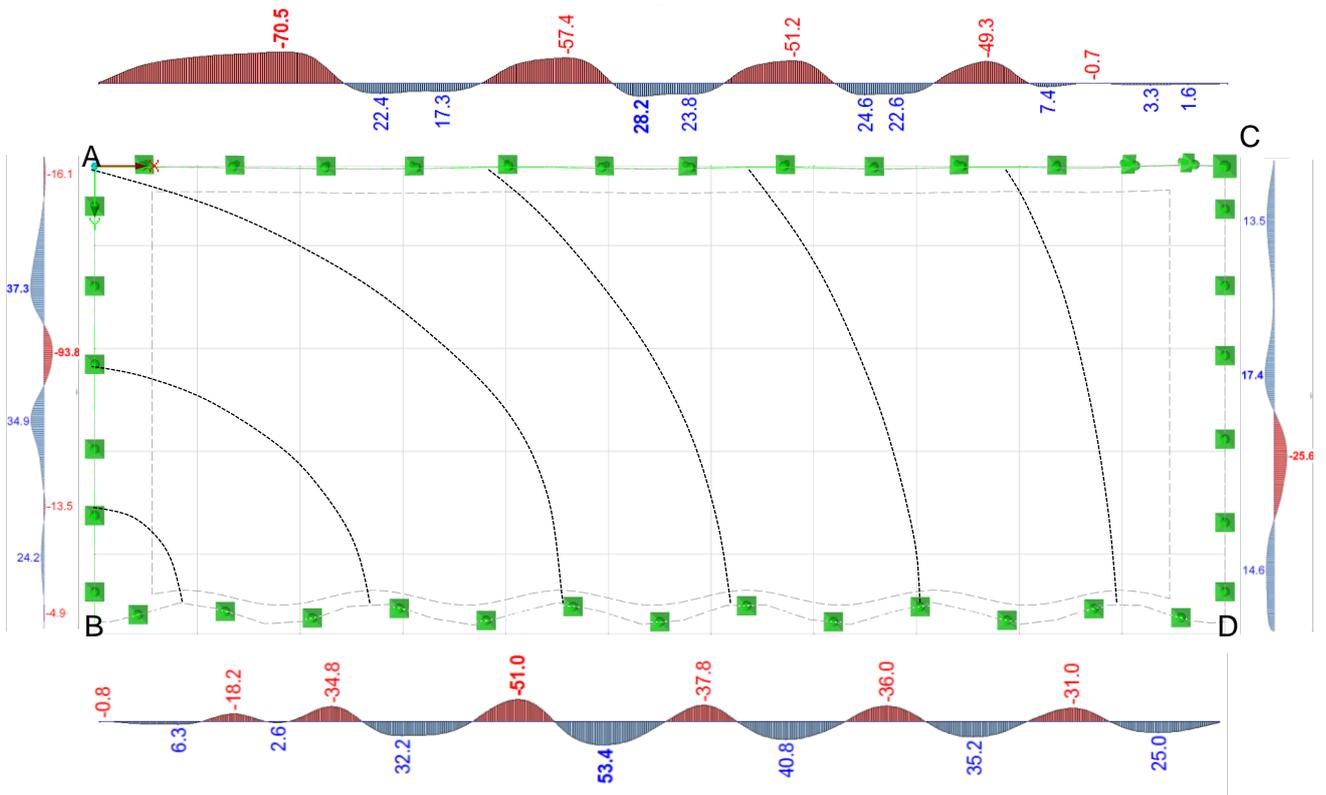


Abbildung 50 - Auflagerreaktion in X-Richtung bei membrangerechter Lagerung (Werte in kN/m)

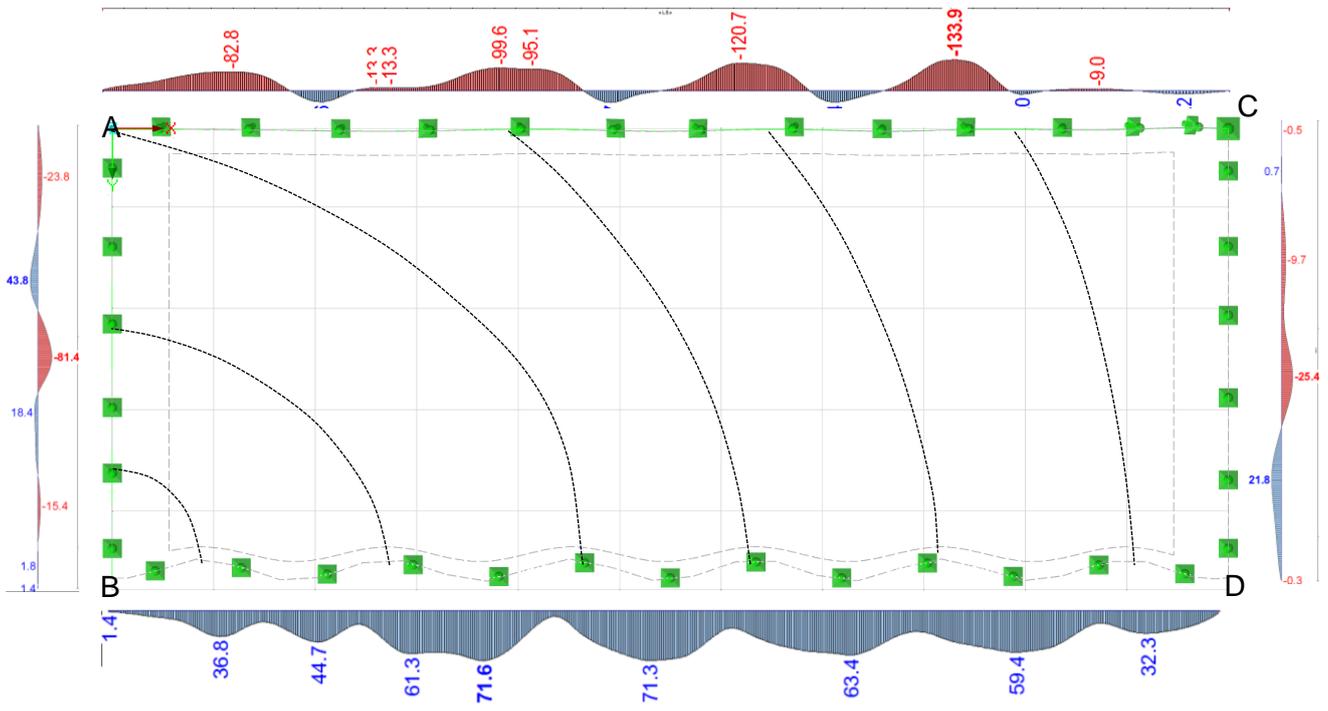


Abbildung 51 - Auflagerreaktion in Y-Richtung bei membrangerechter Lagerung (Werte in kN/m)

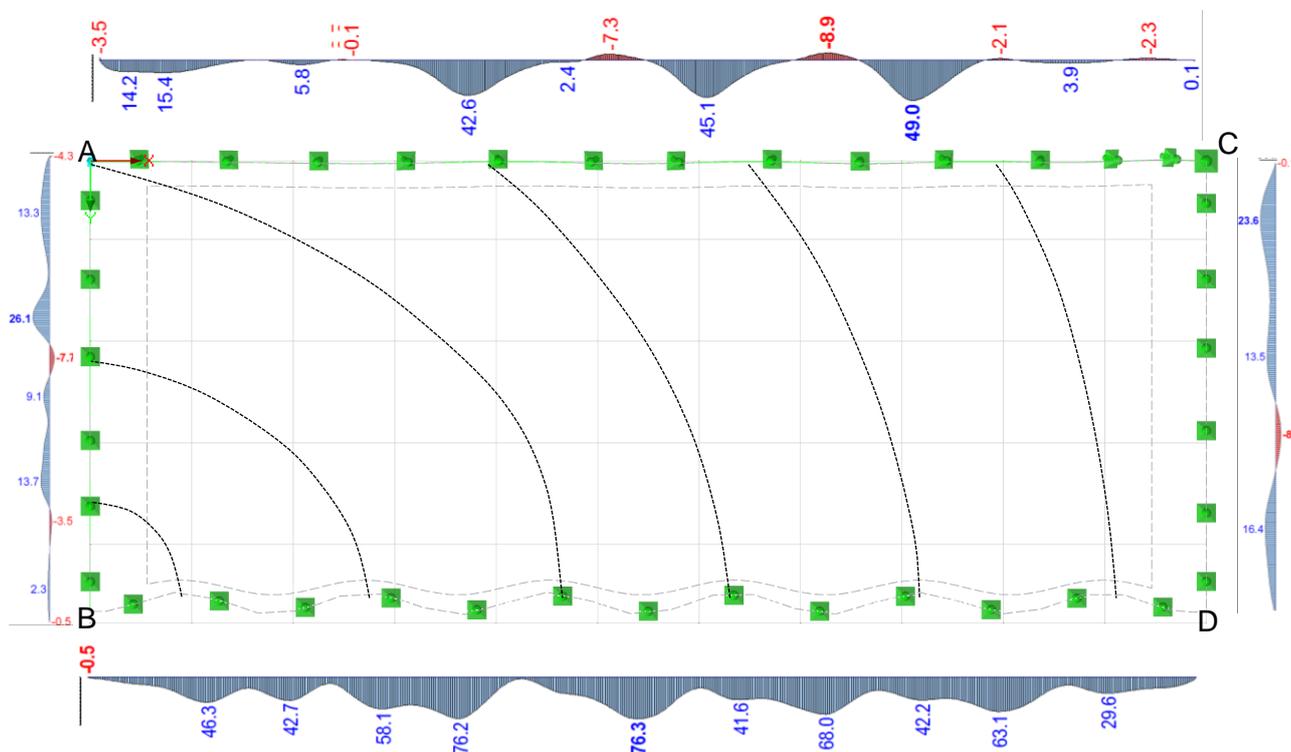


Abbildung 52 - Auflagerreaktion in Z-Richtung bei membrangerechter Lagerung (Werte in kN/m)

Verformungsverhalten

Durch die feste Lagerung wird das gesamte System steifer (es stellt sich eine bogenähnliche Tragwirkung in Querrichtung bzw. entlang der Wellen ein), was zu einer geringeren maximalen Durchbiegung führt. Durch die Schalenlagerung erfährt das System mit 1,5 mm nur 20,8 % der maximalen Durchbiegung von der Variante mit Scheibenlagerung (7,2 mm, siehe Abbildung 33).

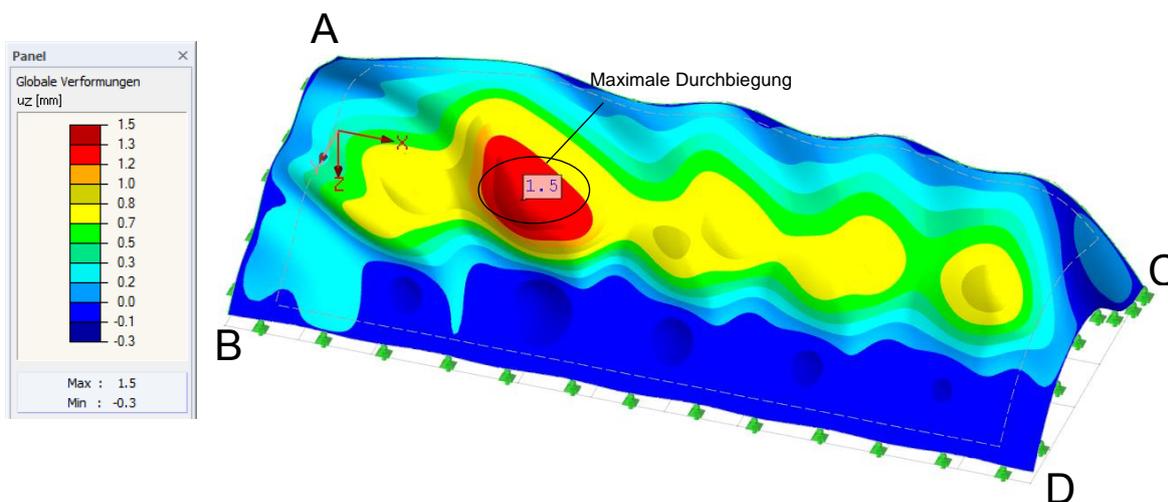


Abbildung 53 - Vertikale Verformung des Wellendaches bei membrangerechter Lagerung

Spannungsverlauf

Die unverschiebliche Lagerung führt bei der Biegelinie zu einem „markanteren“ Wendepunkt als bei den anderen Varianten. Der untere Teil wird nach außen gedrückt, was in einer Verformung nach oben resultiert.

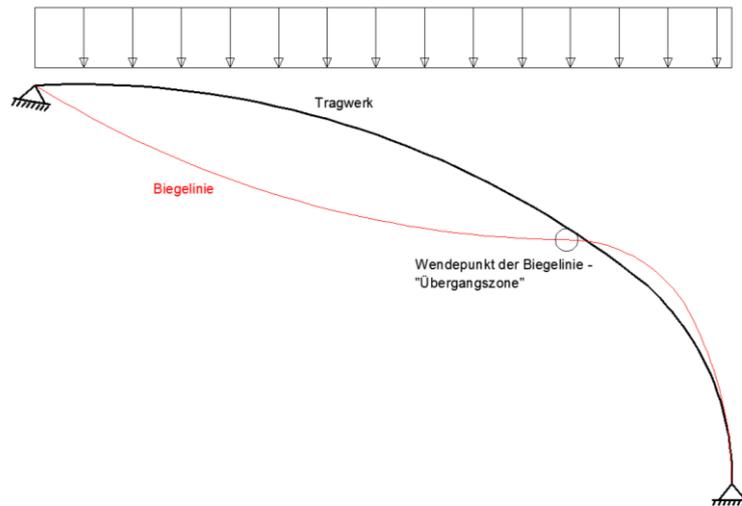


Abbildung 54 - Biegelinie für allseitige feste Lagerung – Schnitt in Querrichtung des Wellendachs

Dies führt wiederum zu vermehrten Druckspannungen an der Unterseite der Schale im unteren Bereich des Tragwerks. (Dunkelblaue Bereiche in Abbildung 55)

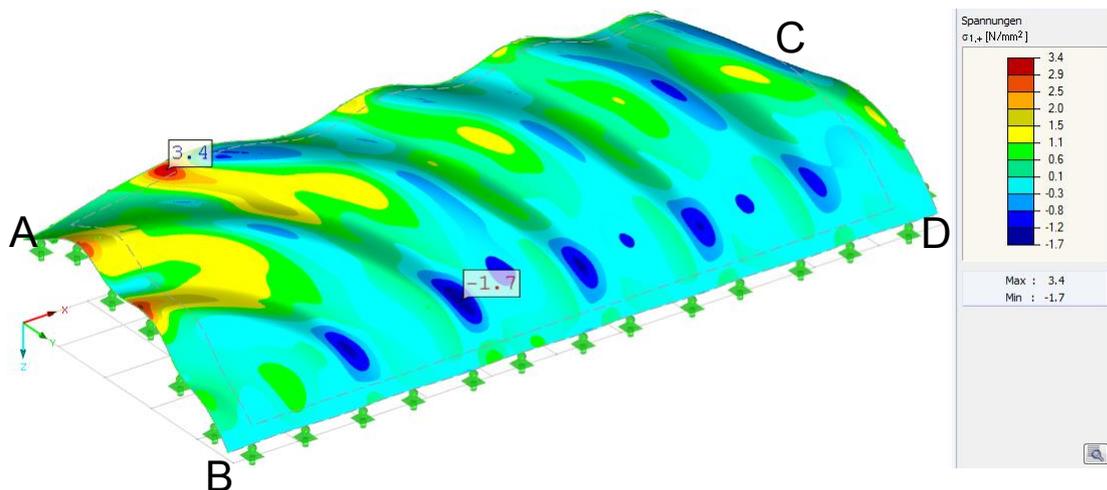


Abbildung 55 - Spannungsverlauf für die Unterseite der Schale – membrangerecht gelagert

Jedoch sind insgesamt die Spannungen bei fester Lagerung wesentlich geringer. Verglichen mit der Scheibenlagerung beträgt die maximale Zugspannung nur 40% (3,4 N/mm², siehe Abbildung 55) verglichen mit der maximalen Zugspannung bei Scheibenlagerung (kritischer Bereich, 9,2 N/mm², siehe Abbildung 34). Diese Spannungen treten allerdings nicht an der gleichen Stelle auf. Dadurch dass das

System steifer ist und die Verformung geringer, bleibt die Wellenform und somit ein besseres Membranverhalten im System erhalten. Die Folge ist dass die Feldmomente bei dieser Lagerung geringer als die Randmomente sind (Abbildung 56 zeigt Momente in Hauptrichtung 1), und somit die maximale Zugspannung im Randbereich auftritt.

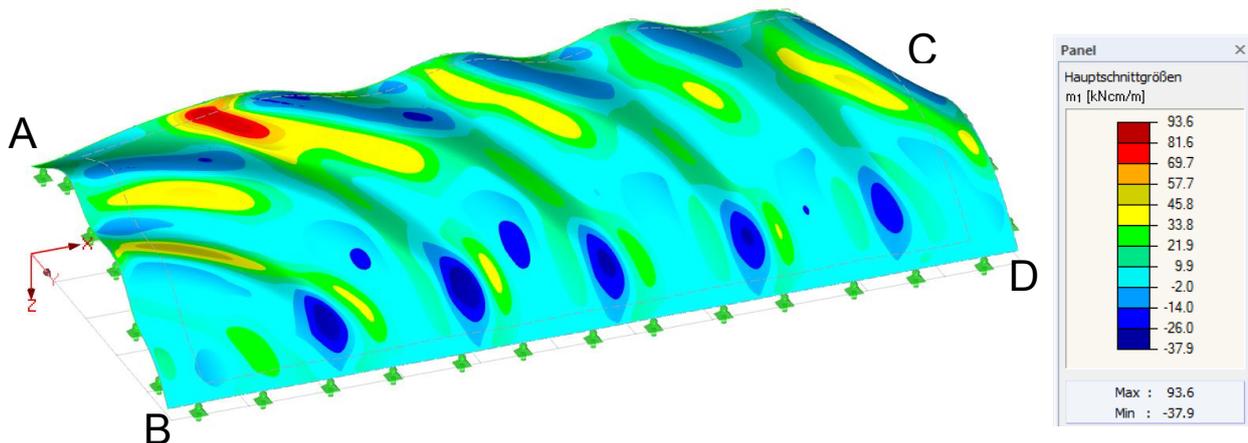


Abbildung 56 - Momente in Hauptrichtung 1

Betrachtet man Abbildung 53 und Abbildung 56, erkennt man, dass die maximale Durchbiegung sowie das maximale Biegemoment an derselben Welle (Welle 3) auftreten. Daraus lässt sich schließen dass die Tragwirkung, und somit auch das Moment in Wellenrichtung orientiert ist. Da die Tragwirkung entlang der Wellen verläuft, und die Welle 3 die längste Welle ist, tritt dort die größte Durchbiegung auf.

Schnittkräfte

Betrachtet man den Vektorenverlauf der Normalkräfte (Abbildung 57) für die fest eingespannte Variante, sieht man, dass auf Grund der Gesamtsteifigkeit des Systems vermehrt Druckkräfte herrschen. Zugkräfte treten überwiegend nur in globaler Längsrichtung auf. Die allgemeine Tragwirkung des Systems verläuft in globaler Querrichtung (globaler Y-Richtung) bzw. in Wellenrichtung.

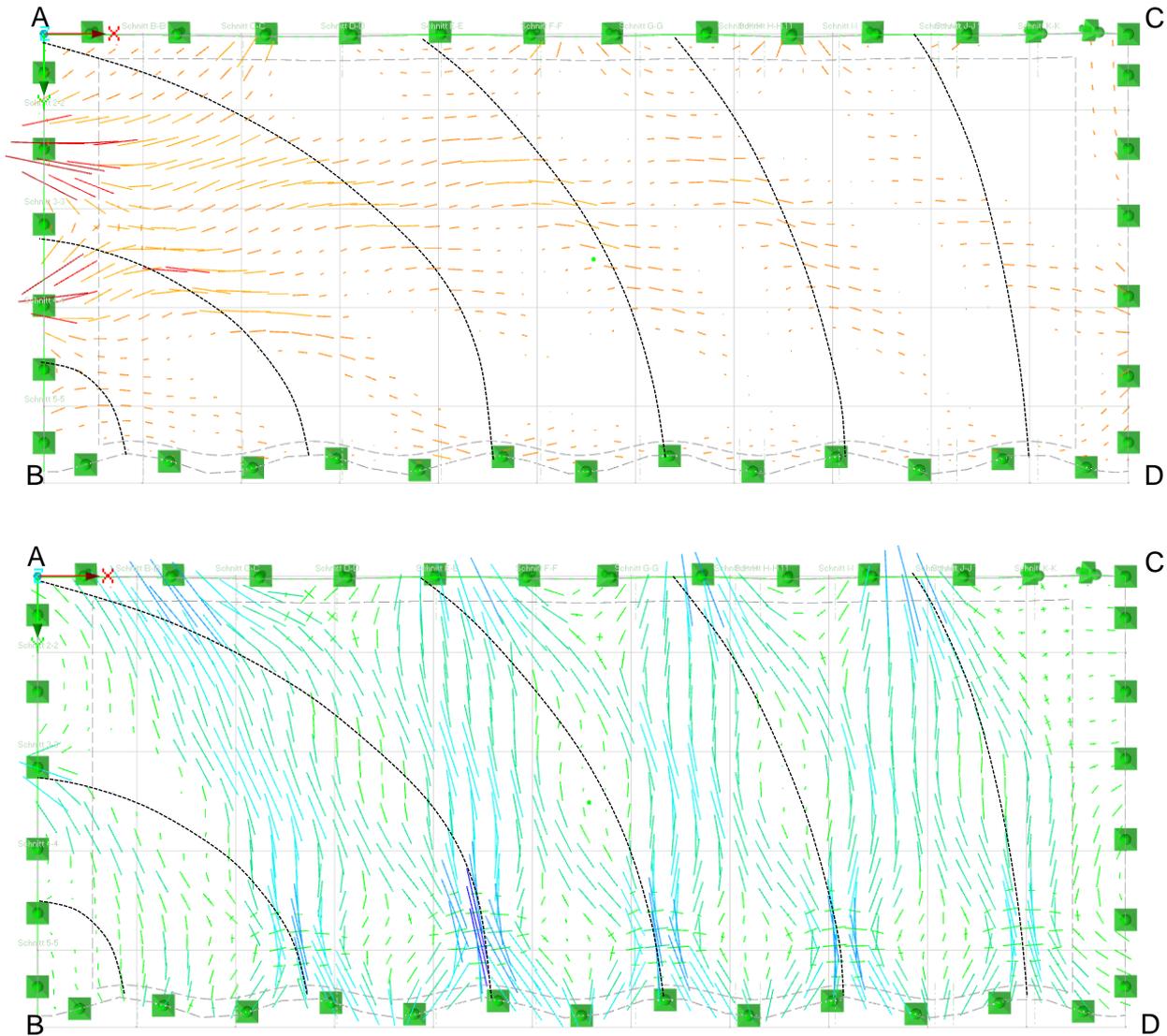


Abbildung 57 - Verlauf der Zugvektoren (oben) und Druckvektoren (unten) mit Wellentalverlauf (gestrichelte schwarze Linie) für membrangerechter Lagerung

4.2.4 Zusammenfassung der Systemvergleiche

Eine Lagerungsänderung am System verändert das Tragverhalten maßgeblich.

Im Vergleich zu der Scheibenlagerung führt eine horizontal verschiebbliche Lagerung zu einer höheren Durchbiegung in Systemmitte. Dabei hat der Wellenverlauf keinen großen Einfluss mehr, das Wellendach wird „flach“ gedrückt und die Lastabtragung tendiert zu plattenähnlichem Verhalten. In weiterer Folge erhöhen sich dadurch die Biegespannungen in Systemmitte sowie in den Randbereichen (Randstörungen).

Eine allseitig feste Lagerung hingegen führt zu einem vergleichsweise steifen System. Verglichen mit der Scheibenlagerung erfährt diese sehr wenig Durchbiegung. Durch die unverschieblichen Ränder bleibt die Bogenform in globaler Y-Richtung erhalten und auch der Wellenverlauf wird nicht „flach“ gedrückt. Dadurch herrschen im System vermehrt Druckspannungen. Diese Lagerung kann auch als „membrangerechten Lagerung“ bezeichnet werden und ist für ein Membransystem die optimale Lösung.

Für weitere Bearbeitungen (in Kapitel 6) wird in dieser Arbeit die Variante „Scheibenlagerung“ herangezogen. Zwar hat die allseitig feste Lagerung („membrangerechte Lagerung“) ein günstigeres Tragverhalten, allerdings wäre diese an den erhöhten Lagerkanten schwer umsetzbar bzw. ist sie nicht realitätsnah.

5 Biaxiale Versagenszustände auf Schnittkraftebene

Um die Spannungszustände in der Wellendachform beurteilen zu können, werden zunächst die Materialeigenschaften des verwendeten UHPC analysiert. Dabei wird zuerst allgemein auf das Verhalten von ultrahochfestem Beton unter zweiachsender Beanspruchung eingegangen. Danach werden die Versagensformen und wie sie herbeigeführt werden, erläutert. Nachdem die Arbeitslinie und die zweiachsende Festigkeit des verwendeten UHPC bestimmt wurden, wird die interaktive zweiachsende Momenten-Normalkraft-Tragfähigkeit ermittelt. Mit Hilfe dieser lassen sich dann die zweiachsenden Spannungszustände aus der Wellendachform bewerten, welche für den Versuchsaufbau relevant sind.

5.1 Materialeigenschaften

Im Zuge dieses Forschungsprojekts wurden Versuche zur Ermittlung der Betonrezeptur durchgeführt, und diese ständig weiterentwickelt. Dabei wurden 2 Varianten mit unterschiedlichen Stahlfaserlängen untersucht.

Die entwickelten Rezepturen haben folgende Frischbetoneigenschaften:

		M1 - 13/0,2	M2 - 20/0,2
		5% - MS	
		kg/m ³	
Frischbetoneigenschaften	Hägermann Flow [cm]	28	27,25
	Hägermann Flow t200 [s]	8,4	9,6
	Setzmaß [cm]	83	81,5
	Setzmaß t500 [s]	7,1	8,3

Tabelle 2 - Frischbetoneigenschaften

Für die folgenden Ausführungen liegt die Mischung M2 mit 20/0,2mm Stahlfasern zu Grunde.

Aus Materialversuchen [14] wurden folgende Materialkennwerte für die verwendete Betonrezeptur ermittelt:

Einaxiale Druckfestigkeit:	160 N/mm ²
Einaxiale Zugfestigkeit:	6,5 N/mm ²
Elastizitätsmodul:	50.000 N/mm ²

5.2 Versagensformen

Abhängig von der Spannungseinwirkung auf den betrachteten Betonquerschnitt können die Versagensformen folgendermaßen eingeteilt werden [15]:

- Zugbruch
Der Versuchskörper versagt durch einen Hauptriss, der senkrecht zur größten Hauptspannung steht. Tritt bei einaxialer Zugbeanspruchung oder bei Druck-Zug-Bbeanspruchungen mit dominanter Zugspannung
- Druckbruch
Der Versuchskörper wird in viele Säulen gespalten, welche parallel zur größten Druckspannung stehen. Resultiert aus einaxialer Druckbeanspruchung oder durch großen Druckspannungen kombiniert mit kleinen Zug- oder Druckspannungen in Querrichtung
- Spaltbruch
Der Versuchskörper wird in Scheiben gespalten, welche senkrecht zur kleinsten Druckspannung stehen. Lässt sich bei zweiaxialer Druckbeanspruchung beobachten, wenn das Verhältnis der Beanspruchungen mindestens 1/5 beträgt.
- Schubbruch
Die Bruchflächen sind geneigt, und es tritt nur eine begrenzte Zahl von Rissen auf, welche parallel zur mittleren Hauptspannung verlaufen und sich 20° bis 30° zur kleinsten Hauptspannung neigen. Tritt bei dreiaxialer Druckbeanspruchung auf.
- Zermalmungsbruch
Die Poren im Versuchskörper versagen und es treten viele Risse ohne bestimmte Ausrichtung auf. Ist bei sehr großen Oktaedernormalspannungen zu erwarten.

Die Abbildung zeigt nochmals anhand einer räumlichen Bruchkurve die verschiedenen Bruchmechanismen in Abhängigkeit des Spannungsverhältnisses

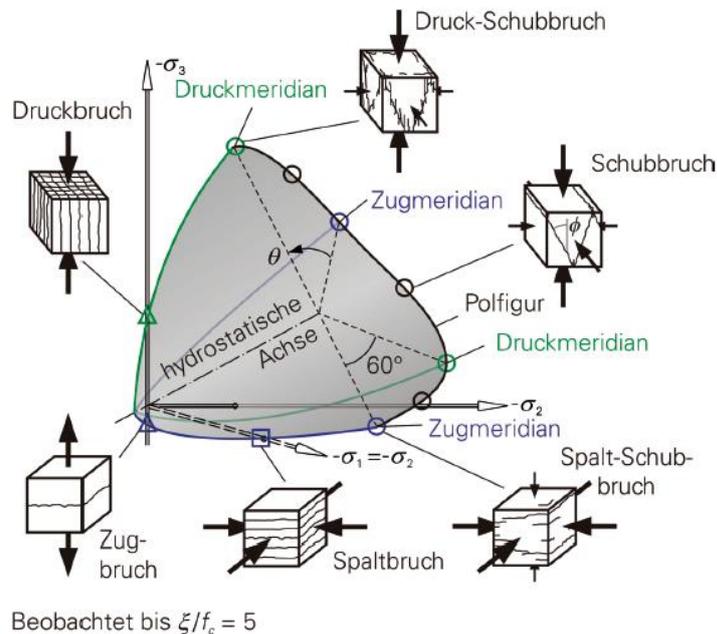


Abbildung 58 - Bruchmechanismen bei verschiedenen Spannungsverhältnissen [15]

5.3 Verhalten von UHPC bei zweiaxialer Beanspruchung

5.3.1 Druck-Druck-Beanspruchung

Eine erste Beschreibung und versuchstechnische Ermittlung des Verhaltens von UHPC bei zweiaxialer Beanspruchung wurde 2007 von Curbach und Speck [16] durchgeführt. Dabei wurden in einer Versuchsreihe zweiaxiale Druckspannungsverhältnisse an mehreren Versuchskörpern erzeugt. Dies wurde an Betonen mit verschiedenen Rezepturen (M2Q, B4Q, B4Q-AC, B4Q-oF) durchgeführt. Die Auswertung der Versuchsergebnisse ergab Bruchkurven für den zweiaxialen Druckbereich. Für die verwendeten Mischrezepturen des UHPC und die Ergebnisse der Versuche wird an dieser Stelle auf den Bericht von Curbach, Speck [16] verwiesen.

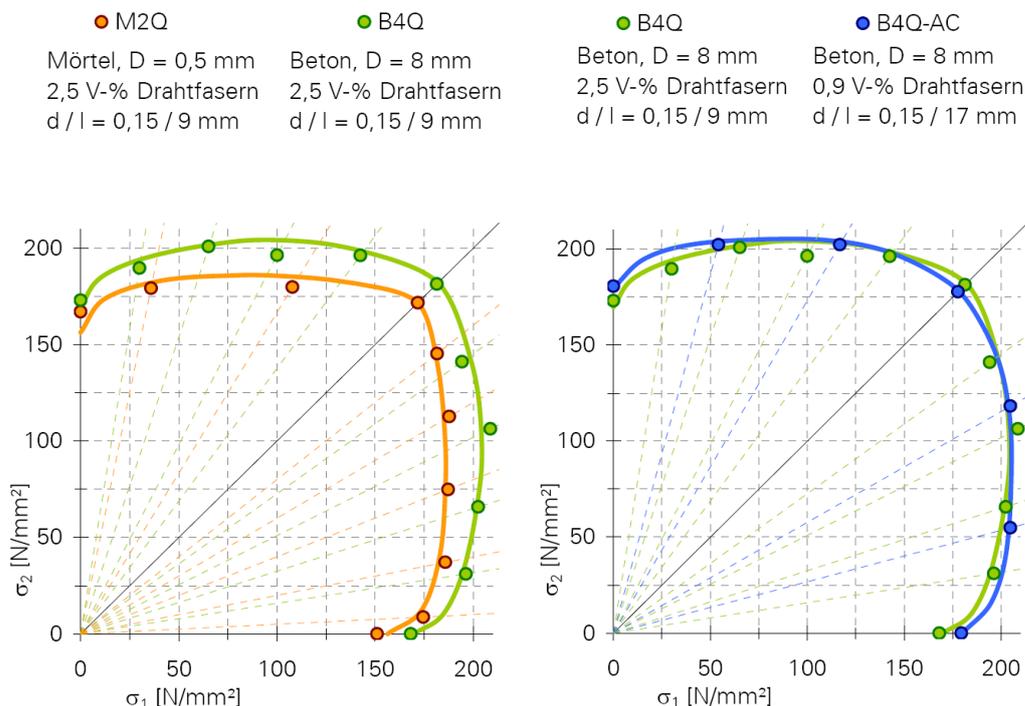


Abbildung 59 – Versuchsergebnisse: Festigkeiten zweiaxialer Belastung für verschiedene Rezepturen von Curbach, Speck [16]

5.3.2 Druck-Zug-Beanspruchung

Zum Zeitpunkt der Verfassung dieser Arbeit sind dem Autor keine Forschungsarbeiten bekannt, welche die Versagenskurve von UHPC im Druck-Zug-Bereich genau beschreiben. Annäherungen und qualitative Beschreibungen der Versagenskurve wurden allerdings von Heinzle, Freytag [17] und Fehling [18] durchgeführt.

Prinzipiell verhält sich UHPC im Druck-Zug-Bereich ähnlich wie Normalbeton. Dies zeigen auch die Versuche durch Fehling, bei denen vor Aufbringung der Druckkraft in Querrichtung eine Zugdehnung, welche zu Rissen führt, aufgebracht wurde. Allerdings lässt sich dadurch eine Versagenskurve aufgrund fehlender Zugspannungen nicht bestimmen.

Heinzle, Freytag haben, basierend auf Schubversuchen und Modellannahmen, auf das biaxiale Materialversagen geschlossen. Es wird die Nachrisszugfestigkeit solange verändert, bis der Schubwiderstand des Rechenmodells mit der Bruchlast aus den Versuchen übereinstimmt.

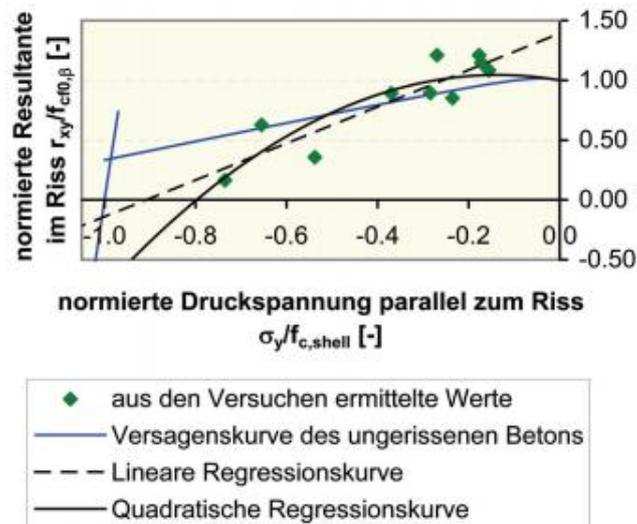


Abbildung 60 – Biaxiale Druck-Zug Versagenskurve von ungerissenem und gerissenem UHPC [17]

In Abbildung 60 ist die Spannung im Riss (Spannungsresultante aus Normal- und Schubspannung im Riss) gegenüber der rissparallelen Druckspannung aufgetragen. Die Werte sind auf die Nachrisszugfestigkeit bzw. die Druckfestigkeit des jeweiligen Versuchskörpers normiert. Eine durch die so erhaltenen Festigkeitswerte gelegte quadratische Regressionskurve (schwarze Linie) stellt einen möglichen qualitativen Verlauf der biaxialen Versagenskurve des gerissenen UHPCs dar.

Der Verlauf dieser Kurve wird so erklärt, dass durch Querdruckspannung die Fasern stärker geklemmt werden, wodurch eine größere Reibung zustande kommt, die gegen das Ausziehen der Fasern wirkt. Daher sind Werte über der einaxialen Nachrisszugfestigkeit möglich. Bei Querdruckspannungen über ca. 50% der einaxialen Druckfestigkeit treten derart dominante Schädigungen entlang der Faser auf, dass die Zugfestigkeit merklich abnimmt. [17]

5.3.3 Zug-Zug-Beanspruchung

Bezüglich der zweiaxialen Zugbeanspruchung von UHPC konnten bis dato keine aussagekräftigen Versuchsergebnisse gefunden werden. Verschiedene Forschungsergebnisse führen zu widersprüchlichen Ergebnissen. KUPFER [19] kam zur Schlussfolgerung, dass eine zweiaxiale Zugbeanspruchung keinen Einfluss auf die Zugfestigkeit hat. CARINO [20] wiederum nimmt an, dass bei mehraxialem Zug die Festigkeit ansteigt. ROSSI & ULM [21] kamen zu dem Ergebnis, dass die mehraxiale Zugfestigkeit zunächst leicht ansteigt und anschließend unter den Wert der einaxialen Zugfestigkeit fällt.

Die Ergebnisse der Literatur beziehen sich auf die Erstriss-(Matrix-)Festigkeit. Für den Nachrissbereich in faserbewehrtem UHPC sind dem Autor keine Forschungsergebnisse bekannt.

In dieser Arbeit angenommen, dass der Verlauf der zwei axialen Zugfestigkeit konstant ist, und somit die zwei axiale Zugbeanspruchung keinen Einfluss auf die Zugfestigkeit hat.

5.4 Bruchkriterien

Zur Beschreibung der mehraxialen Bruchkurve gibt es verschiedene Methoden welche die Bruchkriterien mathematisch zu beschreiben versuchen. Allerdings schafft es keine dieser Methoden die Bruchkurve genau abzubilden. Es treten mehr oder weniger vertretbare Abweichungen zu Versuchsergebnissen auf. Als Beispiel seien hier 3 Kriterien angeführt:

1. Bruchkriterium nach TSAI/WU [22]
2. Bruchkriterium nach OTTOSEN [23]
3. Bruchkriterium nach DAHL [24]

Das Kriterium nach TSAI/WU weist für Bereiche mit zwei axialen Druckspannungen die besten Übereinstimmungen mit Versuchswerten auf. Allerdings kann diese Methode das Verhalten des Betons unter Zugspannung sowie im drei axialen Druckbereich nicht wirklichkeitsnah beschreiben.

Das Bruchkriterium nach OTTOSEN hingegen beschreibt das Betonverhalten qualitativ am besten, wobei hier im Vergleich zu dem Kriterium nach TSAI/WU die Abweichungen im zwei axialen Druckbereich geringfügig größer sind. Es treten Differenzen von 10% auf, die noch im vertretbaren Bereich liegen. Das Kriterium nach DAHL ist eine Modifikation der Methode von OTTOSEN, die allerdings das Verhalten von UHPC nicht beschreiben kann.

Das Kriterium nach OTTOSEN wird zur Anwendung empfohlen. Für die genaue Vorgehensweise zur Ermittlung des Bruchkriteriums nach OTTOSEN wird auf entsprechende Literatur von OTTOSEN [23] und SPECK [16] verwiesen.

Um das Kriterium von OTTOSEN anwenden zu können, werden Materialkennwerte benötigt die durch relativ aufwendige Versuchsverfahren ermittelt werden müssen (unter anderem Spannung auf dem Druckmeridian und Zugmeridian sowie die zwei axiale Druckfestigkeit). Da für diese Arbeit solche Werte nicht zur Verfügung standen, wurde die zwei axiale Bruchfestigkeit anhand von Literaturwerten [15] und den bekannten, einaxialen Festigkeitswerten des verwendeten Materials angenähert.

In Abbildung 61 wird die in dieser Arbeit verwendete zweiachiale Festigkeit dargestellt. Dabei beschreibt die rote Linie im Druck-Zug-Bereich die Festigkeit im gerissenen Zustand (Nachrisszugfestigkeit, nach Heinzle, Freytag [17]).

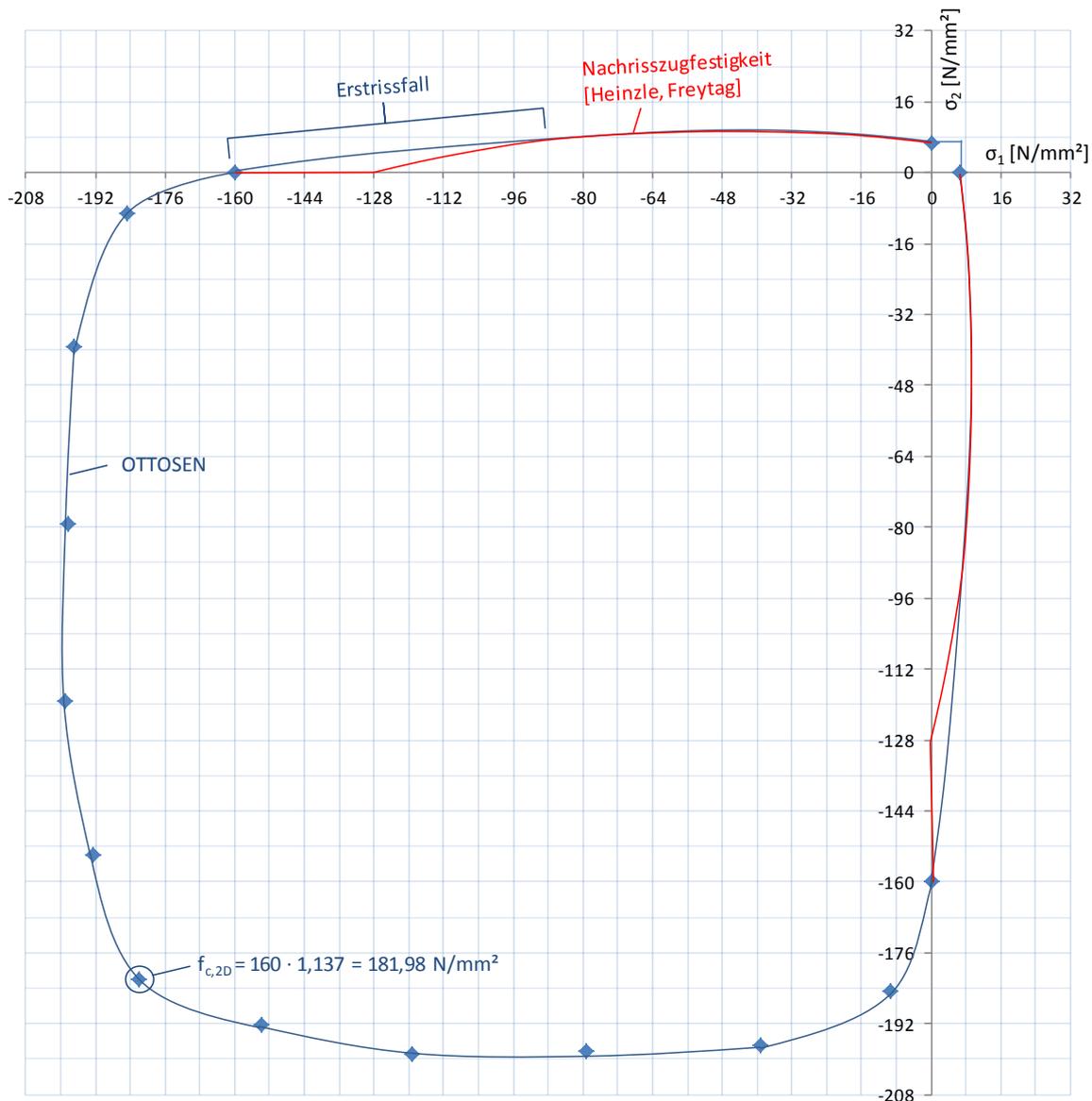


Abbildung 61 - Zweiachiale Festigkeit des verwendeten UHPC

5.5 Zweiachiale Momenten-Normalkraft-Interaktion

Da die Schalenkonstruktion Normalkräfte und Momente in X-Richtung sowie auch in Y-Richtung aufnehmen kann, wird hier nun mit Hilfe der zweiachialen Bruchfestigkeit aus Abbildung 61 eine Momenten-Normalkraft-Interaktion abgeleitet, welche die Belastung in beiden Achsrichtungen berücksichtigt. Dazu wird zunächst die Arbeitslinie des betrachteten Werkstoffes benötigt. Für die Untersuchungen wurde eine typische UHPC-Arbeitslinie an die eigenen Kennwerte [14] angepasst.

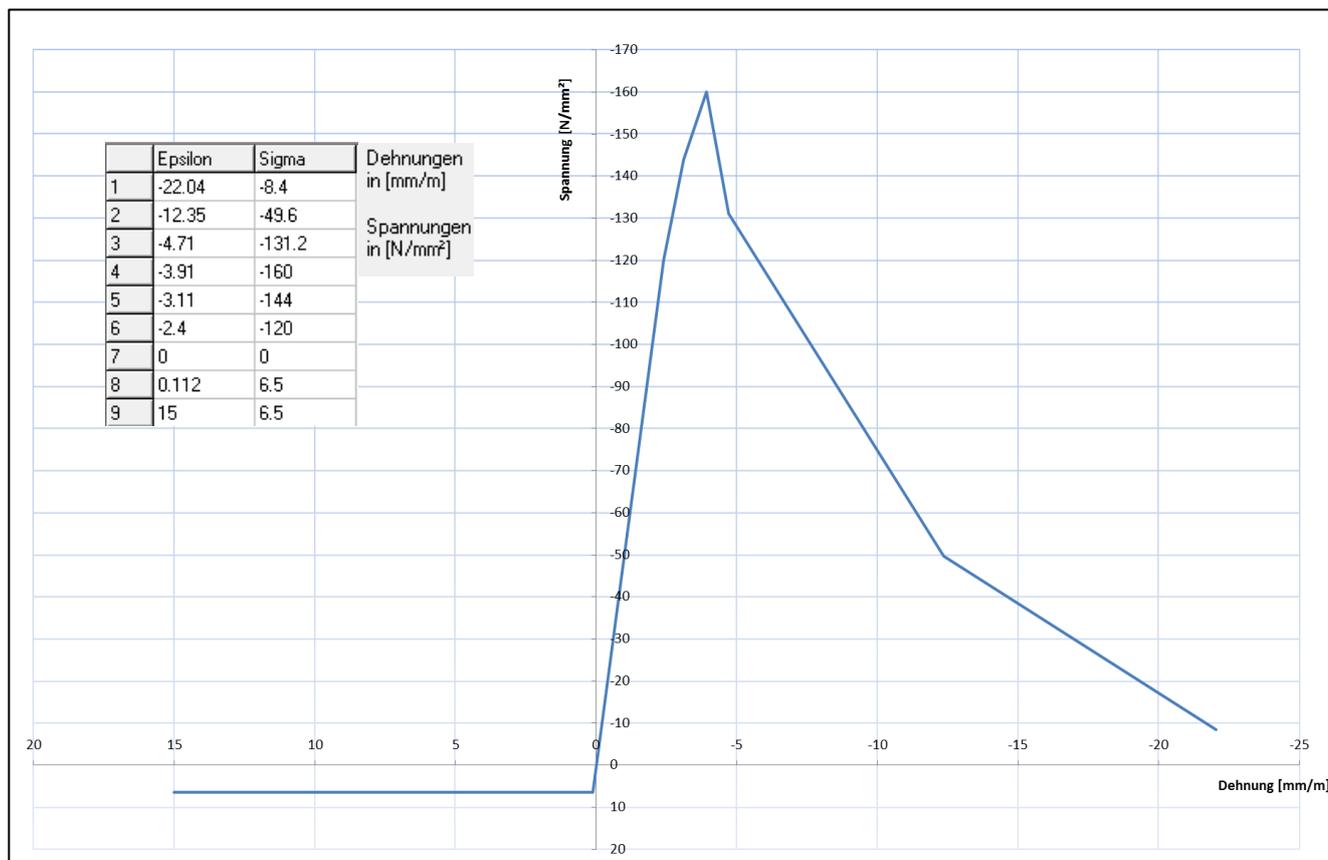


Abbildung 62 - Arbeitslinie UHPC mit Stahlfasern

Für die Ermittlungen der zweiaxialen M-N-Interaktionen wurde im Zugebereich eine Vereinfachung getroffen. Da zum Zeitpunkt der Verfassung dieser Arbeit wenig über die Zugarbeitslinie des verwendeten Betons bekannt ist, und da ein dünner Querschnitt vorliegt, wird für die weiteren Berechnungen vereinfachend eine elastisch ideal-plastische Zugarbeitslinie angenommen.

Das Material weist dank den Stahlfasern im Druckbereich kein sprödes Materieverhalten auf. Daraus folgt die absteigende Arbeitslinie nach Erreichen der maximalen Druckfestigkeit.

Aus diesem mechanischen Verhalten des verwendeten UHPC ergibt sich folgende M-N-Interaktionskurve (Abbildung 63). Diese Interaktionskurve wurde mittels der Software INCA2 (Version 2.80, 2011) erstellt. Mit Hilfe der Arbeitslinie wird durch Iteration aller möglichen Grenzdehnungszustände die Bruchkurve erstellt.

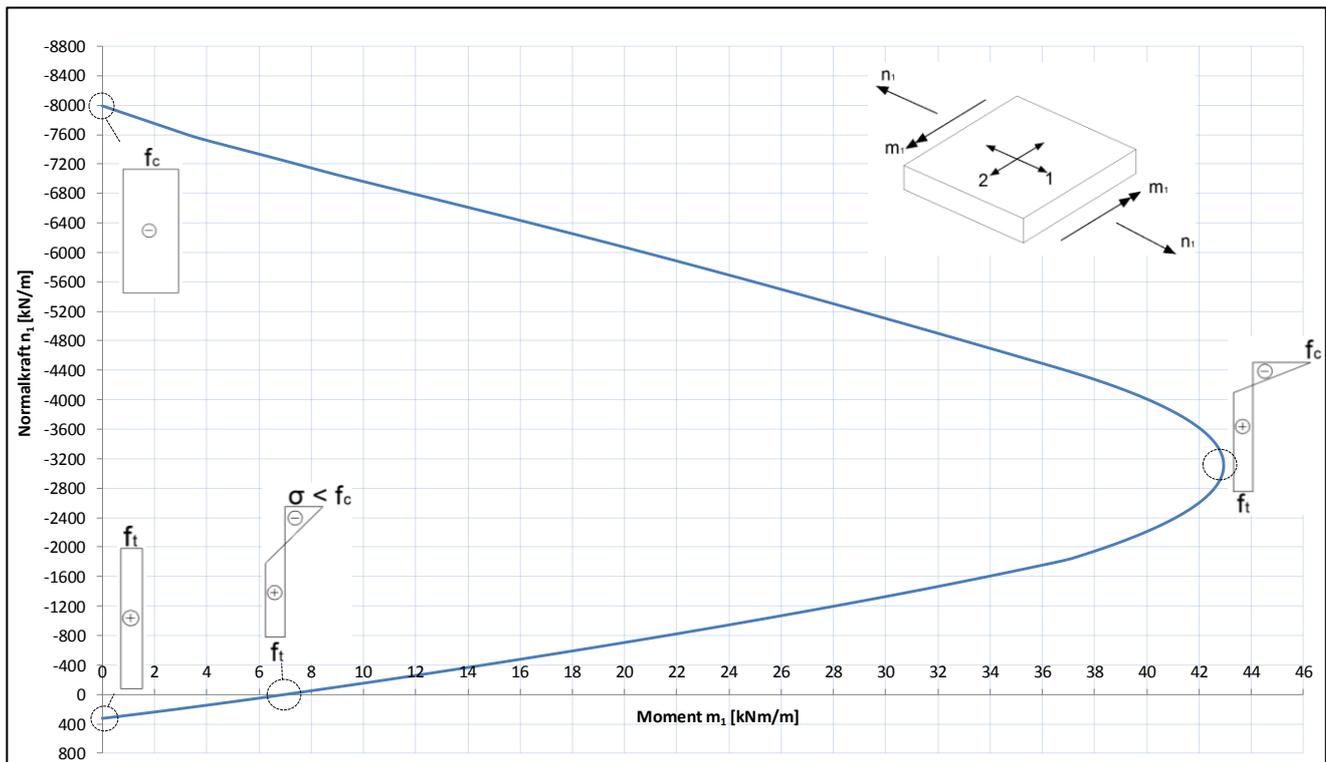


Abbildung 63 - Momenten-Normalkraft-Interaktion für UHPC mit Stahlfasern

Die M-N-Interaktionskurve (Bruchkurve) beschreibt nun bei welcher Momenten-Normalkraft-Kombination bei uniaxialer Beanspruchung es zu einem Versagen (Bruch) des Querschnittes kommt. Die Ermittlung erfolgt durch Betrachtung aller maximal möglichen Dehnungszustände (bzw. Spannungszustände) des Querschnittes. In der oberen Hälfte der Bruchkurve ist die Dehnung am oberen Rand des Querschnitts maximal, in der unteren Hälfte erfährt der untere Rand die maximale Dehnung. Beim Momentenmaximum ist der sogenannte „Balanced Point“ (unterer und oberer Rand des Querschnitts sind maximal gestaucht bzw. gedehnt).

Der betrachtete Querschnitt besitzt die Abmaße 0,05 m x 1,0 m. Die für die Ermittlung der Kurve gewählten Grenzdehnungen sind auf

- Druckseite: $\epsilon_{c,gr} = -3,91 \text{ ‰}$
- Zugseite: $\epsilon_{t,gr} = 5,0 \text{ ‰}$... so gewählt, dass die reine Momenten Tragfähigkeit (bei $N = 0$) mit den Versuchswerten ($M = 6,8 \text{ kNm/m}$) übereinstimmt [14]

Die in Abbildung 63 gezeigte M-N-Interaktion berücksichtigt die einaxiale Festigkeit, das heißt dass die Belastung in der zweiten Achse in diesem Fall Null ist. Im folgenden Kapitel wird eine zweiaxiale Momenten-Normalkraft-Interaktion ermittelt. Dazu wird die in Abbildung 61 gezeigte Zweiaxiale Festigkeit herangezogen.

Es wurde versucht, das gesamte Versagensverhalten in einem Diagramm unterzubringen, allerdings führte dies zu keinem sinnvollen Ergebnis, da die Darstellung

eines Diagramms mit 4 verschiedenen Achsen nicht möglich ist. Daher wurde unterteilt in Normalkraft- bzw. Momentenbeanspruchung in zweiter Achse.

5.5.1 m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion

Im ersten Schritt wird in der Achse 2 eine reine Normalkraft angebracht. Diese Normalkraft wird schrittweise gesteigert. Aus diesen schrittweisen Belastungen folgen konstante Spannungsverläufe im gesamten Querschnitt. Damit werden nun die Festigkeiten in der 1-Achse für die jeweilige Spannung mittels des in Abbildung 61 gezeigten Diagrammes ermittelt. Mit diesen Festigkeiten kann nun die Arbeitslinie in Abbildung 62 skaliert werden, und somit kann eine, der Querbeanspruchung n_2 korrespondierende M-N-Interaktionskurve erstellt werden.

Die Normalkraft in Achse 2 wird im Bereich -9600 kN bis 550 kN stufenweise gesteigert. Die stufenweise Steigerung erfolgt im Druckbereich in 24 gleichgroßen Schritten (von 0 kN bis -9600 kN) und im Zugbereich in 6 Schritten (von 0 kN bis +500 kN).

Hier wird beispielhaft der Vorgang für die Ermittlung einer Interaktionskurve anhand einer angebrachten Normalkraft in Achse 2 von -4000kN gezeigt.

Infolge der angebrachten Drucknormalkraft -4000kN beträgt die Spannung 80 N/mm² im Querschnitt in der Achse 2

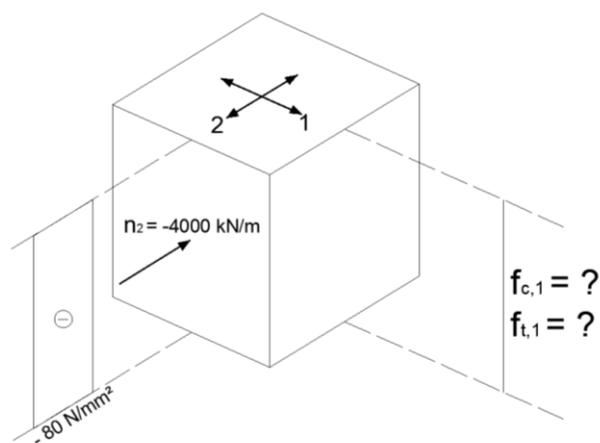


Abbildung 64 – Spannungszustand infolge $n_2 = -4000$ kN/m

Aus dem Zweiaxialen-Festigkeitsdiagramm lässt sich die erreichbare Festigkeit in Achse 1 ermitteln:

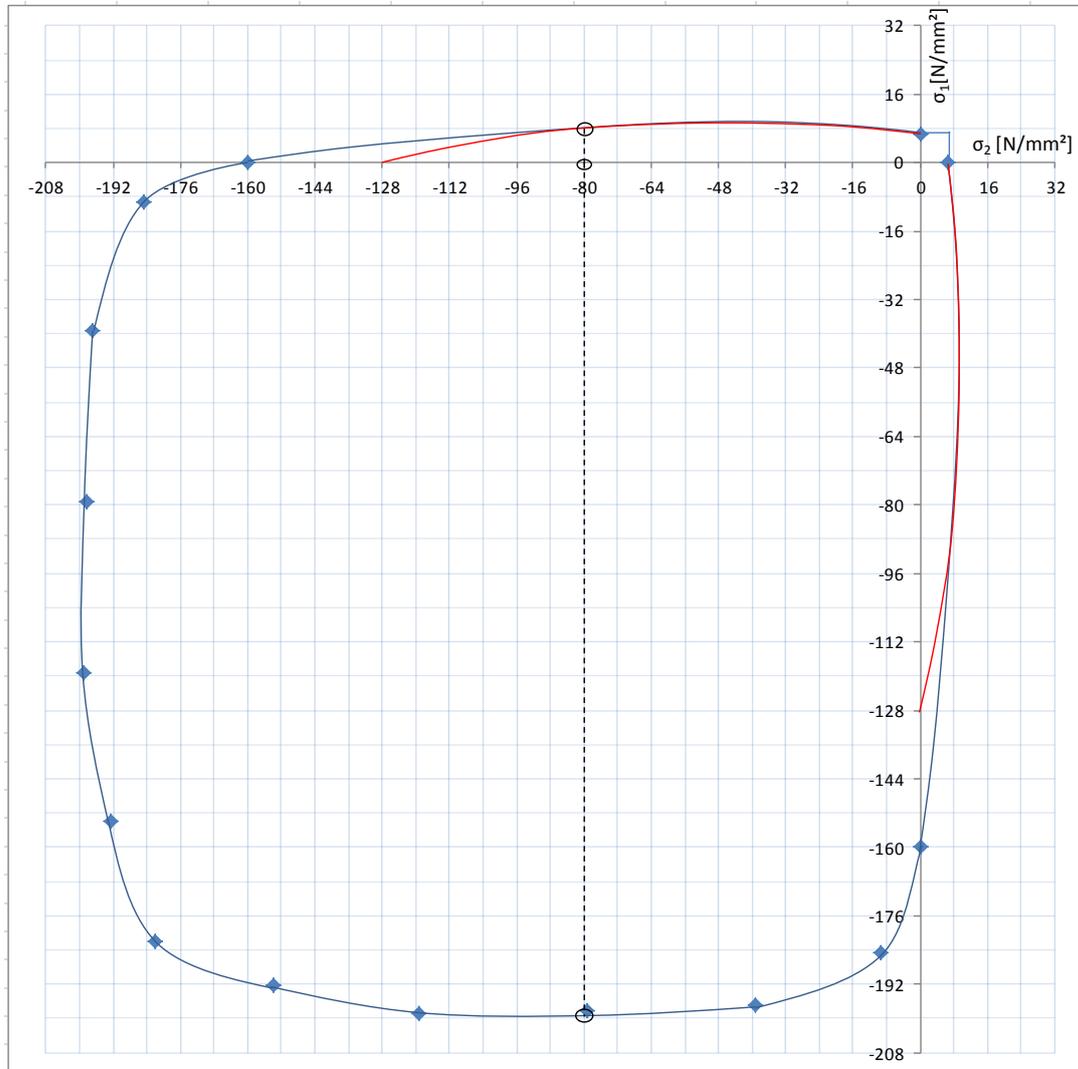


Abbildung 65 - Zweiaxiale Festigkeit bei 80 N/mm²

Für 80 N/mm² ergeben sich folgende Festigkeiten

Für Druck: -198 N/mm²

Für Zug: 8,5 N/mm²

Nach diesen Festigkeiten wird die Arbeitslinie aus Abbildung 62 skaliert. Daraus ergibt sich folgende neue Arbeitslinie:

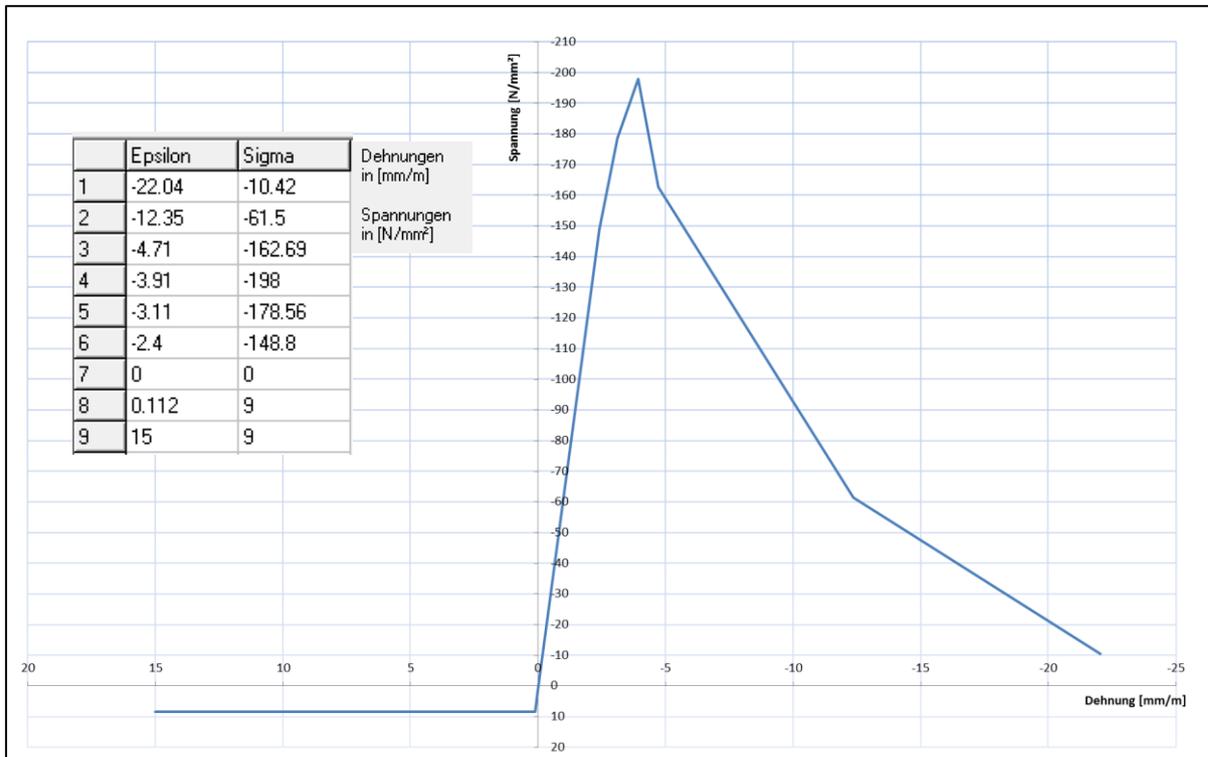


Abbildung 66 - Modifizierte Arbeitslinie für zweiachiale Festigkeit

Beim Skalieren werden die ursprünglichen Dehnungen der Einfachheit wegen beibehalten. Die damit verbundene Steifigkeitsänderung hat auf die Bestimmung von bruchzuständen kaum Einfluss.

Mit Hilfe der Software INCA 2 kann daraus eine Momenten-Normalkraft-Interaktion errechnet werden:

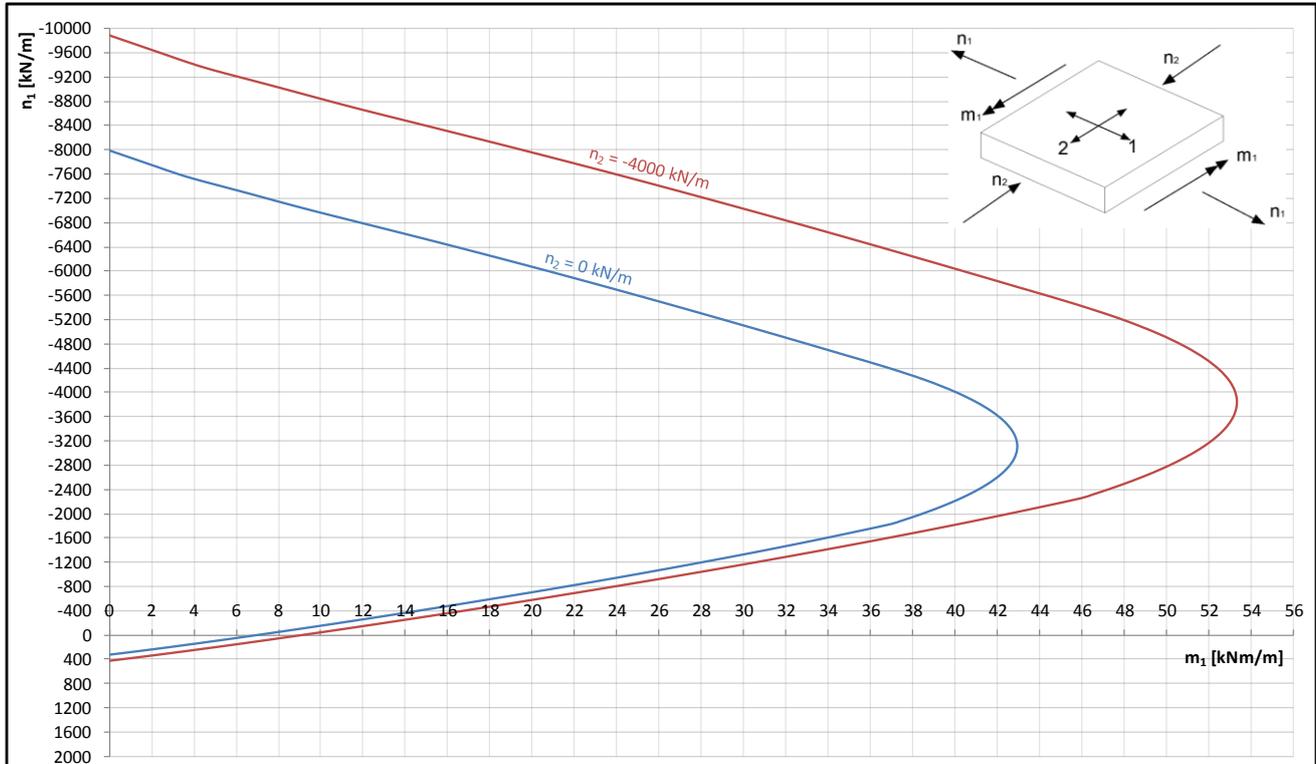


Abbildung 67 – m_1 - n_1 -Interaktion infolge modifizierter Arbeitslinie für $n_2 = -4000 \text{ kN/m}$

Nachdem der Vorgang für alle Stufen ($n_2 = +550 - -9600 \text{ kN/m}$) erfolgte, ergibt sich folgendes „ m_1 - n_1 - n_2 -Interaktionsdiagramm“. Aus Darstellungsgründen wird das 3-dimensionale Diagramm in mehreren Abbildungen aus verschiedenen Ansichten dargestellt, um ein verständliches Bild zu vermitteln.

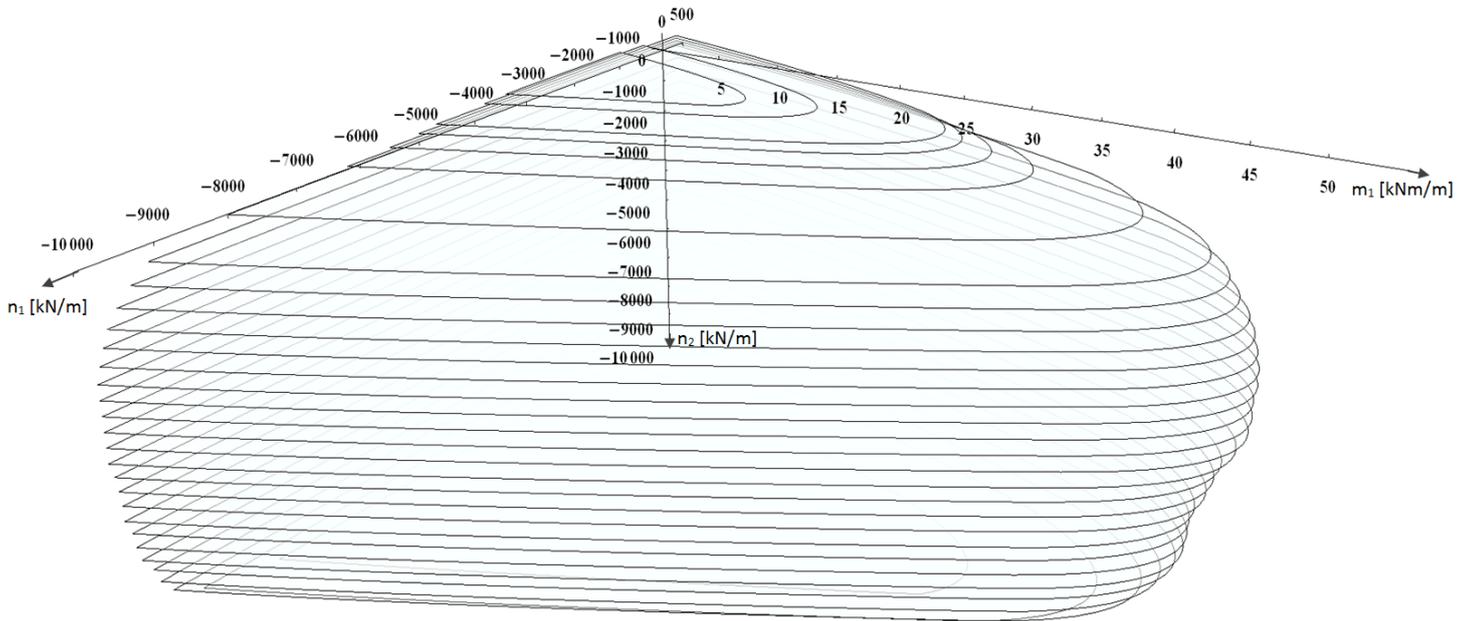


Abbildung 68 – Isometrische Ansicht der m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion

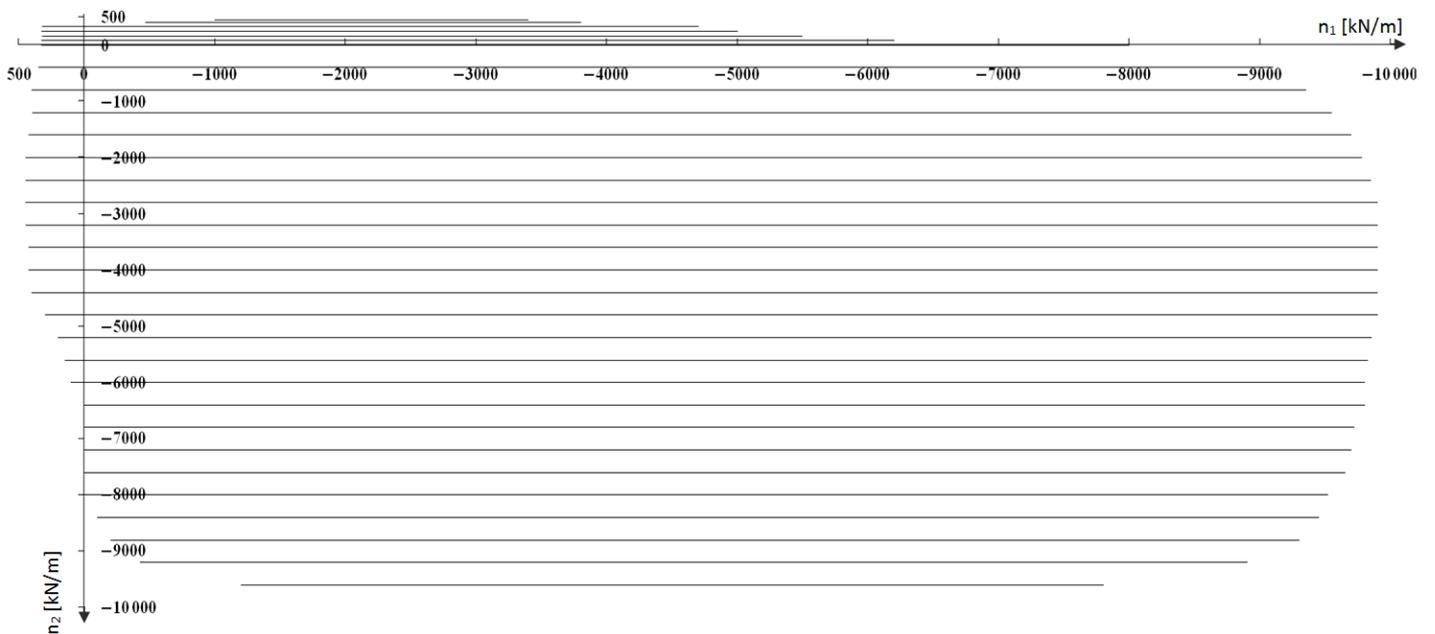


Abbildung 69 – Ansicht auf n_1 - n_2 -Ebene der m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion

Ansicht auf m_1 - n_1 -Ebene nur negative n_2 (Druckkräfte in zweiter Achse):

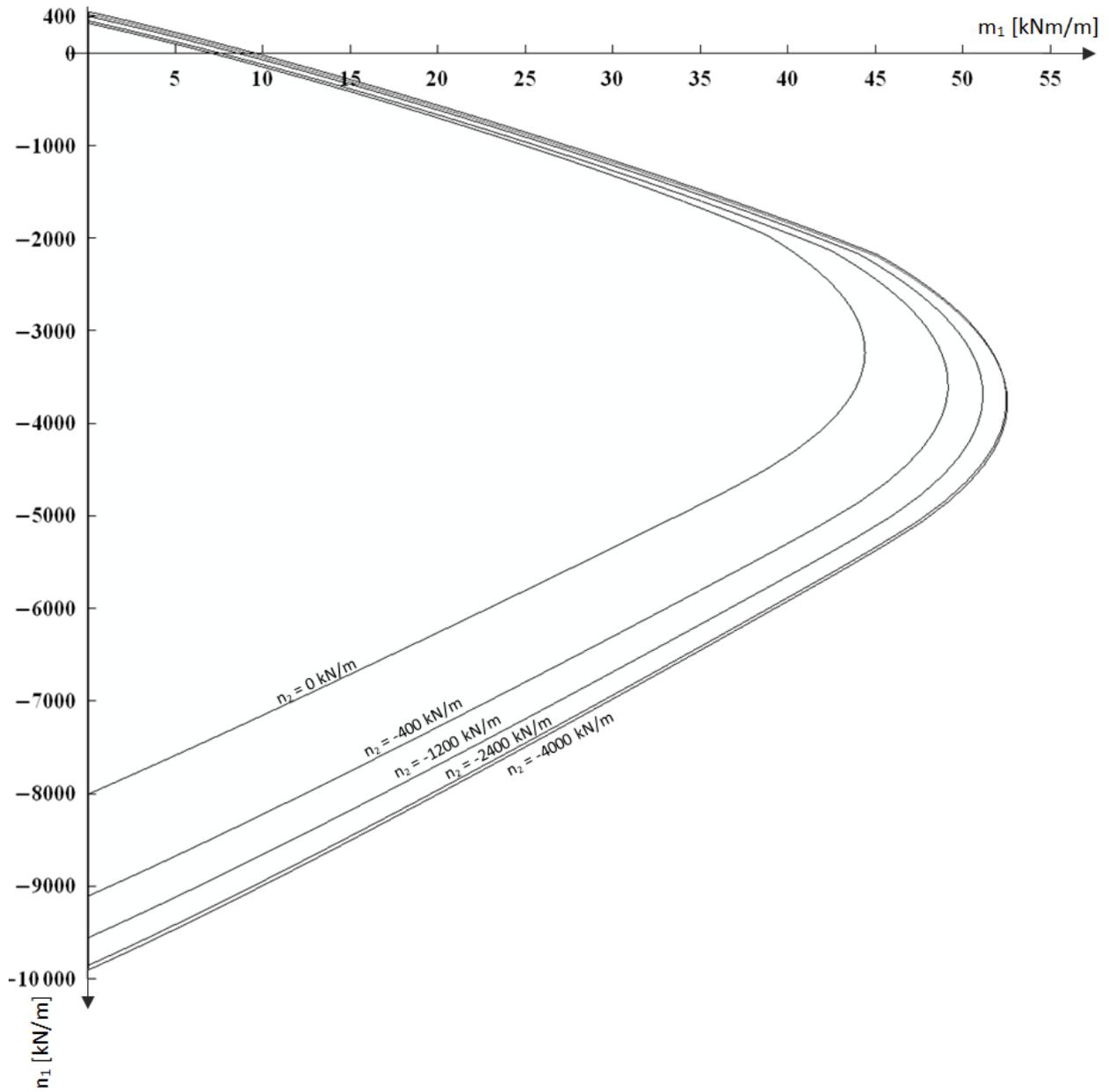


Abbildung 70 - Ansicht auf m_1 - n_1 -Ebene der m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion für Druckkräfte in Achse 2 ($n_2 < 0$)

Ansicht auf m_1 - n_1 -Ebene nur positive n_2 (Zugkräfte in zweiter Achse):

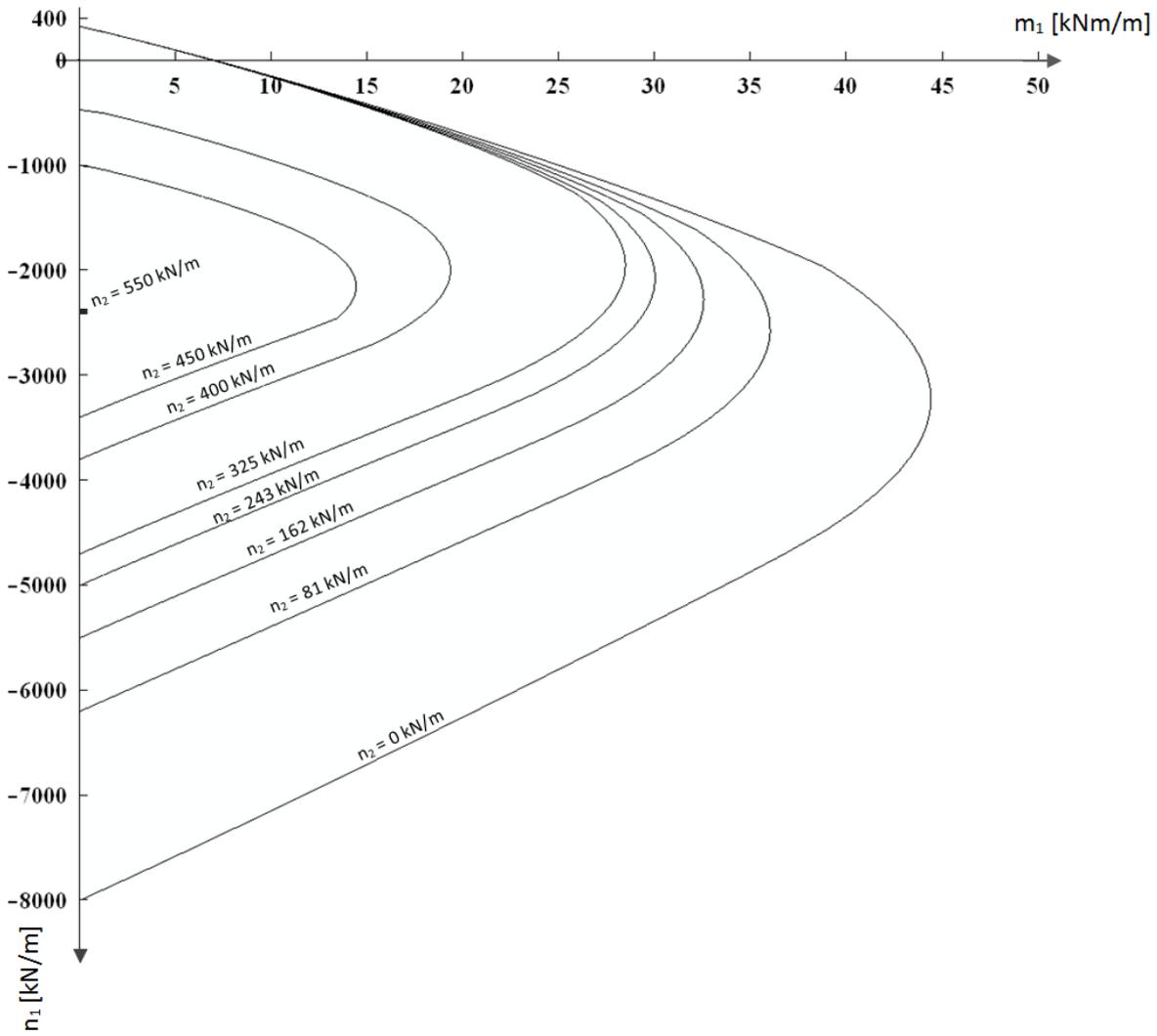
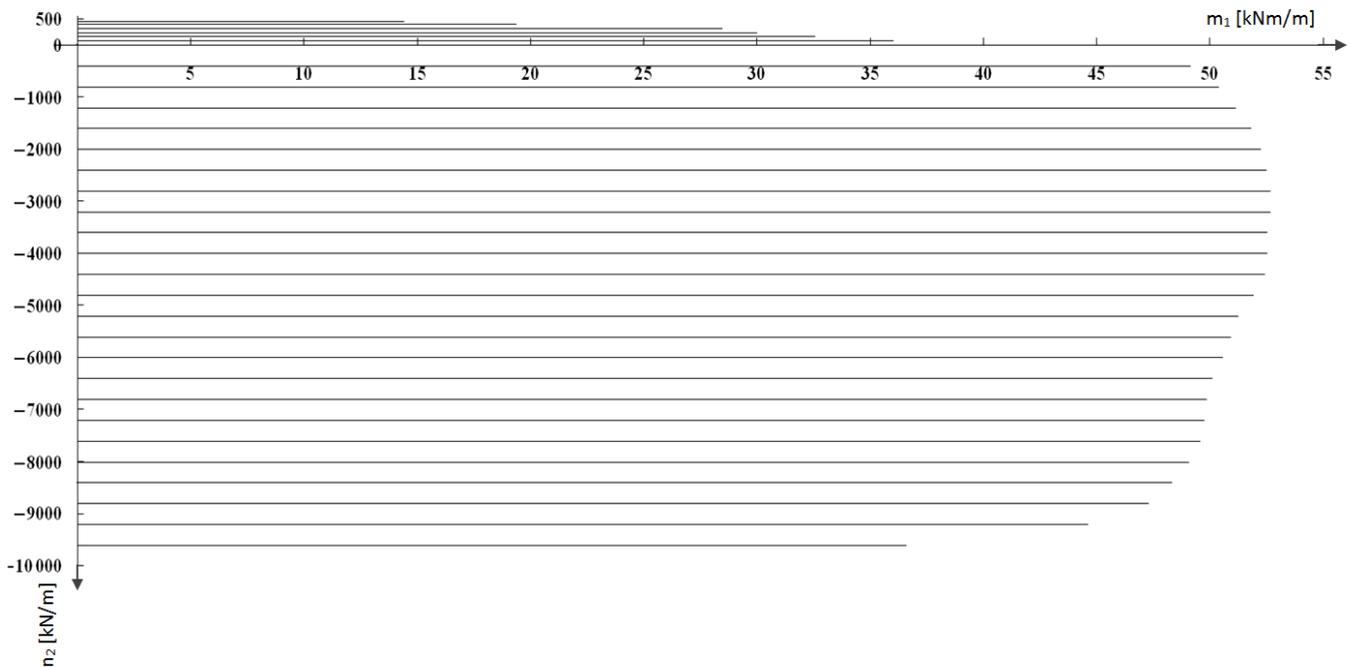


Abbildung 71 - Ansicht auf m_1 - n_1 -Ebene der m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion für Zugkräfte in Achse 2 ($n_2 > 0$)

Ansicht auf m_1 - n_2 -Ebene

 Abbildung 72 – Ansicht auf m_1 - n_2 -Ebene der m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion

Wie in Abbildung 69 erkennbar ist, bildet die Kontur der Kurven bei Betrachtung auf die n_1 - n_2 -Ebene (bei $M_1 = 0$ kNm) erwartungsgemäß den Verlauf der zweiaxialen Festigkeit (Abbildung 61). Daraus folgt, dass jeder Schnitt durch eine n_1 - n_2 -Ebene die zweiaxiale Festigkeit für die jeweiligen Momentenbelastung repräsentiert.

Im Anhang befinden sich alle M-N-Interaktionskurven detaillierter und getrennt dargestellt.

5.5.2 m_1 - n_1 - m_2 -Interaktion

Wie bereits mit der Normalkraft, wird auch ein Moment in Hauptrichtung 2 schrittweise aufgebracht und mit Hilfe der zwei axialen Bruchfestigkeit werden die Festigkeiten in Hauptrichtung 1 ermittelt. Daraus folgt dann eine neue Arbeitslinie, woraus die entsprechende M-N-Bruchkurve ermittelt werden kann.

Dieser Vorgang soll wieder anhand eines Beispiels für $m_2 = 2 \text{ kNm/m}$ gezeigt werden:

Zunächst wird in der zweiten Achse das Moment $m_2 = 2 \text{ kNm/m}$ aufgebracht und der Spannungszustand daraus ermittelt:

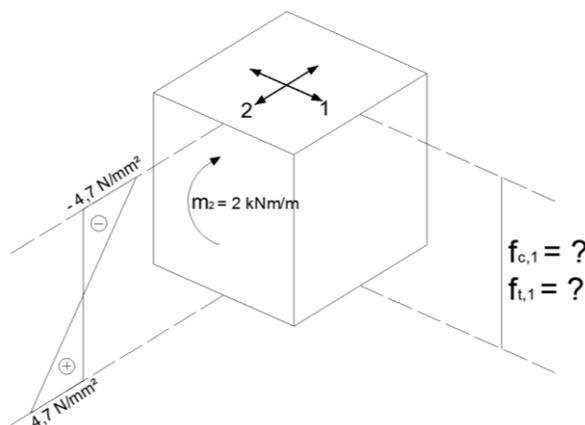


Abbildung 73 - Spannungszustand infolge $m_2 = 2 \text{ kNm/m}$

Da der Spannungsverlauf unter einer Momentenbeanspruchung nicht konstant verläuft, wird der Querschnitt in Schichten eingeteilt. In jeder Schicht wird mittels des zwei axialen Festigkeitsdiagramms aus Abbildung 61 die Druck- und Zugfestigkeit in Achse 1 ermittelt. Somit erhält man einen Festigkeitsverlauf in Achse 1:

Spannungsverlauf in Achse 2 \longrightarrow Festigkeitsverlauf in Achse 1

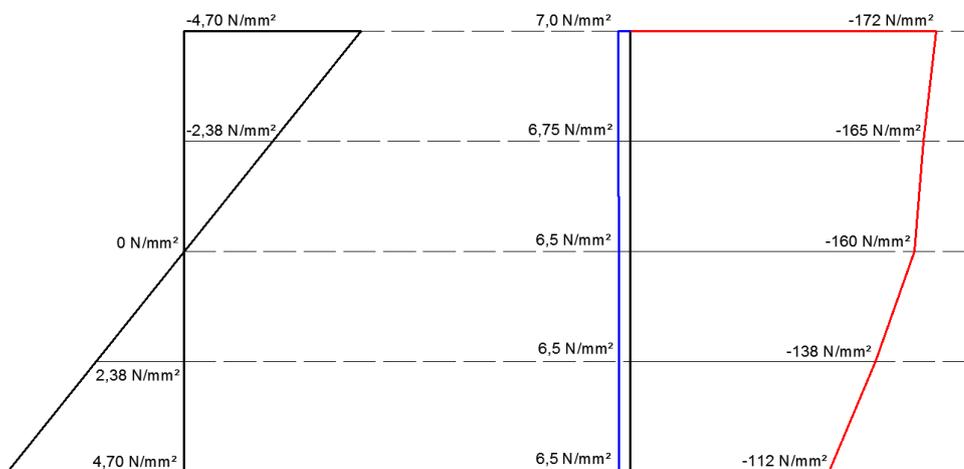


Abbildung 74 – Spannungs- und Festigkeitsverlauf für $m_2 = 2 \text{ kNm/m}$

Damit wird wiederum die Arbeitslinie der einzelnen Schichten skaliert und anschließend mittels INCA 2 die M-N-Interaktion berechnet.

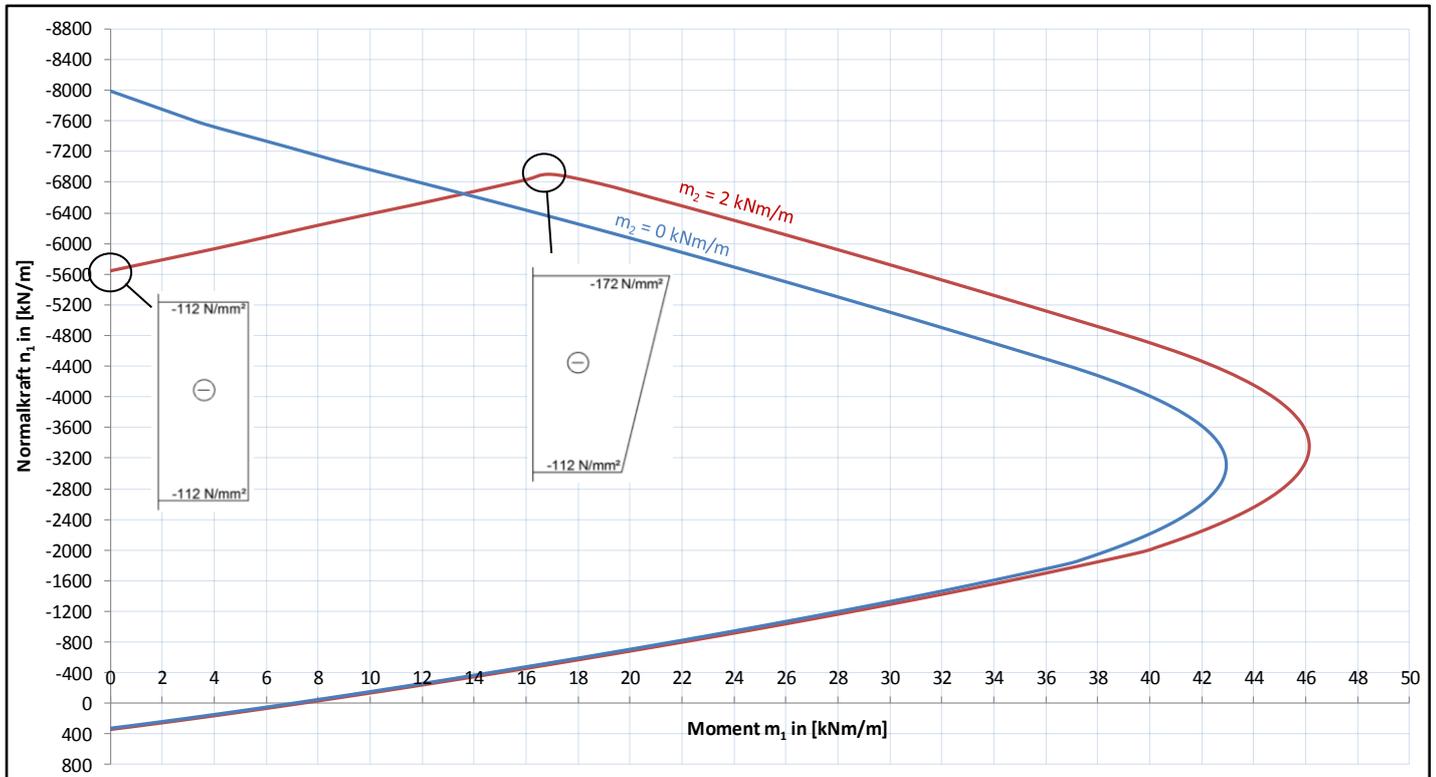


Abbildung 75 - m_1 - n_1 -Interaktion infolge modifizierter Arbeitslinie für $m_2 = -4000$ kN/m

Auffallend ist der geknickte Verlauf im oberen Druckbereich. Da der Festigkeitsverlauf in Achse 1 (Abbildung 74) in der untersten Schicht die geringste Festigkeit aufweist, ist diese für eine reine Normalkraftbeanspruchung maßgebend. Wenn nun eine Momentenbeanspruchung hinzukommt, kann, aufgrund der größeren Festigkeit in der obersten Schicht, die Normalkraft dementsprechend erhöht werden. Dies geht solange bis auch die oberste Schicht voll ausgelastet ist. Danach muss die Normalkraft abnehmen, um zusätzliches Moment aufnehmen zu können.

Dieser Vorgang wird für alle Stufen durchgeführt ($m_2 = 0 - 9$ kNm/m). Das Ergebnis ist ein „ m_1 - n_1 - m_2 -Interaktionsdiagramm“. Dieses wird zur besseren Übersicht wieder in mehreren Abbildungen dargestellt.

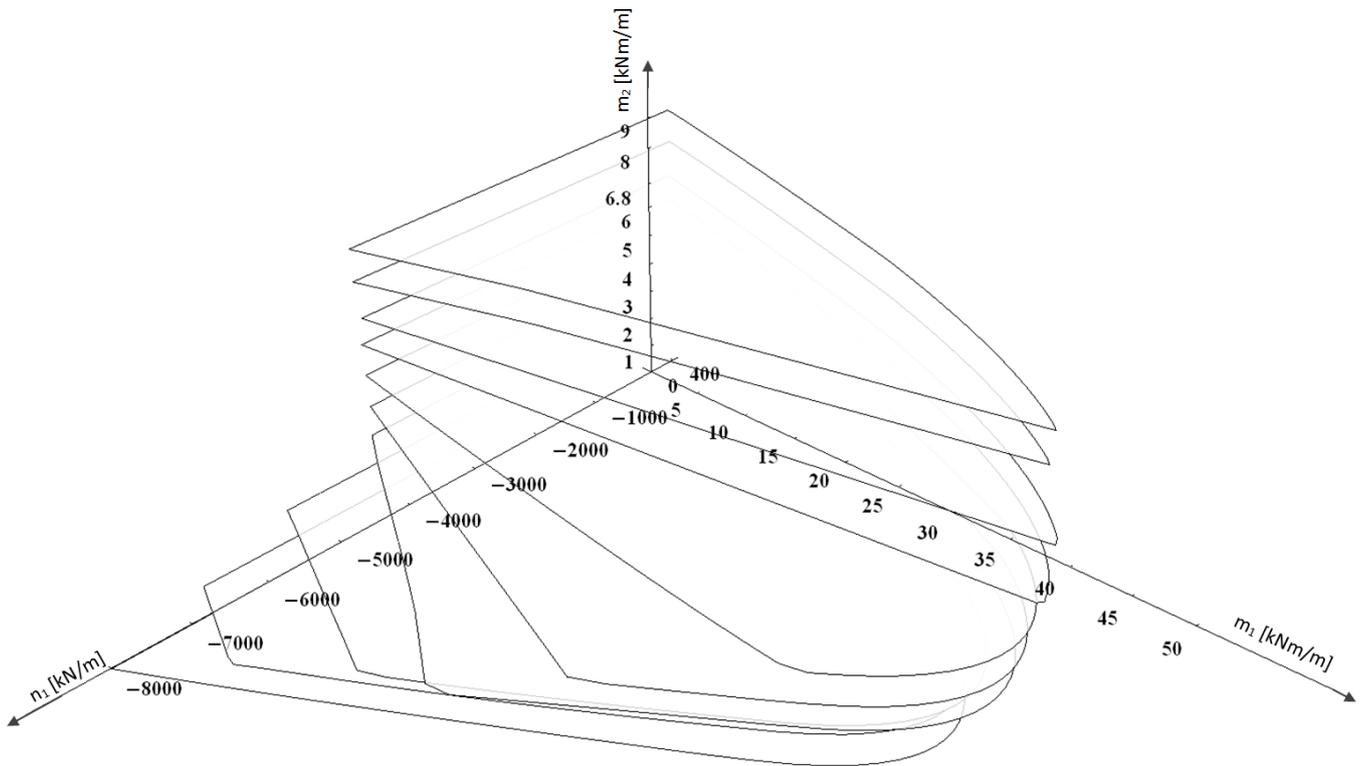


Abbildung 76 – Isometrische Ansicht auf m_1 - n_1 - m_2 -Interaktion

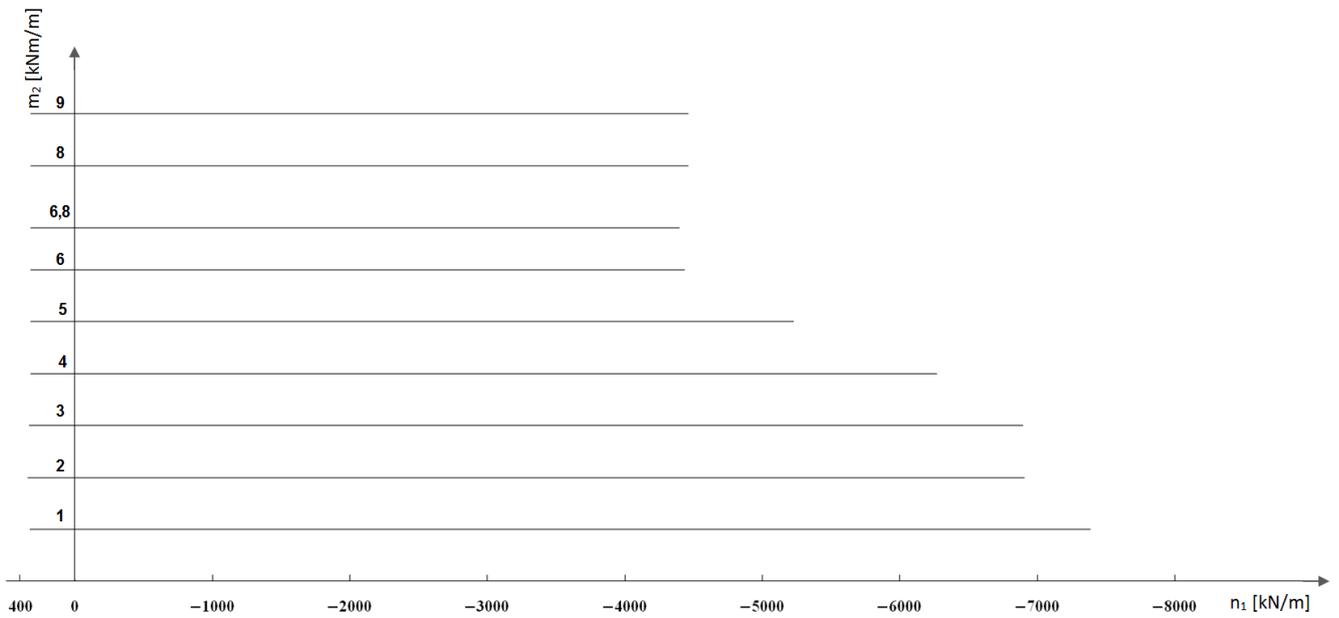


Abbildung 77 – Ansicht auf n_1 - m_2 -Ebene der m_1 - n_1 - m_2 -Interaktion

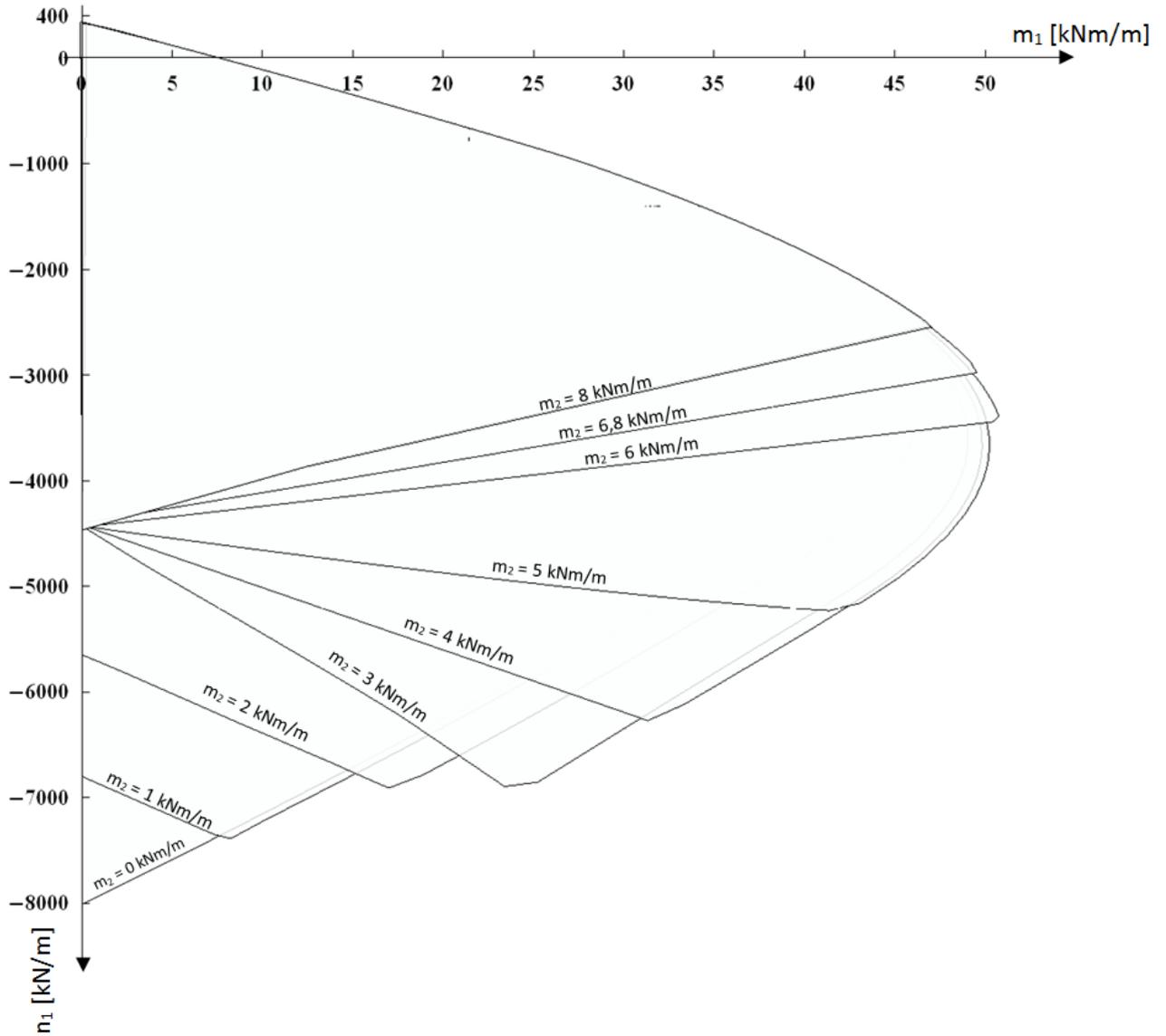


Abbildung 78 - Ansicht auf n_1 - m_1 -Ebene der m_1 - n_1 - m_2 -Interaktion

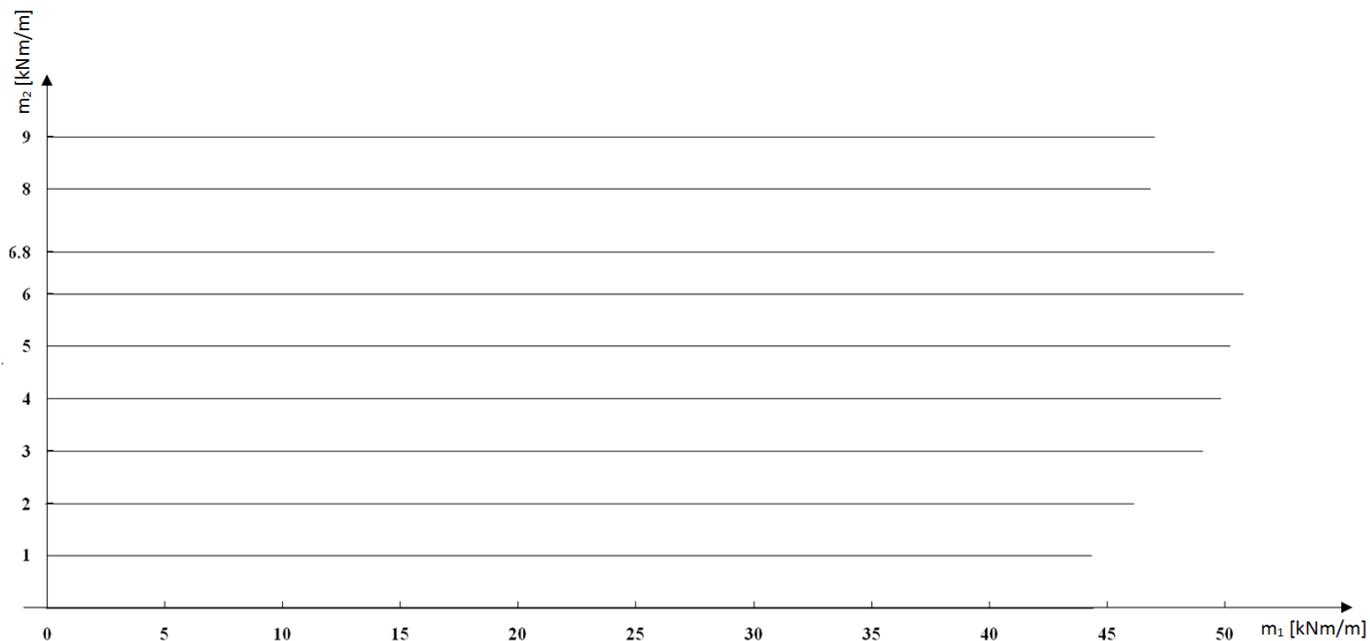


Abbildung 79 – Ansicht auf m_1 - m_2 -Ebene der m_1 - n_1 - m_2 -Interaktion

Im Anhang befinden sich alle M-N-Interaktionskurven detaillierter und getrennt dargestellt.

Bei erhöhtem m_2 (ab 6,8 kNm/m) ist die einaxiale Momententragfähigkeit überschritten. Ein m_2 über diesen Wert führt zu einer großen Risshöhe (Querschnitt steht größtenteils unter Zug → Zweiaxiale Festigkeitswerte des gerissenen Querschnittes überwiegen). Daher sind die Kurven über $m_2 = 6,8$ kNm/m sehr ähnlich (siehe Vergleich der Festigkeitsverläufe in Abbildung 80).

Für $m_2 = 6,8$ kNm/m:
 $m_2 = 8$ kNm/m:

Spannungsverlauf in Achse 2 → Festigkeitsverlauf in Achse 1

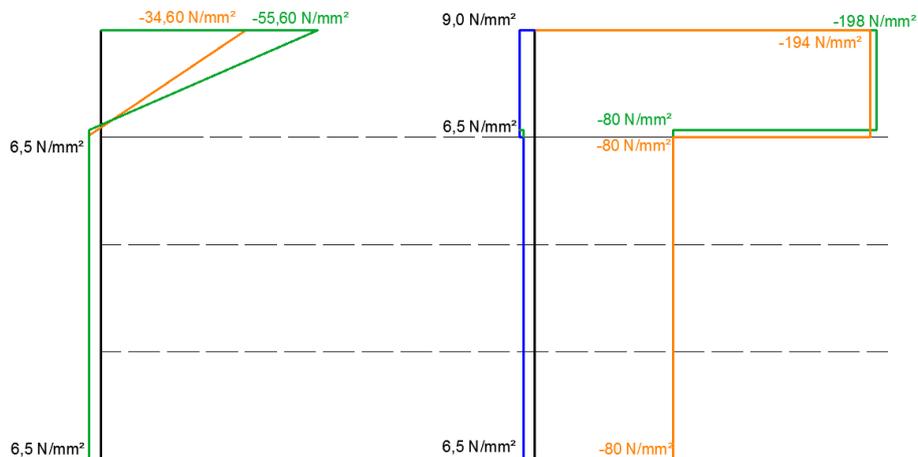


Abbildung 80 - Vergleich Festigkeitsverläufe in zweiter Achse für 6,8 kNm/m und 8,0 kNm/m

6 Versuchskonzept Großversuch

6.1 Formfindungsschritte

Wie schon erwähnt soll der Versuchsaufbau aus einem rotationssymmetrischen Körper bestehen. Wünschenswert ist es, dass die zu messenden bzw. die gewünschten Schnittkräfte nicht im Randbereich des Versuchskörpers auftreten. Dies hat den Hintergrund dass am Randbereich die Lasteinleitung bzw. die Lagerung erfolgt, und somit dieser störungsanfällig ist. Ein weiteres wünschenswertes Kriterium ist, dass die Schnittkraftkombination sowohl in Segmentmitte als auch in einer Segmentfuge auftreten soll.

Bezüglich der Lasteinleitung und Lagerung war es das Ziel, dass diese möglichst in Richtung der Schalenhaut erfolgt. Durch solch eine Anordnung treten im Randbereich der Schalenkonstruktion geringe bis keine Momente auf.

Es gelten folgende Randbedingungen für den Versuchsaufbau:

- Die Lasteinleitung und Lagerung sollen senkrecht erfolgen.
- Der maximale Durchmesser ist auf 2,90 m begrenzt (gegeben durch die Laborausrüstung am LKI)
- Der Versuchskörper soll aus Fertigteilstegmenten zusammengesetzt werden, welche mit dem im Projekt „UHPC-Schalen“ entwickelten Schalungssystem („Pixeltisch“-Prototyp, [25]) hergestellt werden können.

6.2 Kritische Schnittkraftkombinationen im Wellendach

Die Schnittgrößen, welche zur Formgebung und schlussendlich zum Konzeptentwurf des Großversuchs herangezogen werden, sind aus dem FE-Modell der Wellendachform entnommen. Diese wurde vom Institut für Tragwerkslehre (ITE) der TU-Graz erstellt und dem Forschungsprojekt zur Verfügung gestellt. (siehe Kapitel 4.1). Für die Formfindung wird die Variante „Scheibenlagerung“ (Kapitel 4.2.1) betrachtet.

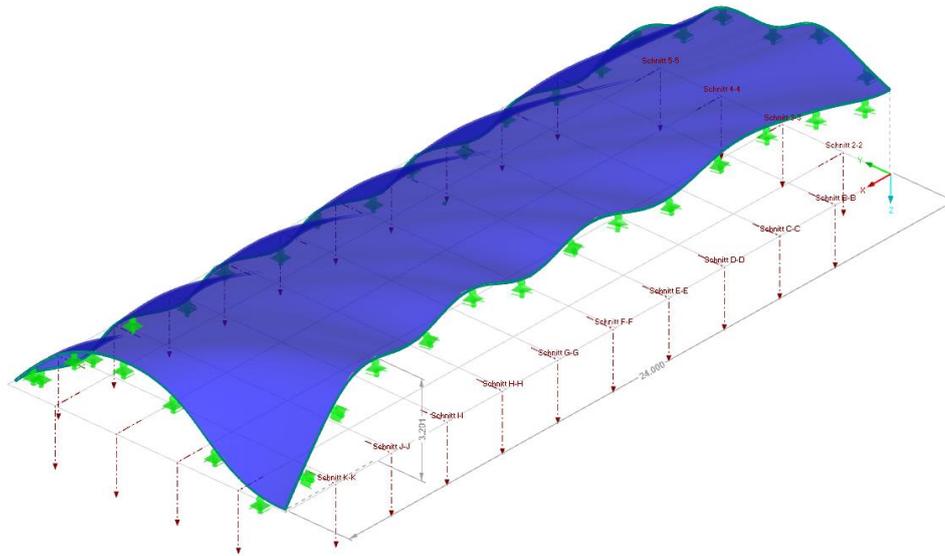


Abbildung 81 - FE-Modell Wellendach mit Schnittbezeichnung

Wie bereits erwähnt wurde das FE-Modell mittels des Statikprogramms RFEM 5 erstellt. Die folgenden statischen Berechnungen wurden auch damit durchgeführt.

Als maßgebenden Lastfall für die Ermittlung der Schnittkräfte wurde wie schon erwähnt eine Lastfallkombination mit Eigengewicht, Schnee und Wind herangezogen. Dabei wurde der Lastfall Schnee als führend aufgestellt:

Lastfallkombination: $1,35 \cdot \text{Eigengewicht} + 1,5 \cdot \text{Schneelast} + 0,75 \cdot \text{Windlast}$

In Abbildung 82 sind jene Bereiche farblich markiert, welche die Nachrisszugfestigkeit des verwendeten UHPCs von $6,5 \text{ N/mm}^2$ überschreiten.

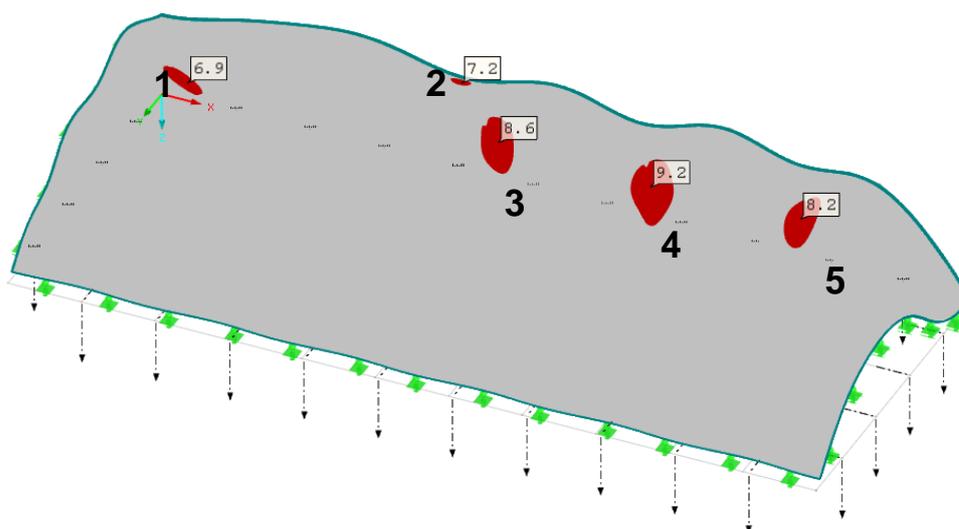


Abbildung 82 – Wellendach mit gekennzeichneten Bereichen, bei denen die Zugfestigkeit überschritten wird

An den markierten Stellen werden nun die Schnittkraftkombinationen herausgelesen. Diese werden in den entsprechenden M-N-Interaktionskurven eingetragen, woraus dann die Entscheidung für die maßgebende Schnittkraftkombination für den Versuchsaufbau getroffen werden kann. Anzumerken ist, dass die resultierenden Schnittkräfte aus der Lastfallkombination aus einem linearen Werkstoffgesetz folgen, da die in Abbildung 62 dargestellte Arbeitslinie nicht in das Statikprogramm RFEM implementiert werden kann. Dennoch können die Schnittkräfte als Anhaltspunkt, um den gewünschten Versuchszustand zu erreichen, verwendet werden.

Die folgende Tabelle zeigt die Schnittkraftkombinationen aus den gekennzeichneten Bereichen in Abbildung 82:

Bereich	1	2	3	4	5
Spannung σ_1 (an Schalenunterseite) [N/mm ²]	6,9	7,2	8,6	9,2	8,2
Spannung σ_2 (an Schalenunterseite) [N/mm ²]	-0,5	2,2	2,8	2,0	3,5
Moment m_1 [kNm/m]	2,69	2,39	0,88	0,87	2,31
Normalkraft n_1 [kN/m]	30,8	144,3	330,0	360,1	153,1
Moment m_2 [kNm/m]	0,73	0,97	0,53	0,22	1,40
Normalkraft n_2 [kN/m]	-122,8	-76,3	70,0	72,4	-90,2

Tabelle 3 - Spannungen und Schnittkräfte im Wellendach

Betrachtet man nun die Lage der Schnittkraftkombinationen der einzelnen Bereiche in den erstellten zwei axialen M-N-Interaktionskurven (Abbildung 83 und Abbildung 84), kann daraus eine Wahl getroffen werden, welche dieser Kombinationen für den Versuchsaufbau erstrebenswert ist.

Es ist anzumerken, dass in Abbildung 83 die M-N-Interaktionskurve für ein $n_2 = 0$ kN verwendet wurde. Eine Interaktion für $n_2 = -100$ kN würde sich zwar anbieten, allerdings sind die Interaktionskurven für $n_2 = 0$ kN und $n_2 = -100$ kN näherungsweise gleich, sodass die uniaxiale Interaktion verwendet werden kann.

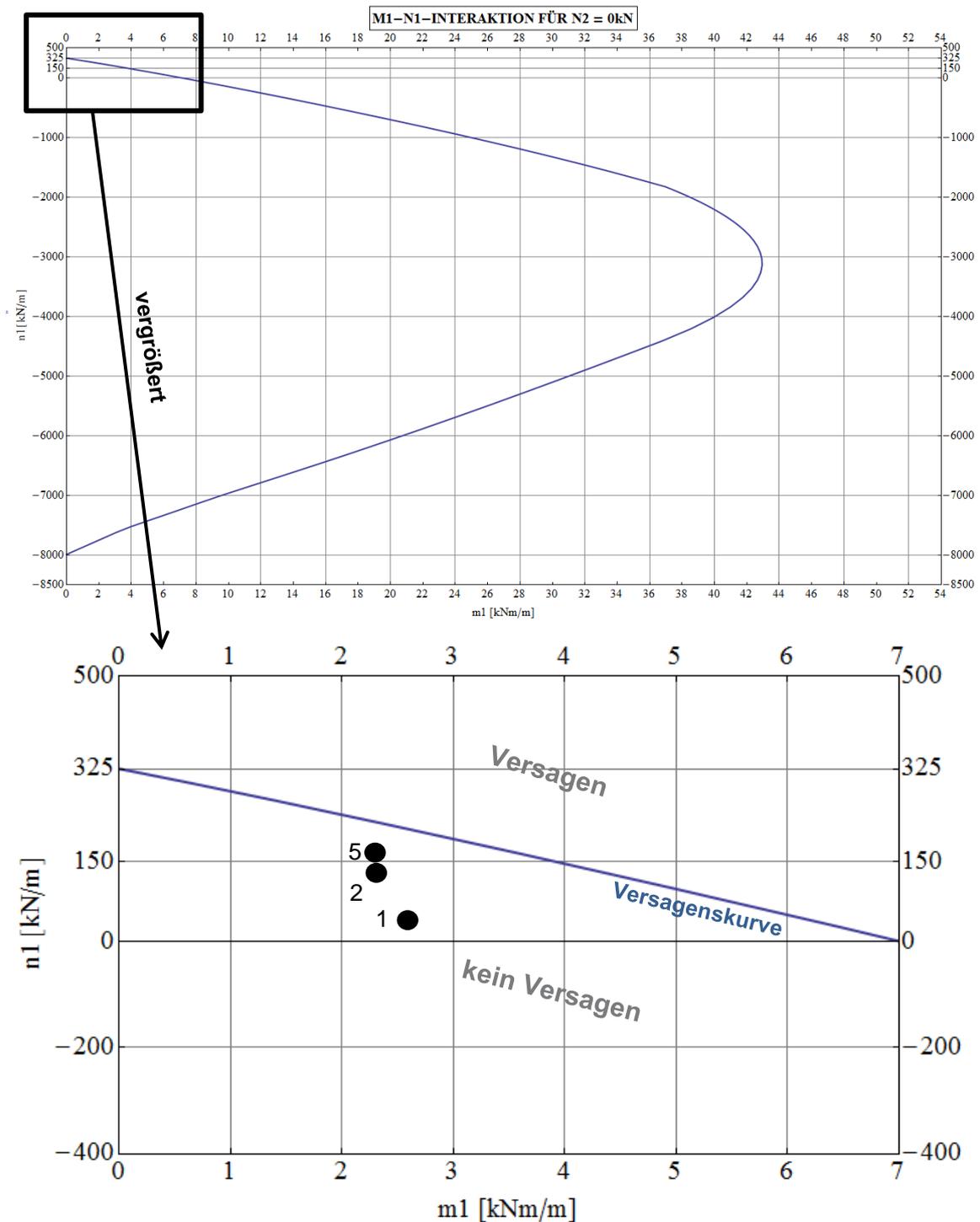


Abbildung 83 - Lage der kritischen Spannungszustände aus Wellendach im M-N-Interaktionsdiagramm (Zug-Druck-Kombination)

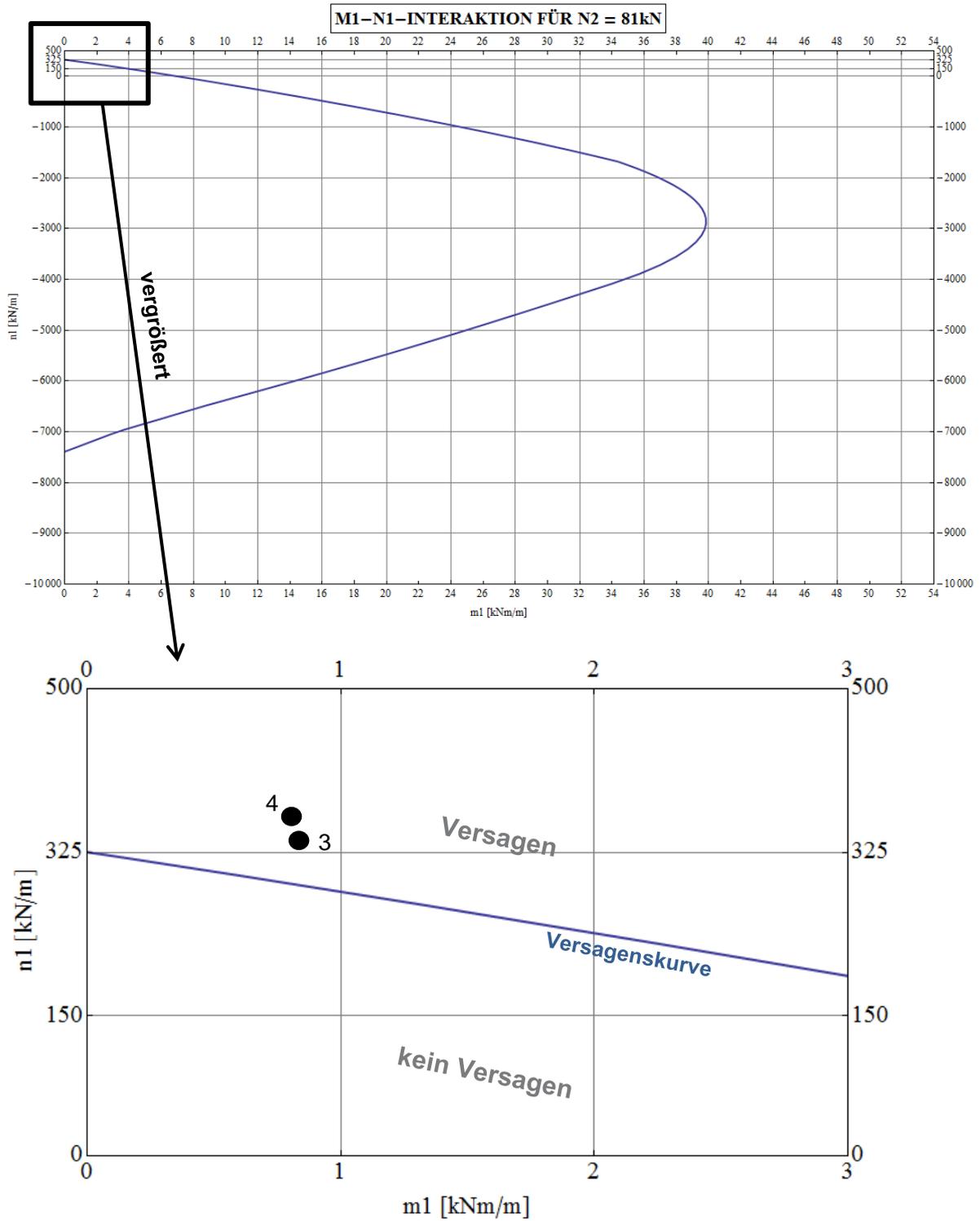


Abbildung 84 - Lager der kritischen Spannungszustände aus Wellendach im M-N-Interaktionsdiagramm (Zug-Zug-Kombination)

Interessant ist der Bereich 5, der mit seiner Druck-Zug-Kombination am nächsten zur Versagenskurve liegt. Besonderes Augenmerk ist auch auf Bereich 4 zu legen, da dieser einer Zug-Zug-Beanspruchung unterliegt. Bereich 3 erfährt zwar in zweiter Achse ein doppelt so großes Moment wie Bereich 4, allerdings ist dieses Moment so gering, dass der Unterschied vernachlässigt werden kann.

Im folgenden Kapitel erfolgt die Formfindung für zwei Versuchsaufbauten, bei der das Schnittkraftverhältnis von Bereich 5 bzw. Bereich 4 unter vordefinierter Lasteinwirkung erreicht werden soll.

6.2.1 Formfindung für Druck-Zug-Kombination (Bereich 5)

Wie in Tabelle 3 dargestellt, tritt im Bereich 5 eine Druck-Zug-Beanspruchung mit positiven Momenten in beiden Achsen auf. Dabei ist die Zugkraft ($n_1 = 153,1$ kN/m) um den Faktor 3,05 betragsmäßig höher als die Druckkraft ($n_2 = -90,2$). Das Moment in Hauptrichtung 1 ($m_1 = 2,31$ kNm/m) ist um den Faktor 1,86 höher als jenes in Hauptrichtung 2 ($m_2 = 1,40$ kNm/m).

Dort wo dieses Schnittkraftverhältnis auftritt soll auch die maximale Beanspruchung stattfinden. Dies bedeutet dass an keiner anderen Stelle vorher ein Versagen des Querschnittes auftreten soll. Diese Schnittkraftverhältnisse werden mittels einer rotationssymmetrischen Schalenkonstruktion rekonstruiert. Durch die Lagerung und Lasteinleitung in Membranrichtung werden hohe Biegemomente in den Randbereichen vermieden. Die Idee dahinter ist, eine notwendige Verstärkung aufgrund der Randstörungen zu vermeiden.

Somit sind die Randbedingungen für den Versuchsaufbau gegeben. Eine erste Variantenstudie (siehe Kapitel 3.2) kam auf folgende mögliche Form der Erzeugenden:

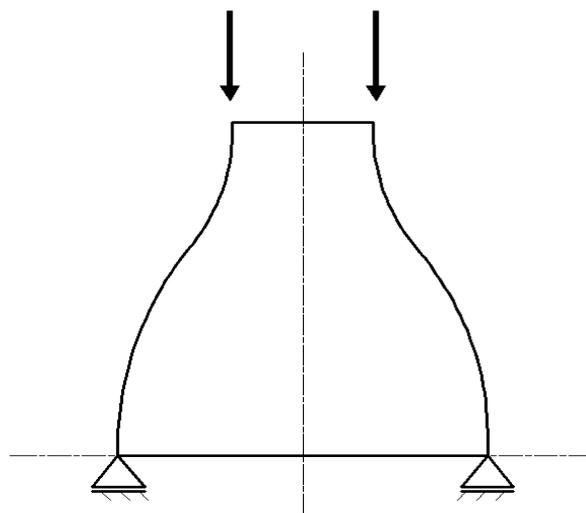


Abbildung 85 - Erster Entwurf für Zug-Druck-Versuchsaufbau laut Variantenstudie

Durch diesen Aufbau sind die Randstörungen kein Problem. Im unteren Bereich treten wie gefordert ein Zugkraft (Ringzug) sowie eine Druckkraft (Membrandruck) auf. Allerdings sind, wie schon im Kapitel der Variantenstudie erläutert, die Radien des Membranverlaufs zu gering um das gewünschte Moment im Querschnitt zu erzeugen. Dies wurde im nächsten Schritt berücksichtigt, welches zu folgender Geometrie führte.

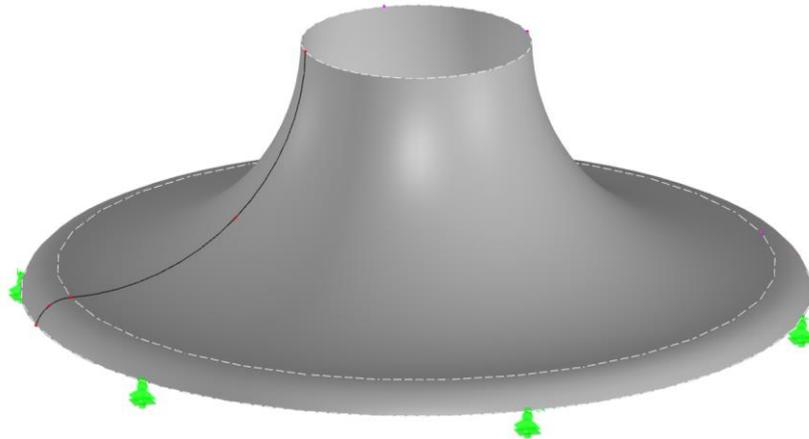


Abbildung 86 – Versuchskonzept „Druck - Zug“

Geometrie der Membranerzeugenden:

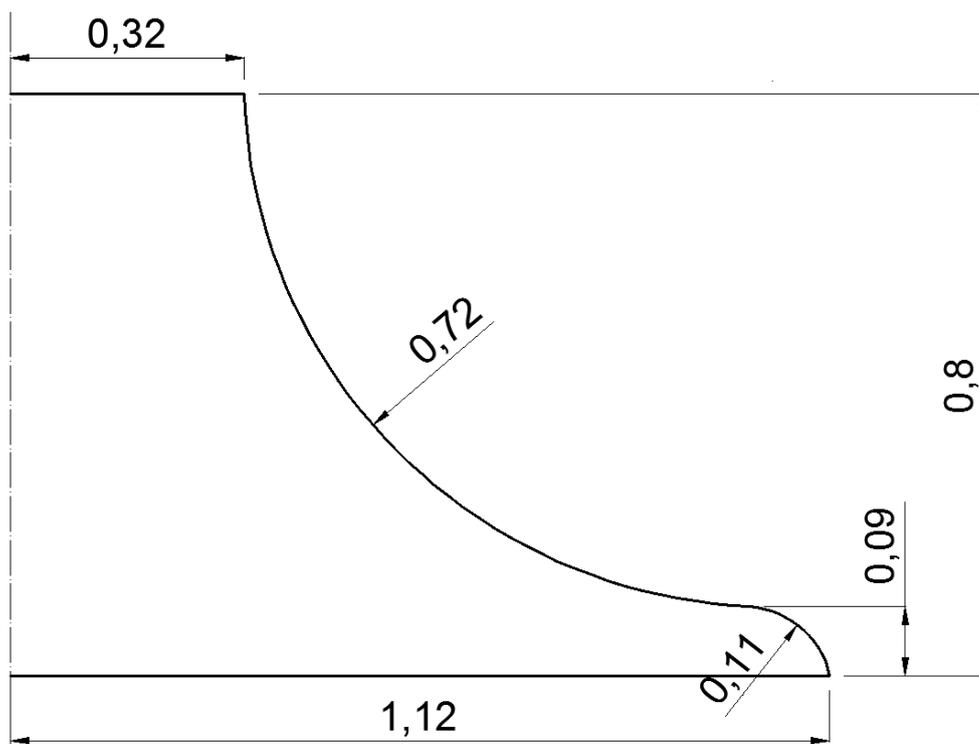


Abbildung 87 – Geometrie der Erzeugenden für „Druck - Zug“ Versuch (Maße in m)

Bei einer ringförmigen Streckenbelastung von 110 kN/m, welche an der oberen Öffnung angesetzt wird, entstehen folgende Schnittkräfte am System. Die Lagerung wurde mit einem Reibungskoeffizient 0,1 angesetzt (PTFE-Lager). Die Stelle mit der geforderten Schnittkraftkombination befindet sich bei der schwarzen Markierung:

Membrannormalkraft:

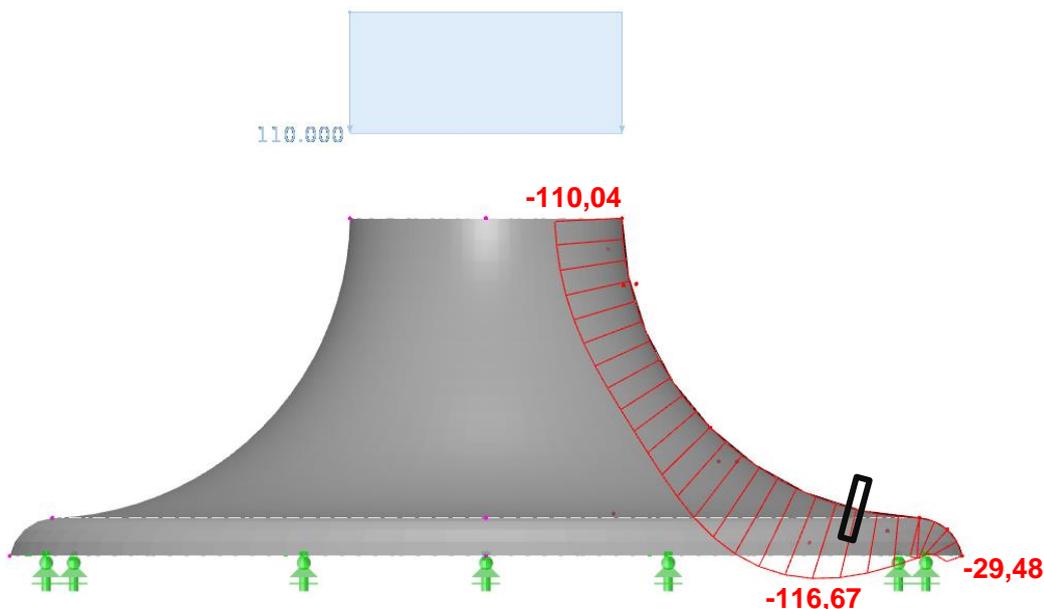


Abbildung 88 - Verlauf der Membrannormalkraft beim Versuchskonzept „Druck – Zug“ (Werte in kN/m)

Ringnormalkraft:

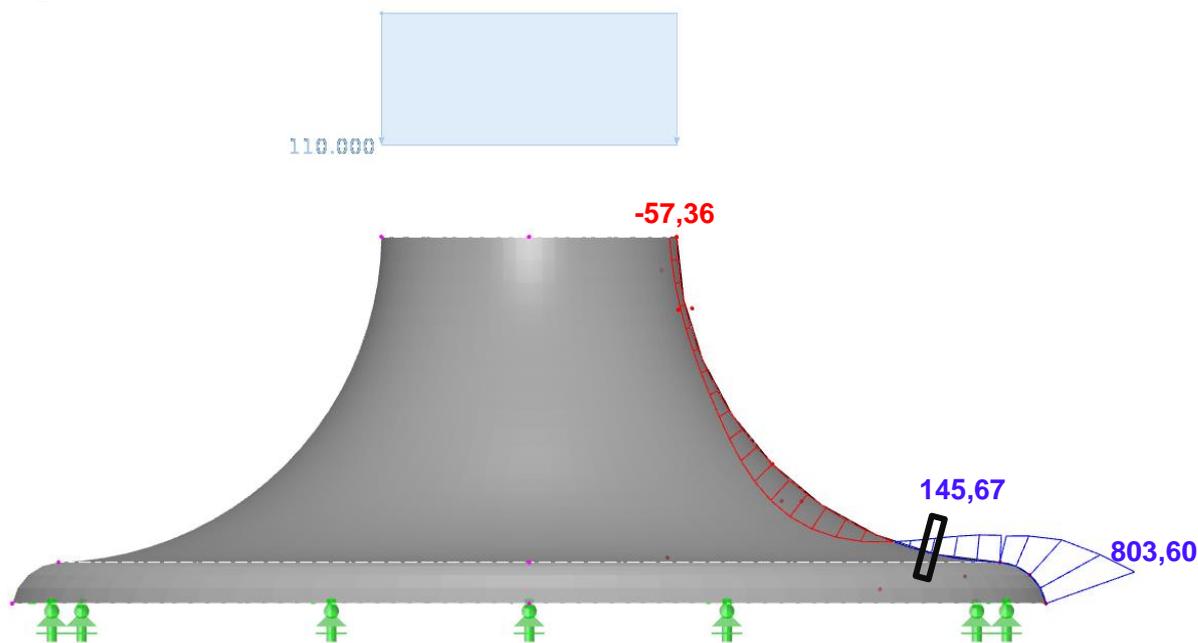


Abbildung 89 - Verlauf der Ringnormalkraft beim Versuchskonzept „Druck – Zug“ (Werte in kN/m)

Membranmoment:

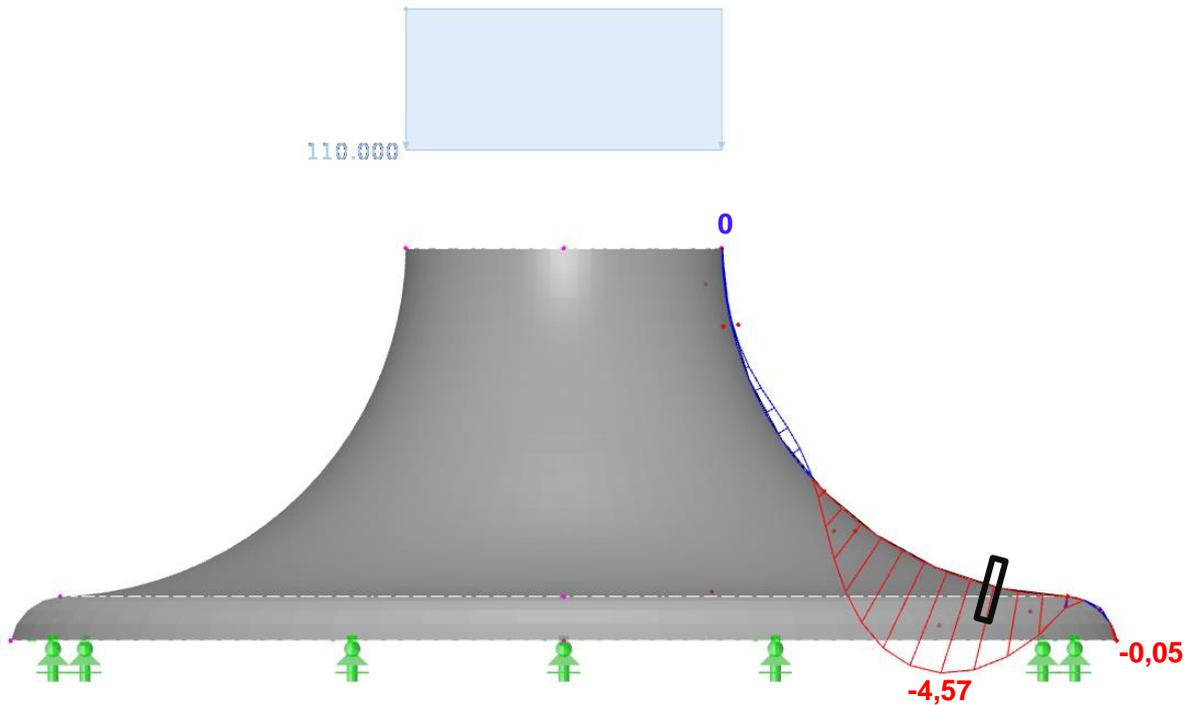


Abbildung 90 - Verlauf des Membranmoments beim Versuchskonzept Druck - Zug (Werte in kNm/m)

Ringmoment:

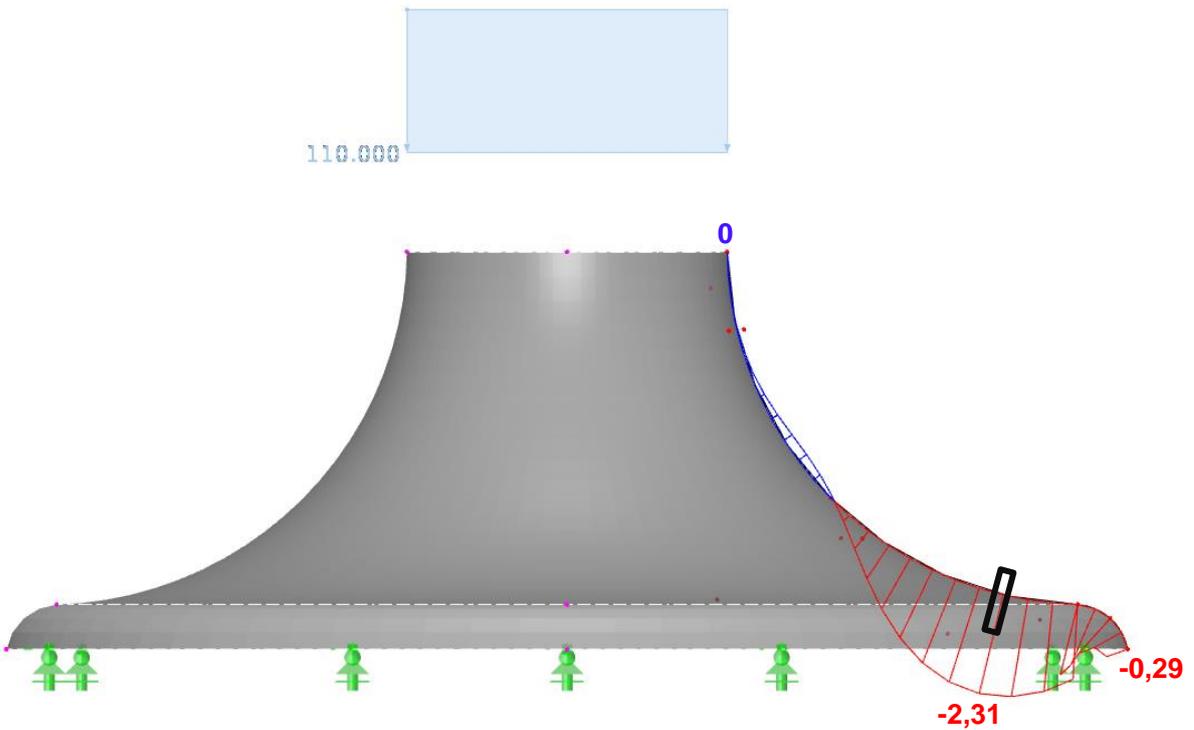


Abbildung 91 – Verlauf des Ringmoments beim Versuchskonzept „Druck – Zug“ (Werte in kNm/m)

Tabellarische Darstellung des Schnittkraftverlaufs (in 0,05 m Schritten):

s [m]	m ₁ [kNm/m]	m ₂ [kNm/m]	n ₁ [kN/m]	n ₂ [kN/m]
0,00	-0,05	-0,29	-29,48	803,60
0,05	0,01	-0,87	-42,60	510,77
0,10	0,17	-1,32	-59,73	300,22
0,15	-0,69	-1,73	-65,73	229,75
0,20	-2,28	-2,06	-82,88	226,82
0,25	-3,58	-2,25	-100,56	190,23
0,30	-4,57	-2,31	-116,67	145,67
0,35	-5,15	-2,22	-129,66	54,63
0,40	-5,28	-2,00	-138,31	-28,70
0,45	-4,96	-1,66	-141,94	-108,78
0,50	-4,26	-1,27	-140,58	-175,46
0,55	-3,31	-0,85	-135,01	-220,94
0,60	-2,24	-0,46	-126,63	-241,19
0,65	1,22	-0,15	-117,19	-236,77
0,70	-0,38	0,07	-108,39	-212,49
0,75	0,21	0,19	-101,57	-176,10
0,80	0,53	0,23	-97,44	-136,23
0,85	0,61	0,21	-96,02	-100,26
0,90	0,53	0,16	-96,80	-72,84
0,95	0,38	0,10	-98,99	-55,37
1,00	0,22	0,05	-101,78	-46,59
1,05	0,11	0,02	-104,54	-43,87
1,10	0,04	0,01	-106,88	-44,64
1,15	0,02	0,00	-108,60	-47,31
1,20	0,02	0,00	-109,64	-51,50
1,25	0,00	0,00	-110,04	-57,36

Tabelle 4 - Schnittkräfte für Versuchskonzept "Druck - Zug"

Die Ergebnisse zeigen dass die gewünschte Schnittkraftkombination, mit vernachlässigbar kleinem Unterschied in der Druckkraft, bei knapp unter $s = 0,30\text{m}$ (ausgehend vom unteren gelagerten Rand) zu erwarten ist.

Zu beachten ist die Ringkraft am unteren Rand. Die erhöhte Zugbeanspruchung lässt sich nicht durch den gegebenen Schalenquerschnitt aufnehmen. Deswegen wird eine Verstärkung des Querschnittes in diesem Bereich vorgesehen (Abbildung 92). Dieser kurze Abschnitt wird separat mittels einer herkömmlichen Schalung hergestellt und bewehrt. Anschließend wird er an die eigentliche Schalenkonstruktion angefügt.

Verstärkung im Auflagerbereich für Ringzug

Wie schon erwähnt wird im Auflagerbereich eine Erhöhung der Querschnittsfläche sowie eine Bewehrung vorgesehen, um die erhöhten Schnittkräfte aufnehmen zu können.

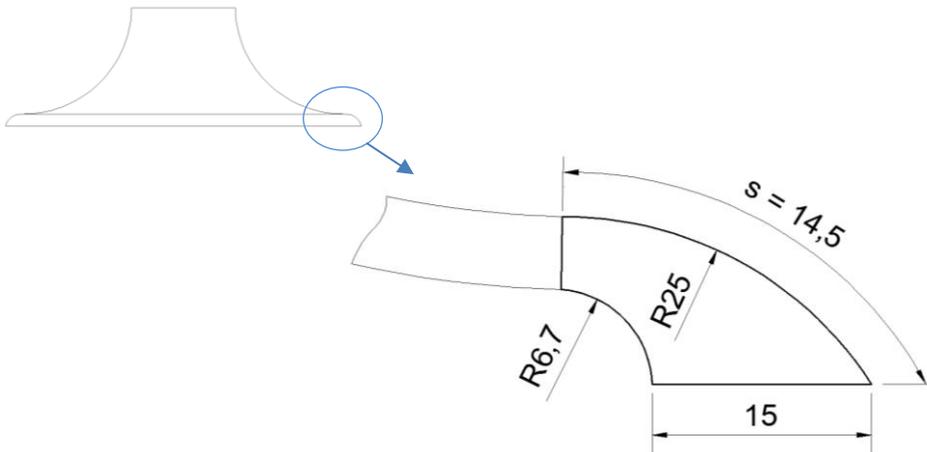


Abbildung 92 - Querschnittsverstärkung für Ringzug (Maße in cm)

Durch die Querschnittsverstärkung am unteren Rand wird das System örtlich steifer, was eine Veränderung der Schnittkräfte nach sich zieht. Das System wird mit dieser Querschnittsveränderung nochmals mittels Abaqus© berechnet. Dabei wird auch gleichzeitig die Geometrie der Erzeugenden und die Größe der Last angepasst um wieder die gewünschte Schnittkraftkombination (aus Tabelle 4, Bereich 5) zu erreichen. Durch die erhöhte Steifigkeit am unteren Rand, werden dort höhere Schnittkräfte erwartet (vor allem Ringzug). Eventuell ist dann noch eine zusätzliche Stabstahlbewehrung in diesem Bereich notwendig.

Veränderung der Schnittkräfte und Geometrie infolge der Querschnittsverstärkung des unteren Randes:

Die neue angepasste Geometrie der Membranerzeugenden sieht wie folgt aus:

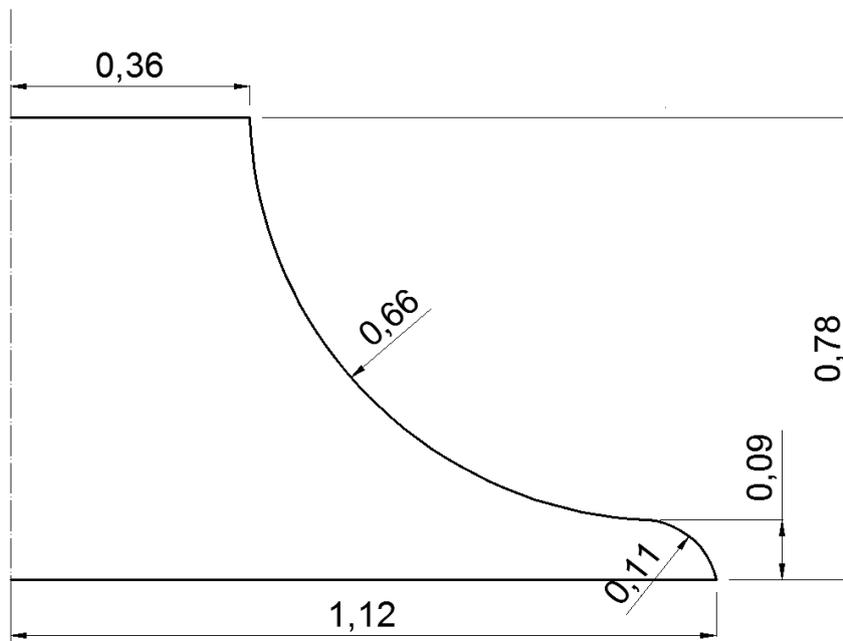


Abbildung 93 – Angepasste Geometrie der Membranerzeugenden für „Druck – Zug“ Versuch
(Maße in m)

Mit der Verstärkung des unteren Randes nach Abbildung 92. Ebenfalls angepasst wurde die Ringlasteinwirkung am oberen Rand. Diese beträgt nun 170 kN/m.

Durch die neuen Parameter entstehen folgende Schnittkräfte am System. Die Stelle mit der geforderten Schnittkraftkombination ist wieder durch eine schwarze Markierung gekennzeichnet.

Membrankraft:

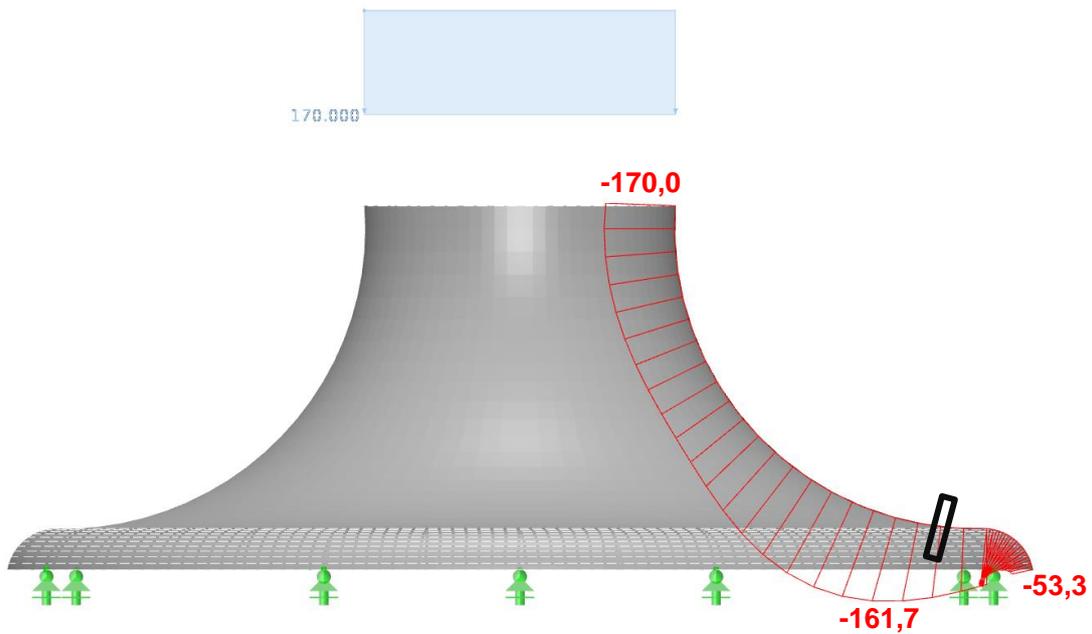


Abbildung 94 - Verlauf der Membrannormalkraft beim angepassten Versuchskonzept „Druck - Zug“ (Werte in kN/m)

Ringkraft:

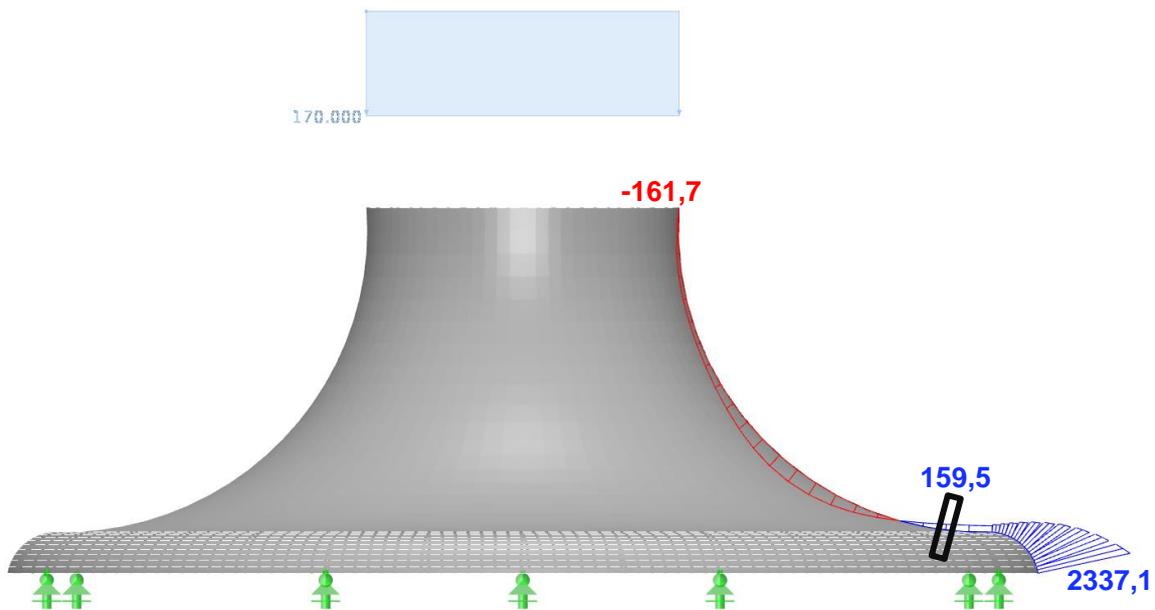


Abbildung 95 - Verlauf der Ringnormalkraft beim angepassten Versuchskonzept „Druck – Zug“ (Werte in kN/m)

Membranzmoment:

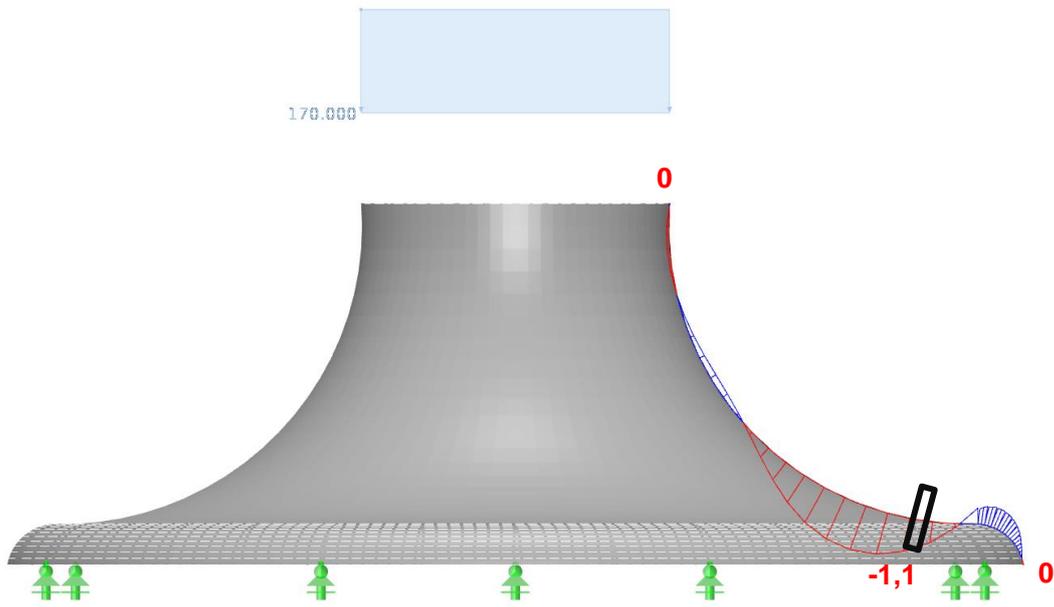


Abbildung 96 - Verlauf des Membranzmoments beim angepassten Versuchskonzept „Druck - Zug“ (Werte in kNm/m)

Ringmoment:

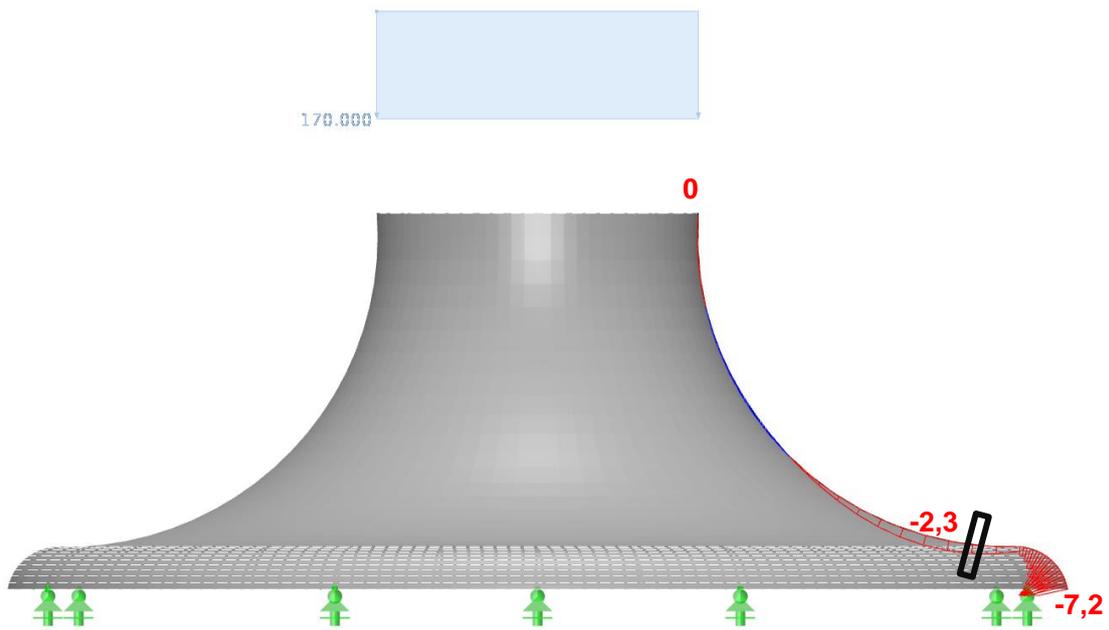


Abbildung 97 – Verlauf des Ringmoments beim angepassten Versuchskonzept „Druck – Zug“ (Werte in kNm/m)

Tabellarische Darstellung des Schnittkraftverlaufs (in 0,05 m Schritten):

s [m]	m ₁ [kNm/m]	m ₂ [kNm/m]	n ₁ [kN/m]	n ₂ [kN/m]
0,00	0,00	-7,20	-53,27	2337,12
0,02	0,05	-13,82	-63,39	1988,52
0,04	0,73	-13,79	-83,80	1379,83
0,06	1,25	-12,80	-97,63	1083,92
0,08	1,76	-11,40	-110,82	842,16
0,10	2,18	-9,52	-122,61	639,78
0,12	2,49	-5,60	-138,59	359,05
0,14	1,76	-2,49	-142,40	217,07
0,15	0,13	-1,70	-151,50	180,77
0,20	-1,09	-1,96	-161,72	162,30
0,25	-3,29	-2,30	-181,58	159,50
0,30	-4,93	-2,58	-199,27	53,69
0,35	-5,94	-2,55	-212,86	-35,14
0,40	-6,27	-2,32	-220,85	-133,44
0,45	-5,96	-1,93	-222,48	-227,24
0,50	-5,11	-1,45	-217,98	-303,17
0,55	-3,90	-0,94	-208,57	-351,14
0,60	-2,55	-0,48	-196,23	-366,48
0,65	-1,28	-0,11	-183,30	-350,73
0,70	-0,25	0,15	-171,91	-311,09
0,75	0,45	0,28	-163,57	-258,28
0,80	0,79	0,30	-158,89	-203,68
0,85	0,83	0,26	-157,58	-156,51
0,90	0,68	0,19	-158,76	-121,95
0,95	0,43	0,11	-161,31	-100,60
1,00	0,18	0,04	-164,25	-89,27
1,05	-0,04	0,00	-166,90	-82,61
1,10	-0,17	-0,03	-168,86	-75,00
1,15	-0,15	-0,03	-169,83	-62,71
1,20	-0,10	-0,02	-170,02	-55,13

Tabelle 5 - Schnittkräfte für angepasstes Versuchskonzept "Druck - Zug" mit veränderlichen Querschnitt bis s = 0,14 m

Die Ergebnisse in Tabelle 5 zeigen dass die gewünschte Schnittkraftkombination bei der angepassten Geometrie an der Stelle s = 0,25 m auftreten. Die Abweichung der Schnittkräfte in Achse 1 zur gewünschten Schnittkraftkombination ist vernachlässigbar, da sich das Bruchverhalten erst bei sehr hohen Druckkräften merklich verändert (siehe M-N-Interaktionen).

Benötigte Bewehrung in der Querschnittsverstärkung

Die hohen Schnittkräfte im unteren Randbereich (aufgrund der erhöhten Steifigkeit) können nicht allein vom verwendeten UHPC aufgenommen werden. Daher wird der Beton mit einer Stabstahlbewehrung örtlich verstärkt.

Dazu wird zunächst die Resultierende der Normalkraft und des Momentes, welche auf den verstärkten Querschnitt wirken, ermittelt (dazu werden die ersten 8 Schnittkraftwerte für den Verlauf aus Tabelle 5 verwendet):

Resultierende Ringnormalkraft (vereinfachte Annahme: trapezförmige Streckenlast):

$$\frac{217,1+359,1+639,8+842,2+1083,9+1379,8+1988,5+2337,1}{8} = 1105,94 \text{ kN/m}$$

$$1105,94 \text{ kN/m} \cdot 0,145 \text{ m} = 160,36 \text{ kN} \dots \text{ Resultierende Normalkraft}$$

Resultierendes Moment (vereinfacht aus angenommener trapezförmiger Streckenlast ermittelt):

$$\frac{2,49 + 5,6 + 9,5 + 11,4 + 12,8 + 13,8 + 7,2}{8} = 7,85 \text{ kNm/m}$$

$$7,85 \text{ kNm/m} \cdot 160,36 = 1,138 \text{ kNm} \dots \text{ Resultierendes Moment}$$

Nun wird der Widerstand des betrachteten Querschnittes ermittelt. Dies geschieht mittels der Software INCA:

Querschnitt:

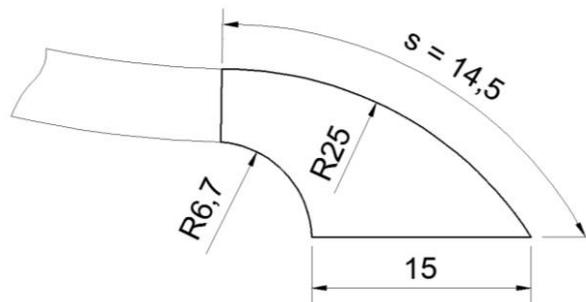


Abbildung 98 – Abmaße der Querschnittsverstärkung

Aufnehmbare Zugkraft für betrachteten Querschnitt ($f_{ct} = 6,5 \text{ N/mm}^2$): $94,25 \text{ kN} < 160,36 \text{ kN}$

Aufnehmbares Moment für betrachteten Querschnitt: $8,05 \text{ kNm} > 1,138 \text{ kNm}$

Es ist ersichtlich, dass der Querschnitt die Momentenbeanspruchung leicht aufnehmen kann, aber für die Ringzugkraft eine Verstärkung benötigt.

Da der Anteil der Ringzugkraft verglichen mit dem Ringmoment in der gegebenen Schnittkraftkombination wesentlich höher ist, kann die Druckspannung aus dem Moment die Zugspannung infolge der Normalkraft nicht überdrücken. Somit herrschen im ganzen Querschnitt Zugspannungen.

Es gilt die Annahme, dass die Bewehrung aus Gründen der Einfachheit so bemessen wird, dass sie die komplette Zugbeanspruchung aufnimmt. Somit liegt die Bemessung auf jeden Fall auf der sicheren Seite, und da die Zugbeanspruchung relativ gering ist, kann dies auch vom wirtschaftlichen Standpunkt vertreten werden.

Erforderliche Bewehrungsfläche für Baustahl Bst 550 ($f_d = 478 \text{ N/mm}^2$):

$$\frac{160360 \text{ N}}{478 \text{ N/mm}^2} = 335,48 \text{ mm}^2 \cong 3,36 \text{ cm}^2$$

gewählt: $4\emptyset 12 = 4,52 \text{ cm}^2$

Die Anordnung der Bewehrung erfolgt an der Außenseite, da die Zugbeanspruchung nach außen zunimmt (siehe Abbildung 95):

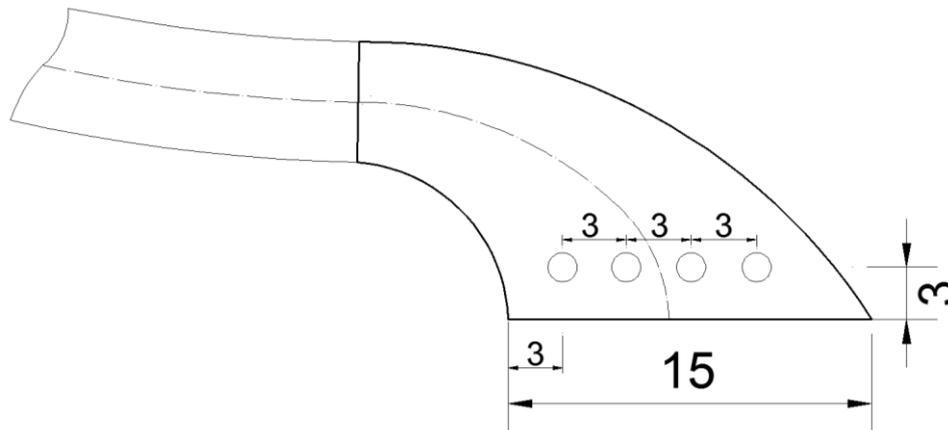


Abbildung 99 - Anordnung der Bewehrung im verstärkten Querschnitt - $4\emptyset 12$ (Maße in cm)

Durch die Einlage der Stabstahlbewehrung erhöht sich die Steifigkeit im verstärkten Querschnitt nochmals, was wieder zu anderen Schnittkräften führt. Da die Änderung der Geometrie der Erzeugenden bereits bei der ersten Querschnittsverstärkung relativ gering war, und die Steifigkeit nach Einlage der Stabbewehrung vergleichsweise gering gesteigert wird, wird auf eine weitere Geometrieänderung verzichtet.

Abmaße der Schalensegmente

Basierend auf der Größe des Schaltisches ist ein Schalensegment auf die Abmessungen 900 mm x 900 mm beschränkt. In der folgenden Abbildung ist eine mögliche Anordnung sowie die Geometrie der Segmente dargestellt. Die blaue Markierung zeigt die Abmessung welche im Pixeltisch benötigt werden.

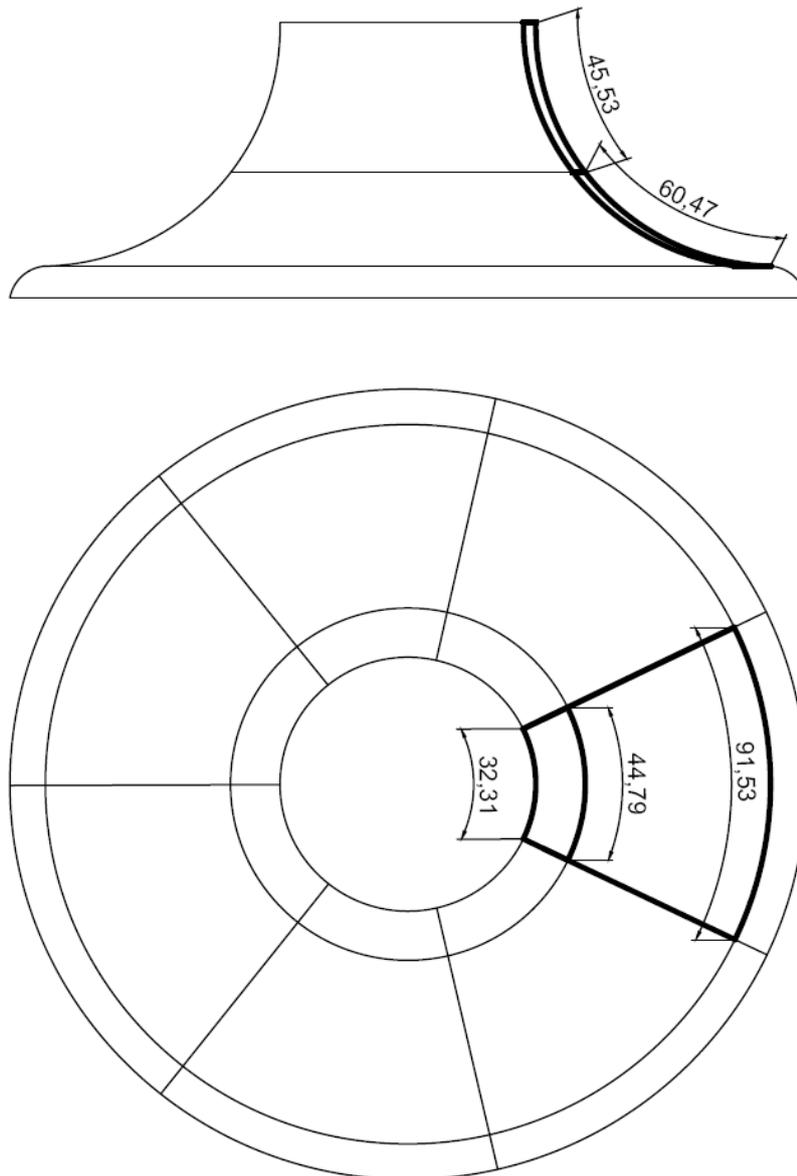


Abbildung 100 – Schalsegmente für "Druck-Zug" Versuchskonzept (Maße in cm)

Folgend sind die benötigten Abmessungen der zwei Segmenttypen für den Pixeltisch dargestellt. Die blaue Markierung zeigt die benötigte Größe im Schaltisch. Die maximalen möglichen Abmessungen sind 900 mm x 900 mm x 150 mm, welche für beide Segmenttypen eingehalten werden.

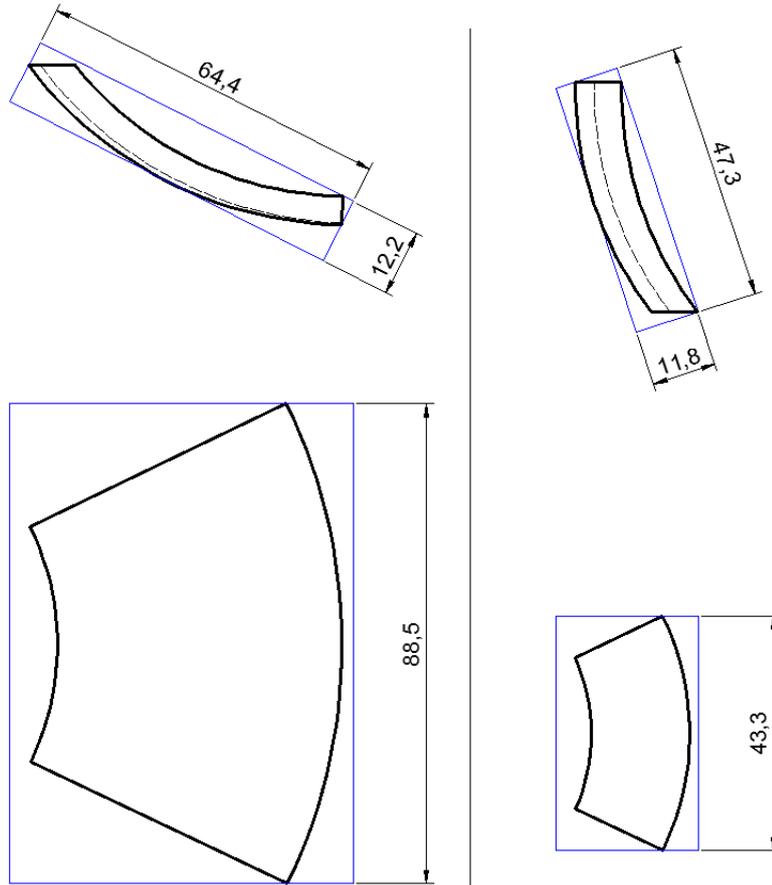


Abbildung 101 - Schalsegmente mit Umrissmaße für Pixeltisch in cm (blaue Markierung)

6.2.2 Formfindung für Zug-Zug-Kombination (Bereich 4)

Neben der „Druck-Zug“-Versuchsanordnung wird hier noch ein Konzept für die Zug-Zug-Kombination aus Bereich 4 (Abbildung 82 und Tabelle 3) vorgestellt.

Um einen Membranzug in einem rotationssymmetrischen System mit vertikaler Lasteinleitung zu erzeugen, ist eine Geometrie der Membran nötig, die mittels des Schaltisches bei gegebener Maximalgröße des Versuchskörpers bzw. vertretbarer Segmentanzahl nicht möglich ist. Abbildung 102 zeigt eine Form, bei der zweiachsialer Zug unter vorgegebener Lasteinleitung und Lagerung vorhanden ist.

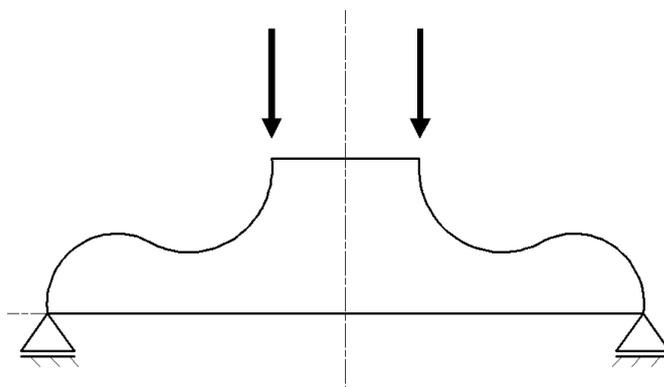


Abbildung 102 - Grundentwurf für "Zug-Zug" Versuch

Diese ist allerdings nicht herstellbar. Das Problem besteht bei der hohen Krümmung der Membran, welche nötig ist um einen Zug in Membranrichtung zu erzeugen. Dadurch entsteht ein zu großer „Stich“ der Schalensegmente für den Schaltisch. Wenn man nun die Krümmung verringert, kann die Lasteinleitung nicht mehr tangential zur Membran erfolgen (Abbildung 103).

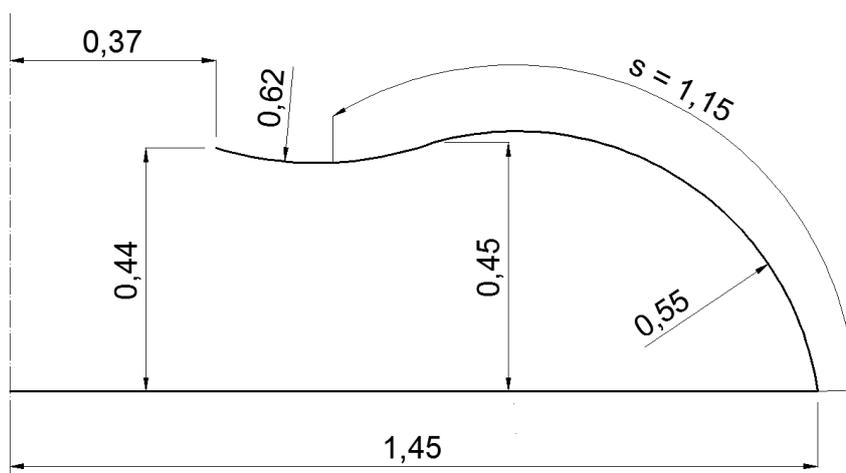


Abbildung 103 – Geometrie der Erzeugenden für „Zug – Zug“ Versuch

Dies führt zu Biegestörungen im Randbereich (sehr hohe Momentenbeanspruchung). Als Lösung könnte ein verstärkter Betonring bei der Lasteinleitungsstelle angebracht werden, welcher das Moment aufnimmt. Ob der Betonring ausreichend ist um das Randmoment abzubauen, erfordert noch weitere Untersuchungen.

Folgende Tabelle zeigt die Schnittkräfte entlang der Erzeugenden aus Abbildung 103:

s [m]	m ₁ [kNm/m]	m ₂ [kNm/m]	n ₁ [kN/m]	n ₂ [kN/m]
0,00	0,01	0,00	-9,58	72,02
0,05	0,03	0,00	-10,06	77,52
0,10	-0,04	-0,01	-11,04	83,60
0,15	-0,20	-0,05	-12,59	89,76
0,20	-0,46	-0,10	-14,76	94,79
0,25	-0,82	-0,15	-17,57	96,81
0,30	-1,26	-0,22	-20,95	93,45
0,35	-1,77	-0,28	-24,72	82,06
0,40	-2,31	-0,31	-28,52	60,15
0,45	-2,83	-0,31	-31,78	25,81
0,50	-3,27	-0,26	-33,72	-21,63
0,55	-3,57	-0,15	-33,38	-81,04
0,60	-3,61	-0,05	-31,56	-114,97
0,65	-3,58	0,18	-25,78	-184,24
0,70	-3,12	0,63	-8,97	-284,31
0,75	-2,84	0,81	-0,07	-308,66
0,80	-2,25	1,17	19,89	-343,65
0,85	-1,71	1,50	43,18	-345,21
0,90	-1,45	1,76	67,35	-301,13
0,95	-1,67	1,92	88,51	-197,90
1,00	-2,41	2,10	102,97	-32,77
1,05	-3,02	2,49	107,17	134,35
1,10	-3,17	3,09	97,97	273,29
1,15	-2,82	3,89	74,96	363,62
1,20	-2,08	4,85	40,85	374,10
1,25	-1,20	5,90	4,43	261,21
1,30	-0,39	7,02	-14,67	-35,65
1,35	-0,01	7,60	-14,72	-242,09

Tabelle 6 - Schnittkräfte für Versuchskonzept "Zug - Zug" nach Abbildung 103

Bei Stelle $s = 1,15$ m (ausgehend vom Randlager) ist die geforderte Zug-Zug-Schnittkraftkombination gegeben. Allerdings sind die Momente (Membran- und Ringmoment) in beiden Achsen dieses Systems größer als die geforderten aus dem Wellendach. Durch die gegebenen Randbedingungen (vertikale Lasteinleitung und Lagerung, rotationssymmetrisches System, Abmessungen von Schaltisch etc.) kann die geforderte zweiaxiale Normalkraft-Momenten-Kombination nicht hergestellt werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Zur Einleitung in das Thema der Arbeit wird kurze erklärt, wodurch Ultra High Performance Concrete gekennzeichnet ist. Danach werden vergleichbare Versuche aus der Literatur zitiert und kurz erläutert.

Zur Begriffsdefinition und als theoretische Grundlage werden im nächsten Kapitel die wichtigsten statischen Gleichungen von Schalenkonstruktionen gezeigt und hergeleitet. Dabei wird besonders auf die zwei grundlegenden Arten der Schalensysteme eingegangen: Membranzustand und Biegezustand. Um einen kleinen Überblick zu schaffen, wurden Schnittkraftverläufe von simplen rotationssymmetrischen Schalensystemen mittels des Statikprogramms RFEM verglichen.

Da das Konzept des Großversuchs auf dem statischen System einer fiktiven Freiformschale, des „Wellendaches“, fußt, wurde dieses auf sein Tragverhalten und seine Lastabtragung analysiert. Dabei wurde eine maßgebende EUROCODE-konforme Lastfallkombination ($1,35 \cdot \text{Eigengewicht} + 1,50 \cdot \text{Schneelast} + 0,75 \cdot \text{Windlast}$) auf das System aufgebracht. Die daraus gewonnene Erkenntnis ist, dass das globale Tragverhalten der Wellendachform einer Wellplatte ähnelt und sich nur lokal eine Membranwirkung einstellt. Es wurden 3 Lagerbedingungen untersucht: Scheibenlagerung, horizontal verschiebliche Lagerung und membrangerechte Lagerung. Bei membrangerechter Lagerung zeigen sich die geringsten Verformungen und die beste Membranwirkung wird erreicht. Verglichen mit der Scheibenlagerung, kann die maximale Durchbiegung bei membrangerechter Lagerung um fast 80% reduziert werden. Die maximalen Spannungen fallen um 60% geringer aus. Beim System mit horizontal verschieblicher Lagerung stellt sich hingegen keine Membranwirkung ein, was in hohen Verformungen resultiert.

Bevor aus der Statik des Wellendachs ein Versuchsaufbau erstellt werden kann, wird zunächst der verwendete UHPC und dessen Festbetoneigenschaften beschrieben. Danach wird allgemein das Versagen von UHPC bei zweiaxialer Beanspruchung behandelt. Dabei wird auf einschlägige Literatur verwiesen welche die 3 grundlegenden Beanspruchungsarten behandeln: Druck-Druck, Druck-Zug und Zug-Zug. Bei zweiaxialer Zugbeanspruchung von UHPC ist zur Zeit des Verfassens dieser Arbeit relativ wenig bekannt, daher wurden nach bestem Gewissen des Autors Annahmen und Vereinfachungen bezüglich der biaxialen Zugfestigkeit getroffen. Mit Hilfe der Software INCA2 wurden zwei dreidimensionale Momenten-Normalkraft-Interaktionen erstellt. Mit diesen Diagrammen lassen sich zweiaxiale Versagenskurven darstellen.

Aus der Wellendachform mit der Variante Scheibenlagerung wurden die kritischen Spannungszustände (Schnittkraftkombinationen, welche der Versagenskurve in den zweiaxialen M-N-Interaktionen nahe sind oder diese überschreiten) ermittelt. Unterschieden wurde in einen maßgebenden Druck-Zug-Zustand und einen kritischen Zug-Zug-Zustand. Mit Hilfe der Software Abaqus© wurden rotationssymmetrische

Schalensysteme entworfen, welche diese Beanspruchungszustände reproduzieren. Dies gelang für den Druck-Zug Zustand unter den geforderten Randbedingungen und es wurde ein Modell für weitere CAD-Bearbeitungen erstellt. Für den Zustand unter Zug-Zug-Beanspruchung konnte unter den gegebenen Randbedingungen der Versuchsanordnung keine realistische Geometrie gefunden werden.

7.2 Ausblick

Diese Arbeit beinhaltet Anhaltspunkte und Erkenntnisse, welche zur Herstellung einer Versuchsanordnung für rotationssymmetrische Schalenkonstruktionen nützlich sind. Sie bietet einen Lösungsvorschlag für das Versuchskonzept, welches für das Forschungsprojekt „UPHC-Schalen“ relevant ist. Die Analyse der Freiformschale auf ihr Tragverhalten sowie die zweiachiale Momenten-Normalkraft-Interaktion kann als Grundlage für weitere Versuchsaufbauten bzw. Forschungsarbeiten, und für Bemessungen und Entwürfe von UHPC-Schalen herangezogen werden. Da zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit wenig Information zur zweiachialen Zugbeanspruchung von UHPC vorliegen, können die erstellten Daten nach etwaigen zukünftigen Forschungen diesbezüglich verfeinert werden.

8 Literatur

- [1] J. C. Scheydt, G. Herold und H. S. Müller, „Ultrahochfester Beton,“ 2006.
- [2] E. Fehling und M. Schmidt, „Entwicklung, Dauerhaftigkeit und Berechnung Ultrahochfester Betone (UHPC),“ kassel university press GmbH, Kassel, 2005.
- [3] U. Schneider, J. Horvath, G. König und F. Dehn, „Materialverhalten von ultrahochfesten Betonen (UHPC),“ *Beton- und Stahlbetonbau*, Bd. 96, Nr. Heft 7, 2001.
- [4] M. Schmidt, „Sachstandbericht Ultrahochfester Beton,“ Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2007.
- [5] C. Breyer, „Faserverteilung im ultrahochfesten Beton,“ Technische Universität Graz, Graz, 2008.
- [6] T. Leutbecher, „Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Stabstahl und Fasern bewehrtem Ultrahochfestem Beton (UHPC),“ kassel university press GmbH, Kassel, 2005.
- [7] K. Holschemacher, Y. Klug und J. Wörner, „Beton Kalender 2006,“ Ernst & Sohn, Berlin, 2006.
- [8] B. Kromoser und J. Kollegger, „Herstellung von Schalenträgwerken aus Beton mit der "Pneumatic Wedge Method",“ *Beton- und Stahlbetonbau 109*, 2014.
- [9] P. Eisenbach, R. Vasudevan, M. Grohmann, K. Bollinger und S. Hauser, „Parapluie – Realisierung einer ultraschlanken Betonschale durch Aktivierung einer Membrantragwirkung,“ *Beton- und Stahlbetonbau 109*, 2014.
- [10] I. Vizotto und A. M. Ferreira, „Wind force coefficients on hexagonal free form shell,“ *Engineering Structures*, pp. 17-29, November 2014.
- [11] E. Hake und K. Meskouris, *Statik der Flächentragwerke*, Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [12] F. Amtsberg, B. Freytag, M. Groß, P. Hadl, J. Juhart, G. Parmann und G. Santner, „Zwischenbericht - Projekt UHPC-Schalen,“ 2013-2014.
- [13] M. Groß, „Typ 1 Wellendach - statische Voruntersuchungen,“ 2013.
- [14] G. Santner, „Fügetechnik im UHPC-Schalbau,“ 2016 (in Vorbereitung).

- [15] K. Speck, „Beton unter mehraxialer Beanspruchung,“ TU Dresden, 2007.
- [16] K. Speck und M. Curbach, „Versuchstechnische Ermittlung und mathematische Beschreibung der mehraxialen Festigkeit von ultra-hochfestem Beton (UHPC),“ Deutsche Forschungsgemeinschaft DFG, Dresden, 2007.
- [17] G. Heinzle, B. Freytag, J. Linder und L. Sparowitz, „Schubtragfähigkeit dünnwandiger Träger aus stahlfaserbewehrtem UHPC,“ *Bauingenieur*, pp. 182-193, April 2012.
- [18] E. Fehling, T. Leutbecher, F.-K. Röder und S. Stürwald, „Structural behavior of UHPC under biaxial loading,“ in *Ultra High Performance Concrete (UHPC)*, Kassel, kassel university press GmbH, 2008, pp. 569-576.
- [19] H. Kupfer, „Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung,“ in *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Bd. Heft 229, Berlin, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1973, p. Heft 229.
- [20] N. Carino, „The behavior of a model of plain concrete subject to compression-tension and tension-tension biaxial stresses,“ Faculty of the Graduate School of Cornell University, 1974.
- [21] P. Rossi und J.-F. Ulm, „Size effects in the biaxial tensile-compressive behavior of concrete: physical mechanisms and modeling,“ in *Materials and Structures* 30, 1997, pp. 210-216.
- [22] S. Tsai und E. Wu, „A General Theory of Strength of Anisotropic Materials,“ *Journal of Composite Materials*, Nr. Vol.5, 1971.
- [23] N. Ottosen, „A Failure Criterion for Concrete,“ *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE*, Bd. Vol.103, Nr. EM 4, Sept. 1977.
- [24] K. Dahl, *A Failure Criterion for Normal and High Strength Concrete*, Lyngby: Danmarks Tekniske Højskole, 1992.
- [25] G. Parmann, „Schlungssystem "Pixeltisch"-Prototyp (In Vorbereitung),“ TU Graz, 2016.
- [26] B. Freytag und G. Santner, „Bemessung von Bauteilen aus faserbewehrtem UHPC,“ in *Nachhaltig Bauen mit Beton: Werkstoff und Konstruktion*, Graz, Verlag der Technischen Universität Graz, 2014, pp. 73-86.

9 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 - Randbedingungen Versuchskonzept	9
Abbildung 2 - Betondruckfestigkeiten in Abhängigkeit des W/Z-Wertes [3]	11
Abbildung 3 – Übliche Ausgangsstoffe von UHPC.....	12
Abbildung 4 - Vergleich der Spannungs-Dehnungslinie von UHPC ohne (links) und mit (rechts) Faserbewehrung [4].....	12
Abbildung 5 - "Pneumatic Wedge Method" [8]	14
Abbildung 6 - Biegeversuch Betonplatte [8]	15
Abbildung 7 - Prototyp des Parapulie [9].....	15
Abbildung 8 – Zwei Schalungshälften bei der Herstellung der Parapluie.....	16
Abbildung 9 - Spannungs-Dehnung-Diagramm für DUCON um Vergleich zu Normalbeton und Faserbeton [9].....	17
Abbildung 10 – Belastungstest des Parapulie [9].....	17
Abbildung 11 - FE-Modell der Hexagonalen Freiformschale [10].....	18
Abbildung 12 – Beispiel für membrangerechte Lagerung	19
Abbildung 13 - Membrantheorie – Schnittgrößen am Gesamtsystem.....	20
Abbildung 14 - Membrantheorie - Infinitesimales Schalenelement	21
Abbildung 15 - Vertikal- und Horizontalschnitt des infinitesimalen Schalenelements im Membranzustand.....	21
Abbildung 16 - Biegezustand	22
Abbildung 17 – Biegetheorie – Schnittgrößen am Gesamtsystem	23
Abbildung 18 – Infinitesimales Schalenelement im Biegezustand	24
Abbildung 19 – Vertikaler Schnitt eines Infinitesimalen Schalenelements in unverformtem und verformtem Zustand	26
Abbildung 20 – Kugelschale	31
Abbildung 21 - Kugelzonenschale für Vereinfachung nach GECKELER	33
Abbildung 22 – Kugelzonenschale mit vertikaler Belastung.....	35
Abbildung 23 – Veranschaulichung der Wellenausbreitung mit Eckbezeichnungen	42
Abbildung 24 - Lastaufstellung für LFK $1,35 \cdot g_k + 1,50 \cdot s_k + 0,75 \cdot w_k$	43
Abbildung 25 – Nummerierter Wellenverlauf im betrachteten Tragwerk	44
Abbildung 26 - Lagerung Wellendach – „Scheibenlagerung“	45

Abbildung 27 – Lage der lokalen Linienlagerachsensysteme - Draufsicht	45
Abbildung 28 - Lage der lokalen Linienlagerachsensysteme – Ansicht von links.....	46
Abbildung 29 - Lage der lokalen Linienlagerachsensysteme - Ansicht von hinten.....	46
Abbildung 30 - Auflagerreaktion in X-Richtung bei Scheibenlagerung (Werte in kN/m).....	47
Abbildung 31 - Auflagerreaktion in Y-Richtung bei Scheibenlagerung (Werte in kN/m).....	47
Abbildung 32 - Auflagerreaktion in Z-Richtung bei Scheibenlagerung (Werte in kN/m).....	48
Abbildung 33 – Vertikale Verformung des Wellendachs mit Bereich der max. Durchbiegung, Beulzone und aussteifendem Eckpunkt	49
Abbildung 34 – Hauptspannungsverlauf in Hauptrichtung 1 für die Unterseite der Schale – Scheibenlagerung.....	50
Abbildung 35 - Prinzipskizze für "Spannungswechsel" und Einspanneffekt - Schnitt entlang einer Welle (z.B. Welle 4-6)	50
Abbildung 36 - Biegelinie – Schnitt entlang der gebogenen Welle durch A	51
Abbildung 37 - Verlauf der Zugvektoren (oben) und Druckvektoren (unten) bei Scheibenlagerung	52
Abbildung 38 - Momentenverlauf m_1 (unten) und Orientierung der Drehrichtung der Momente (oben)	53
Abbildung 39 - Querschnittsverdrehung um Y-Achse im Wellendach - Scheibenlagerung	54
Abbildung 40 – Querschnittsverdrehung um X-Achse im Wellendach - Scheibenlagerung	54
Abbildung 41 - Lagerung Wellendach - horizontal verschieblich.....	55
Abbildung 42 - Auflagerreaktion in X-Richtung bei horizontal verschieblichen Lagerung (Werte in kN/m)	56
Abbildung 43 - Auflagerreaktion in Y-Richtung bei horizontal verschieblichen Lagerung (Werte in kN/m)	56
Abbildung 44 - Auflagerreaktion in Z-Richtung bei horizontal verschieblichen Lagerung (Werte in kN/m)	57
Abbildung 45 - Vertikale Verformung des Wellendaches bei horizontal verschieblichen Lagerung.....	58
Abbildung 46 – Hauptspannungsverlauf in Hauptrichtung 1 für die Unterseite der Schale – horizontal verschiebliche Variante (Werte in N/mm ²).....	58
Abbildung 47 – Querschnittsverdrehung um die X-Achse – horizontal verschiebliche Lagerung	59
Abbildung 48 - Verlauf der Zugvektoren (oben) und Druckvektoren (unten) mit Wellentalverlauf (gestrichelte schwarze Linie) für horizontal verschiebliche Variante	60

Abbildung 49 - Lagerung Wellendach – membrangerechte Lagerung	61
Abbildung 50 - Auflagerreaktion in X-Richtung bei membrangerechter Lagerung (Werte in kN/m)	62
Abbildung 51 - Auflagerreaktion in Y-Richtung bei membrangerechter Lagerung (Werte in kN/m)	62
Abbildung 52 - Auflagerreaktion in Z-Richtung bei membrangerechter Lagerung (Werte in kN/m)	63
Abbildung 53 - Vertikale Verformung des Wellendaches bei membrangerechter Lagerung	63
Abbildung 54 - Biegelinie für allseitige feste Lagerung – Schnitt in Querrichtung des Wellendachs	64
Abbildung 55 - Spannungsverlauf für die Unterseite der Schale – membrangerecht gelagert	64
Abbildung 56 - Momente in Hauptrichtung 1	65
Abbildung 57 - Verlauf der Zugvektoren (oben) und Druckvektoren (unten) mit Wellentalverlauf (gestrichelte schwarze Linie) für membrangerechter Lagerung	66
Abbildung 58 - Bruchmechanismen bei verschiedenen Spannungsverhältnissen [15]	70
Abbildung 59 – Versuchsergebnisse: Festigkeiten zweiaxialer Belastung für verschiedene Rezepturen von Curbach, Speck [16]	71
Abbildung 60 – Biaxiale Druck-Zug Versagenskurve von ungerissenem und gerissenem UHPC [17]	72
Abbildung 61 - Zweiaxiale Festigkeit des verwendeten UHPC	74
Abbildung 62 - Arbeitslinie UHPC mit Stahlfasern	75
Abbildung 63 - Momenten-Normalkraft-Interaktion für UHPC mit Stahlfasern	76
Abbildung 64 – Spannungszustand infolge $n_2 = -4000$ kN/m	77
Abbildung 65 - Zweiaxiale Festigkeit bei 80 N/mm ²	78
Abbildung 66 - Modifizierte Arbeitslinie für zweiaxiale Festigkeit	79
Abbildung 67 – m_1 - n_1 -Interaktion infolge modifizierter Arbeitslinie für $n_2 = -4000$ kN/m	80
Abbildung 68 – Isometrische Ansicht der m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion	81
Abbildung 69 – Ansicht auf n_1 - n_2 -Ebene der m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion	81
Abbildung 70 - Ansicht auf m_1 - n_1 -Ebene der m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion für Druckkräfte in Achse 2 ($n_2 < 0$)	82
Abbildung 71 - Ansicht auf m_1 - n_1 -Ebene der m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion für Zugkräfte in Achse 2 ($n_2 > 0$)	83
Abbildung 72 – Ansicht auf m_1 - n_2 -Ebene der m_1 - n_1 - n_2 -Interaktion	84

Abbildung 73 - Spannungszustand infolge $m_2 = 2 \text{ kN/m}$	85
Abbildung 74 – Spannungs- und Festigkeitsverlauf für $m_2 = 2 \text{ kNm/m}$	85
Abbildung 75 - m_1 - n_1 -Interaktion infolge modifizierter Arbeitslinie für $m_2 = - 4000 \text{ kN/m}$	86
Abbildung 76 – Isometrische Ansicht auf m_1 - n_1 - m_2 -Interaktion	87
Abbildung 77 – Ansicht auf n_1 - m_2 -Ebene der m_1 - n_1 - m_2 -Interaktion	87
Abbildung 78 - Ansicht auf n_1 - m_1 -Ebene der m_1 - n_1 - m_2 -Interaktion	88
Abbildung 79 – Ansicht auf m_1 - m_2 -Ebene der m_1 - n_1 - m_2 -Interaktion	89
Abbildung 80 - Vergleich Festigkeitsverläufe in zweiter Achse für $6,8 \text{ kNm/m}$ und $8,0 \text{ kNm/m}$	89
Abbildung 81 - FE-Modell Wellendach mit Schnittbezeichnung	91
Abbildung 82 – Wellendach mit gekennzeichneten Bereichen, bei denen die Zugfestigkeit überschritten wird	91
Abbildung 83 - Lage der kritischen Spannungszustände aus Wellendach im M-N-Interaktionsdiagramm (Zug-Druck-Kombination)	93
Abbildung 84 - Lager der kritischen Spannungszustände aus Wellendach im M-N-Interaktionsdiagramm (Zug-Zug-Kombination)	94
Abbildung 85 - Erster Entwurf für Zug-Druck-Versuchsaufbau laut Variantenstudie	95
Abbildung 86 – Versuchskonzept „Druck - Zug“	96
Abbildung 87 – Geometrie der Erzeugenden für „Druck - Zug“ Versuch (Maße in m)	96
Abbildung 88 - Verlauf der Membrannormalkraft beim Versuchskonzept „Druck – Zug“ (Werte in kN/m)	97
Abbildung 89 - Verlauf der Ringnormalkraft beim Versuchskonzept „Druck – Zug“ (Werte in kN/m)	97
Abbildung 90 - Verlauf des Membranamoments beim Versuchskonzept Druck - Zug (Werte in kNm/m)	98
Abbildung 91 – Verlauf des Ringmoments beim Versuchskonzept „Druck – Zug“ (Werte in kNm/m)	98
Abbildung 92 - Querschnittsverstärkung für Ringzug (Maße in cm)	100
Abbildung 93 – Angepasste Geometrie der Membranerzeugenden für „Druck – Zug“ Versuch (Maße in m)	101
Abbildung 94 - Verlauf der Membrannormalkraft beim angepassten Versuchskonzept „Druck - Zug“ (Werte in kN/m)	102
Abbildung 95 - Verlauf der Ringnormalkraft beim angepassten Versuchskonzept „Druck – Zug“ (Werte in kN/m)	102

Abbildung 96 - Verlauf des Membranmoments beim angepassten Versuchskonzept „Druck - Zug“ (Werte in kNm/m)	103
Abbildung 97 – Verlauf des Ringmoments beim angepassten Versuchskonzept „Druck – Zug“ (Werte in kNm/m).....	103
Abbildung 98 – Abmaße der Querschnittsverstärkung.....	105
Abbildung 99 - Anordnung der Bewehrung im verstärkten Querschnitt - 4Ø12 (Maße in cm).....	106
Abbildung 100 – Schalsegmente für "Druck-Zug" Versuchskonzept (Maße in cm).....	107
Abbildung 101 - Schalsegmente mit Umrissmaße für Pixeltisch in cm (blaue Markierung)	108
Abbildung 102 - Grundentwurf für "Zug-Zug" Versuch.....	109
Abbildung 103 – Geometrie der Erzeugenden für „Zug – Zug“ Versuch	109

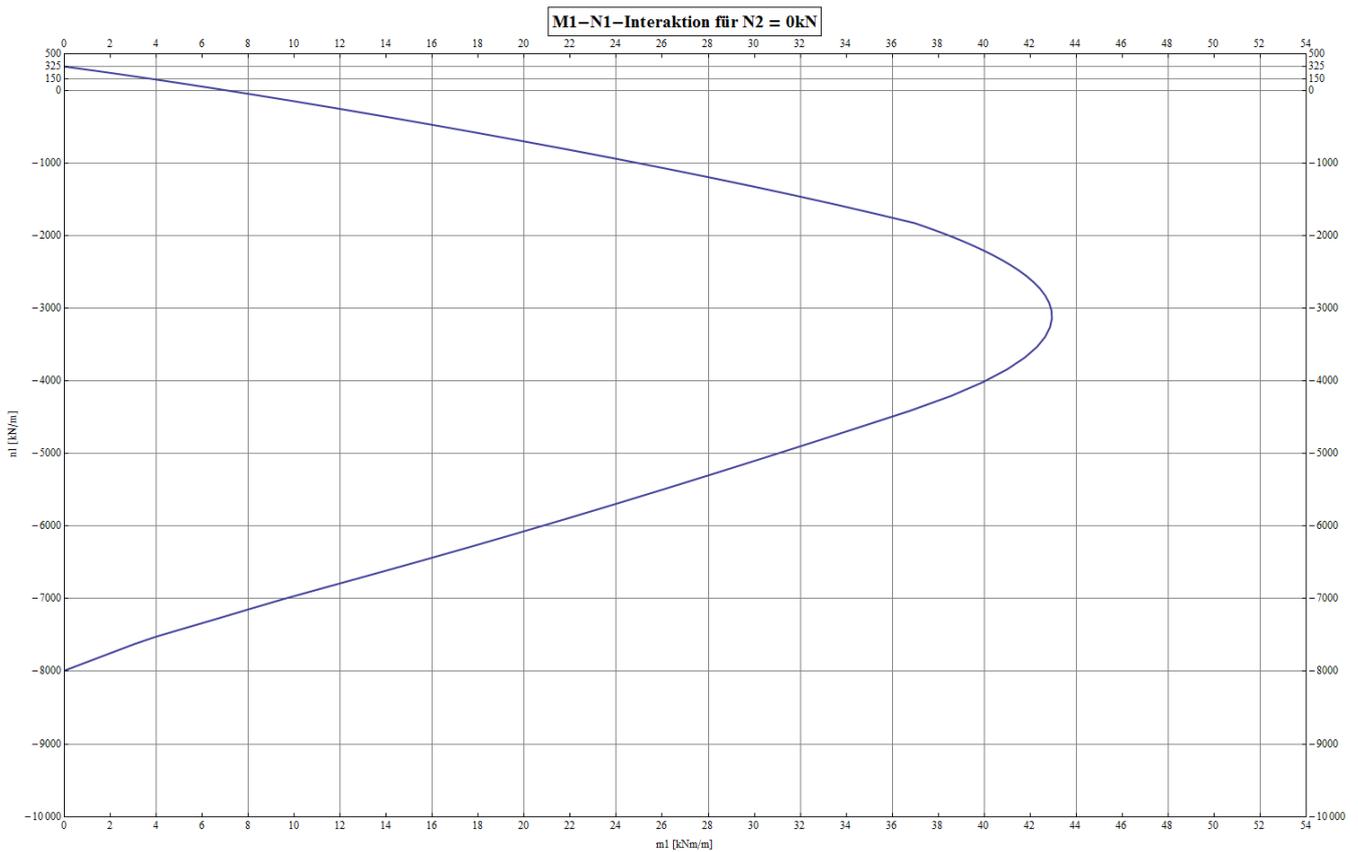
10 Tabellenverzeichnis

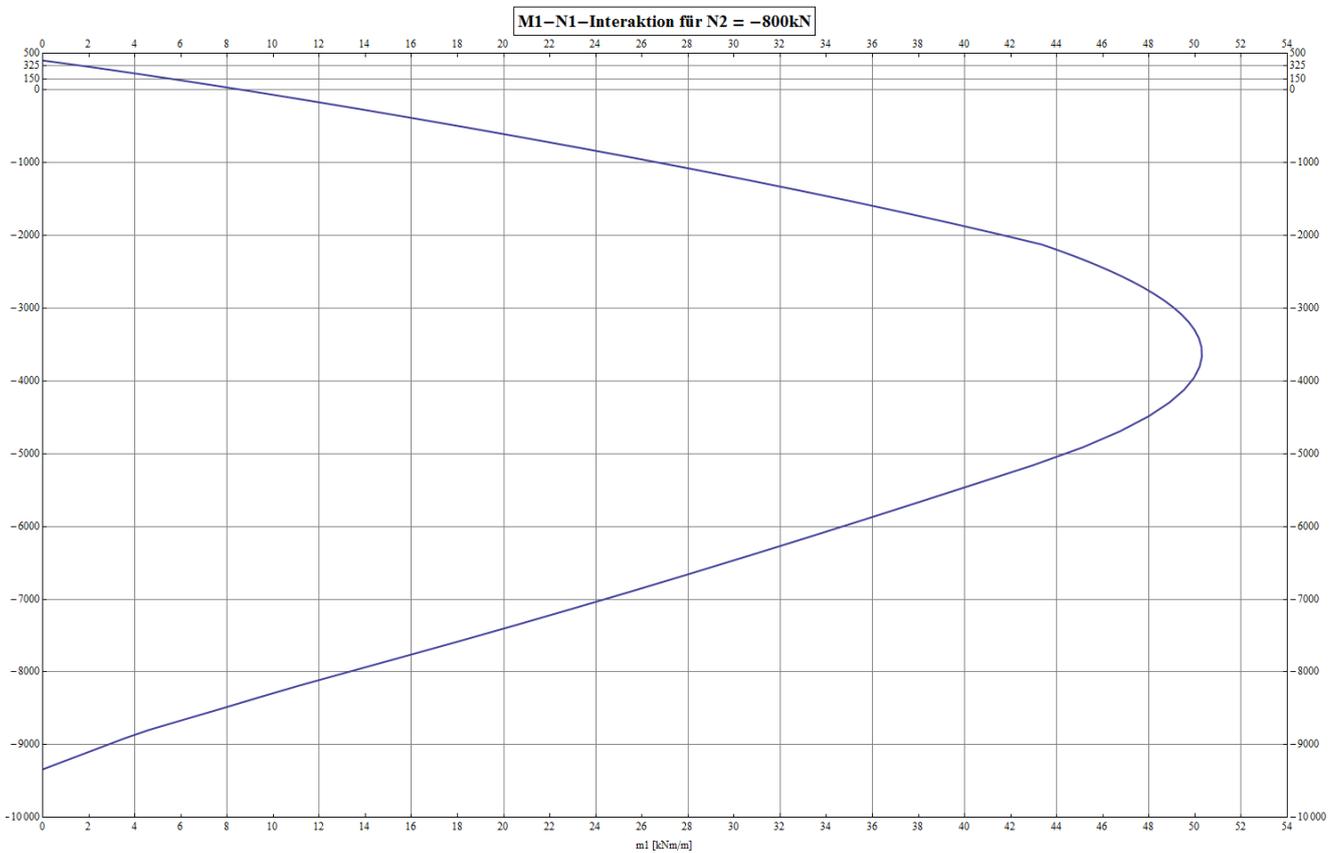
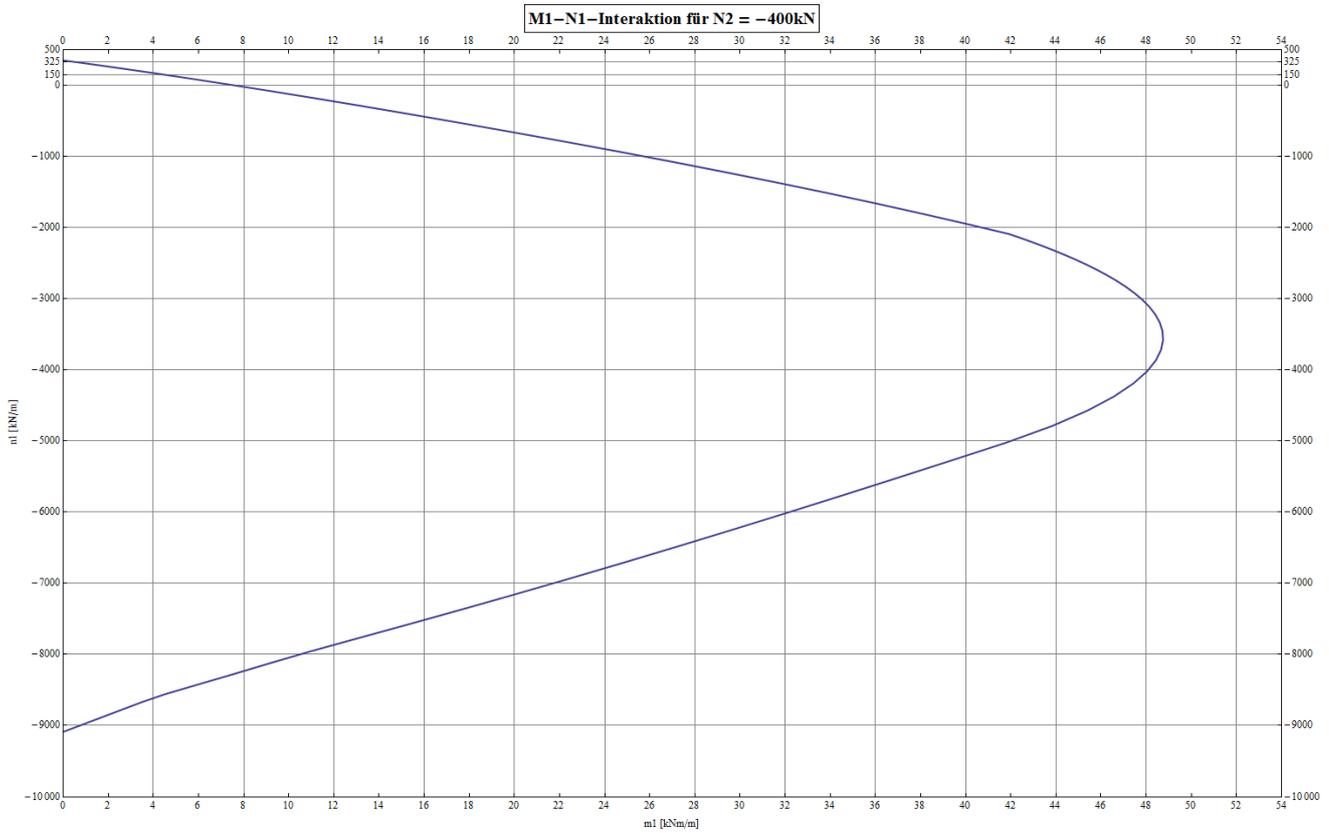
Tabelle 1 - Übersicht der Schnittkraftvorzeichen für die Systeme aus der Variantenstudie	41
Tabelle 2 - Frischbetoneigenschaften	68
Tabelle 3 - Spannungen und Schnittkräfte im Wellendach	92
Tabelle 4 - Schnittkräfte für Versuchskonzept "Druck - Zug"	99
Tabelle 5 - Schnittkräfte für angepasstes Versuchskonzept "Druck - Zug" mit veränderlichen Querschnitt bis $s = 0,14$ m	104
Tabelle 6 - Schnittkräfte für Versuchskonzept "Zug - Zug" nach Abbildung 103.....	110

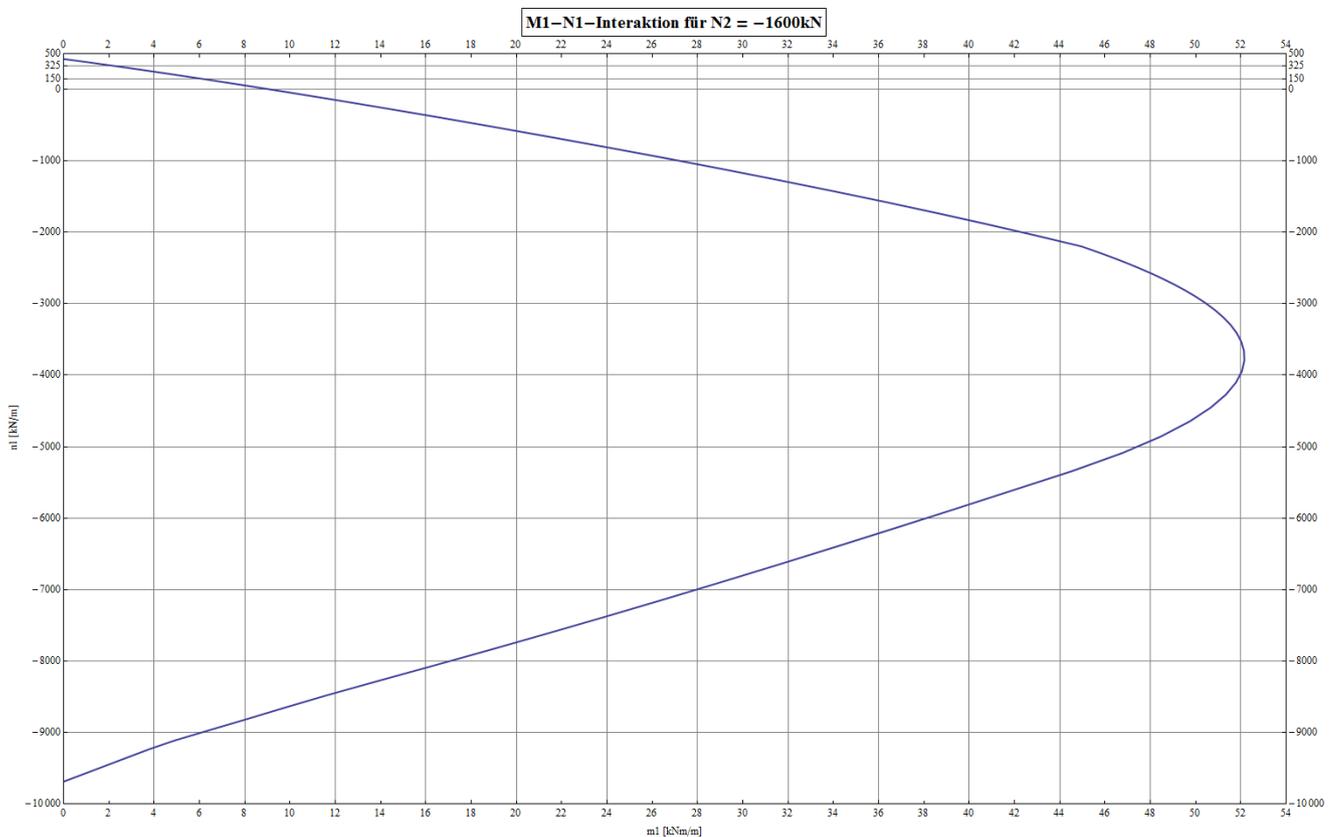
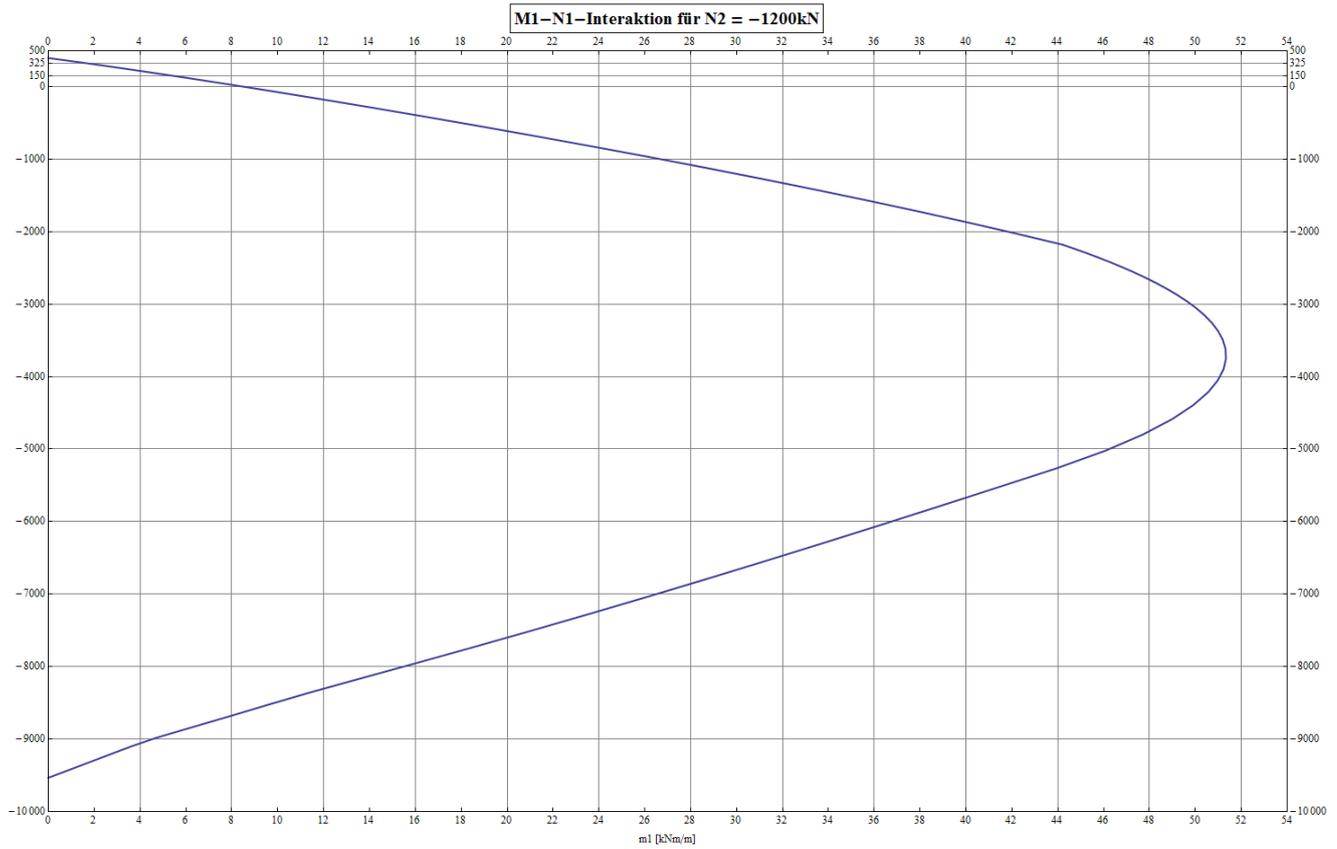
11 Anhang

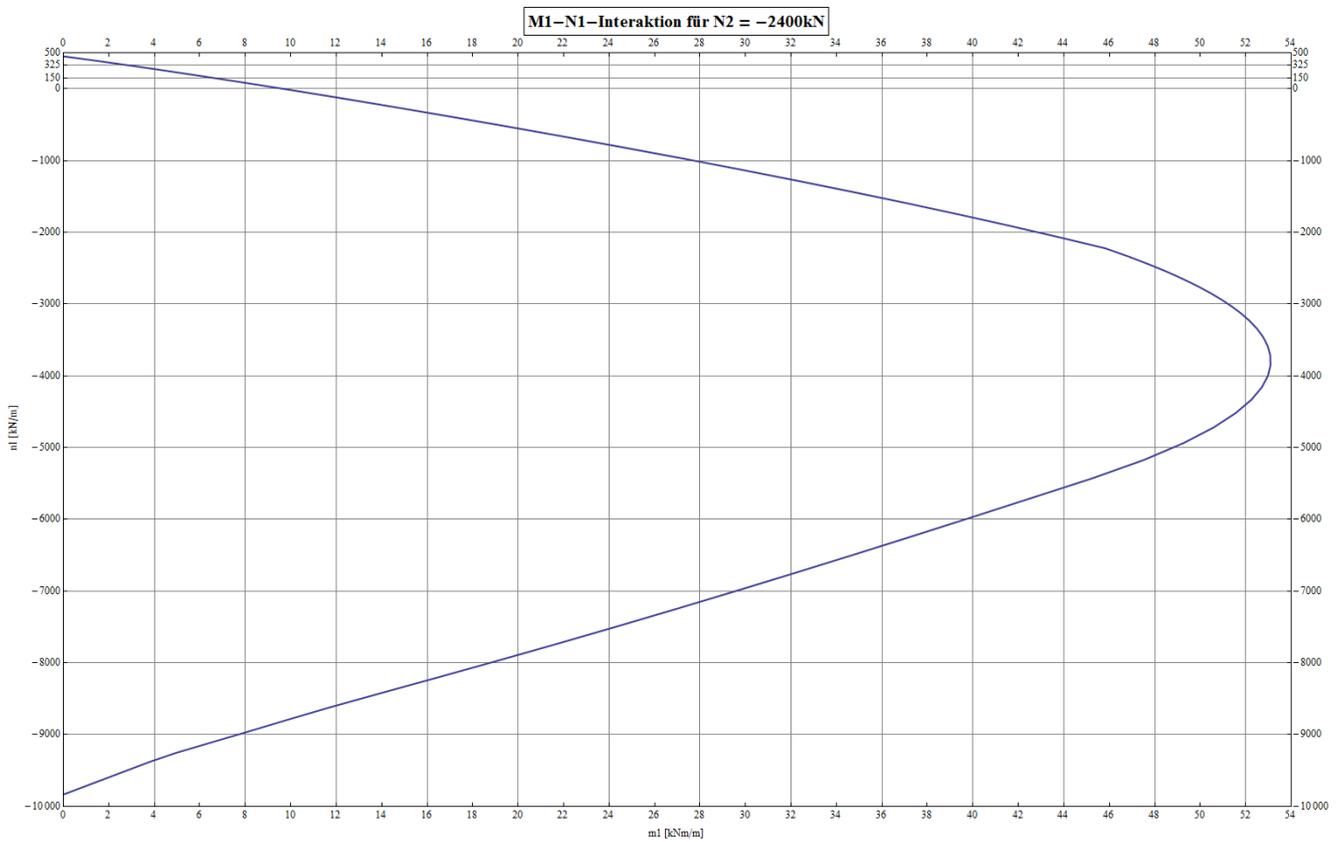
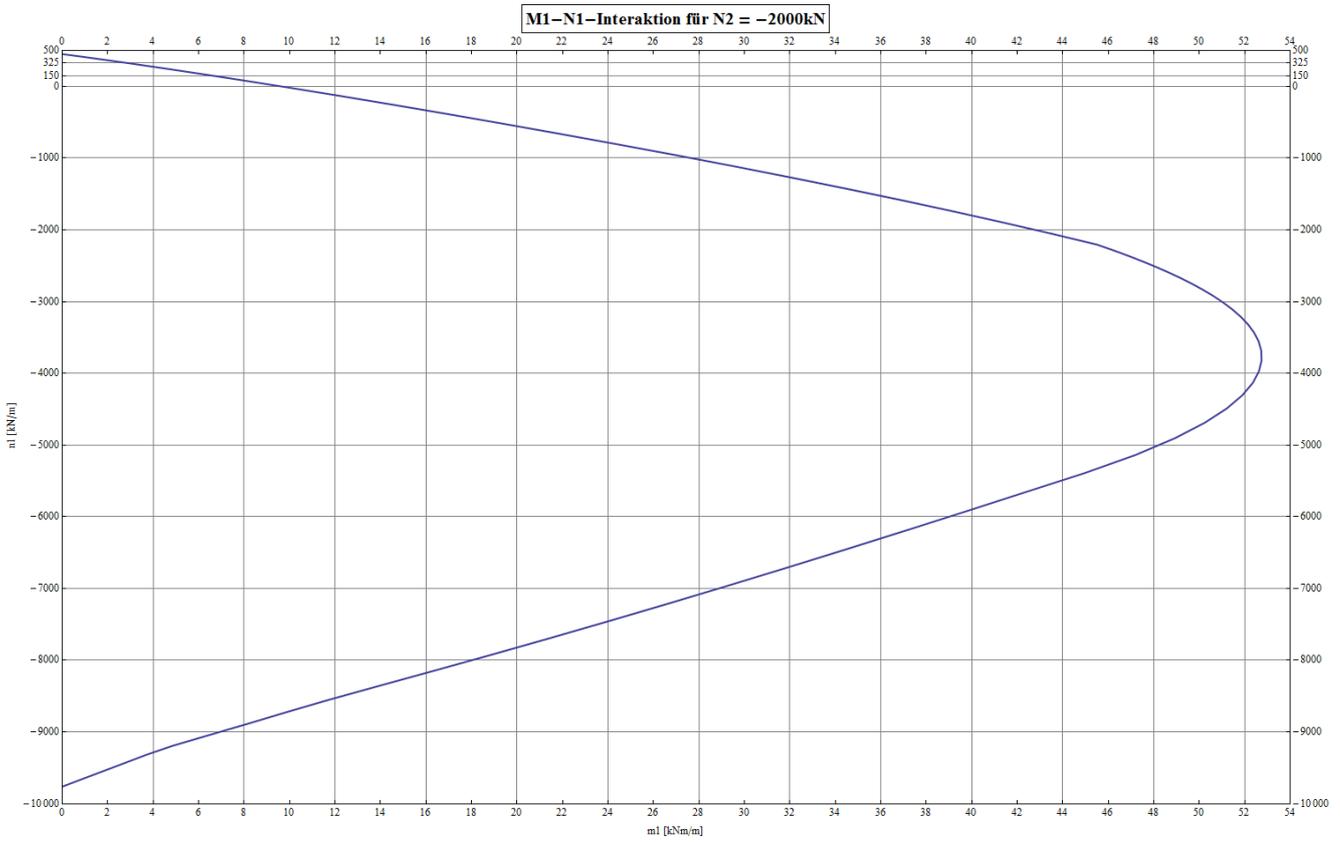
11.1 $M_1-N_1-N_2$ -Interaktionen

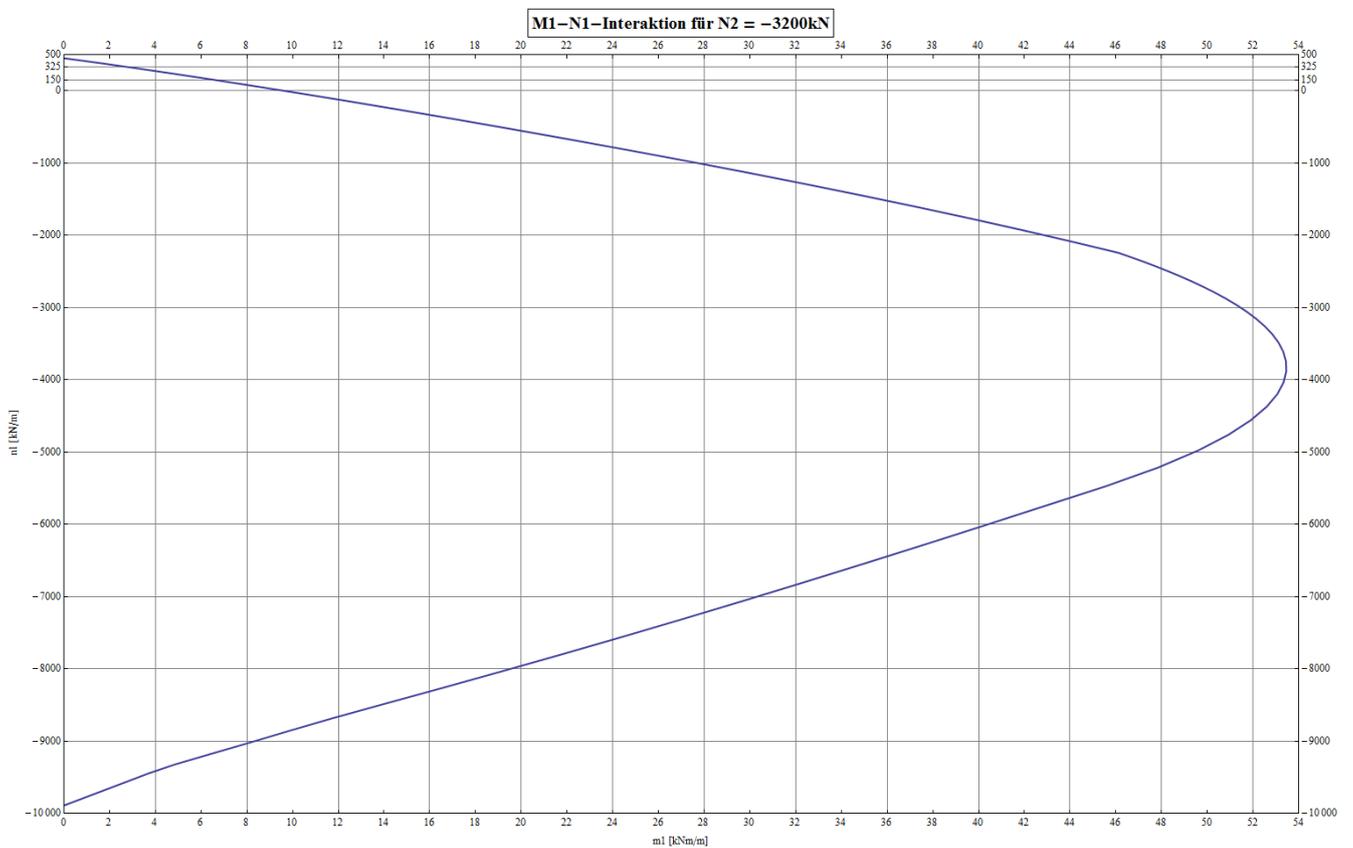
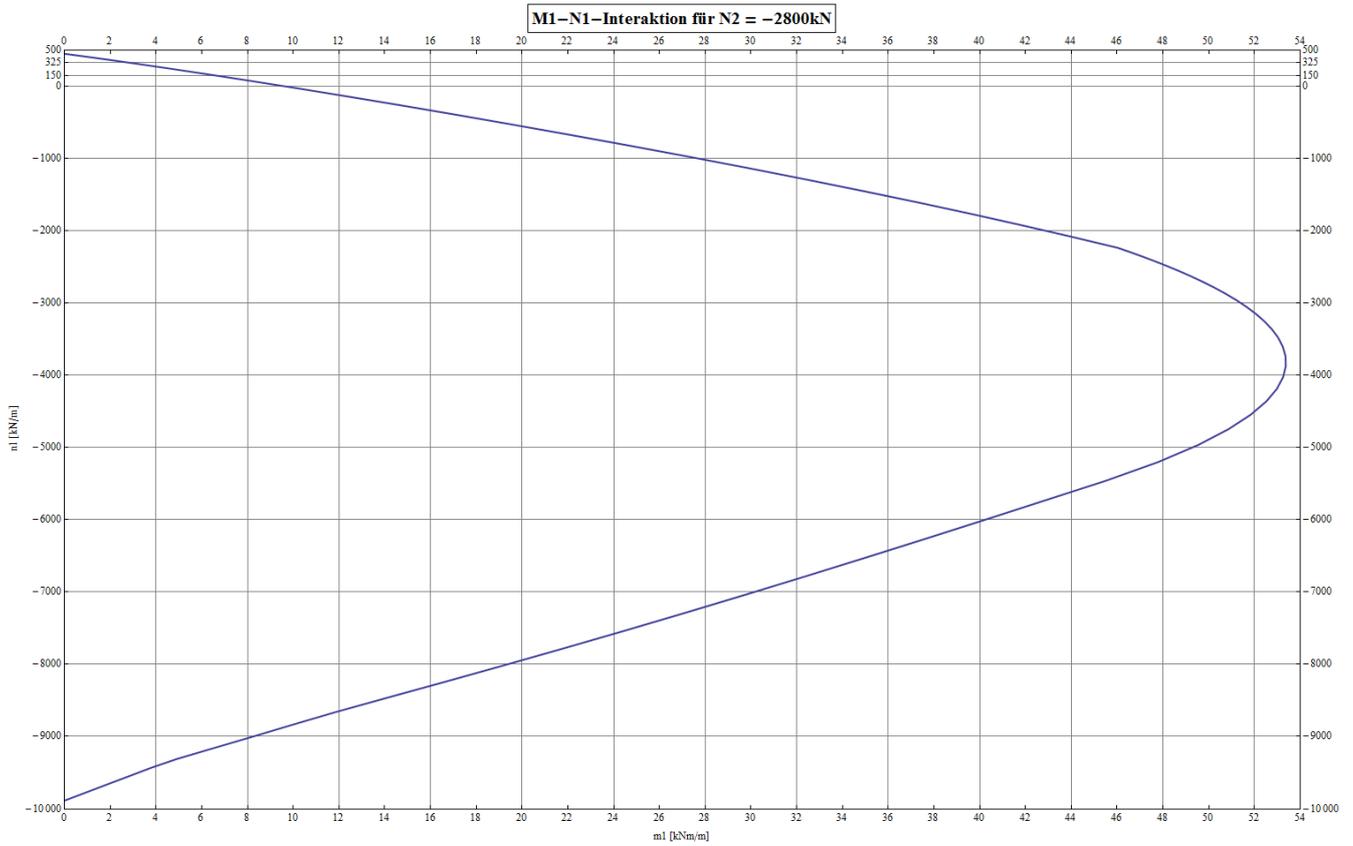
Sämtliche Momenten-Normalkraft-Interaktionskurven sind bezogen auf den für dieses Projekt verwendeten ultrahochfesten Beton, mit einem Rechteckquerschnitt von 1,0 m x 0,5 m.

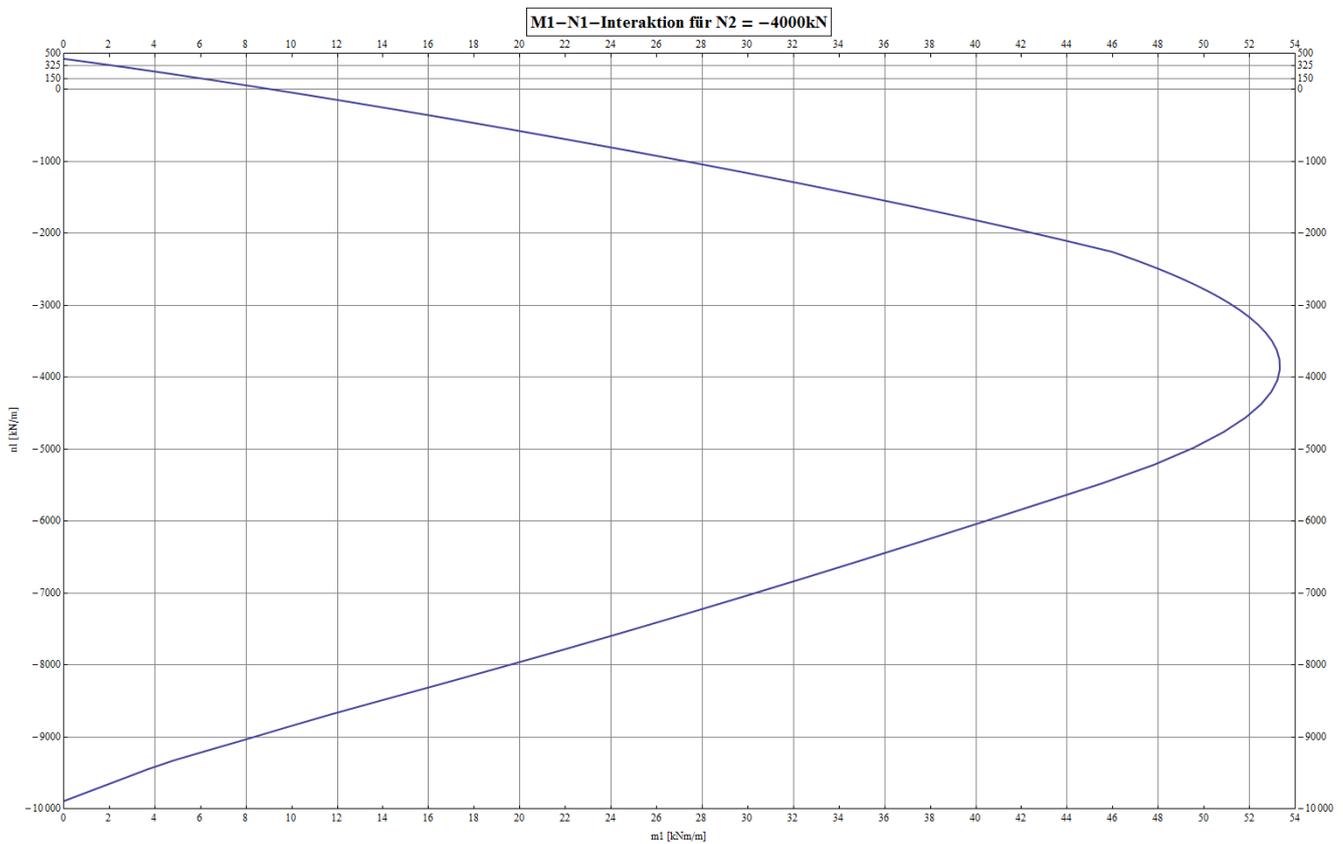
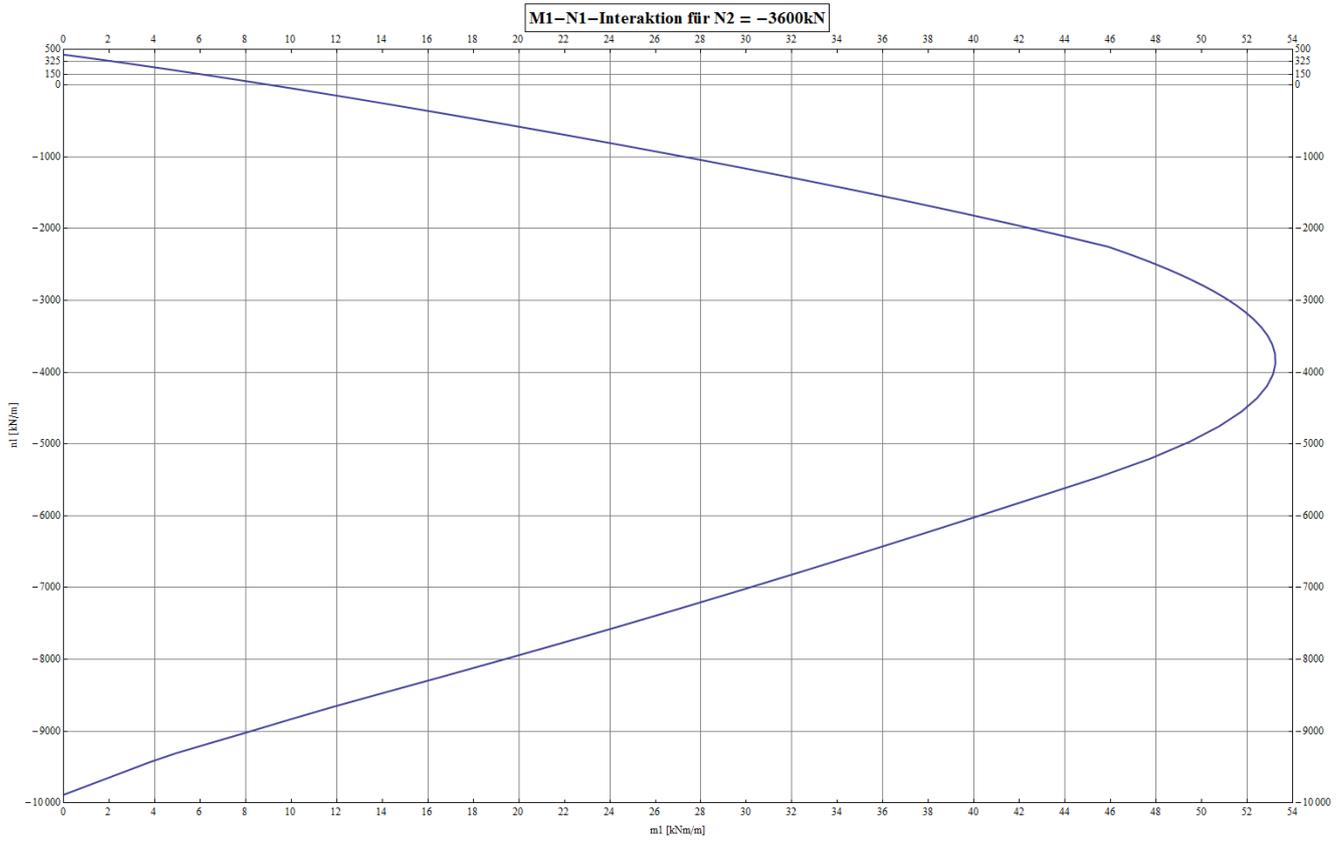


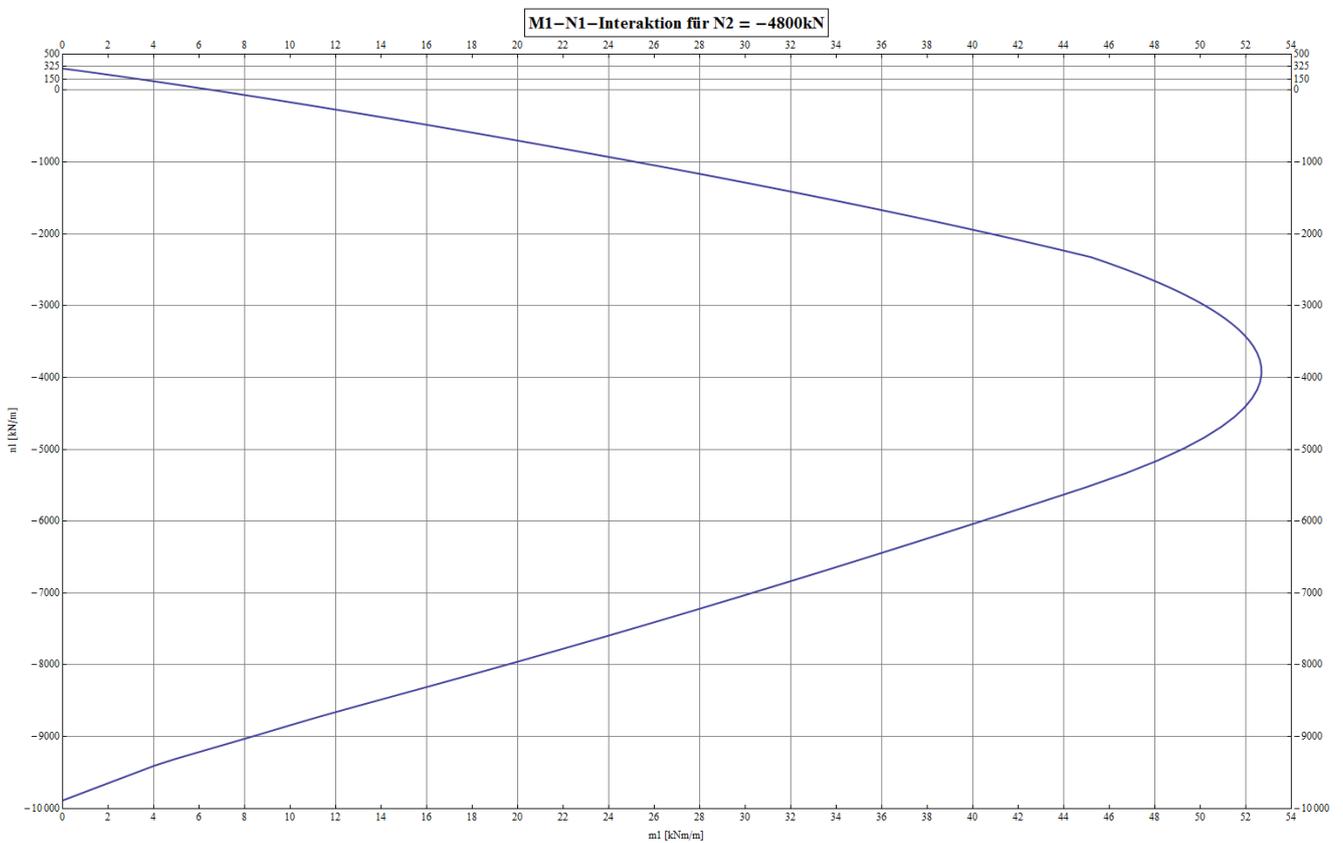
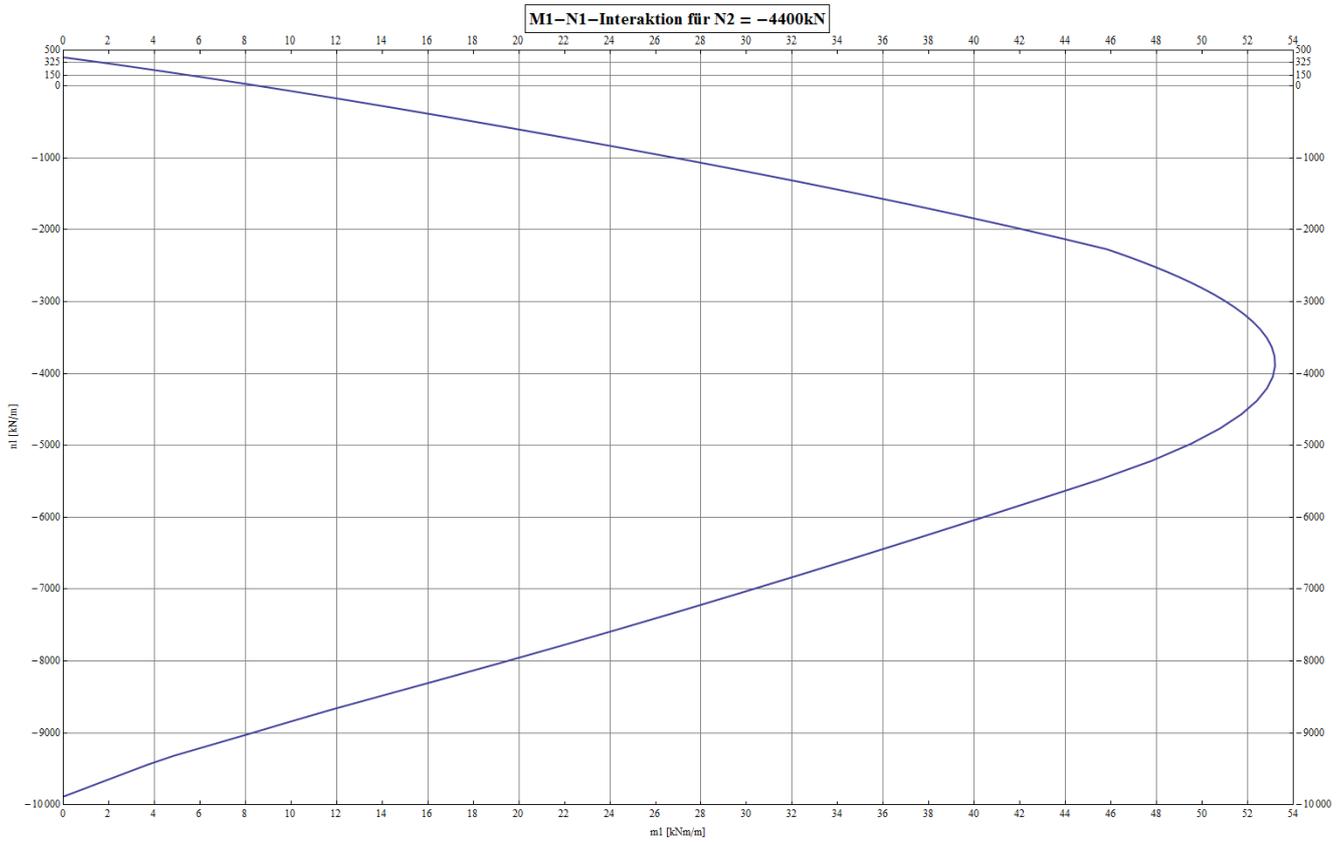


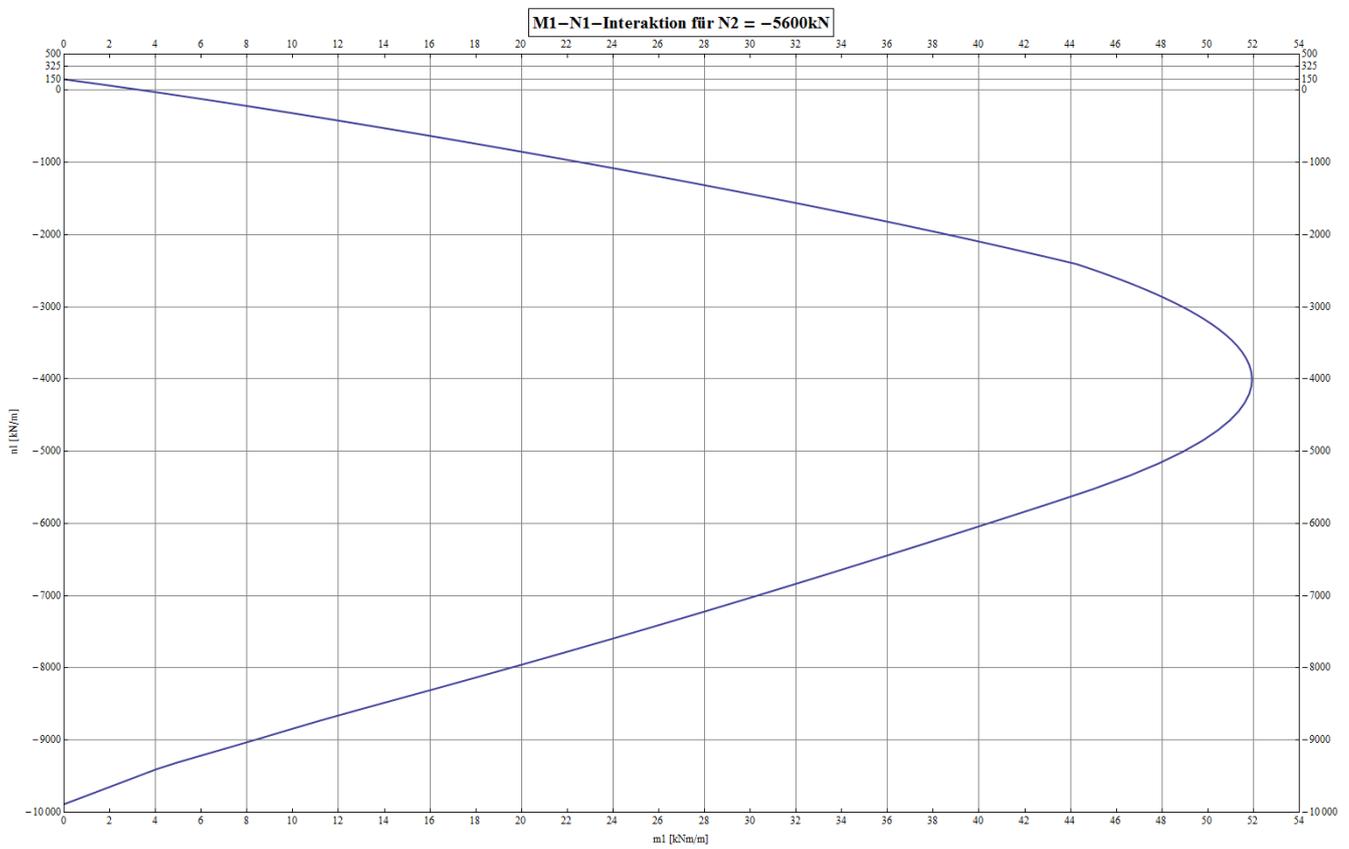
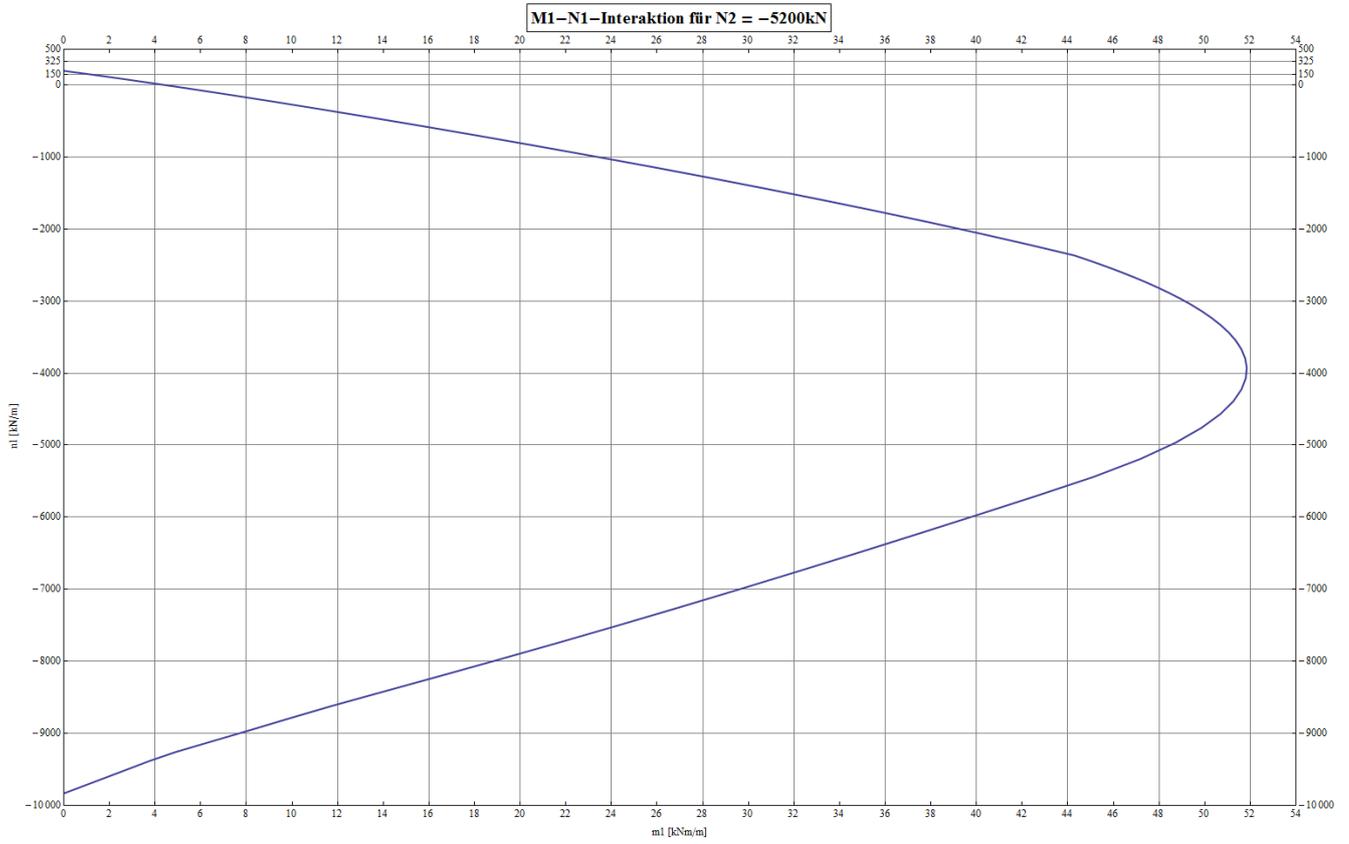


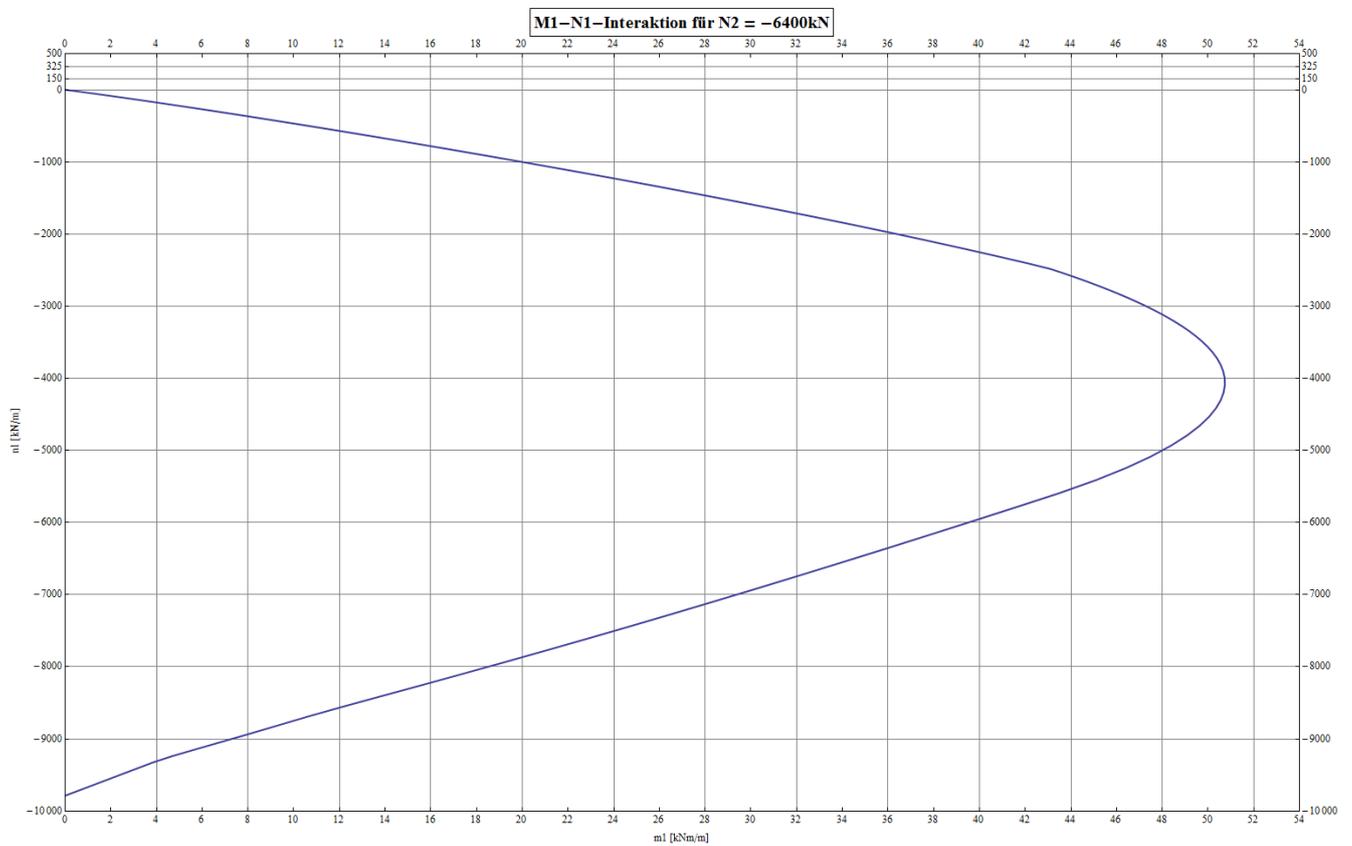
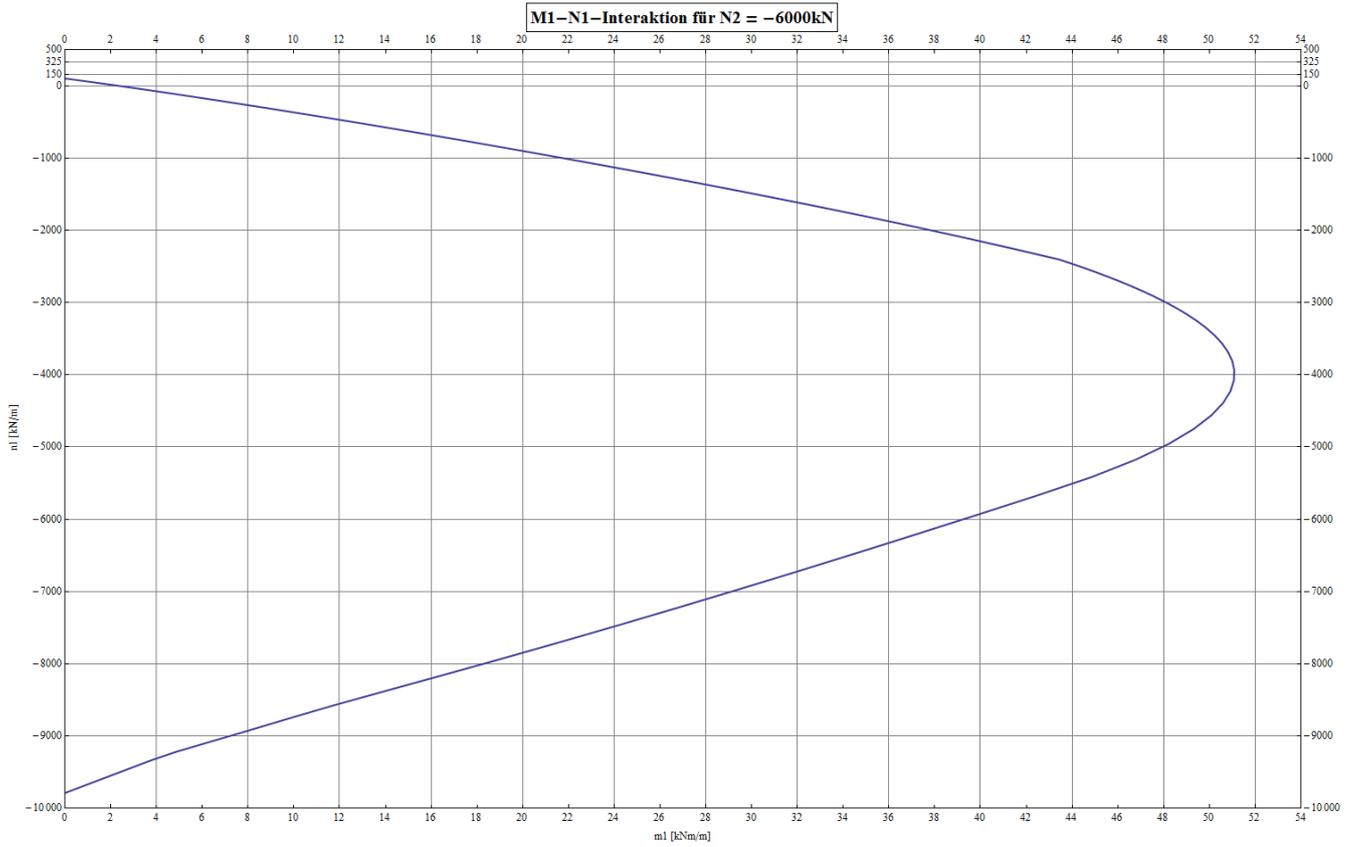


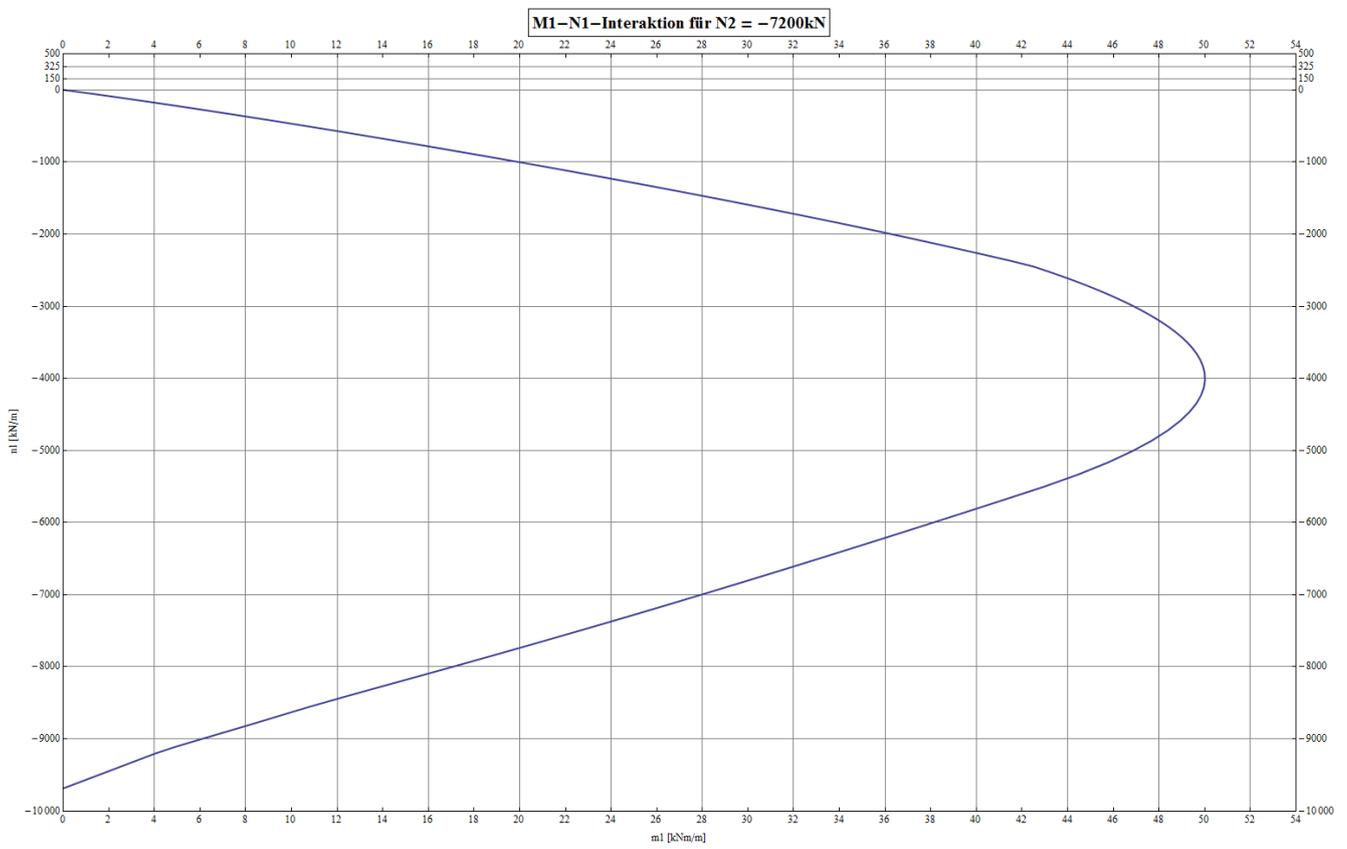
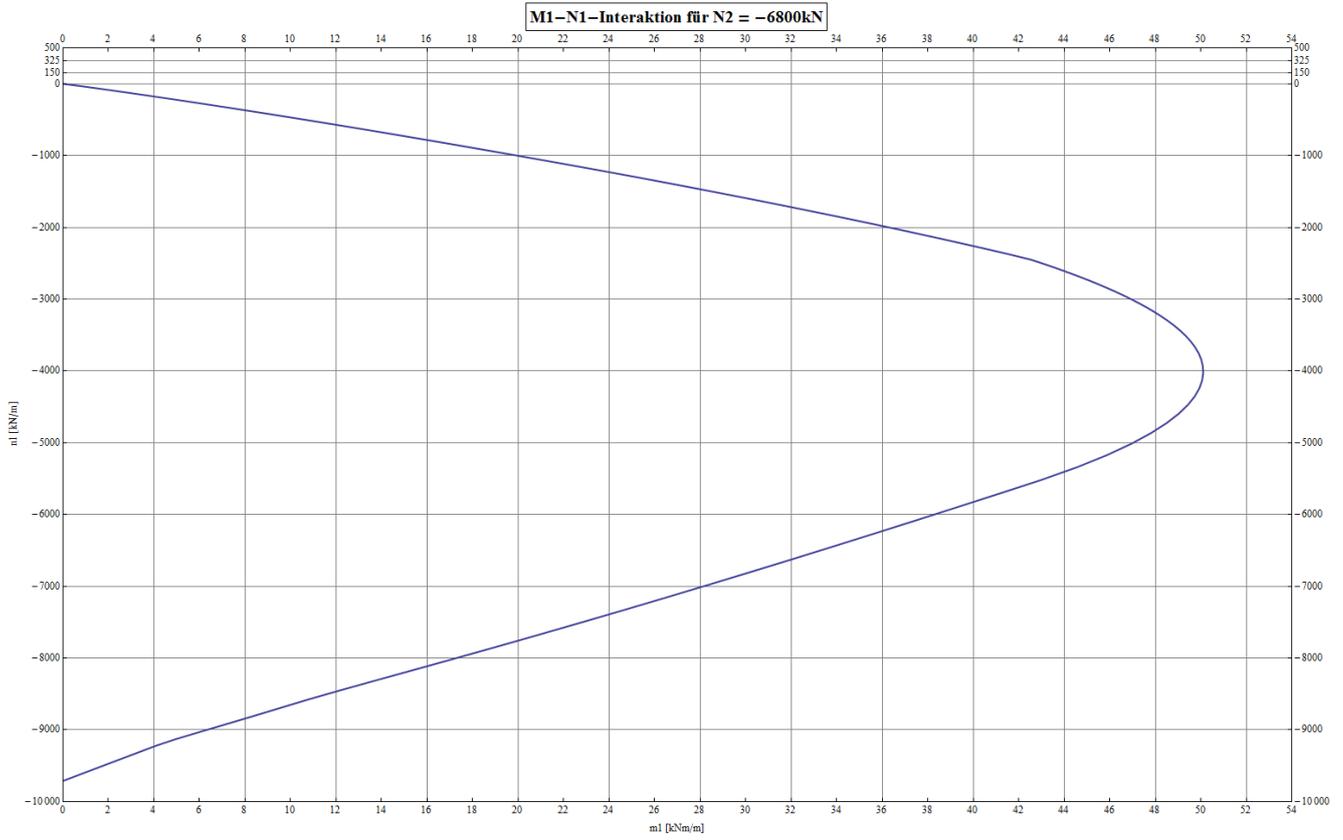


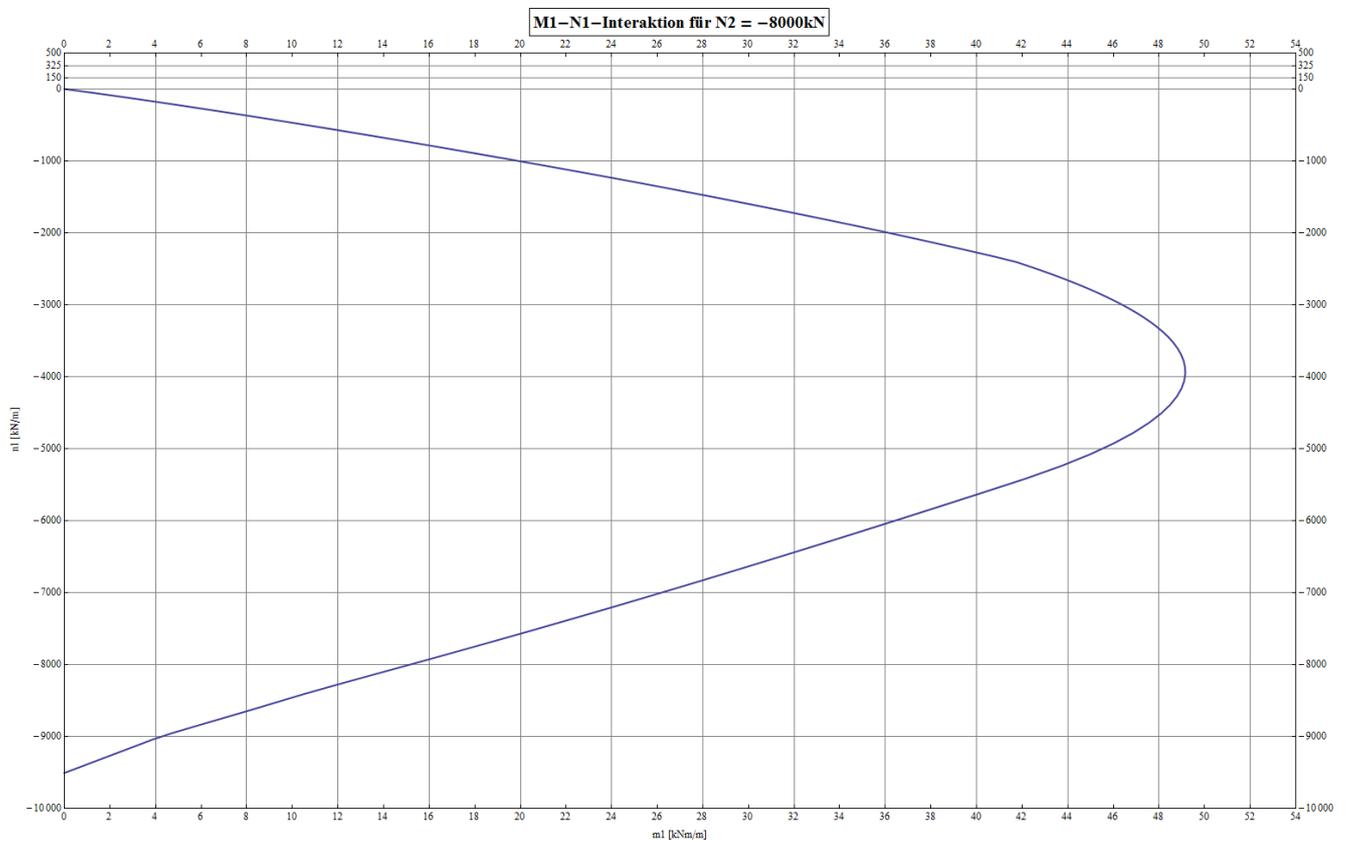
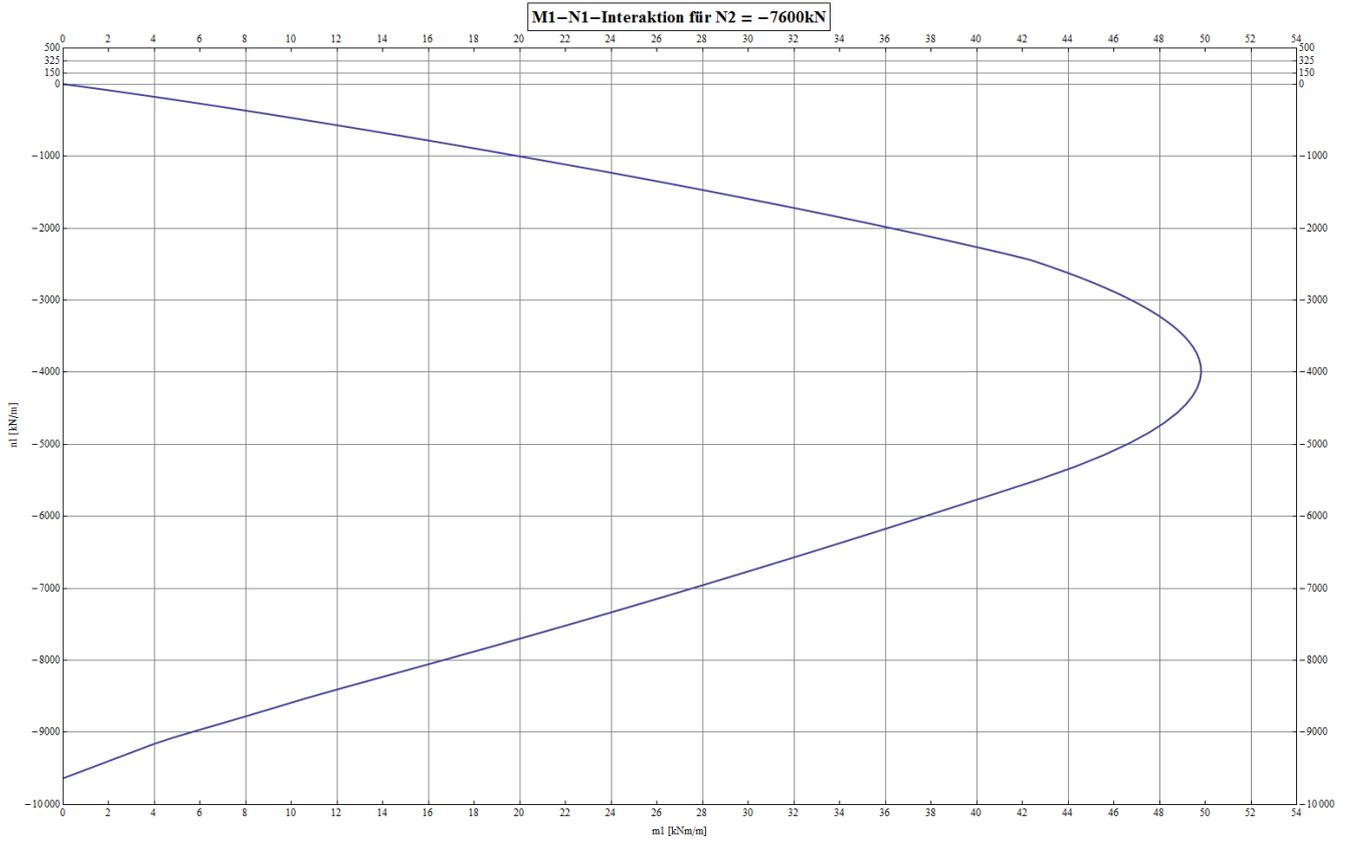


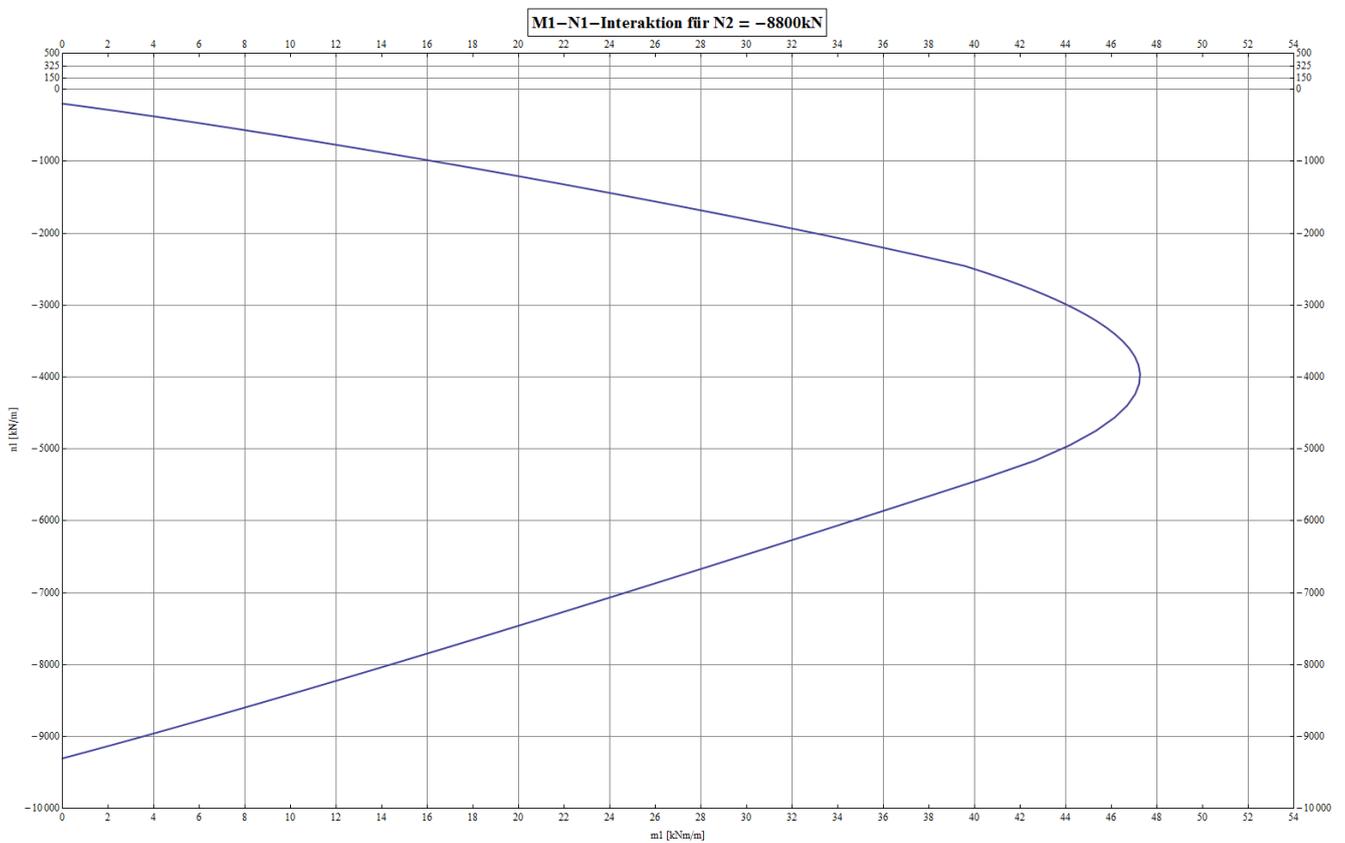
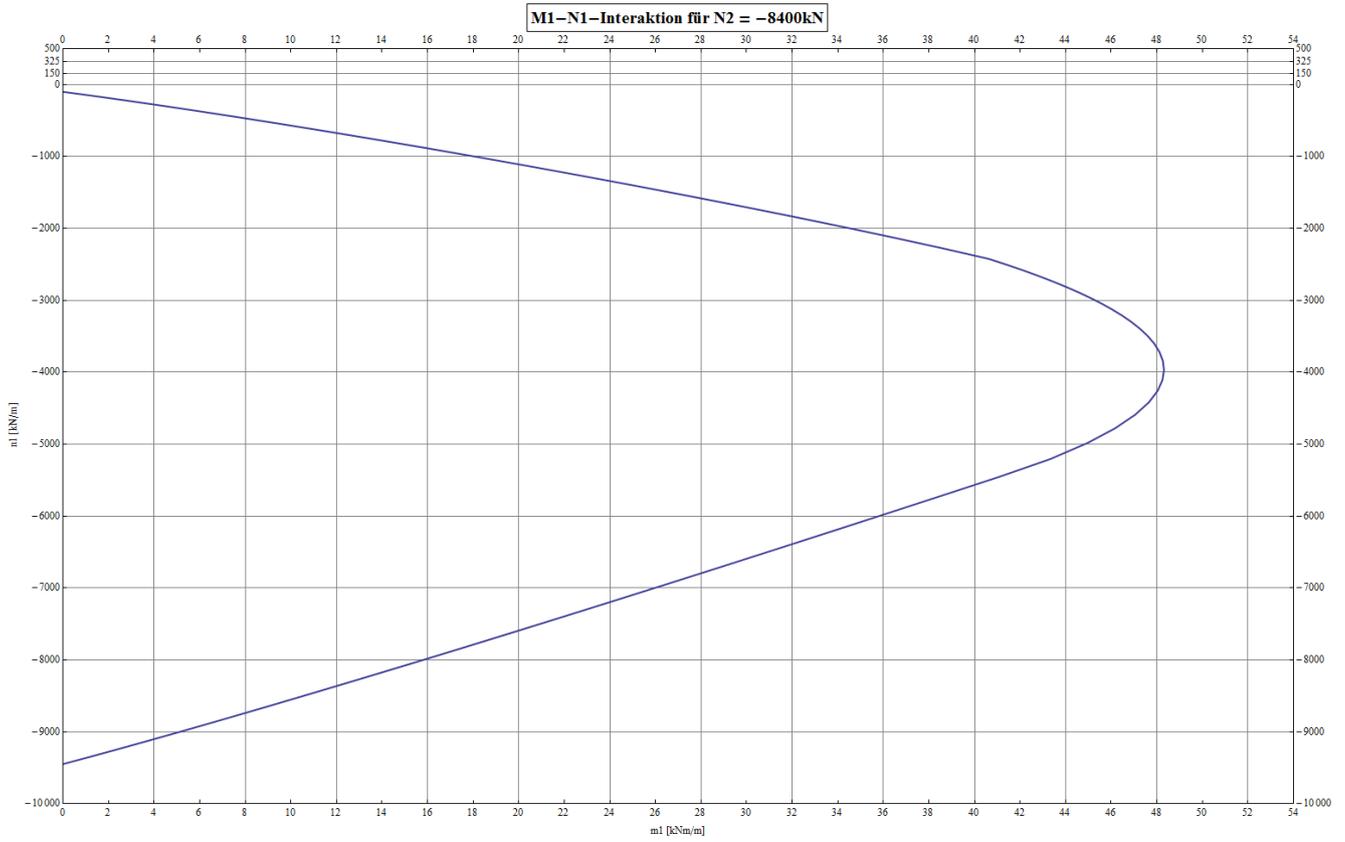


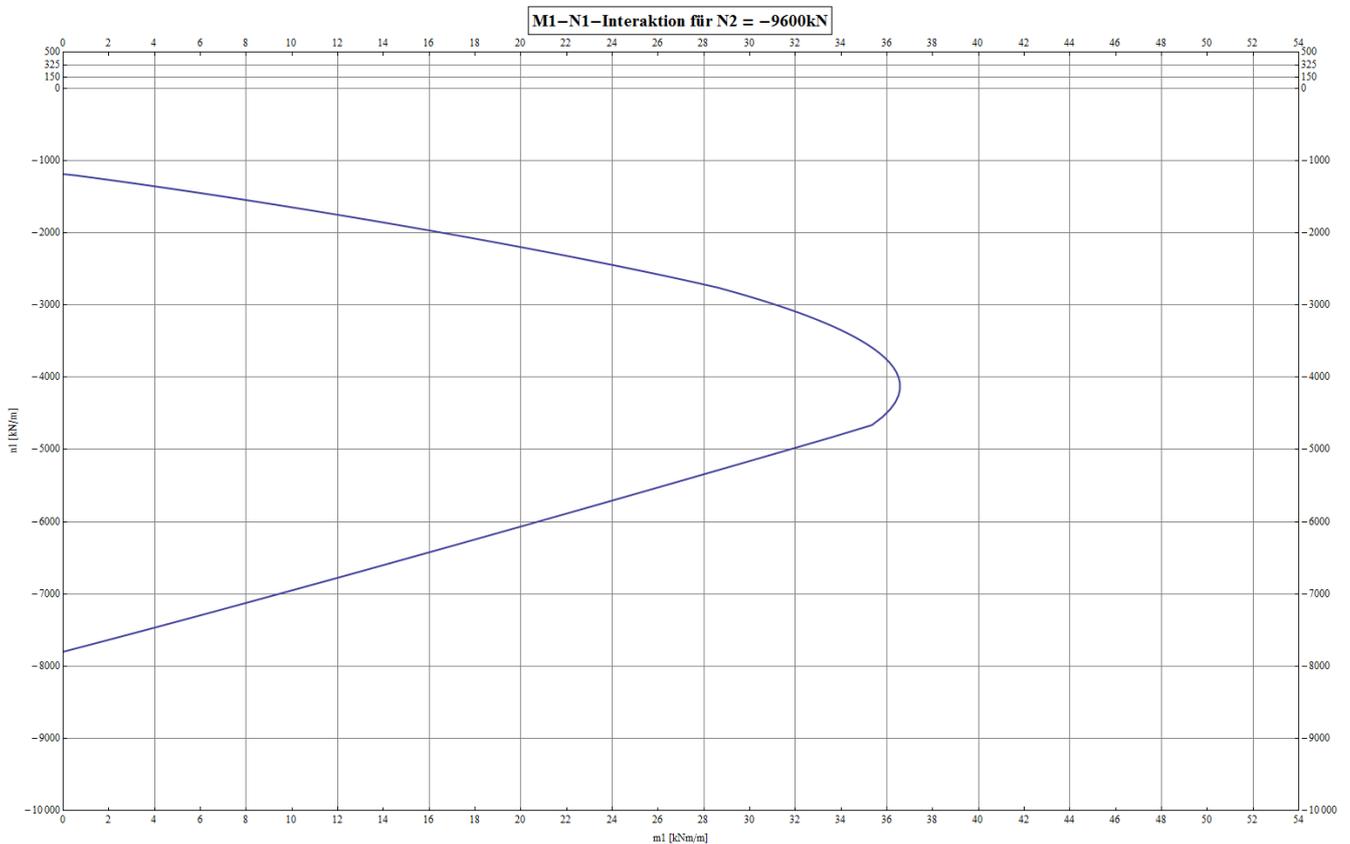
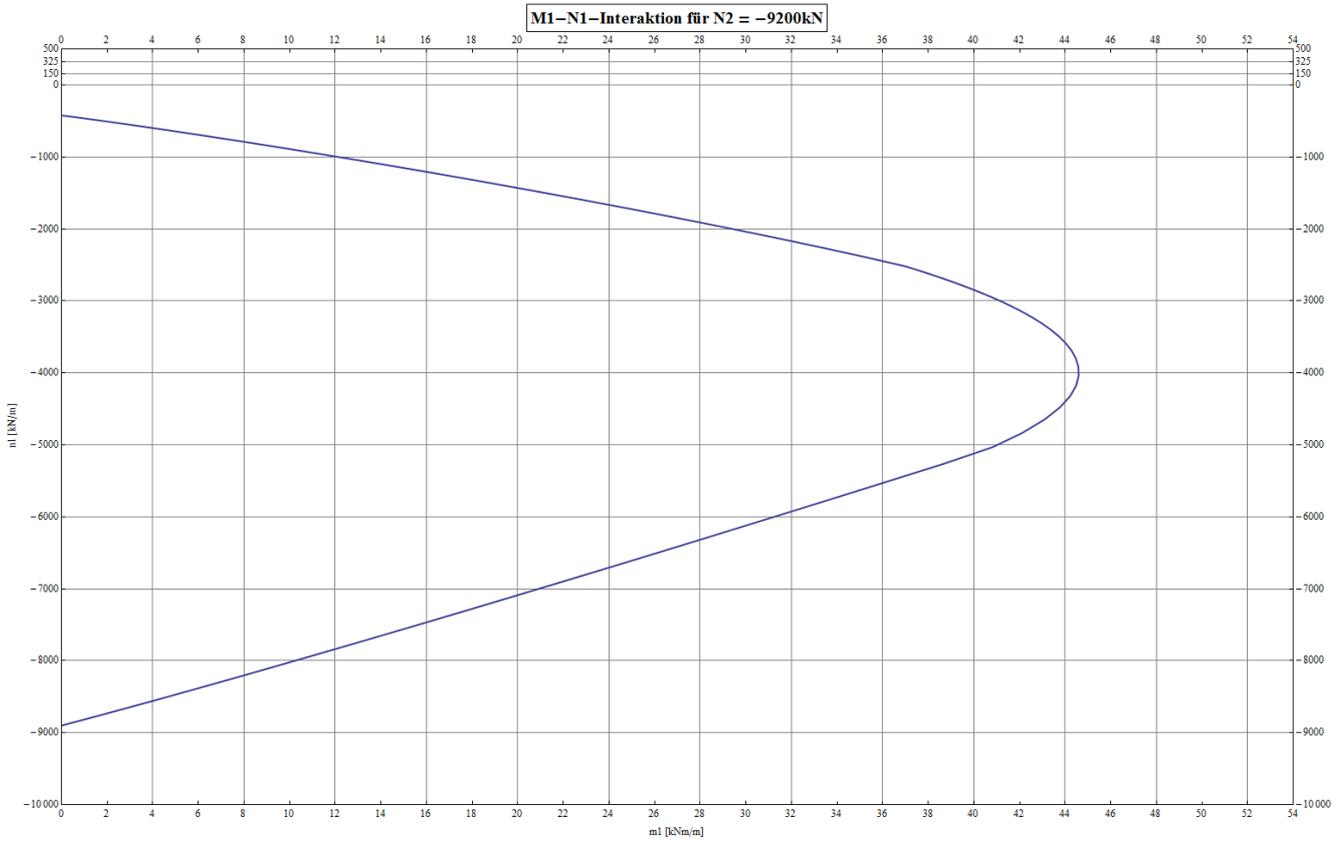


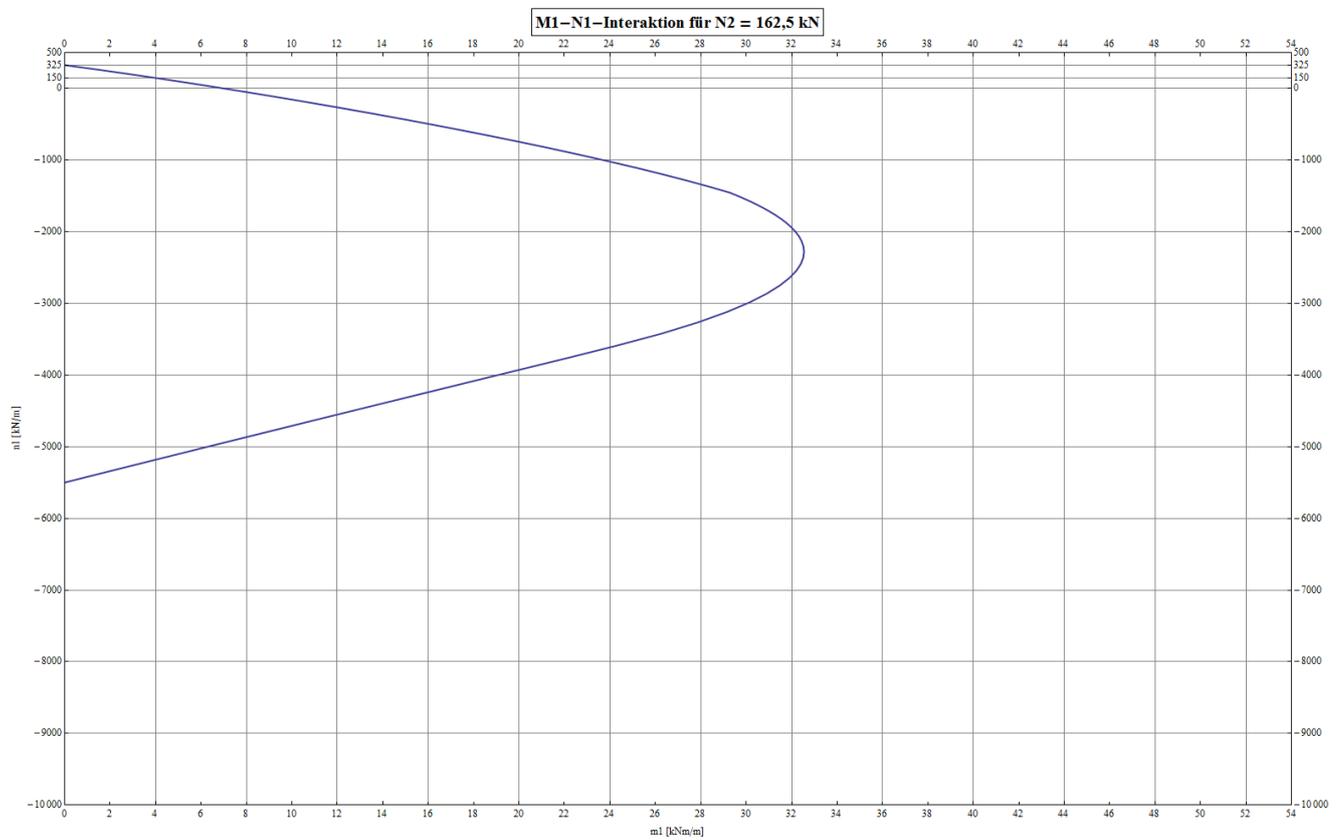
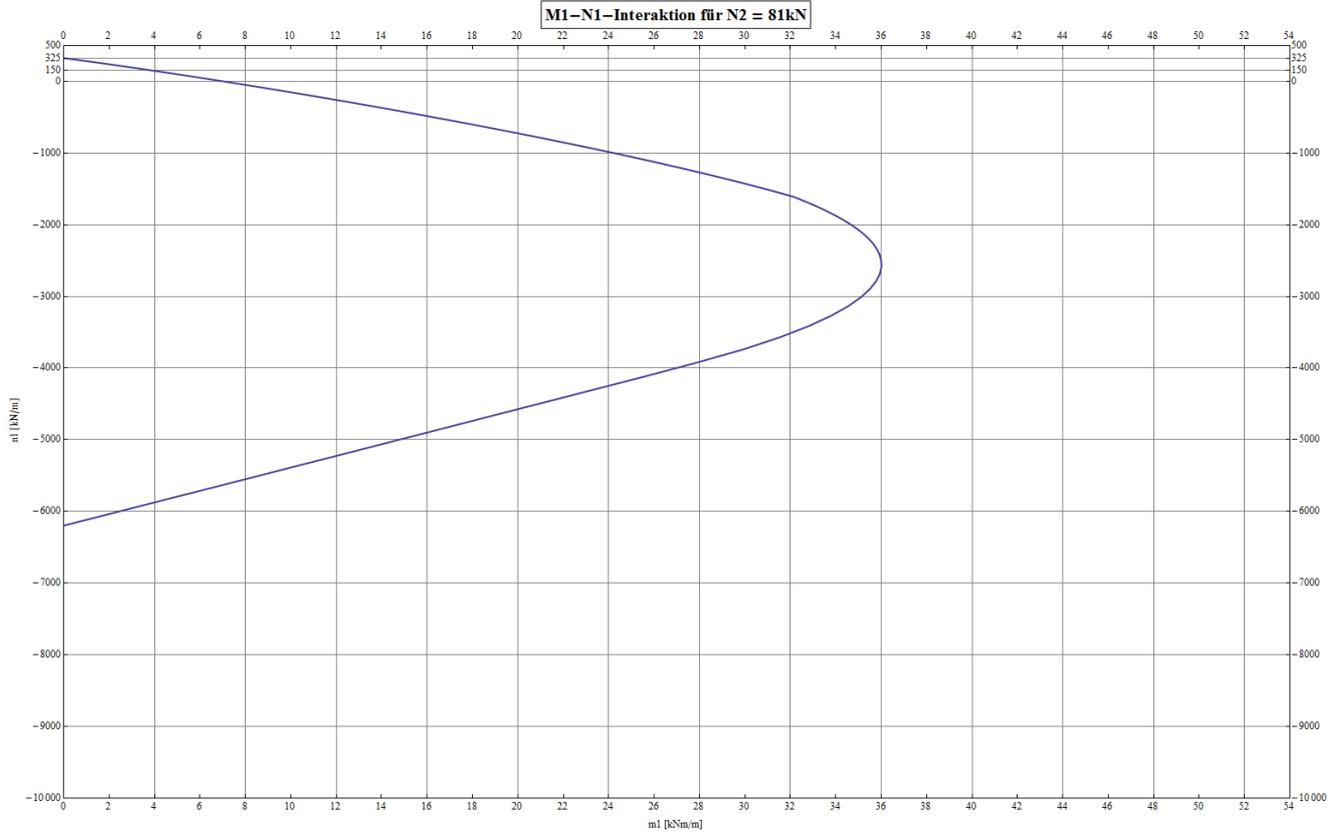


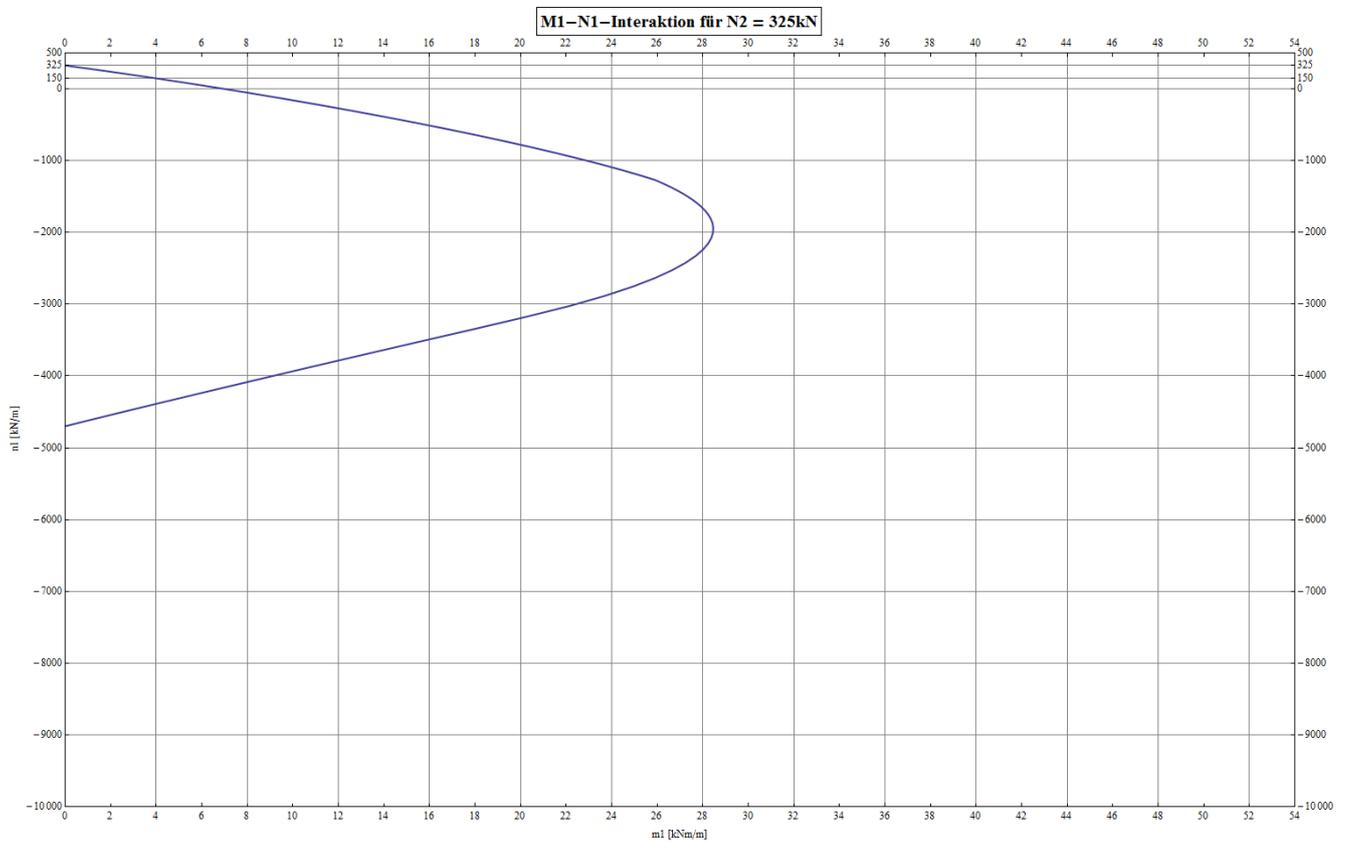
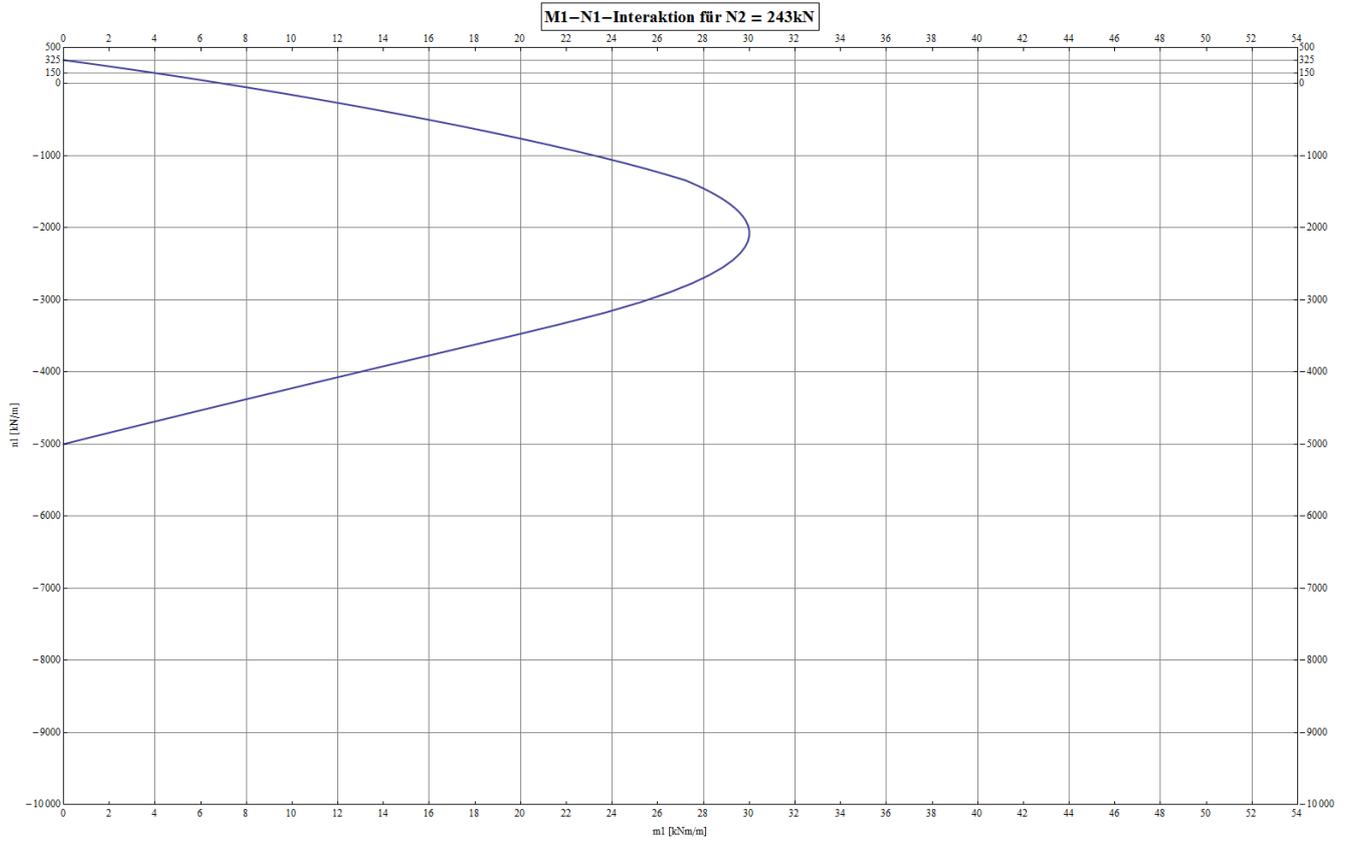




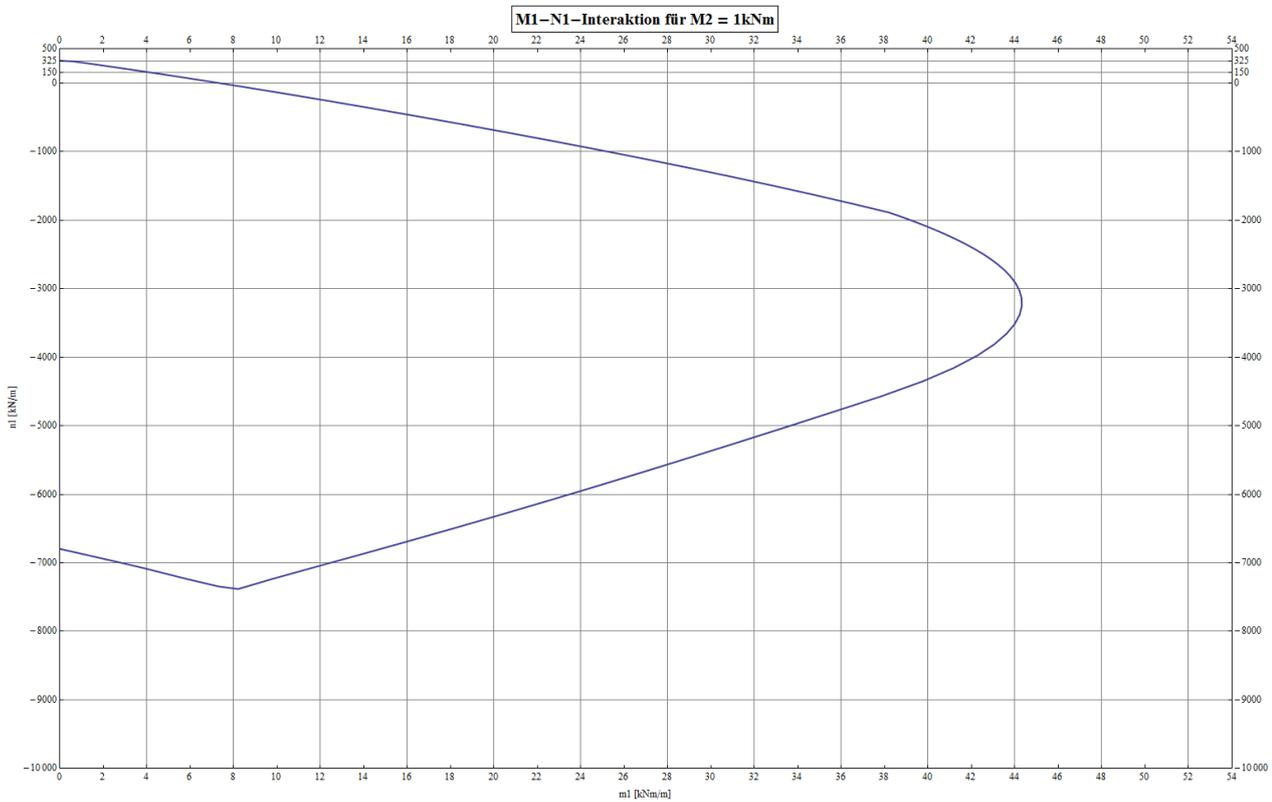
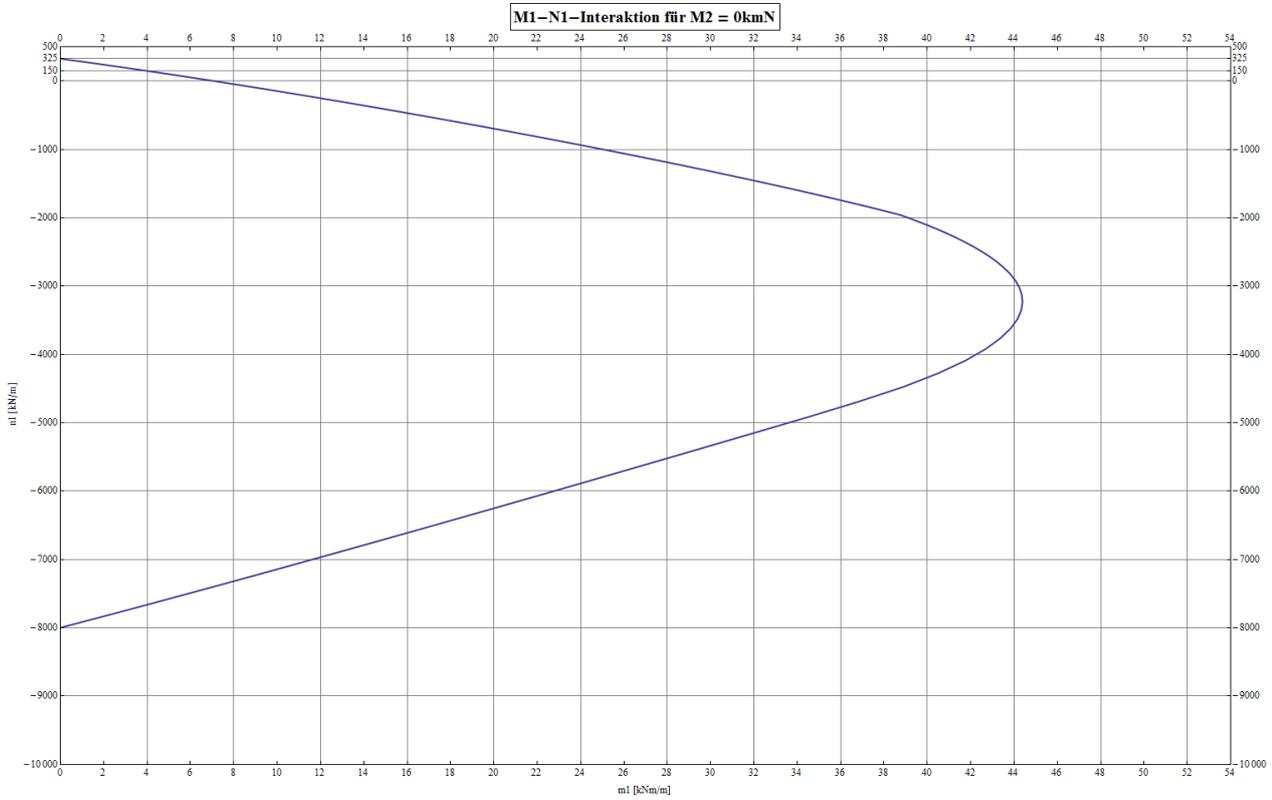


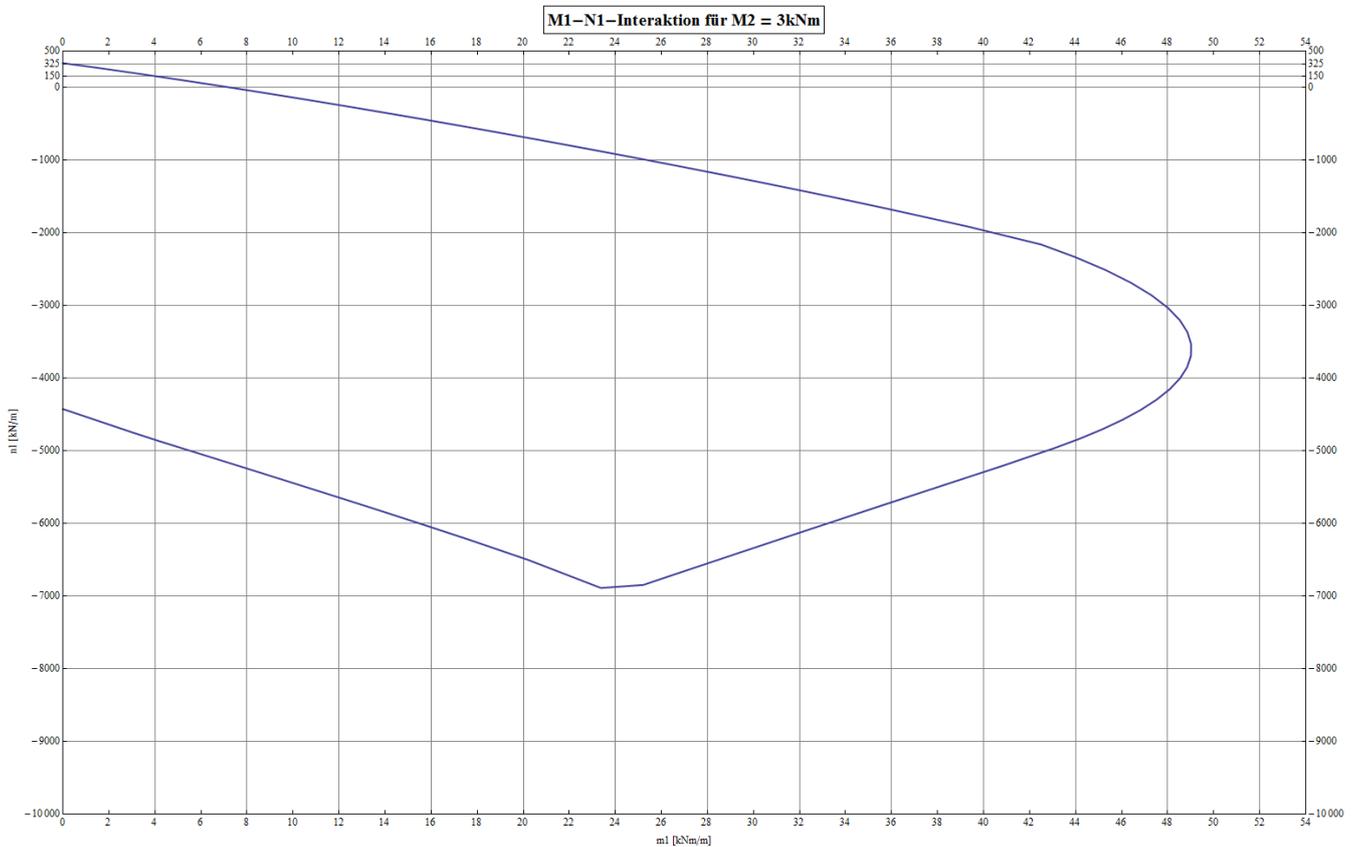
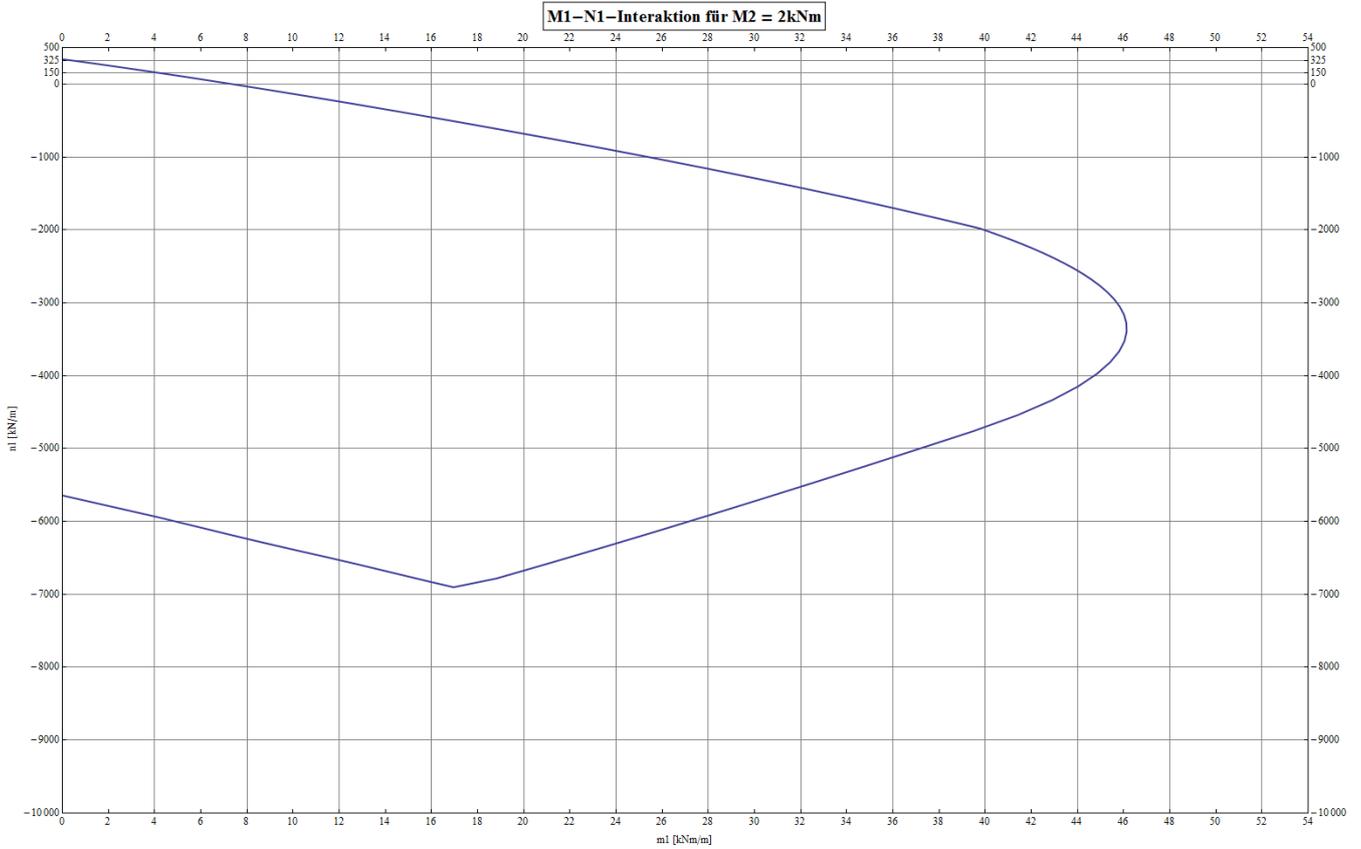


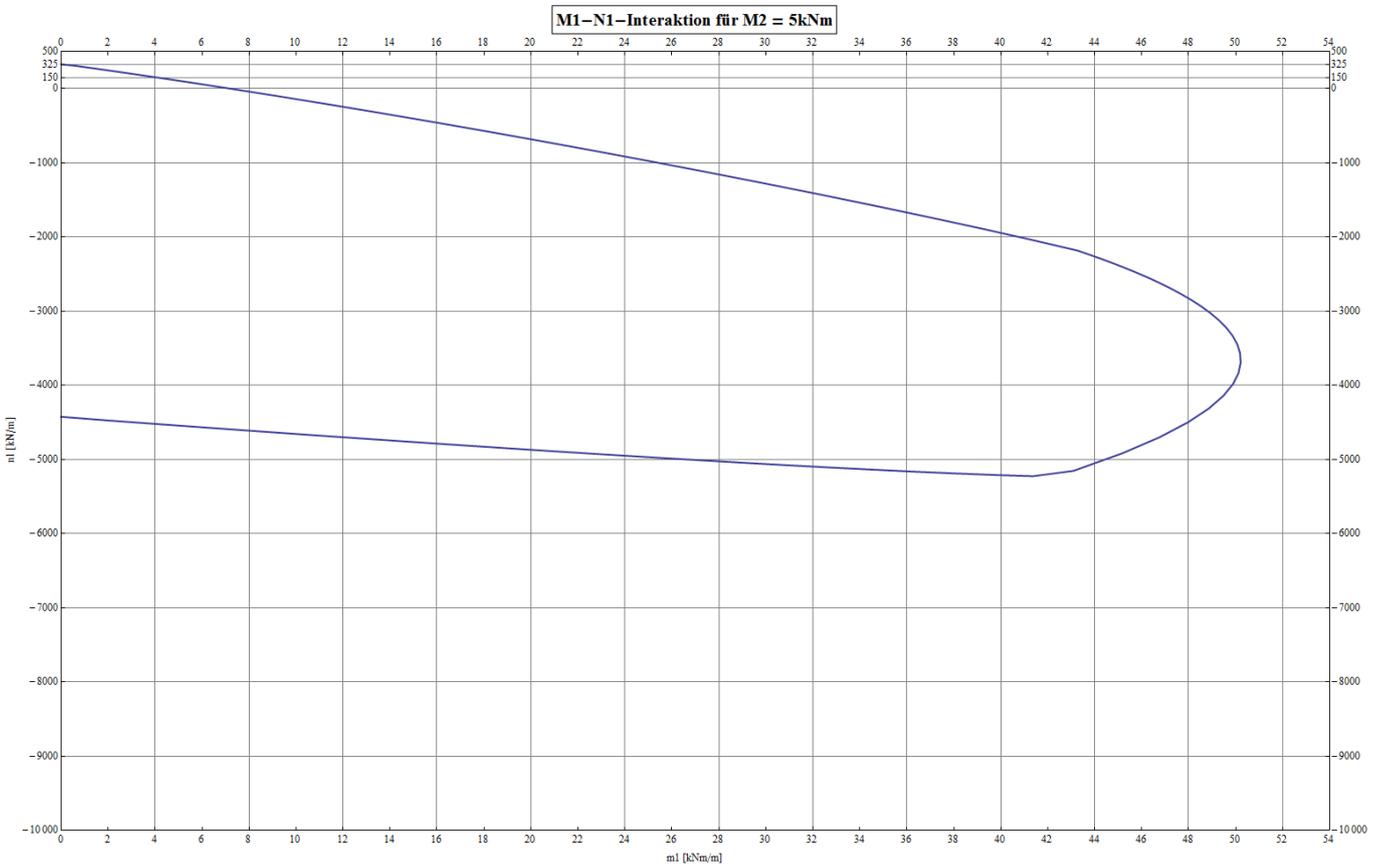
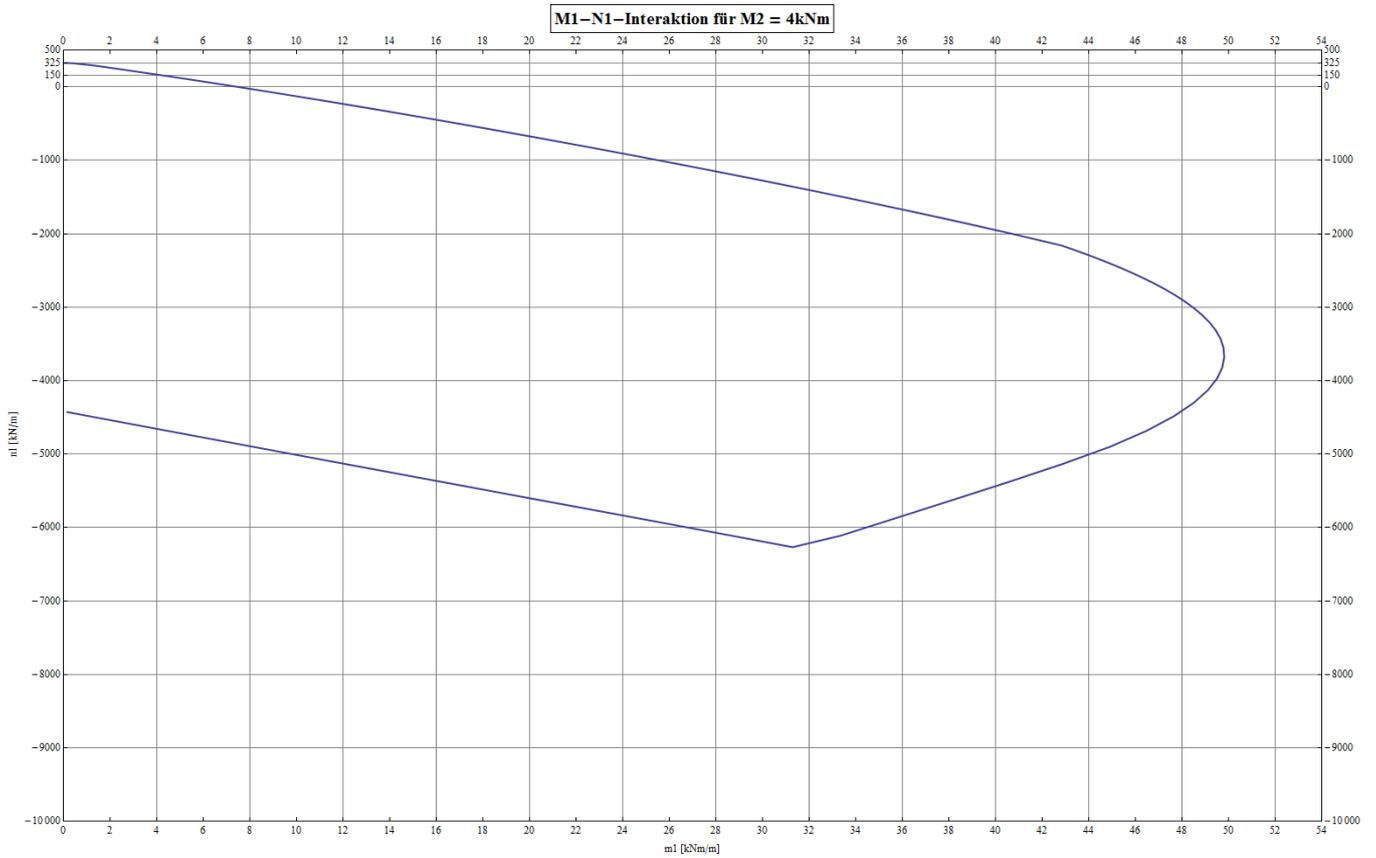


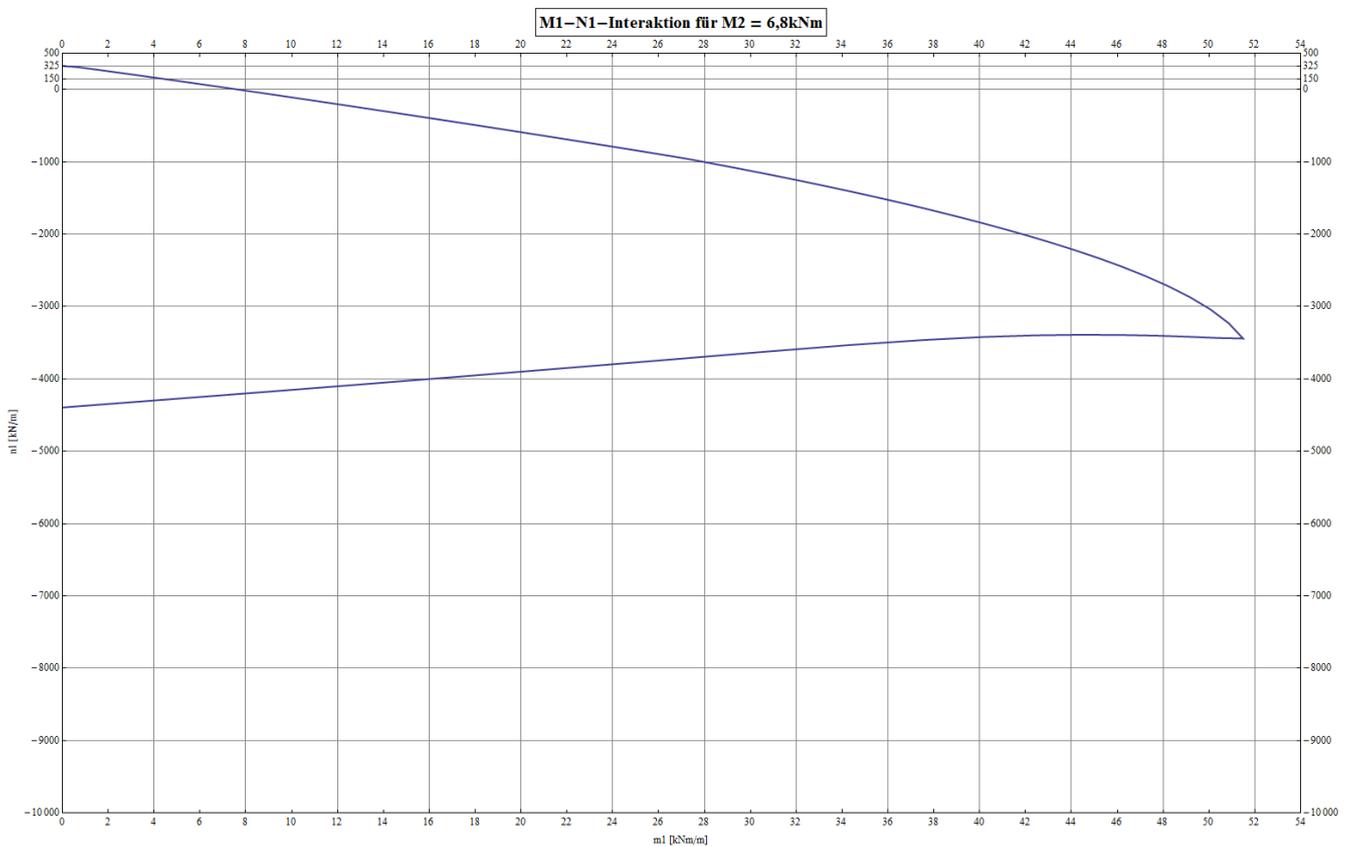
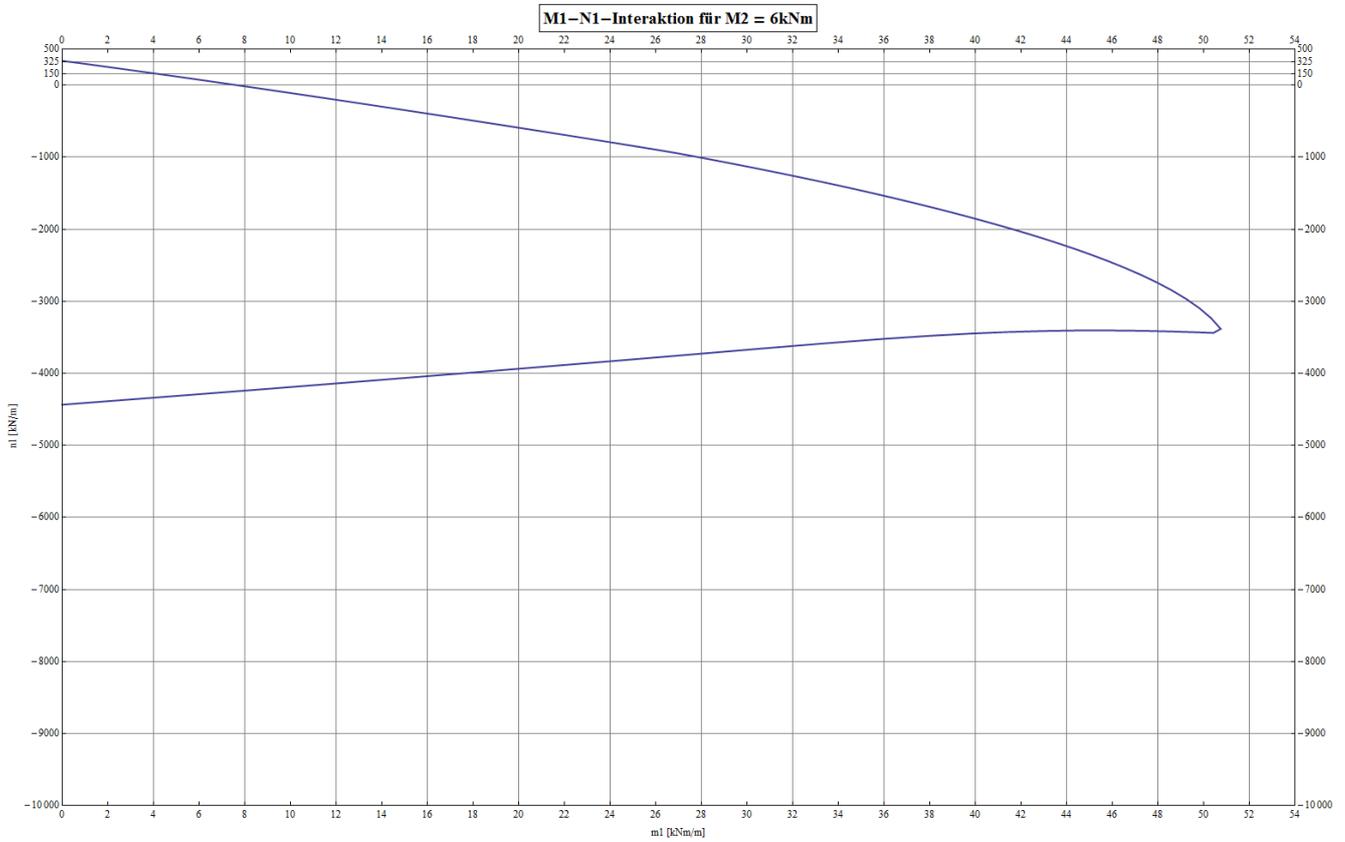


11.1 $M_1-N_1-M_2$ -Interaktionen

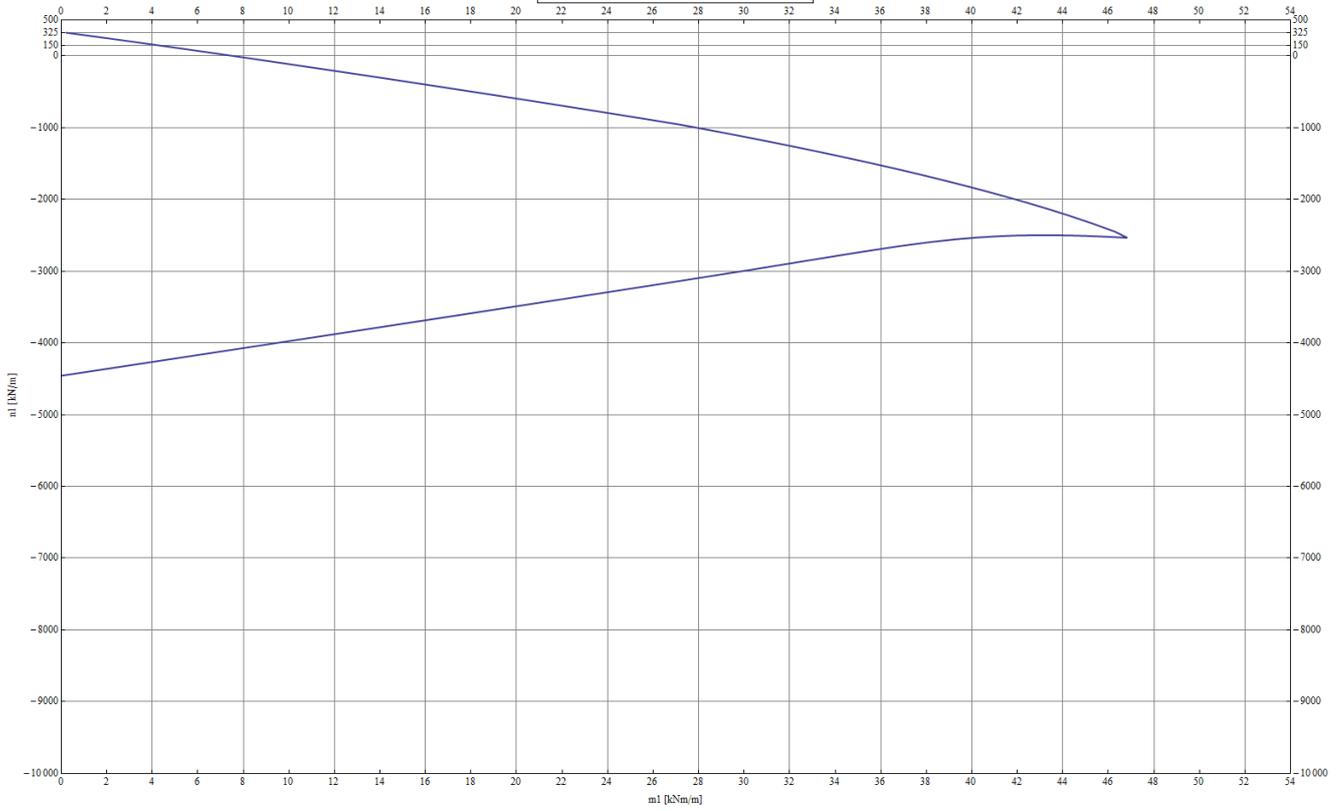








M1-N1-Interaktion für M2 = 8kNm



M1-N1-Interaktion für M2 = 9kNm

