Kornelia KRENN

Verallgemeinerte Bauer–Peschl–Gleichungen in bikomplexen Räumen

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
einer Diplom-Ingenieurin

Masterstudium Technomathematik

Graz University of Technology

Technische Universität Graz

Betreuer:
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter BERGLEZ

Institut für Analysis und Computational Number Theory

Graz, im August 2013

Vorwort

Zu allererst möchte ich mich bei Prof. Berglez für seine fachliche und menschliche Unterstützung bedanken, die mir ein freies, stressloses und eigenständiges Entstehen dieser Arbeit ermöglicht haben. Ich bedanke mich für die Möglichkeit, jederzeit angstfrei um Rat fragen zu können und für die vielen Gespräche, die mir wieder den Glauben an einen respektvollen und menschenfreundlichen Umgang zwischen Professor und Studentin zurückgegeben haben. Ich habe Sie als Lehrender, Vorgesetzter und Diplomarbeitsbetreuer stets als fachlich kompetenten, höflichen und fairen Menschen erlebt und dafür möchte ich mich ganz herzlich bei Ihnen bedanken!

Weiters gilt mein Dank meinem Papa Heinz und meiner Mama Maria, die mich menschlich, fachlich und finanziell immer unterstützt und mir in schweren Zeiten Halt, Trost und Sicherheit gegeben haben. Ich danke euch, dass ihr mich zu einem eigenständig denkenden und mitfühlenden Menschen erzogen und immer an mich geglaubt habt! Ihr seid einfach spitze!
Außerdem danke ich meiner Schwester Kathrin, die mir als Fels in der Brandung ebenfalls bei so vielem beigestanden hat und mich so oft ermutigt hat, nicht aufzugeben. Ohne deine Stärke und deinen Humor hätte ich es bestimmt nicht geschafft!
Schließlich bedanke ich mich bei meinem mich immer zum Lachen bringenden Freund Simon für seine offene und herzliche Art, die mich so oft getröstet und aufgemuntert hat. Du bist mein Sonnenschein!
Ohne euch wäre der Abschluss meines Studiums und das Fertigstellen dieser Arbeit nicht möglich gewesen! Ich hab euch lieb und danke euch für alles!

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen für die nachfolgenden Kapitel erläutert. Zunächst wird von einer lineraren elliptischen und homogenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Gebiet des $\mathbb{R}^2$ ausgegegangen, deren Koeffizientenfunktionen analytisch in ebendiesem Gebiet sind. Für die klassische Lösung dieser Differentialgleichung kann dabei der Satz von Picard formuliert werden.
In weiterer Folge werden dann von dieser reellen elliptischen Differentialgleichung die komplexe Form und die zugehörige formal hyperbolische Differentialgleichung abgeleitet, wobei im Zusammenhang mit letzterer die Begriffe des Spiegelgebiets, des bizylindrischen Gebiets und des Fundamentalgebiets einer Differentialgleichung näher erklärt werden. Schließlich wird mithilfe des Hauptsatzes von Vekua der Zusammenhang zwischen der klassischen Lösung der reellen elliptischen Differentialgleichung bzw. ihrer komplexen Form und der im bizylindrischen Gebiet analytischen Lösung der formal hyperbolischen Differentialgleichung erläutert.
Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels folgt dann die Herleitung der sogenannten ersten verkürzten Form der formal hyperbolischen Differentialgleichung und eine kurze Betrachtung ihrer Lösbarkeit.

Das zweite Kapitel umfasst die sogenannte Riemannfunktion, eine spezielle Lösung der reellen elliptischen Differentialgleichung bzw. der zugehörigen formal hyperbolischen Differentialgleichung. Sie ist im Wesentlichen die Lösung einer Volterraschen Integralgleichung erster Art bzw. der adjungierten formal hyperbolischen Differentialgleichung und ist analytisch im kartesischen Produkt von zwei bizylindrischen Gebieten.
Neben der Behandlung einiger wichtiger Eigenschaften der Riemannfunktion wird der wichtige Satz bewiesen, dass sich alle im bizylindrischen Gebiet analytischen Lösungen der formal hyperbolischen Differentialgleichung mithilfe der Riemannfunktion und zweier Integrale darstellen lassen. Dieses Ergebnis lässt sich dann auf die klassischen Lösungen der reellen elliptischen Differentialgleichung im einfach zusammenhängenden reellen Gebiet übertragen.
Am Ende des zweiten Kapitels folgen abschließend zwei Beispiele für Riemannfunktionen: Einmal wird diese für die Laplace–Gleichung im $\mathbb{R}^2$ und einmal für die ursprüngliche Form der Bauer–Peschl–Gleichung in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ hergeleitet (im zweiten Fall kann diese mithilfe der Legendrefunktion erster Art angegeben werden).

Das dritte Kapitel behandelt zunächst die Herleitung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe mit dem Index $n \in \mathbb{N}$ in einem einfach zusammenhängenden komplexen Gebiet und ihren Zusammenhang mit der ursprünglichen Form der Bauer–Peschl–Gleichung. Danach wird der wichtigste Satz dieser Arbeit formuliert. Dieser behandelt die Darstellung aller analytischen Lösungen der Bauer–Peschl–Gleichung

erster Stufe und besagt, dass diese Lösungen im Wesentlichen mithilfe von zwei im komplexen Gebiet analytischen Erzeugenden und deren Ableitungen darstellbar sind. Zusätzlich wird in diesem Satz noch angegeben, wie man bei einer bekannten Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe die Erzeugenden bzw. deren Ableitungen bestimmen kann.
Der Beweis dieser wichtigen Aussagen wird danach mithilfe zahlreicher Lemmata geführt, wobei in diesem Zusammenhang auch die Definitionen von Auf– und Absteigeopertoren zu finden sind. Weiters wurden zusätzliche Beweise zu wichtige Aussagen, die den Beweis des Darstellungssatzes von Lösungen betreffen, in den Anhang ausgelagert. In diesem wird zusätzlich auch eine andere Darstellung der Lösungen der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe behandelt.
Am Ende des dritten Kapitels wird die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe etwas verallgemeinert. Dies geschieht in Form der Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe, die nun zwei Indizes $m, n \in \mathbb{N}$ besitzt. Analog zur Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe lässt sich schließlich ebenfalls ein Satz über die Darstellung aller analytischen Lösungen mithilfe zweier analytischer Erzeugenden in einem einfach zusammenhängenden Gebiet der komplexen Zahlenebene formulieren.

Im vierten und letzten Kapitel wird dann schließlich der Raum der bikomplexen Zahlen $\mathbb{BC}$ eingeführt. Zunächst werden die bikomplexen Zahlen definiert und ihre wichtigsten Eigenschaften vorgestellt: Sie sind ein kommutativer Ring mit Eins und bilden, ausgestattet mit der Euklidischen Norm im $\mathbb{R}^4$, einen reellen Banachraum. Im Gegensatz zu den reellen und zu den gewöhnlichen komplexen Zahlen besitzen die bikomplexen Zahlen Nullteiler und die Menge ihrer nicht invertierbaren Elemente besteht aus mehr als einem Element. Weiters wird bewiesen, dass eine bikomplexe Zahl eine eindeutige idempotente Darstellung mit komplexen idempotenten Komponenten besitzt. Nach dieser kurzen Einführung in die Eigenschaften der bikomplexen Zahlen werden die Begriffe der $\mathbb{BC}-$Holomorphie und der $\mathbb{BC}-$Differenzierbarkeit einer bikomplexen Funktion eingeführt. Zunächst wird ein bikomplexes Gebiet definiert, das sich im Wesentlichen aus zwei komplexen Gebieten zusammensetzt. Die Anforderungen an die komplexen Gebiete bzw. an das bikomplexe Gebiet selbst werden dabei anhand von zwei Sätzen erklärt. Die $\mathbb{BC}-$Holomorphie einer Funktion wird dann mithilfe einer kurzen Einführung in die Theorie bikomplexer Potenzreihen erläutert, woraus sich dann der wichtige Satz ergibt, dass man eine $\mathbb{BC}-$holomorphe Funktion durch zwei komplexe analytische Funktionen darstellen kann, die harmonisch bezüglich ihrer beiden komplexen Variablen sind und die die komplexen Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Gleich darauf erfolgt die Definition der $\mathbb{BC}-$Differenzierbarkeit einer bikomplexen Funktion und deren Äquivalenz zu der $\mathbb{BC}-$Holomorphie.
Der nächste Abschnitt befasst sich dann mit den vier verschiedenen Arten von bikomplexen Differentialoperatoren. Diese ermöglichen nämlich eine Charakterisierung von $\mathbb{BC}-$holomorphen bzw. $\mathbb{BC}-$differenzierbaren Funktionen ähnlich wie im komplexen Fall, in dem $f_{\bar{z}} = 0$ für eine analytische Funktion f gilt. Außerdem wird der komplexe Laplace–Operator mithilfe von zwei bikomplexen Differentialoperatoren ausgedrückt. Besagte Darstellung wird dann nämlich für den letzten Abschnitt dieser Arbeit benützt: Der Formulierung der sogenannten verallgemeinerten Bauer–Peschl–

Gleichungen erster und zweiter Stufe im bikomplexen Raum $\mathbb{BC}$. Für diese beiden bikomplexen Differentialgleichungen werden schließlich jeweils Sätze angegeben, die die Darstellung ihrer Lösungen behandeln.

1. Grundlagen

In diesem Kapitel wird eine lineare elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei reellen Variablen vorgestellt, die den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet. Von dieser Differentialgleichung wird in weiterer Folge die komplexe Form, eine formal hyperbolische partielle Differentialgleichung und die verkürzte Form dieser formal hyperbolischen Differentialgleichung hergeleitet, die sich für die weiteren Betrachtungen als wichtig erweisen. Weiters werden die Eigenschaften der Lösungen dieser zueinander äquivalenten Differentialgleichungen kurz behandelt.

1.1. Die elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine lineare elliptische Differentialgleichung und einen Satz zur Charakterisierung ihrer Lösung anzugeben. Zuvor werden jedoch noch grundlegende Definitionen (vgl. Seite 16, 38 und 39 in [30]) benötigt:

Definition 1.1. Eine Teilmenge D der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ heißt **offen**, wenn es um jeden Punkt $z_0 \in D$ eine offene Kreisscheibe $K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ mit Mittelpunkt z_0 und Radius $r > 0$ gibt, sodass $K(z_0, r) \subset D$.

Definition 1.2. Sei $[a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ ein abgeschlossenes Intervall auf der reellen Achse und $z(t)$ sei eine stetige, komplexwertige Funktion, die auf $[a, b]$ definiert ist. Wenn t von a nach b läuft, so beschreiben die Punkte $z(t)$ eine **Kurve** γ in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ mit Startpunkt $z(a)$ und Endpunkt $z(b)$.
Die Kurve γ heißt **geschlossen**, wenn $z(a) = z(b)$.

Definition 1.3. Die offene Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei beliebige Punkte aus D durch eine Kurve γ verbunden werden können, die ganz in D enthalten ist.

Definition 1.4. Ein **Gebiet** ist eine offene und zusammenhängende Menge.

Mithilfe der obigen Definition eines Gebiets lässt sich nun der Begriff einer analytischen Funktion einführen, deren Definitionsmenge immer ein Gebiet in der komplexen Zahlenebene ist:

Definition 1.5. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und z_0 ein beliebiger Punkt von D. Die eindeutige Funktion $f : D \mapsto \mathbb{C}$ heißt **analytisch bzw. holomorph in** z_0, wenn sie in einer offenen Kreisscheibe um z_0 komplex differenzierbar ist, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z \in D$$

existiert und ist endlich.
Weiters ist die Funktion f genau dann im Punkt $z_0 \in D$ analytisch bzw. holomorph, wenn sie auf einer offenen Kreisscheibe um z_0 durch eine konvergente Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

dargestellt werden kann.
Wenn f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar ist, so nennt man f **analytisch bzw. holomorph im gesamten Gebiet** D.

Analytische Funktionen spielen in dieser Arbeit noch eine große Rolle. Zu Beginn werden sie als die Koeffizientenfunktionen von linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Variablen auftreten. Zuvor sollen diese Begriffe jedoch noch eingeführt werden (vgl. Seite 90 bis 91 in [22]):

Definition 1.6. Die Normalform einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen reellen Variablen x_1 und x_2 in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ lautet:

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, x_2) u = 0. \tag{1.1}$$

Hierin bezeichnet $u = u(x_1, x_2)$ die gesuchte Funktion. Die Funktionen a_{ik}, b_i und c werden Koeffizientenfunktionen genannt, wobei $a_{ik} = a_{ki}$ für $i, k = 1, 2$ gelte.
Je nach Hauptteil

$$Hu := a_{11}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

lässt sich die Differentialgleichung in die folgenden drei Typen klassifizieren: Sie heißt im Punkt (x_1, x_2)

- **hyperbolisch**, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$,
- **parabolisch**, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$,
- **elliptisch**, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

Wenn die Differentialgleichung in allen Punkten des Gebiets D hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist, so heißt sie hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch im gesamten Gebiet D.

In dieser Arbeit soll nun von der folgenden linearen elliptischen und homogenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ in zwei unabhängigen reellen Variablen x und y ausgegangen werden:

$$\Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0. \tag{1.2}$$

Die vorgegebenen Koeffizientenfunktionen $a(x,y), b(x,y)$ und $c(x,y)$ sollen im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ analytisch sein (vgl. Seite 6 in [31]), d.h. sie lassen sich jeweils in einem Rechteck um einen beliebigen Entwicklungspunkt aus $D \subset \mathbb{R}^2$ in konvergente Potenzreihen entwickeln (vgl. [15]).
Weiters stellt die Funktion $u = u(x,y)$ in der Differentialgleichung (1.2) die gesuchte Funktion dar, für die gilt (vgl. Seite 7 in [31]):

Definition 1.7. Bezeichne $\mathcal{C}^2(D)$ den Raum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$. Wenn die Funktion $u(x,y) \in \mathcal{C}^2(D)$ ist und die elliptische Differentialgleichung (1.2) identisch erfüllt, so spricht man von einer **klassischen Lösung** der Differentialgleichung.

Weiters gilt der folgende Satz (vgl. [23] auf Seite 213 bzw. [15]):

Satz 1. ***(Satz von Picard)***
Die Koeffizienten a, b und c der elliptischen Differentialgleichung (1.2) seien analytische Funktionen in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$. Dann ist jede klassische Lösung $u = u(x,y)$ von (1.2) ebenfalls analytisch in D.

Beweis. In [23] auf Seite 213 ist die Beweisidee dieses Satzes wiedergegeben. Diese basiert auf der Methode der sukzessiven Approximation. □

Bemerkung. Die Elliptizität der Differentialgleichung (1.2) laut Definition 1.6 kann mithilfe des Hauptteils

$$Hu = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

gezeigt werden, da hier $a_{11} = a_{22} = 1$ und $a_{12} = 0$ in allen Punkten des Gebiets $D \subset \mathbb{R}^2$ gilt.

1.2. Die komplexe Form der elliptischen Differentialgleichung

In diesem Abschnitt soll die sogenannte komplexe Form der elliptischen Differentialgleichung (1.2) hergeleitet werden. Hierzu setzt man die beiden unabhängigen Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ der elliptischen Differentialgleichung (1.2) zu einer neuen komplexen Variable

$$z = x + iy \tag{1.3}$$

zusammen und bezeichnet die zu z konjugiert komplexe Variable mit

$$\bar{z} = x - iy. \tag{1.4}$$

Dabei gilt, dass z und $\bar{z}$ voneinander abhängige komplexe Variablen sind, obwohl $x, y \in \mathbb{R}$ unabhängig sind. Weiters können die zwei reellen Differentiationen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ aus der elliptischen Differentialgleichung (1.2) zu zwei komplexen Differentiationen, den sogenannten Wirtinger–Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1.6}$$

zusammengefasst werden (vgl. [29] auf Seite 30 bzw. [15]). Somit lässt sich die Differentialgleichung (1.2) folgendermaßen auf ihre komplexe Form transformieren:
Addiert bzw. subtrahiert man (1.3) und (1.4), so erhält man für $x, y \in \mathbb{R}$ die Beziehungen:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},$$
$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Aus der Addition bzw. Subtraktion von (1.5) und (1.6) ergeben sich für die partiellen Ableitungen erster Ordnung von (1.2) die Relationen:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).$$

Der Laplace–Operator in (1.2) wird mithilfe der Wirtinger–Operatoren (1.5) und (1.6) zu:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \tag{1.7}$$

Setzt man nun die oben hergeleiteten Ausdrücke in die Differentialgleichung (1.2) ein, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} 4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\left[\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right] + \\ + b\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) i\left[\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right] + c\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) U = 0. \end{aligned}$$

Nach der Division durch 4 erhält man schließlich die komplexe Form der elliptischen Differentialgleichung (1.2) (vgl. [9]):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + A(z, \bar{z})\frac{\partial U}{\partial z} + B(z, \bar{z})\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + C(z, \bar{z})U = 0. \tag{1.8}$$

Hierbei setzt man

$$U(z,\bar{z}) := u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right),$$

als die gesuchte Funktion und

$$\begin{aligned} A(z,\bar{z}) &:= \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + ib\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\right], \\ B(z,\bar{z}) &:= \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - ib\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\right], \\ C(z,\bar{z}) &:= \frac{1}{4}c\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

als die Koeffizientenfunktionen (vgl. [15]). Die komplexe Form (1.8) ist äquivalent zur elliptischen Differentialgleichung (1.2) (vgl. [11, 9]).

1.3. Die formal hyperbolische Differentialgleichung

Als nächster Schritt soll nun eine zur elliptischen Differentialgleichung (1.2) bzw. zu ihrer komplexen Form (1.8) äquivalente formal hyperbolische Differentialgleichung hergeleitet werden.
Dazu setzt man die beiden unabhängigen Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ von (1.2) zu zwei unabhängigen komplexen Variablen $x, y \in \mathbb{C}$ fort (vgl. [9, 15]). Wenn man also

$$z = x + iy, \tag{1.10}$$

$$\zeta = x - iy, \tag{1.11}$$

setzt, so nehmen z und ζ unabhängige komplexe Werte an, wenn $x, y \in \mathbb{C}$ unabhängig sind (vgl. Seite 7 in [31] bzw. [28]). Die beiden Variablen z und ζ sind nur dann abhängig voneinander bzw. konjugiert komplex mit $\zeta = \bar{z}$, wenn $x, y \in \mathbb{R}$ sind (vgl. Seite 7 in [31] bzw. [28, 15]), siehe dazu den Anfang von Abschnitt 1.2.
Unter Verwendung der Wirtinger–Operatoren

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

und mithilfe der Relationen (1.10) bzw. (1.11) lässt sich aus der elliptischen Differentialgleichung (1.2), ganz analog wie bei der Herleitung der komplexen Form (1.8) in Abschnitt 1.2, folgende formal hyperbolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial z} + B(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial \zeta} + C(z,\zeta)U = 0, \tag{1.12}$$

mit der gesuchten Funktion

$$U(z,\zeta) := u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) \tag{1.13}$$

und den Koeffizientenfunktionen

$$\begin{aligned}
A(z,\zeta) &:= \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) + ib\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right],\\
B(z,\zeta) &:= \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) - ib\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right],\\
C(z,\zeta) &:= \frac{1}{4}c\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)
\end{aligned}$$

herleiten. Offensichtlich sind die komplexe Form (1.8) und die formal hyperbolische Differentialgleichung (1.12) identisch, wenn $\zeta = \bar{z}$ bzw. wenn z und ζ abhängige komplexe Variablen sind (vgl. [15]).
Nun stellt sich die Frage, in welcher Form die Koeffizientenfunktionen $a(x,y), b(x,y)$ und $c(x,y)$ der elliptischen Differentialgleichung (1.2) bzw. jene $A(z,\bar{z}), B(z,\bar{z})$ und $C(z,\bar{z})$ der komplexen Form (1.8) auf die Koeffizientenfunktionen $A(z,\zeta), B(z,\zeta)$ und $C(z,\zeta)$ der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) erweitert werden können bzw. ob sie nach wie vor analytisch sind, wenn die unabhängigen Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ auf $x, y \in \mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Hierzu benötigt man zuallererst die Definition einer analytischen Fortsetzung (vgl. Seite 169 in [30]):

Definition 1.8. Das Gebiet D_1 sei ein Teilgebiet des Gebiets D_2. Die Funktion f_1 (bzw. f_2) sei eine analytische Funktion, die in D_1 (bzw. D_2) definiert ist. Die eindeutige Funktion f_2 heißt **analytische Fortsetzung** der Funktion f_1 in das größere Gebiet D_2, wenn $f_1 \equiv f_2$ im kleineren Gebiet D_1 gilt.

Für die weitere Theorie reicht das bisher gültige Konzept eines beliebigen Gebietes $D \subset \mathbb{C}$ nicht mehr aus. Es muss ein speziellere Form des Gebiets eingeführt werden (vgl. Seite 229 von [30]):

Definition 1.9. Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn es zusammenhängend ist und sich jede geschlossene Kurve auf einen Punkt von D zusammenziehen lässt.

Nun kann man das Spiegelgebiet eines einfach zusammenhängenden Gebiets $D \subset \mathbb{C}$ wie folgt definieren (vgl. Seite 6 in [31] bzw. [9, 15]):

Definition 1.10. Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Dann heißt das einfach zusammenhängende Gebiet

$$\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in D\}$$

das **Spiegelgebiet von** D bezüglich der reellen x–Achse.

Diese zwei soeben eingeführten, zueinander gespiegelten, einfach zusammenhängeden Gebiete der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ können in weiterer Folge zu einem sogenannten zylindrischen Gebiet kombiniert werden (vgl. [13] auf Seite 384 bzw. Seite 4 und 8 in [31]):

Definition 1.11. Ein Gebiet

$$(D_1, D_2) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \in D_1, z_2 \in D_2\} \subset \mathbb{C}^2,$$

das in Form eines kartesischen Produkts von zwei Gebieten $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ dargestellt werden kann und in dem $z_1 \in D_1$ und $z_2 \in D_2$ unabhängig voneinander variieren, wird ein **zylindrisches Gebiet** (D_1, D_2) genannt.
Der Spezialfall eines zylindrischen Gebiets ist der **Bizylinder**

$$\Big(K(a_1, r_1), K(a_2, r_2)\Big) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1 - a_1| < r_1, |z_2 - a_2| < r_2\}$$

mit Mittelpunkt $a = (a_1, a_2)$ und Radius $r = (r_1, r_2)$ mit $r_1, r_2 > 0$. Im Bizylinder sind die zwei Gebiete D_1 und D_2 also jeweils zwei offene Kreisscheiben in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

Mithilfe der Definitionen 1.8 bis 1.11 kann nun die vorher gestellte Frage über den Zusammenhang zwischen den alten Koeffizienten der elliptischen Differentialgleichung (1.2) und den neuen der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) wie folgt beantwortet werden:
Die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ analytischen Koeffizientenfunktionen $a(x, y), b(x, y)$ und $c(x, y)$ der elliptischen Differentialgleichung (1.2) lassen sich bei der Erweiterung von $x, y \in \mathbb{R}$ zu den unabhängigen Variablen $x, y \in \mathbb{C}$ eindeutig auf die im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D}) \subset \mathbb{C}^2$ analytischen Koeffizientenfunktionen $A(z, \zeta), B(z, \zeta)$ und $C(z, \zeta)$ der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) in den beiden unabhängigen komplexen Variablen $z \in D$ und $\zeta \in \overline{D}$ fortsetzen (vgl. [31, 15, 28]).
Anschaulich werden also bei der Erweiterung von $x, y \in \mathbb{R}$ auf $x, y \in \mathbb{C}$, die in einem Rechteck im $\mathbb{R}^2$ konvergenten Potenzreihen von a, b, c nun in Form von A, B, C in einem zylindrischen Gebiet im $\mathbb{C}^2$ (z.B. in einem Bizylinder) konvergieren (vgl. [15]).
Der Fall $\zeta = \bar{z}$ tritt nur dann ein, wenn $x, y \in \mathbb{R}$ sind (vgl. [15]). Die Koeffizientenfunktionen der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) und der komplexen Form (1.8) sind dann offensichtlich dieselben und haben die Gestalt $A(z, \bar{z}), B(z, \bar{z})$ und $C(z, \bar{z})$ aus (1.9). Aufgrund der Äquivalenz der elliptischen Differentialgleichung (1.2) zu ihrer komplexen Form (1.8) können dann also für $\zeta = \bar{z}$ die Koeffizienten A, B, C der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) auf die Koeffizienten a, b und c der elliptischen Differentialgleichung (1.2) zurückgerechnet werden.
Vereinfachend kann das einfach zusammenhängende Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ schließlich auch folgendermaßen genannt werden (vgl. Seite 8 in [31]):

Definition 1.12. Ein einfach zusammenhängendes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Fundamentalgebiet der elliptischen Differentialgleichung (1.2)**, wenn die Koeffizientenfunktionen $A(z,\zeta), B(z,\zeta)$ und $C(z,\zeta)$ der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) analytische Funktionen der zwei unabhängigen komplexen Variablen $z \in D$ und $\zeta \in \overline{D}$ im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ sind.

Abschließend bleibt noch zu klären, wie die Lösung $u(x,y)$ der elliptischen Differentialgleichung (1.2) bzw. jene $U(z,\bar{z})$ der komplexen Form (1.8) mit der Lösung $U(z,\zeta)$ der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) zusammenhängen und was man über ihre Analytizität aussagen kann, wenn man die unabhängigen reellen Variablen x, y zu unabhängigen komplexen Werten fortsetzt. Dies geschieht über den folgenden Satz (vgl. Seite 22 bis 23 bzw. Seite 32 in [31] und [9, 15]):

Satz 2. ***(Hauptsatz von Vekua)***
Sei D ein Fundamentalgebiet der elliptischen Differentialgleichung (1.2).
Jede im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ analytische Lösung $U(z,\zeta)$ der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) stellt mit $\zeta = \bar{z}$ gesetzt eine in D klassische Lösung $U(z,\bar{z})$ der komplexen Form (1.8) bzw. auch eine in D klassische (ebenfalls analytische) Lösung $u(x,y)$ der elliptischen Differentialgleichung (1.2) dar.
Ist umgekehrt $u(x,y)$ eine in D klassische (d.h. auch analytische) Lösung der elliptischen Differentialgleichung (1.2), dann stellt die analytische Fortsetzung

$$U(z,\zeta) := u\Big(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\Big)$$

mit $z \in D, \zeta \in \overline{D}$ eine in $(D, \overline{D})$ analytische Funktion dar, die die formal hyperbolische Differentialgleichung (1.12) löst.

Beweis. Vekua benutzt für den ersten Teil des Beweises eine Integraldarstellung der Funktion $U(z,\zeta)$ mithilfe der Riemannfunktion und zwei beliebigen, in D bzw. $\overline{D}$ holomorphen Funktionen (die Riemannfunktion wird im nächsten Kapitel kurz eingeführt und ist im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ analytisch). Durch das Setzen von $\zeta = \bar{z}$ ändert sich nichts an der Analytizität dieser Lösungsdarstellung, die nun $U(z,\bar{z})$ genannt wird (vgl. [31] in Kapitel 1, Abschnitt 6.1). Schließlich wird die Äquivalenz zwischen der Lösung $U(z,\bar{z})$ der komplexen Form (1.8) und der Lösung $u(x,y)$ der elliptischen Differentialgleichung (1.2) genutzt, um die gerade gezeigte Analytizität von $U(z,\bar{z})$ auf $u(x,y)$ zu übertragen.
Um die Umkehrung zu beweisen, verwendet Vekua eine Verallgemeinerung der zweiten Greenschen Formel, die er auf das Produkt der klassischen Lösung u mit einer sogenannten normierten Fundamentallösung anwendet. Die dabei enstehende Funktion setzt er dann analytisch auf $(D, \overline{D})$ fort (vgl. [31] in Kapitel 1 unter Abschnitt 9.1 bzw. [16] unter Abschnitt 3.2). $\square$

Aus dem Satz lässt sich also folgende Erkenntnis gewinnen: In einem Fundamentalgebiet D ist das Problem, Lösungen der ellitpischen Differentialgleichung (1.2) zu finden, äquivalent dazu, die formal hyperbolische Differentialgleichung (1.12) zu lösen (vgl. [15, 28]).

Bemerkung. Die Differentialgleichung (1.12) wird deshalb formal hyperbolisch genannt, weil mithilfe ihres Hauptteils

$$HU = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \zeta}$$

laut Definition 1.6 formal die Beziehungen $a_{11} = a_{22} = 0$ und $a_{12} = 1$ folgen (auch wenn diese Relationen hier statt für alle Punkte eines beliebigen Gebiets $D \subset \mathbb{R}^2$ für alle Punkte des zylindrischen Gebiets $(D, \overline{D}) \subset \mathbb{C}^2$ gelten).
Ganz allgemein liefert die elliptische Differentialgleichung (1.2) im $\mathbb{R}^2$ also eine formal hyperbolische Differentialgleichungen (1.8) im Komplexen (vgl. [11]).

1.4. Die verkürzte Form der formal hyperbolischen Differentialgleichung

In diesem Abschnitt soll die im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ erklärte, formal hyperbolische Differentialgleichung (1.12) zum späteren Gebrauch noch ein wenig vereinfacht werden. Dafür setzt man

$$U(z,\zeta) = W(z,\zeta)V(z,\zeta) \tag{1.14}$$

in die formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) ein, wobei W und V zwei im Zylindergebiet $(D, \overline{D})$ definierte Funktionen seien. Mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \zeta} &= \frac{\partial W}{\partial \zeta} V + W \frac{\partial V}{\partial \zeta}, \\
\frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial W}{\partial z} V + W \frac{\partial V}{\partial z}, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \zeta} &= \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \zeta} V + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial \zeta} + W \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta}
\end{aligned}$$

wird die formal hyperbolische Differentialgleichung (1.12) dann zu:

$$\begin{aligned}
W \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} + \left[\frac{\partial W}{\partial \zeta} + A(z,\zeta) W\right] \frac{\partial V}{\partial z} + \left[\frac{\partial W}{\partial z} + B(z,\zeta) W\right] \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \\
+ \left[\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial W}{\partial z} + B(z,\zeta)\frac{\partial W}{\partial \zeta} + C(z,\zeta) W\right] V = 0
\end{aligned}$$

bzw. nach der Division durch W zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} + \left[\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial \zeta} + A(z,\zeta)\right] \frac{\partial V}{\partial z} + \left[\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial z} + B(z,\zeta)\right] \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \\
+ \left[\frac{1}{W}\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \zeta} + \frac{1}{W} A(z,\zeta)\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{W} B(z,\zeta)\frac{\partial W}{\partial \zeta} + C(z,\zeta)\right] V = 0.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Aus dieser obigen Gleichung können nun drei verschiedene verkürzte Formen hergleitet werden, je nachdem welcher der drei Terme in den eckigen Klammern Null gesetzt wird. In dieser Arbeit soll die erste verkürzte Form angegeben werden. Dafür setzt man den Koeffizienten der partiellen Ableitung $\frac{\partial V}{\partial z}$ gleich Null (vgl. [28]), also:

$$\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial \zeta} + A(z,\zeta) = 0.$$

Diese Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $W(z,\zeta)$ wird mithilfe der Trennung der Variablen gelöst und liefert die gesuchte Funktion bzw. die spezielle Lösung (vgl. [28])

$$W(z,\zeta) = \exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right],$$

wobei die Variablen $z \in D, \zeta \in \overline{D}$ sind und $\zeta_0 \in \overline{D}$ einen festen Punkt des Spiegelgebiets bezeichnet (vgl. [9]).
Um die zwei restlichen, noch unbehandelten Terme in den eckigen Klammern von (1.15) zu berechnen, benötigt man zuallererst die folgenden partiellen Ableitungen (vgl. [28]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\right\}\\ &= \exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\frac{\partial}{\partial z}\left\{-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right\}\\ &= \exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\left(-\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial A(z,\eta)}{\partial z}d\eta\right),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\right\}\\ &= \exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right\}\\ &= \exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\Big(-A(z,\zeta)\Big)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\Big(-A(z,\zeta)\Big)\right\} \\
&= \exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\frac{\partial}{\partial z}\left\{-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right\}\Big(-A(z,\zeta)\Big)+ \\
&\quad + \exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\frac{\partial}{\partial z}\Big\{-A(z,\zeta)\Big\} \\
&= \exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\left(-\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial A(z,\eta)}{\partial z}d\eta\right)\Big(-A(z,\zeta)\Big)+ \\
&\quad + \exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\left(-\frac{\partial A(z,\zeta)}{\partial z}\right) \\
&= \exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\left(A(z,\zeta)\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial A(z,\eta)}{\partial z}d\eta - \frac{\partial A(z,\zeta)}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Der erste Term lautet somit:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial z} + B(z,\zeta) &= \exp\left[\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\left(-\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial A(z,\eta)}{\partial z}d\eta\right)+ \\
&\quad + B(z,\zeta) \\
&= -\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial A(z,\eta)}{\partial z}d\eta + B(z,\zeta).
\end{aligned}$$

Der zweite Term wird nach dem Herausziehen von $\frac{1}{W}$ zu:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{W}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial\zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial W}{\partial z} + B(z,\zeta)\frac{\partial W}{\partial \zeta} + C(z,\zeta)W\right] = \\
&= \exp\left[\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\left\{\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\left(A(z,\zeta)\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial A(z,\eta)}{\partial z}d\eta - \frac{\partial A(z,\zeta)}{\partial z}\right)+\right. \\
&\quad + A(z,\zeta)\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\left(-\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial A(z,\eta)}{\partial z}d\eta\right)+ \\
&\quad \left. + B(z,\zeta)\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\Big(-A(z,\zeta)\Big) + C(z,\zeta)\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta)d\eta\right]\right\} \\
&= -\frac{\partial A(z,\zeta)}{\partial z} - B(z,\zeta)A(z,\zeta) + C(z,\zeta).
\end{aligned}$$

Setzt man diese beiden obigen Terme nun wieder zurück in die Gleichung (1.15) ein, so folgt zunächst die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} + \left[- \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial A(z,\eta)}{\partial z} d\eta + B(z,\zeta) \right] \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \\ + \left[- \frac{\partial A(z,\zeta)}{\partial z} - A(z,\zeta)B(z,\zeta) + C(z,\zeta) \right] V = 0$$

bzw. die (erste) verkürzte Form der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) (vgl. [28, 9])

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} + \hat{a}(z,\zeta) \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \hat{b}(z,\zeta) V = 0. \tag{1.16}$$

Hierbei bezeichnen

$$V(z,\zeta) = \frac{U(z,\zeta)}{W(z,\zeta)} = U(z,\zeta) \exp\left[\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} A(z,\eta) d\eta \right]$$

die gesuchte Funktion und

$$\hat{a}(z,\zeta) = B(z,\zeta) - \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial A(z,\eta)}{\partial z} d\eta,$$
$$\hat{b}(z,\zeta) = C(z\zeta) - \frac{\partial A(z,\zeta)}{\partial z} - A(z,\zeta)B(z,\zeta)$$

die Koeffizientenfunktionen für $z \in D, \zeta \in \overline{D}$ (vgl. [28, 9]). Wie man sieht, setzen sich diese Funktionen aus den Koeffizientenfunktionen A, B, C der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) zusammen. Weiters gilt, dass $V(z,\zeta)$ analytisch im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ ist, wenn die Lösung $U(z,\zeta)$ der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) dort analytisch ist (die Koeffizientenfunktion $A(z,\zeta)$ ist laut Definition 1.12 analytisch).

2. Die Riemannfunktion

In diesem Kapitel soll eine spezielle Lösung der elliptischen Differentialgleichung (1.2) bzw. der zugehörigen formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) hergleitet werden, nämlich die sogenannte Riemannfunktion. Neben einigen ihrer Eigenschaften soll hier mit ihrer Hilfe eine Integraldarstellung der Lösungen der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) und der elliptischen Differentialgleichung (1.2) angegeben werden.

2.1. Herleitung und Definition

Für die Herleitung der Riemannfunktion ist der Begriff der adjungierten Differentialgleichung wesentlich (vgl. Seite 12 von [23] bzw. Seite 279 in [29]):

Definition 2.1. Die lineare homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(x_1,x_2)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial[b_i(x_1,x_2)v]}{\partial x_i} + c(x_1,x_2)v = 0$$

ist **die zur Differentialgleichung (1.1) adjungierte Differentialgleichung** im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$. Die Differentialgleichung (1.1) heißt **selbstadjungiert**, wenn sie exakt dieselbe Gestalt hat wie ihre obige adjungierte Differentialgleichung.

Mithilfe der obigen Definition kann nun die zur elliptischen Differentialgleichung (1.2) adjungierte Differentialgleichung

$$\Delta v - \frac{\partial[a(x,y)v]}{\partial x} - \frac{\partial[b(x,y)v]}{\partial y} + c(x,y)v = 0 \tag{2.1}$$

für die Funktion $v(x,y)$ betrachtet werden. Die drei Koeffizientenfunktionen $a(x,y)$, $b(x,y)$ und $c(x,y)$ sind jene der elliptischen Differentialgleichung (1.2). Diese sind laut Voraussetzung in Abschnitt 1.1 in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ analytisch. Offensichtlich haben die elliptische Differentialgleichung (1.2) und die zugehörige adjungierte Differentialgleichung (2.1) also dasselbe Spezifikationsgebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ (vgl. Seite 8 in [31]). Weiters ist mithilfe des Satzes von Picard ersichtlich, dass eine klassische Lösung $v(x,y)$ der obigen Differentialgleichung (2.1) ebenfalls analytisch im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ ist.
Der adjungierten elliptischen Differentialgleichung (2.1) kann nun analog wie im ersten Kapitel eine formal hyperbolische Differentialgleichung zugeordnet werden. Diese ist

die zur formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) adjungierte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} - \frac{\partial [A(z,\zeta)V]}{\partial z} - \frac{\partial [B(z,\zeta)V]}{\partial \zeta} + C(z,\zeta)V = 0. \tag{2.2}$$

Da die darin vorkommenden Koeffizientenfunktionen $A(z,\zeta), B(z,\zeta)$ und $C(z,\zeta)$ jene der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) sind, kann man zweierlei Dinge feststellen: Zum einen sind die Funktionen $A(z,\zeta), B(z,\zeta)$ und $C(z,\zeta)$ im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ analytisch mit $z \in D$ und $\zeta \in \overline{D}$. Zum anderen ist das für die Analytizität der Koeffizientenfunktionen notwendige Fundamentalgebiet D der elliptischen Differentialgleichung (1.2) aus Definition 1.12 gleichzeitig auch ein Fundamentalgebiet der adjungierten elliptischen Differentialgleichung (2.1) (vgl. [31] auf Seite 8, [16] bzw. [12] auf Seite 132). Nun soll mithilfe der gesuchten Funktion $V(z,\zeta)$ aus (2.2) der Begriff der komplexen Riemannfunktion hergleitet werden. Dafür sei die Funktion $V(z,\zeta)$ analytisch im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ und erfülle dort die adjungierte formal hyperbolische Differentialgleichung (2.2) identisch. Weiters soll die Funktion $V(z,\zeta)$ den zwei Bedingungen

$$V(t,\zeta) = \exp\left[\int_{\tau}^{\zeta} A(t,\eta)d\eta\right], \tag{2.3}$$

$$V(z,\tau) = \exp\left[\int_{t}^{z} B(\xi,\tau)d\xi\right] \tag{2.4}$$

genügen, wobei $t \in D$ und $\tau \in \overline{D}$ zwei Variablen aus den jeweiligen einfach zusammenhängenden Gebieten D und $\overline{D}$ bezeichnen (vgl. Seite 16 in [31]).
Als nächster Schritt wird die adjungierte formal hyperbolische Differentialgleichung (2.2) umgeschrieben zu (vgl. [31] auf Seite 16):

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta}\Bigg[V(z,\zeta) - \int_{\tau}^{\zeta} A(z,\eta)V(z,\eta)d\eta - \int_{t}^{z} B(\xi,\zeta)V(\xi,\zeta)d\xi + \\ + \int_{z}^{t}\int_{\tau}^{\zeta} C(\xi,\eta)V(\xi,\eta)d\eta d\xi\Bigg] = 0.$$

Da die Koeffizientenfunktionen A, B, C und die Funktion V laut Voraussetzung analytische Funktionen der beiden Variablen z und ζ im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ sind, ist der obige Ausdruck in der eckigen Klammer ebenfalls analytisch im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$. Somit erhält man schließlich durch zweimalige Integration nach z und

ζ die Integralgleichung

$$V(z,\zeta) - \int_{\tau}^{\zeta} A(z,\eta)V(z,\eta)d\eta - \int_{t}^{z} B(\xi,\zeta)V(\xi,\zeta)d\xi + \\ + \int_{z}^{t}\int_{\tau}^{\zeta} C(\xi,\eta)V(\xi,\eta)d\eta d\xi = \Phi(z) + \Psi(\zeta), \quad (2.5)$$

wobei $\Phi(z)$ eine im einfach zusammenhängenden Gebiet D analytische Funktion und $\Psi(\zeta)$ eine im einfach zusammenhängenden Spiegelgebiet $\overline{D}$ analytische Funktion sei (vgl. Seiet 17 in [31]). Setzt man nun in der obigen Integralgleichung $z = t$ und $\zeta = \tau$, so folgt:

$$V(t,\tau) = \Phi(t) + \Psi(\tau).$$

Mithilfe einer der beiden Beziehungen (2.3) oder (2.4) gilt:

$$\Phi(t) + \Psi(\tau) = 1.$$

Durch die obige Spezifikation der rechten Seite kann die Integralgleichung (2.5) somit auf die folgende Volterrasche Integralgleichung erster Art umgeschrieben werden (vgl. [31] auf Seite 17):

$$V(z,\zeta) - \int_{\tau}^{\zeta} A(z,\eta)V(z,\eta)d\eta - \int_{t}^{z} B(\xi,\zeta)V(\xi,\zeta)d\xi + \\ + \int_{z}^{t}\int_{\tau}^{\zeta} C(\xi,\eta)V(\xi,\eta)d\eta d\xi = 1. \quad (2.6)$$

Für diese gilt der folgende Satz (vgl. Kapitel 3 von [31], Kapitel 2 von [16] bzw. Kapitel 4 von [12]):

Satz 3. *Für die Volterrasche Integralgleichung erster Art (2.6) existiert eine eindeutige Lösung $V(z,\zeta)$ mit $z \in D$ und $\zeta \in \overline{D}$. Diese ist analytisch im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ und erfüllt die adjungierte formal hyperbolische Differentialgleichung (2.2), sowie die zwei Bedingungen (2.3) und (2.4).*

Beweis. Siehe Kapitel 1 und Abschnitt 3 von [31], Kapitel 2 von [16] bzw. Kapitel 4 von [12]. □

Wie man anhand von (2.6) sehen kann, hängt die Funktion $V(z,\zeta)$ nicht nur von $z \in D$ und $\zeta \in \overline{D}$ ab, sondern auch von den beiden Variablen $t \in D$ und $\tau \in \overline{D}$ (vgl. Seite 17 in [31]). Es ist also sinnvoll, statt der Funktion $V(z,\zeta)$ die sogenannte Riemannfunktion R der vier Variablen z,ζ,t,τ einzuführen und für diese neue Funktion die wichtigsten Schritte ihrer obigen formalen Herleitung nochmal in der folgenden Definition zusammenzufassen (vgl. Kapitel 4 von [31], [16], Kapitel 4 von [12] bzw. [11, 15]):

Definition 2.2. Die eindeutige Lösung der folgenden Volterraschen Integralgleichung erster Art

$$R(z,\zeta,t,\tau) - \int\limits_{\tau}^{\zeta} A(z,\eta)R(z,\eta,t,\tau)d\eta - \int\limits_{t}^{z} B(\xi,\zeta)R(\xi,\zeta,t,\tau)d\xi + \\ + \int\limits_{t}^{z}\int\limits_{\tau}^{\zeta} C(\xi,\eta)R(\xi,\eta,t,\tau)d\eta d\xi = 1,$$

heißt die **komplexe Riemannfunktion** $R(z,\zeta,t,\tau)$ **zur elliptischen Differentialgleichung (1.2)**, wobei $z,t \in D$ und $\zeta,\tau \in \overline{D}$ sind. Sie ist eine analytische Funktion in $(D,\overline{D},D,\overline{D}) := (D,\overline{D}) \times (D,\overline{D}) \subset \mathbb{C}^4$, dem kartesischen Produkt aus dem zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ mit sich selbst. Die obige Integralgleichung entsteht im wesentlichen aus der zweimaligen Integration der adjungierten formal hyperbolischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z \partial \zeta} - \frac{\partial[A(z,\zeta)R]}{\partial z} - \frac{\partial[B(z,\zeta)R]}{\partial \zeta} + C(z,\zeta)R = 0,$$

für die gesuchte Funktion $R(z,\zeta,t,\tau)$. Somit stellt die Riemannfunktion $R(z,\zeta,t,\tau)$ bezüglich ihrer ersten beiden Argumente $z \in D$ und $\zeta \in \overline{D}$ eine Lösung der obigen adjungierten formal hyperbolischen Differentialgleichung (bzw. der zugehörigen adjungierten elliptischen Differentialgleichung) dar. Weiters erfüllt sie die folgenden zwei Bedingungen:

$$R(t,\zeta,t,\tau) = \exp\left[\int\limits_{\tau}^{\zeta} A(t,\eta)d\eta\right] \quad \text{für } t \in D \text{ und } \zeta,\tau \in \overline{D} \tag{2.7}$$

bzw.

$$R(z,\tau,t,\tau) = \exp\left[\int\limits_{t}^{z} B(\xi,\tau)d\xi\right] \quad \text{für } z,t \in D \text{ und } \tau \in \overline{D}. \tag{2.8}$$

Bemerkung. Die beiden Bedingungen (2.3) und (2.4) für die Funktion $V(z,\zeta)$ gehen in die Bedingungen (2.7) und (2.8) für die Riemannfunktion $R(z,\zeta,t,\tau)$ über (vgl. [31]).

2.2. Darstellung aller Lösungen der formal hyperbolischen Differentialgleichung mithilfe der Riemannfunktion

Die Riemannfunktion $R(z,\zeta,t,\tau)$ der elliptischen Differentialgleichung (1.2) ist nicht nur eine Lösung der adjungierten formal hyperbolischen Differentialgleichung (2.2)

bzw. der adjungierten elliptischen Differentialgleichung (2.1) und zudem noch analytisch in $(D, \overline{D}, D, \overline{D})$, sondern sie ist auch ein wichtiges Hilfsmittel, um alle im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ analytischen Lösungen $U(z, \zeta)$ der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) aus Abschnitt 1.3 darstellen zu können (vgl. [15] bzw. Kapitel 4 in [31]).
Diese Lösungsdarstellung für $U(z, \zeta)$ basiert auf einer anderen wichtigen Aussage: Laut Vekua kann nämlich eine beliebige im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ analytische Funktion mithilfe der Riemannfunktion (und Integralen über die Riemannfunktion) dargestellt werden (vgl. Seite 18 in [31]). Für den Beweis dieser Aussage benötigt man unter anderem noch die folgenden zwei Lemmata. Das erste Lemma umfasst dabei weitere Eigenschaften der Riemannfunktion $R(z, \zeta, t, \tau)$ (vgl. Seite 17 und 18 in [31],[16], [12] in Kapitel 4 bzw. [15]):

Lemma 1. *Die Riemmannfunktion $R(z, \zeta, t, \tau)$ erfüllt in $(D, \overline{D}, D, \overline{D})$ für $z, t \in D$ und $\zeta, \tau \in \overline{D}$ die folgenden Beziehungen:*

$$R(t, \tau, t, \tau) = 1, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial R(t, \zeta, t, \tau)}{\partial \zeta} - A(t, \zeta) R(t, \zeta, t, \tau) = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial R(z, \tau, t, \tau)}{\partial z} - B(z, \tau) R(z, \tau, t, \tau) = 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial R(z, \zeta, z, \tau)}{\partial \tau} + A(z, \tau) R(z, \zeta, z, \tau) = 0, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial R(z, \zeta, t, \zeta)}{\partial t} + B(t, \zeta) R(z, \zeta, t, \zeta) = 0. \tag{2.13}$$

Beweis. Hierzu betrachtet man die beiden Bedingungen (2.7) und (2.8) für die Riemannfunktion. Die erste Relation (2.9) folgt aus der Beziehung (2.7), wenn man $\zeta = \tau$ setzt. Die Relation (2.10) ergibt sich, wenn man (2.7) nach ζ ableitet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(t, \zeta, t, \tau)}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \exp \left[\int\limits_{\tau}^{\zeta} A(t, \eta) d\eta \right] \right\} = \exp \left[\int\limits_{\tau}^{\zeta} A(t, \eta) d\eta \right] A(t, \zeta) \\ &= R(t, \zeta, t, \tau) A(t, \zeta). \end{aligned}$$

Analog kann (2.12) bewiesen werden, indem man in (2.7) $t = z$ setzt und nach τ ableitet.
Für die Eigenschaft (2.11) benötigt man nun die Ableitung der Beziehung (2.8) nach z:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(z, \tau, t, \tau)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \exp \left[\int\limits_{t}^{z} B(\xi, \tau) d\xi \right] \right\} = \exp \left[\int\limits_{t}^{z} B(\xi, \tau) d\xi \right] B(z, \tau) \\ &= R(z, \tau, t, \tau) B(z, \tau). \end{aligned}$$

Analog kann wiederum (2.13) bewiesen werden, indem man in (2.8) $\tau = \zeta$ setzt und nach t ableitet (vgl. Kapitel 4 und Abschnitt 2 von [31]). □

Zusätzlich zu diesen gerade bewiesenen Eigenschaften der Riemannfunktion wird nun noch die folgende Identität benötigt (vgl. Seite 18 in [31] bzw. [15, 28]):

Lemma 2. *Sei $v(z,\zeta)$ eine beliebige im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ analytische Funktion der beiden Variablen $z \in D$ und $\zeta \in \overline{D}$. Die Funktion $R(z,\zeta,t,\tau)$ sei die komplexe Riemmannfunktion der elliptischen Differentialgleichung (1.2). Dann gilt die folgende Identität:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2[vR]}{\partial z\partial\zeta} - R\bigg[\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial v}{\partial z} + B(z,\zeta)\frac{\partial v}{\partial\zeta} + C(z,\zeta)v\bigg] &= \\ \frac{\partial}{\partial z}\bigg\{v\bigg(\frac{\partial R}{\partial\zeta} - A(z,\zeta)R\bigg)\bigg\} &+ \frac{\partial}{\partial\zeta}\bigg\{v\bigg(\frac{\partial R}{\partial z} - B(z,\zeta)R\bigg)\bigg\}. \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Beweis. Man differenziert zunächst alle in der Identität vorkommenden Ausdrücke einzeln aus:

$$\frac{\partial^2[vR]}{\partial z\partial\zeta} = \frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\zeta}R + \frac{\partial v}{\partial\zeta}\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial\zeta} + v\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\zeta}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\bigg\{v\bigg(\frac{\partial R}{\partial\zeta} - A(z,\zeta)R\bigg)\bigg\} &= \frac{\partial v}{\partial z}\bigg(\frac{\partial R}{\partial\zeta} - A(z,\zeta)R\bigg) + v\bigg(\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\zeta} - \frac{\partial[A(z,\zeta)R]}{\partial z}\bigg),\\ \frac{\partial}{\partial\zeta}\bigg\{v\bigg(\frac{\partial R}{\partial z} - B(z,\zeta)R\bigg)\bigg\} &= \frac{\partial v}{\partial\zeta}\bigg(\frac{\partial R}{\partial z} - B(z,\zeta)R\bigg) + v\bigg(\frac{\partial^2 R}{\partial\zeta\partial z} - \frac{\partial[B(z,\zeta)R]}{\partial\zeta}\bigg).\end{aligned}$$

Setzt man nun die gerade oben ausgerechneten Ausdrücke wieder zurück in die Identität (2.14) ein und multipliziert die jeweiligen Terme aus, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\zeta}R + \frac{\partial v}{\partial\zeta}\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial\zeta} + v\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\zeta} - R\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\zeta} - RA(z,\zeta)\frac{\partial v}{\partial z} - \\ &- RB(z,\zeta)\frac{\partial v}{\partial\zeta} - RC(z,\zeta)v = \\ &\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial\zeta} - \frac{\partial v}{\partial z}A(z,\zeta)R + v\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\zeta} - v\frac{\partial[A(z,\zeta)R]}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial\zeta}\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial\zeta}B(z,\zeta)R + \\ &+ v\frac{\partial^2 R}{\partial\zeta\partial z} - v\frac{\partial[B(z,\zeta)R]}{\partial\zeta}.\end{aligned}$$

Wie ersichtlich heben sich hierin einige Terme gegenseitig auf und übrig bleibt schließlich die Relation:

$$v\bigg[\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial\zeta} - \frac{\partial[A(z,\zeta)R]}{\partial z} - \frac{\partial[B(z,\zeta)R]}{\partial\zeta} + C(z,\zeta)\bigg] = 0.$$

Da die Riemannfunktion $R(z,\zeta,t,\tau)$ bezüglich ihrer ersten beiden Variablen $z \in D$ und $\zeta \in \overline{D}$ laut Definition 2.2 die adjungierte formal hyperbolische Differentialgleichung (2.2) löst, ist die obige Relation erfüllt und somit die Identität (2.14) bewiesen. $\square$

Mit diesen beiden Lemmata hat man nun das notwendige Rüstzeug, um eine beliebige analytische Funktion $v(z,\zeta)$ aus der Riemannfunktion bzw. aus Integralen über der Riemannfunktion folgendermaßen zusammensetzen (vgl. Seite 18 in [31], Kapitel 4 von [12] bzw. [15]):

Lemma 3. *$R(z,\zeta,t,\tau)$ sei die Riemannfunktion der elliptischen Differentialgleichung (1.2). Eine beliebige im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ analytische Funktion $v(z,\zeta)$ besitzt die Darstellung*

$$\begin{aligned} v(z,\zeta) = v(z_0,\zeta_0)R(z_0,\zeta_0,z,\zeta) + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} R(z_0,\tau,z,\zeta)\left[\frac{\partial v(z_0,\tau)}{\partial\tau} + v(z_0,\tau)A(z_0,\tau)\right]d\tau + \\ + \int\limits_{z_0}^{z} R(t,\zeta_0,z,\zeta)\left[\frac{\partial v(t,\zeta_0)}{\partial t} + v(t,\zeta_0)B(t,\zeta_0)\right]dt + \\ + \int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} R(t,\tau,z,\zeta)\left[\frac{\partial^2 v(t,\tau)}{\partial t\partial\tau} + A(t,\tau)\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial t} + B(t,\tau)\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial\tau} + C(t,\tau)v(t,\tau)\right]d\tau dt, \end{aligned} \tag{2.15}$$

wobei $z_0 \in D$ und $\zeta_0 \in \overline{D}$ zwei beliebige feste Punkte in den jeweiligen einfach zusammenhängenden Gebieten D und $\overline{D}$ bezeichnen. Die Integration erfolgt dabei entlang beliebiger Kurven mit endlicher Länge in D bzw. $\overline{D}$.

Beweis. Ausgangspunkt dieses Beweises ist die Identität (2.14) aus dem vorigen Lemma. Darin tauschen nun die Variablen $z \in D$ und $\zeta \in \overline{D}$ mit den Variablen $t \in D$ und $\tau \in \overline{D}$ die Plätze:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2[v(t,\tau)R(t,\tau,z,\zeta)]}{\partial t\partial\tau} - R(t,\tau,z,\zeta)\left[\frac{\partial^2 v(t,\tau)}{\partial t\partial\tau} + A(t,\tau)\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial t} + \right. \\ &\left. + B(t,\tau)\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial\tau} + C(t,\tau)v(t,\tau)\right] = \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left\{v(t,\tau)\left(\frac{\partial R(t,\tau,z,\zeta)}{\partial\tau} - A(t,\tau)R(t,\tau,z,\zeta)\right)\right\} + \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{v(t,\tau)\left(\frac{\partial R(t,\tau,z,\zeta)}{\partial t} - B(t,\tau)R(t,\tau,z,\zeta)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Diese Gleichung wird nun bezüglich t zwischen den Grenzen $z_0 \in D$ und $z \in D$ bzw. bezüglich τ zwischen den Grenzen $\zeta_0 \in \overline{D}$ und $\zeta \in \overline{D}$ integriert. Damit ergibt sich aus dem zweiten Term auf der linken Seite von (2.16) bereits das gesuchte Doppelintegral aus der Aussage dieses Lemmas, nämlich

$$\int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} R(t,\tau,z,\zeta)\left[\frac{\partial^2 v(t,\tau)}{\partial t\partial\tau} + A(t,\tau)\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial t} + B(t,\tau)\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial\tau} + C(t,\tau)v(t,\tau)\right]d\tau dt.$$

Die restlichen, noch verbleibenden Terme von (2.16) sollen nun gesondert integriert werden. Dabei wird der erste Term auf der linken Seite zu:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial^2[v(t,\tau)R(t,\tau,z,\zeta)]}{\partial t\partial\tau}d\tau dt \;&= \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial[v(t,\zeta)R(t,\zeta,z,\zeta)]}{\partial t}dt- \\
&\quad - \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial[v(t,\zeta_0)R(t,\zeta_0,z,\zeta)]}{\partial t}dt \\
&= v(z,\zeta)R(z,\zeta,z,\zeta) - v(z_0,\zeta)R(z_0,\zeta,z,\zeta)- \\
&\quad - v(z,\zeta_0)R(z,\zeta_0,z,\zeta) + v(z_0,\zeta_0)R(z_0,\zeta_0,z,\zeta) \\
&\overset{(2.9)}{=} v(z,\zeta) - v(z_0,\zeta)R(z_0,\zeta,z,\zeta)- \\
&\quad - v(z,\zeta_0)R(z,\zeta_0,z,\zeta) + v(z_0,\zeta_0)R(z_0,\zeta_0,z,\zeta).
\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (2.16) wird durch die Integration zu:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{v(t,\tau)\Bigg(\frac{\partial R(t,\tau,z,\zeta)}{\partial\tau} - A(t,\tau)R(t,\tau,z,\zeta)\Bigg)\Bigg\}d\tau dt = \\
&= \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} v(z,\tau)\Bigg(\frac{\partial R(z,\tau,z,\zeta)}{\partial\tau} - A(z,\tau)R(z,\tau,z,\zeta)\Bigg)d\tau- \\
&\quad - \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} v(z_0,\tau)\Bigg(\frac{\partial R(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial\tau} - A(z_0,\tau)R(z_0,\tau,z,\zeta)\Bigg)d\tau \\
&\overset{(2.10)}{=} - \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} v(z_0,\tau)\Bigg(\frac{\partial R(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial\tau} - A(z_0,\tau)R(z_0,\tau,z,\zeta)\Bigg)d\tau \\
&= - \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} v(z_0,\tau)\frac{\partial R(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial\tau}d\tau + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} v(z_0,\tau)A(z_0,\tau)R(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau \\
&\underset{\text{Int.}}{\overset{\text{part.}}{=}} -v(z_0,\zeta)R(z_0,\zeta,z,\zeta) + v(z_0,\zeta_0)R(z_0,\zeta_0,z,\zeta) + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial v(z_0,\tau)}{\partial\tau}R(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau+ \\
&\quad + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} v(z_0,\tau)A(z_0,\tau)R(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau.
\end{aligned}$$

Analog wird der zweite Term auf der rechten Seite mithilfe der Relation (2.11) und partieller Integration zu:

$$\int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial\tau}\Bigg\{v(t,\tau)\Bigg(\frac{\partial R(t,\tau,z,\zeta)}{\partial t} - B(t,\tau)R(t,\tau,z,\zeta)\Bigg)\Bigg\}d\tau dt =$$

$$= -v(z,\zeta_0)R(z,\zeta_0,z,\zeta) + v(z_0,\zeta_0)R(z_0,\zeta_0,z,\zeta) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial v(t,\zeta_0)}{\partial t} R(t,\zeta_0,z,\zeta)dt +$$
$$+ \int\limits_{z_0}^{z} v(t,\zeta_0)B(t,\zeta_0)R(t,\zeta_0,z,\zeta)dt.$$

Nun fasst man alle gerade berechneten Ausdrücke wieder zu der zu integrierenden Ausgangsgleichung (2.16) zusammen und erhält:

$$v(z,\zeta) - v(z_0,\zeta)R(z_0,\zeta,z,\zeta) - v(z,\zeta_0)R(z,\zeta_0,z,\zeta) + v(z_0,\zeta_0)R(z_0,\zeta_0,z,\zeta) -$$
$$- \int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} R(t,\tau,z,\zeta)\left[\frac{\partial^2 v(t,\tau)}{\partial t\partial\tau} + A(t,\tau)\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial t} + B(t,\tau)\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial\tau} + C(t,\tau)v(t,\tau)\right]d\tau dt$$
$$= -v(z_0,\zeta)R(z_0,\zeta,z,\zeta) + v(z_0,\zeta_0)R(z_0,\zeta_0,z,\zeta) + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial v(z_0,\tau)}{\partial\tau} R(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau +$$
$$+ \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} v(z_0,\tau)A(z_0,\tau)R(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau - v(z,\zeta_0)R(z,\zeta_0,z,\zeta) +$$
$$+ v(z_0,\zeta_0)R(z_0,\zeta_0,z,\zeta) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial v(t,\zeta_0)}{\partial t} R(t,\zeta_0,z,\zeta)dt +$$
$$+ \int\limits_{z_0}^{z} v(t,\zeta_0)B(t,\zeta_0)R(t,\zeta_0,z,\zeta)dt.$$

Hieraus ergibt sich nach der Zusammenfassung entsprechender Terme bzw. durch Umschreiben die Gleichung

$$v(z,\zeta) = v(z_0,\zeta_0)R(z_0,\zeta_0,z,\zeta) +$$
$$+ \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial v(z_0,\tau)}{\partial\tau} R(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} v(z_0,\tau)A(z_0,\tau)R(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau +$$
$$+ \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial v(t,\zeta_0)}{\partial t} R(t,\zeta_0,z,\zeta)dt + \int\limits_{z_0}^{z} v(t,\zeta_0)B(t,\zeta_0)R(t,\zeta_0,z,\zeta)dt +$$
$$+ \int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} R(t,\tau,z,\zeta)\left[\frac{\partial^2 v(t,\tau)}{\partial t\partial\tau} + A(t,\tau)\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial t} + B(t,\tau)\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial\tau} + C(t,\tau)v(t,\tau)\right]d\tau dt,$$

woraus die Aussage (2.15) des Lemmas folgt (vgl. [28] bzw. in Kapitel 4 von [12]). $\square$

Bemerkung. Setzt man in (2.15) als analytische Funktion $v(z,\zeta) = R(z_0,\zeta_0,z,\zeta)$, so ergibt sich unter Verwendung der Relationen (2.9), (2.12) und (2.13) folgende Gleichung:

$$\int\limits_{z_0}^{z}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} R(t,\tau,z,\zeta)\left[\frac{\partial^2 R(z_0,\zeta_0,t,\tau)}{\partial t\partial\tau} + A(t,\tau)\frac{\partial R(z_0,\zeta_0,t,\tau)}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + B(t,\tau)\frac{\partial R(z_0,\zeta_0,t,\tau)}{\partial\tau} + C(t,\tau)R(z_0,\zeta_0,t,\tau)\right] d\tau dt = 0,$$

woraus

$$\left[\frac{\partial^2 R(z_0,\zeta_0,t,\tau)}{\partial t\partial\tau} + A(t,\tau)\frac{\partial R(z_0,\zeta_0,t,\tau)}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + B(t,\tau)\frac{\partial R(z_0,\zeta_0,t,\tau)}{\partial\tau} + C(t,\tau)R(z_0,\zeta_0,t,\tau)\right] = 0$$

folgt. Das bedeutet offensichtlich, dass die Riemannfunktion $R(z_0,\zeta_0,t,\tau)$ bezüglich ihrer letzten beiden Argumente $t \in D$ und $\tau \in \overline{D}$ die formal hyperbolische Differentialgleichung (1.12) löst. Somit kann man schließen, dass die Funktion $R(z,\zeta,t,\tau)$ bezüglich ihrer letzten beiden Variablen $t \in D$ und $\tau \in \overline{D}$ die Riemannfunktion der adjungierten elliptischen Differentialgleichung (2.1) ist (vgl. Seite 18 in [31]).

In weiterer Folge kann nun die Aussage, dass eine beliebige im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ analytische Funktion $v(z,\zeta)$ mithilfe der Riemannfunktion laut (2.15) dargestellt werden kann, auf eine im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ analytische Lösung $U(z,\zeta)$ der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) übertragen werden. Dazu wird der folgende Satz formuliert (vgl. Seite 22 und 23 in [31] bzw. [15, 28]):

Satz 4. *Sei D ein Fundamentalgebiet und $R(z,\zeta,t,\tau)$ die Riemannfunktion der elliptischen Differentialgleichung (1.2). Die beiden Punkte $z_0 \in D$ und $\zeta_0 \in \overline{D}$ seien beliebig, aber fest. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Alle im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ analytischen Lösungen $U(z,\zeta)$ der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) lassen sich durch

$$U(z,\zeta) = \alpha R(z_0,\zeta_0,z,\zeta) + \int\limits_{z_0}^{z} \Phi(t)R(t,\zeta_0,z,\zeta)dt + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau)R(z_0,\tau,z,\zeta)d\tau \tag{2.17}$$

darstellen, wobei

$$\alpha = U(z_0,\zeta_0)$$

eine komplexe Konstante und

$$\Phi(z) = \frac{\partial U(z,\zeta_0)}{\partial z} + B(z,\zeta_0)U(z,\zeta_0)$$

bzw.

$$\Phi^*(\zeta) = \frac{\partial U(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} + A(z_0, \zeta) U(z_0, \zeta)$$

in den einfach zusammenhängenden Gebieten D bzw. $\overline{D}$ jeweils analytische Funktionen bezeichnen.

(ii) *Umgekehrt stellt (2.17) für eine beliebige Konstante $\alpha \in \mathbb{C}$ und für zwei beliebige in D bzw. $\overline{D}$ analytische Funktionen $\Phi(z)$ und $\Phi^*(\zeta)$ eine im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ analytische Lösung $U(z, \zeta)$ der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) dar.*

(iii) *Alle im einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ klassischen und analytischen Lösungen $u(x, y)$ der elliptischen Differentialgleichung (1.2) lassen sich durch*

$$u(x, y) = \alpha R(z_0, \zeta_0, z, \bar{z}) + \int\limits_{z_0}^{z} \Phi(t) R(t, \zeta_0, z, \bar{z}) dt + \int\limits_{\zeta_0}^{\bar{z}} \Phi^*(\tau) R(z_0, \tau, z, \bar{z}) d\tau \tag{2.18}$$

darstellen.

(iv) *Umgekehrt stellt (2.18) für eine beliebige Konstante $\alpha \in \mathbb{C}$ und für beliebige in D bzw. $\overline{D}$ analytische Funktionen $\Phi(z)$ und $\Phi^*(\zeta)$ eine im einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ analytische (und auch klassische) Lösung $u(x, y)$ der elliptischen Differentialgleichung (1.2) dar.*

Beweis.
Zu (i): Die Funktion $U(z, \zeta)$ ist die im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ analytische Lösung der formal hyperbolischen Differentialgleichung (1.12) und kann somit anstelle der im zylindrischen Gebiet $(D, \overline{D})$ analytischen Funktion $v(z, \zeta)$ aus Lemma 3 in die Lösungsdarstellung (2.15) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} U(z, \zeta) = U(z_0, \zeta_0) R(z_0, \zeta_0, z, \zeta) &+ \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} R(z_0, \tau, z, \zeta) \left[\frac{\partial U(z_0, \tau)}{\partial \tau} + U(z_0, \tau) A(z_0, \tau) \right] d\tau + \\ &+ \int\limits_{z_0}^{z} R(t, \zeta_0, z, \zeta) \left[\frac{\partial U(t, \zeta_0)}{\partial t} + U(t, \zeta_0) B(t, \zeta_0) \right] dt + \\ + \int\limits_{z_0}^{z} \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} R(t, \tau, z, \zeta) &\left[\frac{\partial^2 U(t, \tau)}{\partial t \partial \tau} + A(t, \tau) \frac{\partial U(t, \tau)}{\partial t} + B(t, \tau) \frac{\partial U(t, \tau)}{\partial \tau} + C(t, \tau) U(t, \tau) \right] d\tau dt. \end{aligned}$$

Das Doppelintegral in obiger Darstellung fällt weg, da $U(z, \zeta)$ laut Voraussetzung die formal hyperbolische Differentialgleichung (1.12) löst. Weiters kann man nun

$$\alpha = U(z_0, \zeta_0)$$

bzw.

$$\Phi(z) = \frac{\partial U(z,\zeta_0)}{\partial z} + B(z,\zeta_0)U(z,\zeta_0),$$
$$\Phi^*(\zeta) = \frac{\partial U(z_0,\zeta)}{\partial \zeta} + A(z_0,\zeta)U(z_0,\zeta)$$

wählen. Die beiden obigen Funktionen sind jeweils in den einfach zusammenhängenden Gebieten D und $\overline{D}$ analytisch, da $A(z,\zeta), B(z,\zeta)$ und $U(z,\zeta)$ laut Voraussetzung im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ analytisch sind. Somit ist die Integraldarstellung (2.17) erklärt. Da die Punkte $z_0 \in D$ und $\zeta_0 \in \overline{D}$ beliebig gewählte Punkte sind, kann man mithilfe (2.17) alle im zylindrischen Gebiet $(D,\overline{D})$ analytischen Lösungen $U(,\zeta)$ darstellen (vgl. Seite 23 in [31]).
Zu (ii): Man berechnet die Ableitungen von (2.17)

$$\frac{\partial U(z,\zeta)}{\partial z} = \alpha\frac{\partial R(z_0,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial z} + \Phi(z)R(z,\zeta_0,z,\zeta) + \int_{z_0}^{z}\Phi(t)\frac{\partial R(t,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial z}dt+$$
$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(\tau)\frac{\partial R(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial z}d\tau,$$
$$\frac{\partial U(z,\zeta)}{\partial \zeta} = \alpha\frac{\partial R(z_0,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial \zeta} + \int_{z_0}^{z}\Phi(t)\frac{\partial R(t,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial \zeta}dt + \Phi^*(\zeta)R(z_0,\zeta,z,\zeta)+$$
$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(\tau)\frac{\partial R(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial \zeta}d\tau$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 U(z,\zeta)}{\partial z\partial \zeta} = \alpha\frac{\partial^2 R(z_0,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial z\partial \zeta} + \Phi(z)\frac{\partial R(z,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial \zeta} + \int_{z_0}^{z}\Phi(t)\frac{\partial^2 R(t,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial z\partial \zeta}dt$$
$$+\Phi^*(\zeta)\frac{\partial R(z_0,\zeta,z,\zeta)}{\partial z} + \int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(\tau)\frac{\partial^2 R(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial z\partial \zeta}d\tau$$

und setzt diese in die formal hyperbolische Differentialgleichung (1.12) ein. Somit erhält man die Gleichung

$$\alpha\Big[\frac{\partial^2 R(z_0,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial z\partial \zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial R(z_0,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial z} + B(z,\zeta)\frac{\partial R(z_0,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial \zeta}+$$
$$+C(z,\zeta)R(z_0,\zeta_0,z,\zeta)\Big] + \Phi(z)\Big[\frac{\partial R(z,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial \zeta} + A(z,\zeta)R(z,\zeta_0,z,\zeta)\Big]+$$
$$+\Phi^*(\zeta)\Big[\frac{\partial R(z_0,\zeta,z,\zeta)}{\partial z} + B(z,\zeta)R(z_0,\zeta,z,\zeta)\Big]+$$

$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau)\left[\frac{\partial^2 R(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial z\partial\zeta} + A\frac{\partial R(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial z} + B\frac{\partial R(z_0,\tau,z,\zeta)}{\partial \zeta} + CR(z_0,\tau,z,\zeta)\right]d\tau$$

$$+\int_{z_0}^{z} \Phi(t)\left[\frac{\partial^2 R(t,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial z\partial\zeta} + A\frac{\partial R(t,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial z} + B\frac{\partial R(t,\zeta_0,z,\zeta)}{\partial \zeta} + CR(t,\zeta_0,z,\zeta)\right]dt = 0.$$

Laut Bemerkung 2.2 erfüllt die Riemannfunktion $R(z_0,\zeta_0,z,\zeta)$ bezüglich ihrer letzten beiden Variablen $z \in D$ und $\zeta \in \overline{D}$ die formal hyperbolische Differentialgleichung (1.12). Das bedeutet, dass der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer bzw. jene unter den Integralen jeweils Null sind. Die Ausdrücke in der zweiten bzw. dritten eckigen Klammer fallen wegen der Relationen (2.12) bzw. (2.13) weg. Die obige Gleichung ist also für alle Konstanten $\alpha \in \mathbb{C}$ und für alle in D bzw. $\overline{D}$ analytischen Funktionen $\Phi(z)$ und $\Phi^*(\zeta)$ erfüllt (vgl. [15, 28]).
Zu (iii): Laut dem Hauptsatz von Vekua erhält man durch die Einschränkung $\zeta = \bar{z}$ in (2.17) alle analytischen und klassischen Lösungen $u(x,y)$ der elliptischen Differentialgleichung (1.2) (vgl. Seite 36 in [31] bzw. [15]).
Zu (iv): Dies kann analog wie im Beweis zu (ii) gezeigt werden. □

Abschließend bleibt anzumerken, dass die Bestimmung der Riemannfunktion $R(z,\zeta,t,\tau)$ einer Differentialgleichung der Form (1.2) im allgemeinen schwierig und aufwändig ist. Als Überblick sind in [18] Riemannfunktionen verschiedenster Differentialgleichung aufgelistet. Für folgende Speziallfälle der elliptischen Differentialgleichung (1.2) kann sie jedoch relativ einfach gefunden und angegeben werden:

Beispiel 1. Gegeben sei die Laplace–Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.19}$$

für die unbekannte Funktion $u(x,y)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ (vgl. Seite 19 in [31]). Diese ist laut Definition 2.1 eine selbstadjungierte elliptische Differentialgleichung, da sie mit ihrer adjungierten elliptischen Differentialgleichung

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

exakt übereinstimmt. Die zur Laplace–Gleichung (2.19) äquivalente, formal hyperbolische Differentialgleichung ist durch den Übergang auf die unabhängigen komplexen Variablen $z = x + iy$ und $\zeta = x - iy$ mit $x, y \in \mathbb{C}$ wie folgt gegeben (vgl. Seite 8 in [31]):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\zeta} = 0.$$

Diese ist ebenfalls selbstadjungiert, wie man an der Gestalt der adjungierten formal hyperbolischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} = 0$$

sehen kann. Da die Koeffizientenfunktionen $A(z,\zeta), B(z,\zeta), C(z,\zeta)$ der obigen adjungierten formal hyperbolischen Differentialgleichung alle Null sind, ergibt sich aus (2.6) die Riemannfunktion der Laplace–Gleichung (2.19) als

$$R(z,\zeta,t,\tau) = V(z,\zeta) = 1.$$

Beispiel 2. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ wird die elliptische und selbstadjungierte Differentialgleichung

$$\Delta u + \frac{4n(n+1)}{(1+x^2+y^2)^2} u = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.20}$$

für die unbekannte Funktion $u(x,y)$ betrachtet. Durch die Einführung der komplexen Variable $z = x + iy$ und ihrer Konjugation $\bar{z} = x - iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ geht die obige Differentialgleichung mithilfe der Beziehung (1.7) auf die folgende komplexe Form über (vgl. Seite 20 und 21 in [31]):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} U = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Diese Differentialgleichung stellt die usprüngliche Form der Bauer–Peschl–Gleichung dar, wobei $U(z,\bar{z})$ die gesuchte Funktion im einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ bezeichnet (vgl. [2, 4] bzw. Seite 37 in [8] mit $\varepsilon = 1$).
Zwischen der ursprünglichen Form der Bauer–Peschl–Gleichung (2.21) und der dreidimensionalen Laplace–Gleichung

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

für die räumliche Funktion $w(x,y,z)$ herrscht übrigens ein enger Zusammenhang (vgl. [2, 4, 1]). Dieser wird später in der Herleitung der Riemannfunktion der ursprünglichen Form der Bauer–Peschl–Gleichung (2.21) Verwendung finden (vgl. Seite 20 in [31]). Führt man die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \sin\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi \sin\vartheta, \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

mit dem Abstand $r \geq 0$ und den beiden Winkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ein, so erhält man die dreidimensionale Laplace–Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0$$

für die unbekannte Funktion $w(r, \varphi, \vartheta)$. Mit dem Separationsansatz

$$w(r, \varphi, \vartheta) = R(r)Y(\varphi, \vartheta)$$

und dem speziellen Separationsparameter $n(n+1)$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgen daraus die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}R = 0$$

für den radialen Anteil $R(r)$ und die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + n(n+1)Y = 0 \tag{2.22}$$

für den winkelabhängigen Anteil $Y(\varphi, \vartheta)$. Betrachtet man nun die Differentialgleichung (2.22) und führt die Koordiantentransformation

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\cos\varphi, \\ y &= \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\sin\varphi, \end{aligned} \tag{2.23}$$

die sogenannte stereographische Projektion der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ (vgl. Seite 31 und 32 in [30]), ein, so erhält man schließlich die Differentialgleichung (2.20) bzw. die usprüngliche Form der Bauer–Peschl–Gleichnung (2.21) (vgl. [2, 31]). Somit wäre der Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Form der Bauer–Peschl–Gleichung (2.21) und der dreidimensionalen Laplace–Gleichung erklärt.

Für die Herleitung der Riemannfunktion der ursprünglichen Form der Bauer–Peschl–Gleichung (2.21), benötigt man laut dem Anfang von Kapitel 2 ihre adjungierte formal hyperbolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} + \frac{n(n+1)}{(1+z\zeta)^2}V = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.24}$$

wobei $z = x + iy \in D$ und $\zeta = x - iy \in \overline{D}$ zwei unabhängige komplexe Variablen bezeichnen. Generell betrachtet man für die Differentialgleichung (2.24) ein Fundamentalgebiet D, das die folgende Bedingung erfüllen muss (vgl. Seite 21 in [31]):

$$1 + z\zeta \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z\zeta \neq -1.$$

Das heißt in anderen Worten, dass das zylindrische Gebiet $(D, \overline{D}) \subset \mathbb{C}^2$ keinen Punkt mit der Fläche $1 + z\zeta = 0$ aus dem Raum $\mathbb{C}^2$ gemeinsam haben darf (vgl. [1]).

Nun bestimmt man die Riemannfunktion von (2.21) wegen des großen Aufwandes nicht durch die zweimalige Integration von (2.24) bzw. über die Lösung der Integralgleichung

$$R(z, \zeta, t, \tau) + n(n+1)\int_t^z\int_\tau^\zeta \frac{1}{(1+\xi\eta)^2}R(\xi, \eta, t, \tau)\,d\eta d\xi = 1$$

gemäß der Definition 2.2 der Riemannfunktion, sondern man wählt den folgenden Weg von Vekua (vgl. [31], Kapitel 1, Abschnitt 5.4 ab Seite 20): Eine Lösung der Differentialgleichung (2.22) ist die Legendrefunktion erster Art mit dem Index $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(\cos\vartheta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-2k)!k!} (\cos\vartheta)^{n-2k}, \tag{2.25}$$

wobei

$$\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \end{cases}$$

die Gaussklammer bezeichnet (vgl. [27, 31]). Mithilfe der Transformation (2.23) für die beiden unabhängigen Variablen $x, y \in \mathbb{C}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 + y^2 &= 1 + \frac{\sin^2\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &= 1 + \frac{\sin^2\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2} \\ &= \frac{1 + 2\cos\vartheta + \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2} \\ &= \frac{2}{1+\cos\vartheta}, \\ 1 + \cos\vartheta &= \frac{2}{1+x^2+y^2}, \end{aligned}$$

woraus

$$\cos\vartheta = \frac{1-(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} = \frac{1-z\zeta}{1+z\zeta}$$

folgt. Diese Relation in (2.25) rückeingesetzt liefert die Legendrefunktion

$$P_n\left(\frac{1-z\zeta}{1+z\zeta}\right),$$

die nach wie vor die Differentialgleichung (2.22) und somit ebenfalls die zur urspünglichen Form der Bauer–Peschl–Gleichung adjungierte formal hyperbolische Differentialgleichung (2.24) löst (siehe dazu die Erklärung zum Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Form der Bauer–Peschl–Gleichung (2.21) und der dreidimensionalen Laplace–Gleichung am Anfang dieses Beispiels). Vekua zeigt dann weiters in [31] auf Seite 21, dass die folgende spezielle Legendrefunktion

$$P_n\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau) + 2z\tau + 2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right) \tag{2.26}$$

mit den beiden beliebigen Variablen $t \in D$ und $\tau \in \overline{D}$ und der Bedingung $1 + t\tau \neq 0$ auch wieder die adjungierte formal hyperbolische Bauer–Peschl–Gleichung (2.24) löst. Somit ist die Riemannfunktion der ursprünglichen Form der Bauer–Peschl–Gleichung (2.21) durch die obige spezielle Legendrefunktion (2.26) für $z, t \in D$ und $\zeta, \tau \in \overline{D}$ gegeben (vgl. Seite 21 in [31]):

$$R(z, \zeta, t, \tau) = P_n\left(\frac{(1 - z\zeta)(1 - t\tau) + 2z\tau + 2\zeta t}{(1 + z\zeta)(1 + t\tau)}\right).$$

Für die Riemannfunktion der ursprüngliche Form der Bauer–Peschl–Gleichung (2.21) gelten weiters die Bedingungen (2.7) und (2.8) aus der Definiton 2.2:

$$R(t, \zeta, t, \tau) = \exp\left[\int_{\tau}^{\zeta} A(t, \eta) d\eta\right] = \exp[0] = 1 \quad \text{für } t \in D \text{ und } \zeta, \tau \in \overline{D},$$
$$R(z, \tau, t, \tau) = \exp\left[\int_{t}^{z} B(\xi, \tau) d\xi\right] = \exp[0] = 1 \quad \text{für } z, t \in D \text{ und } \tau \in \overline{D}.$$

Diese werden ebenfalls erfüllt, wenn man die spezielle Legendrefunktion (2.26) als die Riemannfunktion betrachtet (vgl. Seite 21 in [31]):

$$\begin{aligned}
R(t, \zeta, t, \tau) &= P_n\left(\frac{(1 - t\tau)(1 - t\tau) + 2t\tau + 2\tau t}{(1 + t\tau)(1 + t\tau)}\right) \\
&= P_n\left(\frac{(1 - t\tau)^2 + 4t\tau}{(1 + t\tau)^2}\right) \\
&= P_n(1) \\
&= 1, \\
R(z, \tau, t, \tau) &= P_n\left(\frac{(1 - z\tau)(1 - t\tau) + 2z\tau + 2\tau t}{(1 + z\tau)(1 + t\tau)}\right) \\
&= P_n\left(\frac{1 - t\tau - z\tau + zt\tau^2 + 2z\tau + 2\tau t}{(1 + z\tau)(1 + t\tau)}\right) \\
&= P_n\left(\frac{(1 + z\tau)(1 + t\tau)}{(1 + z\tau)(1 + t\tau)}\right) \\
&= P_n(1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die folgende allgemein geltende Eigenschaft für die Legendrefunktion erster Art mit dem Index $n \in \mathbb{N}$ verwendet (vgl. [27]):

$$P_n(1) = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

3. Die Bauer–Peschl–Gleichungen

In diesem Kapitel werden die zwei, für diese Arbeit wichtigsten Differentialgleichungen bzw. ihre Lösungsdarstellungen vorgestellt, nämlich die Bauer–Peschl–Gleichungen erster und zweiter Stufe. Im Gegensatz zum vorigen Kapitel, in dem die Lösungen von elliptischen partiellen Differentialgleichungen durch eine Integraltransformation mithilfe der Riemannfunktion dargestellt wurden, sollen nun die Lösungen der Bauer–Peschl–Gleichungen mithilfe von Differentialoperatoren ausgedrückt werden.
Am Anfang dieses Kapitels wird die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe behandelt, in der nur eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ vorkommt und die durch eine Transformation aus der ursprünglichen Form der Bauer–Peschl–Gleichung (2.21) erhalten werden kann. Für die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe wird ausführlich eine Lösungsdarstellung mithilfe von Differentialoperatoren hergeleitet und in Form eines Satzes angegeben.
Am Ende dieses Kapitels wird dann die Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe eingeführt, in der nun zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ auftreten. Die Darstellung ihrer Lösungen wird dabei nur kurz in Form eines Satzes zusammengefasst, da diese eine Verallgemeinerung der Aussage des Satzes für die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe ist.

3.1. Die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe

Bezeichne $D \subset \mathbb{R}^2$ das einfach zusammenhände Definitionsgebiet der folgenden elliptischen und selbstadjungierten Differentialgleichung:

$$\Delta u - \frac{n(n+1)}{x^2} u = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Hierin soll die einzig auftretende Koeffizientenfunktion

$$c(x,y) = c(x) = -\frac{n(n+1)}{x^2}$$

analytisch in $D \subset \mathbb{R}^2$ sein. Somit muss das einfach zusammenhängende Gebiet D die Bedingung $x \neq 0$ erfüllen. Unter diesen Voraussetzungen ist die klassische Lösung $u(x,y)$ der obigen Differentialgleichung ebenfalls analytisch in D (siehe dazu den Satz von Picard in Kapitel 1).
Führt man nun die beiden zueinander konjugiert komplexen Variablen $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ein und verwendet die Relation (1.7), so ergibt sich die

komplexe Form der Differentialgleichung (3.1) bzw. die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(z+\bar{z})^2} U = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Damit die Analytizität der unbekannten Funktion $U(z, \bar{z})$ im einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ gewährleistet ist, muss die Koeffizientenfunktion

$$C(z, \zeta) = -\frac{n(n+1)}{(z+\bar{z})^2}$$

in D analytisch sein. Das beudeutet, dass die Bedingung

$$z + \bar{z} \neq 0$$

in D erfüllt sein muss (vgl. [3], Seite 23 in [8] bzw. [7]). Anders ausgedrückt bedeutet diese Bedingung, dass der Realteil der komplexen Zahl z ungleich Null sein muss. Also kann man als das Fundamentalgebiet D der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) z.B. die rechten Halbebene von $\mathbb{C}$ wählen.

Bemerkung. Die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) kann auch aus der ursprünglichen Form der Bauer–Peschl–Gleichung (2.21)

$$(1 + t\bar{t})^2 \frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial t \partial \bar{t}} + n(n+1)\widetilde{U} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

hergeleitet werden, wobei $t = x + iy$ und $\bar{t} = x - iy$ hierbei die zueinander konjugiert komplexen Variablen in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ bezeichnen. Führt man die Transformation

$$t = z \quad \text{und} \quad \bar{t} = \frac{1}{\bar{z}}$$

ein, bestimmt daraus die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(-\frac{1}{\bar{z}^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \bar{t}} = -\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\bar{z}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{z}^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}} = -\bar{z}^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

und setzt dies in die ursprüngliche Form der Bauer–Peschl–Gleichung ein, so erhält man die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) (vgl. [1]):

$$\begin{aligned} & (1 + t\bar{t})^2 \frac{\partial^2 \widetilde{U}}{\partial t \partial \bar{t}} + n(n+1)\widetilde{U} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(1 + z \frac{1}{\bar{z}} \right)^2 (-\bar{z}^2) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + n(n+1)U = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\bar{z} + z)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + n(n+1)U = 0. \end{aligned}$$

Als nächster Schritt soll nun eine Darstellung aller Lösungen der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) hergeleitet werden. Dazu kann der folgende Satz formuliert werden (vgl. [2, 1], Seite 30 und 31 in [8] bzw. [7]):

Satz 5. *Bezeichne D ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, in dem $z+\bar{z} \neq 0$ gilt. Weiters seien durch*

$$D_z = (z+\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.3}$$

$$D_{\bar{z}} = (z+\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tag{3.4}$$

Operatoren definiert, die auf in D analytische Funktionen wirken und für die

$$D_z^k = (z+\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial z} D_z^{k-1} \qquad \text{bzw.} \qquad D_{\bar{z}}^k = (z+\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} D_{\bar{z}}^{k-1}$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) *Alle im Gebiet D definierten, analytischen Lösungen $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) lassen sich mithilfe von zwei in D definierten, holomorphen Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ wie folgt darstellen:*

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}, \tag{3.5}$$

wobei $\overline{h(z)}$ die konjugiert komplexe Funktion von $h(z)$ bezeichnet. Die Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ werden die Erzeugenden genannt und

$$g^{(\nu)}(z) := \frac{d^\nu g(z)}{dz^\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{h^{(\nu)}(z)} := \frac{d^\nu \overline{h(z)}}{d\bar{z}^\nu}$$

für $\nu = 0, \ldots, n$.

(b) *Umgekehrt stellt (3.5) für alle in D holomorphen Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ eine Lösung $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) dar.*

(c) *Ist die Lösung $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) in D vorgegeben, so sind die $(2n+1)-$ten Ableitungen der Erzeugenden eindeutig bestimmt und es gilt:*

$$g^{(2n+1)}(z) = \frac{D_z^{n+1} U}{(z+\bar{z})^{2n+2}} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{h^{(2n+1)}(z)} = \frac{D_{\bar{z}}^{n+1} U}{(z+\bar{z})^{2n+2}}. \tag{3.6}$$

Die Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ selbst sind in diesem Fall nur bis auf ein Polynom vom Grad $2n$ eindeutig bestimmt. Das allgemeinste Erzeugendenpaar folgt gemäß:

$$g_1(z) = g_2(z) + \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu z^\mu,$$

$$h_1(z) = h_2(z) - \sum_{\mu=0}^{2n} \overline{a_\mu} (-z)^\mu, \quad a_\mu \in \mathbb{C}.$$

(d) *Lässt sich die Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) in D allein durch eine Erzeugende $h(z)$ über die Relation*

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\overline{h^{(\nu)}(z)}\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}$$

darstellen, so ist diese Erzeugende eindeutig durch

$$h(z) = \frac{1}{(2n)!}\overline{D_z^n U}$$

bestimmt. Analog gilt: Wenn die Lösung in D allein durch die Erzeugende $g(z)$ über die Beziehung

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(\nu)}(z)\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}$$

dargestellt werden kann, so ist diese Erzeugende eindeutig durch

$$g(z) = \frac{1}{(2n)!}D_{\bar{z}}^n U$$

bestimmt.

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigt man zunächst die folgenden beiden Lemmata (vgl. [2, 1]):

Lemma 4. *Für die Lösungen $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung (3.2) im einfach zusammenhängenden Gebiet D gilt die Beziehung*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar{z})^{2k+2}}\right\} - \Big[n(n+1) - k(k+1)\Big]\frac{D_z^k U}{(z+\bar{z})^{2k+2}} = 0 \tag{3.7}$$

für $k = 0, \ldots, n$.

Beweis. Der Beweis dieses Hilfssatzes wird durch vollständige Induktion geführt. <u>Basis</u>: Für $k = 0$ ergibt sich aus (3.7) und mit $D_z^0 U = U$ die Relation

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{D_z U}{(z+\bar{z})^2}\right\} - n(n+1)\frac{U}{(z+\bar{z})^2} = 0.$$

Nun ist laut Definition (3.3)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{D_z U}{(z+\bar{z})^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{(z+\bar{z})^2\frac{\partial U}{\partial z}}{(z+\bar{z})^2}\right\} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Folglich ergibt sich in diesem Fall daraus die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} - n(n+1)\frac{U}{(z+\bar{z})^2} = 0.$$

Somit ist die Induktionsbasis gesichert.
Annahme: Die Aussage (3.7) gilt für ein beliebiges k.
Schritt: Um die Aussage (3.7) für den Index $k+1$ zu zeigen, leitet man die einzelnen Terme von (3.7) partiell nach z ab und erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+2}}\right\} &= \frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial z}D_z^{k+1}U(z+\bar z)^{2k+2} - D_z^{k+1}U(2k+2)(z+\bar z)^{2k+1}}{(z+\bar z)^{4k+4}}\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{(z+\bar z)^2\frac{\partial}{\partial z}D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+4}}\right\} - (2k+2)\frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+3}}\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{D_z^{k+2}U}{(z+\bar z)^{2k+4}}\right\} - (2k+2)\frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+3}}\right\},\\
\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{D_z^{k}U}{(z+\bar z)^{2k+2}}\right\} &= \frac{\frac{\partial}{\partial z}D_z^{k}U(z+\bar z)^{2k+2} - D_z^{k}U(2k+2)(z+\bar z)^{2k+1}}{(z+\bar z)^{4k+4}}\\
&= \frac{(z+\bar z)^2\frac{\partial}{\partial z}D_z^{k}}{(z+\bar z)^{2k+4}} - (2k+2)\frac{D_z^{k}U}{(z+\bar z)^{2k+3}}\\
&= \frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+4}} - (2k+2)\frac{D_z^{k}U}{(z+\bar z)^{2k+3}}.
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke in (3.7) eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{D_z^{k+2}U}{(z+\bar z)^{2k+4}}\right\} - (2k+2)\frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+3}}\right\} -\\
&\qquad - \Big[n(n+1) - k(k+1)\Big]\left[\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+4}} - (2k+2)\frac{D_z^{k}U}{(z+\bar z)^{2k+3}}\right] = 0.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

Nun lässt sich die Ableitung im zweiten Term der obigen Gleichung umschreiben zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+3}}\right\} &= \frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{1}{z+\bar z}\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+2}}\right\}\\
&= -\frac{1}{(z+\bar z)^2}\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+2}} + \frac{1}{z+\bar z}\frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+2}}\right\}.
\end{aligned}$$

Dies in (3.8) verwendet, liefert die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{D_z^{k+2}U}{(z+\bar z)^{2k+4}}\right\} + \frac{2k+2}{(z+\bar z)^2}\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+2}} - \frac{2k+2}{z+\bar z}\frac{\partial}{\partial \bar z}\left\{\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+2}}\right\} -\\
&\qquad - \Big[n(n+1) - k(k+1)\Big]\left[\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar z)^{2k+4}} - (2k+2)\frac{D_z^{k}U}{(z+\bar z)^{2k+3}}\right] = 0,
\end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{D_z^{k+2}U}{(z+\bar{z})^{2k+4}}\right\} + \frac{2k+2}{(z+\bar{z})^2}\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar{z})^{2k+2}} -$$
$$- \frac{2k+2}{z+\bar{z}}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar{z})^{2k+2}}\right\} - \Big[n(n+1)-k(k+1)\Big]\frac{D_z^{k}U}{(z+\bar{z})^{2k+2}}\right] -$$
$$- \Big[n(n+1)-k(k+1)\Big]\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar{z})^{2k+4}} = 0.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer in der obigen zweiten Zeile ist Null, da dieser Term genau der Induktionsannahme (3.7) entspricht. Übrig bleibt also die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{D_z^{k+2}U}{(z+\bar{z})^{2k+4}}\right\} - \underbrace{\Big[n(n+1)-k(k+1)-(2k+2)\Big]}_{=n(n+1)-(k+1)(k+2)}\frac{D_z^{k+1}U}{(z+\bar{z})^{2k+4}} = 0.$$

Dies ist genau die Aussage (3.7) für den Index $k+1$. Somit ist dieses Lemma bewiesen (vgl. [2, 1]). □

Lemma 5. *Die Lösungen $U(z,\bar{z})$ der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{D_z^{n+1}U}{(z+\bar{z})^{2n+2}}\right\} = 0 \tag{3.9}$$

für $n \in \mathbb{N}$ lassen sich durch die Relation

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(n-\nu)}(z)\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu} + \sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu} \tag{3.10}$$

darstellen, wobei $g(z)$ und $p_{n-\nu}(z)$ für $\nu = 0,\dots,n$, beliebige im einfach zusammenhängenden Gebiet D holomorphe Funktionen bezeichnen.

Beweis. Um auf die Lösungen der Differentialgleichung (3.9) zu kommen, integriert man zunächst einmal nach $\bar{z}$ und erhält die folgende Differentialgleichung

$$\frac{D_z^{n+1}U}{(z+\bar{z})^{2n+2}} = G(z), \tag{3.11}$$

wobei $G(z)$ vorerst eine beliebige in D holomorphe Funktion bezeichnet. Unter Zuhilfenahme der Definition des Differentialoperators D_z (3.3) folgt dann:

$$\frac{D_z^{n+1}U}{(z+\bar{z})^{2n+2}} = G(z) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{D_zD_z^{n}U}{(z+\bar{z})^{2n+2}} = G(z) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(z+\bar{z})^2\frac{\partial}{\partial z}\{D_z^nU\}}{(z+\bar{z})^{2n+2}} = G(z).$$

Aus der letzten Beziehung ergibt sich, wenn man die beliebige Funktion $G(z)$ nun durch die $(2n+1)$−te Ableitung der in D holomorphen Funktion $g(z)$ ersetzt, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial z}\{D_z^nU\} = (z+\bar{z})^{2n}g^{(2n+1)}(z).$$

Die Integration nach z liefert die Relation

$$D_z^n U = \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-\lambda)!}(-1)^\lambda (z+\bar{z})^{2n-\lambda} g^{(2n-\lambda)}(z) + \overline{p_0(z)} \tag{3.12}$$

mit der beliebigen in D holomorphen Funktion $p_0(z)$.

Beweis der obigen Aussage: Leite beide Seiten von (3.12) nach z ab:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\{D_z^n U\} &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-\lambda)!}(-1)^\lambda (z+\bar{z})^{2n-\lambda} g^{(2n-\lambda)}(z) + \overline{p_0(z)}\right\} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-\lambda-1)!}(-1)^\lambda (z+\bar{z})^{2n-\lambda-1} g^{(2n-\lambda)}(z) + \\
&\quad + \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-\lambda)!}(-1)^\lambda (z+\bar{z})^{2n-\lambda} g^{(2n-\lambda+1)}(z) \\
&\overset{\lambda \leftrightarrow \hat{\lambda}-1}{=} \sum_{\hat{\lambda}=1}^{2n+1} \frac{(2n)!}{(2n-\hat{\lambda})!}(-1)^{\hat{\lambda}-1} (z+\bar{z})^{2n-\hat{\lambda}} g^{(2n-\hat{\lambda}+1)}(z) + \\
&\quad + \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-\lambda)!}(-1)^\lambda (z+\bar{z})^{2n-\lambda} g^{(2n-\lambda+1)}(z) \\
&\overset{\lambda \leftrightarrow \hat{\lambda}}{=} \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-\lambda)!}(-1)^\lambda \Big[-1+1\Big] (z+\bar{z})^{2n-\lambda} g^{(2n-\lambda+1)}(z) + \\
&\quad + (z+\bar{z})^{2n} g^{(2n+1)}(z) \\
&= (z+\bar{z})^{2n} g^{(2n+1)}(z).
\end{aligned}$$

Somit ist die Aussage bewiesen.

Um nun in weiterer Folge die Lösungsdarstellung (3.10) aus (3.12) herzuleiten, müssen zunächst die folgenden Relationen 1 und 2 bewiesen werden (vgl. [2, 1]):
Relation 1:

$$\begin{aligned}
D_z^k\left\{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu}\right\} &= \\
&= \sum_{\nu=0}^{n+k} \frac{(n+k)!(n+\nu-k)!}{(n-k)!(n+k-\nu)!\nu!} \frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^{\nu-2k}} g^{(n-\nu+k)}(z)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

gilt für $k = 0, \ldots, n$. Dies kann durch vollständige Induktion bewiesen werden:
<u>Basis</u>: Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen.
<u>Annahme</u>: Die Aussage (3.13) gelte für den Index k.

Schritt: Um (3.13) für den Index $k+1$ zu zeigen, betrachtet man:

$$
\begin{aligned}
&D_z^{k+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(n-\nu)}(z)\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\}=\\
&=D_zD_z^k\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(n-\nu)}(z)\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\}\\
&\underset{(3.13)}{\overset{(3.3)}{=}}(z+\bar z)^2\frac{\partial}{\partial z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n+k}\frac{(n+k)!(n+\nu-k)!}{(n-k)!(n+k-\nu)!\nu!}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^{\nu-2k}}g^{(n-\nu+k)}(z)\right\}\\
&=(z+\bar z)^2\sum_{\nu=0}^{n+k}\frac{(n+k)!(n+\nu-k)!}{(n-k)!(n+k-\nu)!\nu!}\left[\frac{-(-1)^\nu(\nu-2k)(z+\bar z)^{\nu-2k-1}}{(z+\bar z)^{2\nu-4k}}g^{(n-\nu+k)}(z)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^{\nu-2k}}g^{(n-\nu+k+1)}(z)\right]\\
&=\sum_{\nu=0}^{n+k}\frac{(n+k)!(n+\nu-k)!(\nu-2k)}{(n-k)!(n+k-\nu)!\nu!}(-1)^{\nu+1}\frac{g^{(n-\nu+k)}(z)}{(z+\bar z)^{\nu-2k-1}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n+k}\frac{(n+k)!(n+\nu-k)!}{(n-k)!(n+k-\nu)!\nu!}(-1)^\nu\frac{g^{(n-\nu+k+1)}(z)}{(z+\bar z)^{\nu-2k-2}}.
\end{aligned}
$$

Die Indextransformation $\nu=\hat\nu-1$ in der ersten Summe liefert:

$$
\begin{aligned}
&D_z^{k+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(n-\nu)}(z)\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\}=\\
&=\sum_{\hat\nu=1}^{n+k+1}\frac{(n+k)!(n+\hat\nu-k-1)!(\hat\nu-2k-1)}{(n-k)!(n+k-\hat\nu+1)!(\hat\nu-1)!}(-1)^{\hat\nu}\frac{g^{(n-\hat\nu+k+1)}(z)}{(z+\bar z)^{\hat\nu-2k-2}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n+k}\frac{(n+k)!(n+\nu-k)!}{(n-k)!(n+k-\nu)!\nu!}(-1)^\nu\frac{g^{(n-\nu+k+1)}(z)}{(z+\bar z)^{\nu-2k-2}}.
\end{aligned}
$$

Benennt man nun $\hat\nu$ wieder zu ν um, zieht beide Summen zusammen und schreibt die Terme für $\nu=0$ bzw. $\nu=n+k+1$ extra an, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&D_z^{k+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(n-\nu)}(z)\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\}=\\
&=\sum_{\nu=1}^{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\left[\frac{(n+\nu-k)!}{\nu!(n+k-\nu)!}+\frac{(n+\nu-k-1)!(\nu-2k-1)}{(\nu-1)!(n+k-\nu+1)!)}\right](-1)^\nu\frac{g^{(n-\nu+k+1)}(z)}{(z+\bar z)^{\nu-2(k+1)}}\\
&\quad+\frac{g^{(n+k+1)}(z)}{(z+\bar z)^{-2(k+1)}}+\frac{(2n)!}{(n-k-1)!}(-1)^{n+k+1}\frac{g(z)}{(z+\bar z)^{n-(k+1)}}.
\end{aligned}
$$

Nun muss der Ausdruck in der obigen eckigen Klammer näher betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+\nu-k)!}{\nu!(n+k-\nu)!}+\frac{(n+\nu-k-1)!(\nu-2k-1)}{(\nu-1)!(n+k-\nu+1)!)}=\\
&\quad=\frac{(n+\nu-k-1)!}{(\nu-1)!(n+k-\nu)!}\left[\frac{n+\nu-k}{\nu}+\frac{\nu-2k-1}{n+k-\nu+1}\right]\\
&\quad=\frac{(n+\nu-k-1)!}{(\nu-1)!(n+k-\nu)!}\left[\frac{(n+\nu-k)(n+k-\nu+1)+\nu(\nu-2k-1)}{\nu(n+k-\nu+1)}\right]\\
&\quad=\frac{(n+\nu-k-1)!}{\nu!(n+k-\nu+1)!}\left[n^2+n-k^2+k\right]\\
&\quad=\frac{(n+\nu-k-1)!(n-k)(n+k+1)}{\nu!(n+k-\nu+1)!}.
\end{aligned}$$

Dies rückeingesetzt liefert die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
&D_z^{k+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(n-\nu)}(z)\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\}=\\
&=\sum_{\nu=1}^{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\left[\frac{(n+\nu-k-1)!(n-k)(n+k+1)}{\nu!(n+k-\nu+1)!}\right](-1)^\nu\frac{g^{(n-\nu+k+1)}(z)}{(z+\bar z)^{\nu-2(k+1)}}+\\
&\quad+\frac{g^{(n+k+1)}(z)}{(z+\bar z)^{-2(k+1)}}+\frac{(2n)!}{(n-k-1)!}(-1)^{n+k+1}\frac{g(z)}{(z+\bar z)^{n-(k+1)}}.
\end{aligned}$$

Fasst man nun die eckige Klammer mit ihrem Vorfaktor zusammen und zieht die letzten beiden Summanden in die Summe hinein, so ergibt sich die Aussage (3.13) für den Index $k+1$:

$$\begin{aligned}
&D_z^{k+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(n-\nu)}(z)\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\}=\\
&\qquad\qquad=\sum_{\nu=0}^{n+k+1}\frac{(n+\nu-k-1)!(n+k+1)!}{\nu!(n+k-\nu+1)!(n-k-1)!}(-1)^\nu\frac{g^{(n-\nu+k+1)}(z)}{(z+\bar z)^{\nu-2(k+1)}}.
\end{aligned}$$

Somit ist Relation 1 bewiesen.
Relation 2:

$$D_z^k\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\}=\sum_{\nu=k}^{n}\frac{1}{(\nu-k)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu-k}}{(z+\bar z)^{\nu-k}}\tag{3.14}$$

gilt für $k=0,\dots,n$. Auch dies kann durch die folgende vollständige Induktion bewiesen werden:
<u>Basis</u>: Für $k=0$ ist nichts zu zeigen.
<u>Annahme</u>: Die Aussage (3.14) gelte für den Index $k\in\mathbb{N}$.

Schritt: Nun soll die Gleichung (3.14) für den Index $k+1$ bewiesen werden. Hierzu betrachtet man:

$$
\begin{aligned}
D_z^{k+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\} &= D_z D_z^k\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\}\\
&\overset{(3.14)}{=} D_z\left\{\sum_{\nu=k}^{n}\frac{1}{(\nu-k)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu-k}}{(z+\bar z)^{\nu-k}}\right\}\\
&\overset{(3.3)}{=} (z+\bar z)^2\frac{\partial}{\partial z}\left\{\sum_{\nu=k}^{n}\frac{1}{(\nu-k)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu-k}}{(z+\bar z)^{\nu-k}}\right\}\\
&= (z+\bar z)^2\sum_{\nu=k}^{n}\frac{1}{(\nu-k)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}(\nu-k)\frac{(-1)^{\nu-k-1}}{(z+\bar z)^{\nu-k-1}}\frac{1}{(z+\bar z)^2}\\
&= \sum_{\nu=k+1}^{n}\frac{1}{(\nu-k-1)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu-k-1}}{(z+\bar z)^{\nu-k-1}}.
\end{aligned}
$$

Dies ist jedoch genau die Aussage (3.14) für den Index $k+1$. Relation 2 ist somit ebefalls gezeigt.

Nun werden die Relationen 1 und 2 zur Herleitung der Lösungsdarstellung (3.10) aus der Gleichung (3.12) folgendermaßen benützt: Setzt man in (3.13) und (3.14) jeweils $k=n$, so folgt:

$$
\begin{aligned}
D_z^n\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(n-\nu)}(z)\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\} &= \sum_{\nu=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n-\nu)!}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^{\nu-2n}}g^{(2n-\nu)}(z),\\
D_z^n\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\} &= \overline{p_0(z)}.
\end{aligned}
$$

Bezeichne nun I_z den inversen Operator zu D_z, d.h. es gilt

$$I_z D_z U = U.$$

Dieser $n-$mal auf die Beziehung (3.12) angewendet, liefert:

$$
\begin{aligned}
I_z^n D_z^n U = I_z^n&\left\{\sum_{\lambda=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n-\lambda)!}(-1)^\lambda(z+\bar z)^{2n-\lambda}g^{(2n-\lambda)}(z)+\overline{p_0(z)}\right\}\\
&= I_z^n\left\{D_z^n\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(n-\nu)}(z)\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\}\right\}+\\
&\quad + I_z^n\left\{D_z^n\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}\right\}\right\},
\end{aligned}
$$

woraus die Lösungsdarstellung (3.10) folgt:

$$U = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(n-\nu)}(z)\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar z)^\nu}.$$

Somit ist das Lemma 5 bewiesen (vgl. [2, 1]). □

Beweis von Satz 5.
Zu (a) und (b): Laut Lemma 4 gilt für die Lösungen $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) die Relation (3.7). Setzt man nun in dieser Relation $k = n$, so erhält man genau die Differentialgleichung (3.9) aus Lemma 5. Das bedeutet also, dass die Lösungen der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) vorerst durch die einzelnen Summanden von (3.10) dargestellt werden können:

$$U(z,\bar{z}) = U_1(z,\bar{z}) + U_2(z,\bar{z}), \tag{3.15}$$

wobei

$$U_1(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu}, \tag{3.16}$$

$$U_2(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} \overline{p_{n-\nu}(z)} \frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu}. \tag{3.17}$$

In (3.15) sind die im einfach zusammenhängenden Gebiet D definierten Lösungen (3.5) von Satz 5 bereits enthalten. Man muss nur noch prüfen, welche Gestalt die vorerst noch beliebigen in D holomorphen Funktionen $g(z)$ und $p_{n-\nu}(z)$ für $\nu = 0, \ldots, n$ annehmen müssen, damit eine Darstellung der Form (3.5) gewährleistet ist.
Dafür bestimmt man zunächst die folgenden partiellen Ableitungen der Funktion $U_1(z,\bar{z})$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial z} &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \left[g^{(n-\nu+1)}(z) \frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu} + g^{(n-\nu)}(z) \nu \frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu-1}} \frac{1}{(z+\bar{z})^2} \right] \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(n-\nu+1)}(z) \frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+\nu)!}{(\nu-1)!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu+1}}, \\
\frac{\partial^2 U_1}{\partial z \partial \bar{z}} &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(n-\nu+1)}(z) \nu \frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu-1}} \frac{1}{(z+\bar{z})^2} + \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+\nu)!}{(\nu-1)!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{-(-1)^{\nu-1}(\nu+1)(z+\bar{z})^\nu}{(z+\bar{z})^{2\nu+2}} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+\nu)!}{(\nu-1)!(n-\nu)!} g^{(n-\nu+1)}(z) \frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu+1}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+\nu)!(\nu+1)}{(\nu-1)!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^{\nu+2}}
\end{aligned}$$

und setzt diese in die linke Seite der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) ein:

$$
\begin{aligned}
& (z+\bar{z})^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial z \partial \bar{z}} - n(n+1)U_1 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (z+\bar{z})^2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+\nu)!}{(\nu-1)!(n-\nu)!} g^{(n-\nu+1)}(z) \frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu+1}} + \\
& + (z+\bar{z})^2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+\nu)!(\nu+1)}{(\nu-1)!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu+2}} - \\
& - n(n+1) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+\nu)!}{(\nu-1)!(n-\nu)!} g^{(n-\nu+1)}(z) \frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu-1}} + \\
& + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+\nu)!(\nu+1)}{(\nu-1)!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}} - \\
& - n(n+1) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}} = 0.
\end{aligned}
$$

Durch die Indexverschiebung $\nu = \hat{\nu} + 1$ in der ersten Summe ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & \sum_{\hat{\nu}=0}^{n-1} \frac{(n+\hat{\nu}+1)!}{\hat{\nu}!(n-\hat{\nu}-1)!} g^{(n-\hat{\nu})}(z) \frac{(-1)^{\hat{\nu}}}{(z+\bar{z})^{\hat{\nu}}} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+\nu)!(\nu+1)}{(\nu-1)!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}} - \\
& - n(n+1) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}} = 0.
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man nun $\hat{\nu}$ wieder mit ν und zieht die Terme für $\nu = 0$ und $\nu = n$ aus der Summe heraus, so folgt:

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & \left[\frac{(n+1)!}{(n-1)!} - n(n+1)\right] g^{(n)}(z) + \left[\frac{(2n)!(n+1)}{(n-1)!} - n(n+1)\frac{(2n)!}{n!}\right] g(z) \frac{(-1)^n}{(z+\bar{z})^n} + \\
& + \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[\frac{(n+\nu+1)!}{\nu!(n-\nu-1)!} + \frac{(n+\nu)!(\nu+1)}{(\nu-1)!(n-\nu)!} - \frac{n(n+1)(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\right] g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}} \\
& = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \Big[n(n+1) - n(n+1)\Big] g^{(n)}(z) + \left[\frac{(2n)!(n+1)}{(n-1)!} - \frac{(2n)!(n+1)}{(n-1)!}\right] g(z) \frac{(-1)^n}{(z+\bar{z})^n} + \\
& + \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[\frac{(n+\nu)!}{(\nu-1)!(n-\nu-1)!} \left(\frac{n+\nu+1}{\nu} + \frac{\nu+1}{n-\nu} - \frac{n(n+1)}{n-\nu}\right)\right] g^{(n-\nu)}(z) \frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}} \\
& = 0.
\end{aligned}
$$

Hierbei gilt für den Ausdruck innerhalb der großen runden Klammer in obiger Gleichung:

$$
\frac{n+\nu+1}{\nu} + \frac{\nu+1}{n-\nu} - \frac{n(n+1)}{n-\nu} = \frac{n(n+1) - \nu(\nu+1) - n(n+1) + \nu(\nu+1)}{\nu(n-\nu)} = 0.
$$

Somit ist gezeigt, dass die Funktion $U_1(z,\bar{z})$ in ihrer ursprünglich definierten Form (3.16) mit der beliebigen in D holomorphen Funktion $g(z)$ die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) erfüllt und daher eine Lösung dieser Gleichung ist. Wie ersichtlich ist, müssen dabei an die Funktion $g(z)$ keinerlei Bedingungen gestellt werden.
Anders sieht das jedoch bei den Funktionen $p_{n-\nu}(z)$ für $\nu = 0\ \ldots, n$ in (3.17) aus, wie nun gezeigt werden soll. Aus der Tatsache, dass die Funktion $U_2(z,\bar{z})$ in der Form (3.17) die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) löst, lassen sich nämlich Bedingungen für die Funktionen $p_{n-\nu}(z)$ ableiten. Hierfür benötigt man zunächst die partiellen Ableitungen der Funktion $U_2(z,\bar{z})$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_2}{\partial z} &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\nu\frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu-1}}\frac{1}{(z+\bar{z})^2} = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(\nu-1)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu+1}},\\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial z\partial\bar{z}} &= \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(\nu-1)!}\overline{p'_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu+1}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(\nu-1)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{-(-1)^{\nu-1}(\nu+1)(z+\bar{z})^{\nu}}{(z+\bar{z})^{2\nu+2}}\\
&= \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(\nu-1)!}\overline{p'_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu+1}} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{(\nu+1)}{(\nu-1)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu+2}}
\end{aligned}$$

und setzt diese in die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) ein:

$$\begin{aligned}
&(z+\bar{z})^2\frac{\partial^2 U_2}{\partial z\partial\bar{z}} - n(n+1)U_2 = 0\\
\Leftrightarrow\quad &(z+\bar{z})^2\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(\nu-1)!}\overline{p'_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu+1}} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{(\nu+1)}{(\nu-1)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu+2}}\right]-\\
&- n(n+1)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}} = 0\\
\Leftrightarrow\quad &\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(\nu-1)!}\overline{p'_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(z+\bar{z})^{\nu-1}} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{(\nu+1)}{(\nu-1)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}}-\\
&- n(n+1)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}} = 0.
\end{aligned}$$

Mit $\nu = \hat{\nu}+1$ folgt:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad &\sum_{\hat{\nu}=0}^{n-1}\frac{1}{\hat{\nu}!}\overline{p'_{n-\hat{\nu}-1}(z)}\frac{(-1)^{\hat{\nu}}}{(z+\bar{z})^{\hat{\nu}}} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{(\nu+1)}{(\nu-1)!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}}-\\
&- n(n+1)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\frac{(-1)^{\nu}}{(z+\bar{z})^{\nu}} = 0.
\end{aligned}$$

Wenn man $\hat{\nu}$ nun wieder durch ν ersetzt, gilt:

$$\Leftrightarrow \quad \left[\overline{p'_{n-1}(z)} - n(n+1)\overline{p_n(z)}\right] + \left[\frac{n+1}{(n-1)!}\overline{p_0(z)} - \frac{n(n+1)}{n!}\overline{p_0(z)}\right]\frac{(-1)^n}{(z+\bar{z})^n} +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{1}{\nu!}\overline{p'_{n-\nu-1}(z)} + \underbrace{\frac{\nu+1}{(\nu-1)!}}_{=\frac{\nu(\nu+1)}{\nu!}}\overline{p_{n-\nu}(z)} - \frac{n(n+1)}{\nu!}\overline{p_{n-\nu}(z)}\right]\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu} = 0.$$

Die zweite eckige Klammer in der obigen Gleichung ergibt:

$$\frac{n+1}{(n-1)!}\overline{p_0(z)} - \frac{n(n+1)}{n!}\overline{p_0(z)} = \frac{n+1}{(n-1)!}\overline{p_0(z)}\left[1 - \frac{n}{n}\right] = 0.$$

Die restlichen beiden eckigen Klammern zusammengenommen liefern nun den folgenden Zusammenhang zwischen den beliebigen in D holomorphen Funktionen $p_{n-\nu}(z)$ und ihren ersten Ableitungen:

$$\frac{1}{\nu!}\left[\overline{p'_{n-\nu-1}(z)} + [\nu(\nu+1) - n(n+1)]\overline{p_{n-\nu}(z)}\right] = 0,$$

bzw.

$$\overline{p_{n-\nu}(z)} = \frac{1}{n(n+1) - \nu(\nu+1)}\overline{p'_{n-\nu-1}(z)} \tag{3.18}$$

für $\nu = n-1, \ldots, 0$. Mithilfe des obigen Zusammenhangs kann nun die folgende Beziehung

$$\overline{p_{n-\nu}(z)} = \frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!(2n)!}\overline{p_0^{(n-\nu)}(z)} \quad \text{für } \nu = n-1, \ldots, 0 \tag{3.19}$$

durch vollständige Induktion bewiesen werden:

Basis: Für $\nu = n-1$ gilt laut (3.18):

$$\overline{p_1(z)} = \frac{1}{n(n+1) - n(n-1)}\overline{p'_0(z)} = \frac{1}{2n}\overline{p'_0(z)} = \frac{(2n-1)!}{(2n)!}\overline{p'_0(z)}.$$

Dies entspricht der Beziehung (3.19) für $\nu = n-1$ und somit ist die Induktionsbasis gezeigt.

Annahme: Die Aussage (3.19) gelte für den Index ν.

Schritt von ν auf $\nu - 1$: Betrachte die Relation (3.18) für den Index $\nu - 1$:

$$\begin{aligned}
\overline{p_{n-\nu+1}(z)} &= \frac{1}{n(n+1) - \nu(\nu-1)}\overline{p'_{n-\nu}(z)} \\
&\overset{(3.19)}{=} \frac{1}{n(n+1) - \nu(\nu-1)}\frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!(2n)!}\overline{p_0^{(n-\nu+1)}(z)} \\
&= \frac{1}{(n+\nu)(n-\nu+1)}\frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!(2n)!}\overline{p_0^{(n-\nu+1)}(z)} \\
&= \frac{(n+\nu-1)!}{(n-\nu+1)!(2n)!}\overline{p_0^{(n-\nu+1)}(z)}.
\end{aligned}$$

Dies ist exakt die Gleichung (3.19) für $\nu - 1$ und somit ist diese Beziehung bewiesen.

Die Gleichung (3.19) stellt also Bedingungen für die beliebigen in D holomorphen Funktionen $p_{n-\nu}(z)$ mit $\nu = 0, \dots, n$ dar, damit $U_2(z, \bar{z})$ in Form von (3.17) eine Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) ist. Wie man anhand von (3.19) sehen kann, können alle diese Funktionen $p_{n-\nu}(z)$ im Wesentlichen durch die beliebige in D holomorphe Funktion $p_0(z)$ dargestellt werden, die man nun als

$$\overline{p_0(z)} = (2n)!\overline{h(z)} \tag{3.20}$$

setzt, wobei $h(z)$ nun die zweite in D holomorphe Erzeugende bezeichnet. Aus obiger Definition und (3.19) folgt dann wiederum die Darstellung der restlichen Funktionen $p_{n-\nu}(z)$ für $\nu = 0, \dots, n$ durch die Erzeugende $h(z)$:

$$\overline{p_{n-\nu}(z)} = \frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!}\overline{h^{(n-\nu)}(z)}.$$

Dies, in (3.17) rückeingesetzt, liefert nun die zweite Teillösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) als

$$U_2(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\overline{h^{(n-\nu)}(z)}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu}.$$

Folglich kann man laut (3.15) nun alle Lösungen der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) schreiben als

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(n-\nu)}(\bar{z})\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\overline{h^{(n-\nu)}(z)}\frac{(-1)^\nu}{(z+\bar{z})^\nu}.$$

Durch die Indextransformation $\hat{\nu} = n - \nu$ folgt schließlich die Darstellung (3.5):

$$\begin{aligned} U(z, \bar{z}) &= \sum_{\hat{\nu}=0}^{n} \frac{(2n-\hat{\nu})!}{\hat{\nu}!(n-\hat{\nu})!} g^{(\hat{\nu})}(z)\frac{(-1)^{n-\hat{\nu}}}{(z+\bar{z})^{n-\hat{\nu}}} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\hat{\nu})!}{\hat{\nu}!(n-\hat{\nu})!}\overline{h^{(\hat{\nu})}(z)}\frac{(-1)^{n-\hat{\nu}}}{(z+\bar{z})^{n-\hat{\nu}}} \\ &= \sum_{\hat{\nu}=0}^{n} \frac{(2n-\hat{\nu})!}{\hat{\nu}!(n-\hat{\nu})!}\left[g^{(\hat{\nu})}(z) + \overline{h^{(\hat{\nu})}(z)}\right]\frac{(-1)^{n-\hat{\nu}}}{(z+\bar{z})^{n-\hat{\nu}}}. \end{aligned}$$

Die Punkte (a) und (b) des Satzes 5 sind damit bewiesen (vgl. [2, 1]). □

Um den Punkt (c) von Satz 5 beweisen zu können, benötigt man den folgenden Hilfssatz (vgl. die Seiten 48 bis 55 in [8]. Bezüglich der hier verwendeten Operatoren erster Ordnung siehe auch [6]):

Lemma 6. ***(Aufsteige– und Absteigeoperatoren)***
Bezeichne $F_n(D)$ die Menge aller Lösungen der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) mit dem Index $n \in \mathbb{N}$ im einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$. Weiters sei $U(z, \bar{z})$ gemäß (3.5) eine Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2)

mit dem Index $n \in \mathbb{N}$, *d.h.* $U(z,\bar{z}) \in F_n(D)$.
Dann erhält man mithilfe der Funktion

$$\begin{aligned} W_1 &= L_1 U \\ &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{2(n+1)}{z+\bar{z}} U \\ &= \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}} \end{aligned} \tag{3.21}$$

eine Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) mit dem Index $n+1$*:*

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{(n+1)(n+2)}{(z+\bar{z})^2} W_1 = 0. \tag{3.22}$$

Also ist $W_1(z,\bar{z}) \in F_{n+1}(D)$. *Der obige, auf* $U(z,\bar{z})$ *angewandte Differentialoperator*

$$L_1 := \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{2(n+1)}{z+\bar{z}}$$

bildet also die Lösungen $U(z,\bar{z})$ *der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe mit dem Index* n *auf Lösungen* $W_1(z,\bar{z})$ *der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe mit dem Index* $n+1$ *ab und wird Aufsteigeoperator genannt.*
Analog erhält man mithilfe der Funktion

$$\begin{aligned} W_2 &= L_2 U \\ &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{2n}{z+\bar{z}} U \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(2n-\nu-2)!}{\nu!(n-\nu-1)!} \Big[g^{(\nu+2)}(z) + \overline{h^{(\nu+2)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu-1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu-1}} \end{aligned}$$

eine Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) mit dem Index $n-1$*:*

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n-1)}{(z+\bar{z})^2} W_2 = 0. \tag{3.23}$$

Somit ist $W_2(z,\bar{z}) \in F_{n-1}(D)$. *Der Differentialoperator*

$$L_2 := \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{2n}{z+\bar{z}}$$

bildet also Lösungen $U(z,\bar{z})$ *der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe mit dem Index* n *auf Lösungen* $W_2(z,\bar{z})$ *der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe mit dem Index* $n-1$ *ab und wird Absteigeoperator genannt.*

Beweis. Der Beweis soll hier nur für die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.22) mit dem Index $n+1$ geführt werden. Der Beweis für die Bauer–Peschl–Gleichung erster

Stufe (3.23) mit dem Index $n-1$ kann analog geführt werden.
Zuerst soll die Darstellung (3.21) für die Funktion $W_1(z,\bar{z})$ gezeigt werden. Hierfür benötigt man die folgenden partiellen Ableitungen der durch die Summendarstellung (3.5) gegebenen Lösungen $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) mit dem Index n:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\left[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\right]\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}\right\}\\
&= \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(\nu+1)}(z)\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\left[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\right]\frac{-(-1)^{n-\nu}(n-\nu)(z+\bar{z})^{n-\nu-1}}{(z+\bar{z})^{2n-2\nu}}\\
&= \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(\nu+1)}(z)\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu-1)!}\left[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\right]\frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}},\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\left[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\right]\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}\right\}\\
&= \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\overline{h^{(\nu+1)}(z)}\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\left[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\right]\frac{-(-1)^{n-\nu}(n-\nu)(z+\bar{z})^{n-\nu-1}}{(z+\bar{z})^{2n-2\nu}}\\
&= \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\overline{h^{(\nu+1)}(z)}\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu-1)!}\left[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\right]\frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}}.\end{aligned}$$

Aus der Definition des Aufsteigeoperators L_1 ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
W_1 = L_1 U &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{2(n+1)}{z+\bar{z}} U \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(\nu+1)}(z) \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu-1)!} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \overline{h^{(\nu+1)}(z)} \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu-1)!} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}} + \\
&\quad - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2(n+1)}{z+\bar{z}} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \Big[g^{(\nu+1)}(z) + \overline{h^{(\nu+1)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu-1)!} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2(n+1)(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}}.
\end{aligned}$$

Die Indextransformation $\hat{\nu} = \nu + 1$ in der ersten Summe und das Zusammenfassen der letzten beiden Summen liefert folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \sum_{\hat{\nu}=1}^{n+1} \frac{(2n-\hat{\nu}+1)!}{(\hat{\nu}-1)!(n-\hat{\nu}+1)!} \Big[g^{(\hat{\nu})}(z) + \overline{h^{(\hat{\nu})}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\hat{\nu}+1}}{(z+\bar{z})^{n-\hat{\nu}+1}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu-1)!} \underbrace{\left[1 + \frac{n+1}{n-\nu} \right]}_{=\frac{2n-\nu+1}{n-\nu}} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}} \\
&= \sum_{\hat{\nu}=1}^{n+1} \frac{(2n-\hat{\nu}+1)!}{(\hat{\nu}-1)!(n-\hat{\nu}+1)!} \Big[g^{(\hat{\nu})}(z) + \overline{h^{(\hat{\nu})}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\hat{\nu}+1}}{(z+\bar{z})^{n-\hat{\nu}+1}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2(2n-\nu+1)!}{\nu!(n-\nu)!} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}}.
\end{aligned}$$

Benennt man $\hat{\nu}$ wieder zu ν um und zieht die Terme für $\nu = 0$ bzw. $\nu = n+1$ heraus, so folgt:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{2(2n+1)!}{n!} \Big[g(z) + \overline{h(z)} \Big] \frac{(-1)^{n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}} + \Big[g^{(n+1)}(z) + \overline{h^{(n+1)}(z)} \Big] + \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(2n-\nu+1)!}{(\nu-1)!(n-\nu)!} \left[\frac{1}{n-\nu+1} + \frac{2}{\nu} \right] \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}}.
\end{aligned}$$

Mit
$$\frac{1}{n-\nu+1}+\frac{2}{\nu}=\frac{\nu+2(n-\nu+1)}{\nu(n-\nu+1)}=\frac{2n-\nu+2}{\nu(n-\nu+1)}.$$
erhält man:
$$W_1=\frac{2(2n+1)!}{n!}\Big[g(z)+\overline{h(z)}\Big]\frac{(-1)^{n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}+\Big[g^{(n+1)}(z)+\overline{h^{(n+1)}(z)}\Big]+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!}\Big[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}}.$$
Fasst man nun wieder alle Terme zu einer Summe zusammen, so ergibt sich schließlich die gesuchte Darstellung (3.21) für die Funktion $W_1(z,\bar{z})$:
$$W_1=\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!}\Big[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}}.$$
Weiters bleibt noch zu zeigen, dass $W_1(z,\bar{z})$ gemäß (3.21) eine Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.22) mit dem Index $n+1$ ist. Dazu berechnet man die folgenden partiellen Ableitungen:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_1}{\partial\bar{z}}&=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left\{\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!}\Big[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}}\right\}\\
&=\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!}\overline{h^{(\nu+1)}(z)}\frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!}\Big[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{-(-1)^{n-\nu+1}(n-\nu+1)(z+\bar{z})^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{2n-2\nu+2}}\\
&=\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!}\overline{h^{(\nu+1)}(z)}\frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu)!}\Big[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{n-\nu+2}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+2}},\\
\frac{\partial^2 W_1}{\partial z\partial\bar{z}}&=\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!}\overline{h^{(\nu+1)}(z)}\frac{-(-1)^{n-\nu+1}(n-\nu+1)(z+\bar{z})^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{2n-2\nu+2}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(\nu+1)}(z)\frac{(-1)^{n-\nu+2}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+2}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu)!}\Big[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{-(-1)^{n-\nu+2}(n-\nu+2)(z+\bar{z})^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{2n-2\nu+4}}\\
&=\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu)!}\Big[g^{(\nu+1)}(z)+\overline{h^{(\nu+1)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{n-\nu+2}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+2}}+\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!(n-\nu+2)}{\nu!(n-\nu)!}\Big[g^{(\nu)}(z)+\overline{h^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{n-\nu+3}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+3}}.
\end{aligned}$$

Nun setzt man diese Ableitungen auf der linken Seite der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.22) mit dem Index $n+1$ ein:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 W_1}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{(n+1)(n+2)}{(z+\bar{z})^2} W_1 = \\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu)!} \left[g^{(\nu+1)}(z) + \overline{h^{(\nu+1)}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\nu+2}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+2}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(2n-\nu+2)!(n-\nu+2)}{\nu!(n-\nu)!} \left[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\nu+3}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+3}} - \\
&\quad - \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{(z+\bar{z})^2} \frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!} \left[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+1}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu)!} \left[g^{(\nu+1)}(z) + \overline{h^{(\nu+1)}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\nu+2}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+2}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(2n-\nu+2)!(n-\nu+2)}{\nu!(n-\nu)!} \left[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\nu+3}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+3}} - \\
&\quad - \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!} \left[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\nu+3}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+3}}.
\end{aligned}$$

Die Indexverschiebung $\hat{\nu} = \nu + 1$ in der ersten Summe liefert folgendes:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 W_1}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{(n+1)(n+2)}{(z+\bar{z})^2} W_1 = \\
&= \sum_{\nu=1}^{n+2} \frac{(2n-\hat{\nu}+3)!}{(\hat{\nu}-1)!(n-\hat{\nu}+1)!} \left[g^{(\hat{\nu})}(z) + \overline{h^{(\hat{\nu})}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\hat{\nu}+3}}{(z+\bar{z})^{n-\hat{\nu}+3}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(2n-\nu+2)!(n-\nu+2)}{\nu!(n-\nu)!} \left[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\nu+3}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+3}} - \\
&\quad - \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu+1)!} \left[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\nu+3}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+3}}.
\end{aligned}$$

Die Umbenennung von $\hat{\nu}$ zu ν und das Herausziehen des Terms für $\nu = 0$ ergibt (der Term für $\nu = n+2$ fällt weg, da in der Darstellung (3.21) von W_1 keine $(n+2)-$ten Ableitungen der Erzeugenden $g(z)$ und $\overline{h(z)}$ auftreten):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 W_1}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{(n+1)(n+2)}{(z+\bar{z})^2} W_1 = \\
&= \left[\frac{(2n+2)!(n+2)}{n!} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+2)!}{(n+1)!} \right] \left[g(z) + \overline{h(z)} \right] \frac{(-1)^{n+3}}{(z+\bar{z})^{n+3}} + \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(2n-\nu+2)!}{(\nu-1)!(n-\nu)!} \left[\frac{2n-\nu+3}{n-\nu+1} + \frac{n-\nu+2}{\nu} - \frac{(n+1)(n+2)}{\nu(n-\nu+1)} \right] \cdot \\
&\qquad \cdot \left[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\nu+3}}{(z+\bar{z})^{n-\nu+3}}.
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Terme in den zwei großen eckigen Klammern, so folgt:

$$\frac{(2n+2)!(n+2)}{n!} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)!(n+2)}{n!}\left[1 - \frac{n+1}{n+1}\right] = 0,$$

und

$$\begin{aligned}
&\frac{2n-\nu+3}{n-\nu+1} + \frac{n-\nu+2}{\nu} - \frac{(n+1)(n+2)}{\nu(n-\nu+1)} = \\
&= \frac{\nu(2n-\nu+3) + (n-\nu+2)(n-\nu+1) - (n+1)(n+2)}{\nu(n-\nu+1)} = \\
&= \frac{\nu(n+2-\nu+n+1) + (n+2-\nu)(n-\nu+1) - (n+2)(n+1)}{\nu(n-\nu+1)} = \\
&= \frac{\nu(n+2) + \nu(n-\nu+1) + (n+2)(n-\nu+1) - \nu(n-\nu+1) - (n+2)(n+1)}{\nu(n-\nu+1)} \\
&= \frac{(n+2)(n-\nu+1) - (n+2)(n-\nu+1)}{\nu(n-\nu+1)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{(n+1)(n+2)}{(z+\bar{z})^2} W_1 = 0.$$

D.h. die Funktion W_1 gemäß ihrer Darstellung (3.21) erfüllt die obige Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.22) mit dem Index $n+1$. Das Lemma ist somit bewiesen. □

Fortsetzung des Beweises von Satz 5.
Zu (c): Die Lösung $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) sei im einfach zusammenhängenden Gebiet D vorgegeben. Die $(2n+1)-$ten Ableitung der Erzeugenden $g(z)$ ist dann eindeutig bestimmt, da laut Beweis von Lemma 5 die Beziehung (3.11) mit $G(z) = g^{(2n+1)}(z)$ gilt:

$$\frac{D_z^{n+1} U}{(z+\bar{z})^{2n+2}} = g^{(2n+1)}(z).$$

Da die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) symmetrisch bezüglich der beiden Variablen z und $\bar{z}$ ist, kann analog die Eindeutigkeit der $(2n+1)-$ten Ableitung der Erzeugenden $h(z)$ über die Beziehung

$$\frac{D_{\bar{z}}^{n+1} U}{(z+\bar{z})^{2n+2}} = \overline{h^{(2n+1)}(z)}$$

gezeigt werden (vgl. [1, 2]). Somit sind die Relationen (3.6) bewiesen.
Nun soll gezeigt werden, dass die Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ bei vorgegebener Lösung $U(z,\bar{z})$ nicht eindeutig bestimmt sind. Hierfür stellt man eine im einfach zusammenhängenden Gebiet D gegebene Lösung $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster

Stufe (3.2) auf zwei verschiedene Arten gemäß (3.5) dar:

$$\begin{aligned} U(z,\bar{z}) &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\Big[g_1^{(\nu)}(z) + \overline{h_1^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\Big[g_2^{(\nu)}(z) + \overline{h_2^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}. \end{aligned}$$

In der ersten Summe wird $U(z,\bar{z})$ mithilfe der Erzeugenden $g_1(z)$ und $h_1(z)$ und in der zweiten Summe mithilfe der Erzeugenden $g_2(z)$ und $h_2(z)$ dargestellt. Anders ausgedrückt erzeugen die zwei Paare $g_1(z), h_1(z)$ und $g_2(z), h_2(z)$ also dieselbe Lösung $U(z,\bar{z})$ in D (vgl. [2]). Bildet man nun die Differenz aus den obigen beiden Darstellungen von $U(z,\bar{z})$ und setzt

$$\begin{aligned} g_0(z) &:= g_1(z) - g_2(z), \\ h_0(z) &:= h_1(z) - h_2(z) \end{aligned} \tag{3.24}$$

als die neuen Erzeugenden, so kann die Nulllösung $U_0(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) wie folgt dargestelt werden:

$$U_0(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}\Big[g_0^{(\nu)}(z) + \overline{h_0^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}} \equiv 0. \tag{3.25}$$

Diese stellt selbst wieder eine in D vorgegebene Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) dar und erfüllt deswegen die Relationen (3.6):

$$\begin{aligned} \frac{D_z^{n+1}U_0}{(z+\bar{z})^{2n+2}} &= g_0^{(2n+1)}(z) = 0, \\ \frac{D_{\bar{z}}^{n+1}U_0}{(z+\bar{z})^{2n+2}} &= \overline{h_0^{(2n+1)}(z)} = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun, dass die Erzeugenden $g_0(z)$ und $h_0(z)$ der Nulllösung $U_0(z,\bar{z})$ jeweils Polynome vom Grad $2n$ sein müssen:

$$g_0(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu z^\mu \quad \text{und} \quad h_0(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} b_\mu z^\mu. \tag{3.26}$$

Die Koeffizienten a_μ und b_μ sind dabei beliebige komplexe Konstanten, die die Bedingung

$$a_\mu + (-1)^\mu \overline{b_\mu} = 0 \quad \text{mit } \mu = 0, \ldots, 2n, \tag{3.27}$$

erfüllen (vgl. [7, 1, 2]). Letzteres soll nun mithilfe der vollständigen Induktion über $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden:
Basis: Für $n = 1$ setzt man die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} g_0(z) &= \sum_{\mu=0}^{2} a_\mu z^\mu = a_0 + a_1 z + a_2 z^2, \\ h_0(z) &= \sum_{\mu=0}^{2} b_\mu z^\mu = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 \end{aligned}$$

in die Darstellung der Nulllösung

$$\begin{aligned} U_0(z,\bar{z}) &= \sum_{\nu=0}^{1} \frac{(2-\nu)!}{\nu!(1-\nu)!}\Big[g_0^{(\nu)}(z) + \overline{h_0^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{1-\nu}}{(z+\bar{z})^{1-\nu}} \\ &= -2\Big[g_0(z) + \overline{h_0(z)}\Big]\frac{1}{z+\bar{z}} + \Big[g_0'(z) + \overline{h_0'(z)}\Big] \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

ein und erhält dadurch die Gleichung:

$$-2\Big[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \overline{b_0} + \overline{b_1}\bar{z} + \overline{b_2}\bar{z}^2\Big]\frac{1}{z+\bar{z}} + \Big[a_1 + 2a_2 z + \overline{b_1} + 2\overline{b_2}\bar{z}\Big] \equiv 0.$$

Durch die Multiplikation mit $z+\bar{z} \neq 0$ ergibt sich:

$$-2\Big[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \overline{b_0} + \overline{b_1}\bar{z} + \overline{b_2}\bar{z}^2\Big] + \Big[a_1 + 2a_2 z + \overline{b_1} + 2\overline{b_2}\bar{z}\Big](z+\bar{z}) \equiv 0.$$

Nun kann der folgende Koeffizientenvergleich durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} z^0: &\quad -2a_0 - 2\overline{b_0} = 0 &\Leftrightarrow&\quad a_0 + \overline{b_0} = 0, \\ z: &\quad -a_1 + \overline{b_1} = 0 &\Leftrightarrow&\quad a_1 - \overline{b_1} = 0, \\ \bar{z}: &\quad -\overline{b_1} + a_1 = 0 &\Leftrightarrow&\quad a_1 - \overline{b_1} = 0, \\ z\bar{z}: &\quad 2a_2 + 2\overline{b_2} = 0 &\Leftrightarrow&\quad a_2 + \overline{b_2} = 0, \\ z^2: &\quad -2a_2 + 2a_2 = 0 &\Leftrightarrow&\quad 0 = 0, \\ \bar{z}^2: &\quad -2\overline{b_2} + 2\overline{b_2} = 0 &\Leftrightarrow&\quad 0 = 0. \end{aligned}$$

Hierbei sieht man, dass die Bedingung

$$a_\mu + (-1)^\mu \overline{b_\mu} = 0 \qquad \text{für } \mu = 0, 1, 2,$$

für die Koeffizienten a_μ bzw. b_μ erfüllt und somit die Induktionsbasis gezeigt ist.
Annahme: Die Erzeugenden $g_0(z)$ und $h_0(z)$ der Nulllösung (3.25) können mithilfe der Summen aus (3.26) dargestellt werden. Die Koeffizienten erfüllen dabei die Bedingung (3.27).
Schritt von n auf $n+1$: Es soll gezeigt werden, dass die Koeffizienten a_μ und b_μ der Erzeugenden

$$g_0(z) = \sum_{\mu=0}^{2n+2} a_\mu z^\mu \qquad \text{und} \qquad h_0(z) = \sum_{\mu=0}^{2n+2} b_\mu z^\mu \tag{3.28}$$

in der Nulllösung

$$U_0(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(2n+2-\nu)!}{\nu!(n+1-\nu)!}\Big[g_0^{(\nu)}(z) + \overline{h_0^{(\nu)}(z)}\Big]\frac{(-1)^{n+1-\nu}}{(z+\bar{z})^{n+1-\nu}}$$

die Bedingung

$$a_\mu + (-1)^\mu \overline{b_\mu} = 0 \quad \text{mit } \mu = 0, \ldots, 2n+2, \tag{3.29}$$

erfüllen. Hierfür benötigt man nun das zuvor bewiesene Lemma 6. Dieses sagt aus, dass die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.22) mit dem Index $n+1$ folgende Lösung (3.21)

$$W_1 = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{2(n+1)}{z+\bar{z}} U$$

besitzt, wobei $U(z, \bar{z})$ eine Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) mit dem Index n bezeichnet (vgl. Seite 48 bis 55 in [8]). Setzt man $W_1 = 0$, so ergeben sich für $U(z, \bar{z})$ die folgenden beiden Fälle:

(i) $U = 0$:
Dieser Fall wird durch die Nulllösung $U_0(z, \bar{z})$ gemäß (3.25) realisiert. Für diese gilt die Induktionsannahme, d.h. die Erzeugenden haben die Gestalt

$$g_0(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu z^\mu \quad \text{und} \quad h_0(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} b_\mu z^\mu$$

und die Koeffizienten a_μ und b_μ erfüllen die Bedingung (3.27) für $\mu = 0, \ldots, 2n$. Das bedeutet, dass dieser Fall bereits die Existenz der Erzeugenden als Polynome vom Grad $2n$ und die Bedingung (3.27) für die Koeffizienten bis $\mu = 0, \ldots, 2n$ sichert. Im folgenden zweiten Fall werden nun die für (3.28) noch benötigten Summanden $a_{2n+1} z^{2n+1}$ und $a_{2n+2} z^{2n+2}$ bzw. $b_{2n+1} z^{2n+1}$ und $b_{2n+2} z^{2n+2}$ der Erzeugenden hergleitet. Die Koeffizienten a_μ und b_μ erfüllen dabei die Bedingung (3.29) für $\mu = 2n+1$ und $\mu = 2n+2$.

(ii) $\dfrac{\partial U}{\partial z} + \dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \dfrac{2(n+1)}{z+\bar{z}} U = 0$:
Obige Gleichung umgeformt zu

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{2(n+1)}{z+\bar{z}} U \tag{3.30}$$

liefert die gängige Form einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die mithilfe der Charakteristikenmethode formal wie folgt gelöst wird (vgl. [19] von Seite 25 bis 27 bzw. [17] von Seite 59 bis 64):
Bezeichne mit $\widetilde{C}(s)$ eine allgemeine Kurve im einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, die in Abhängigkeit vom Parameter s durch die Paramterdarstellung

$$z = z(s) \quad \text{und} \quad \bar{z} = \bar{z}(s)$$

gegeben ist. Auf diesen Kurve $\widetilde{C}(s)$ wird die analytische Funktion $U(z, \bar{z})$ zur Funktion $U(z(s), \bar{z}(s))$. Die Richtungsableitung von $U(z(s), \bar{z}(s))$ entlang der Kurve $\widetilde{C}(s)$ ist dann gegeben durch:

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\frac{d\bar{z}}{ds}.$$

Indem man nun den obigen Ausdruck auf der rechten Seite mit der linken Seite der partiellen Differentialgleichung (3.30) vergleicht, ergeben sich die speziellen Kurven oder Charakteristiken $C(s)$ der partiellen Differentialgleichung (3.30) aus den Lösungen der zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{ds} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{z}}{ds} = 1$$

bzw. aus der Lösung der vereinfachten, parameterfreien gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = 1$$

als

$$\bar{z} = z + \xi. \tag{3.31}$$

Hierin bezeichnet ξ die beliebige Integrationskonstante. Entlang der Charakteristik (3.31) geht die partielle Differentialgleichung (3.30) in die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dU}{ds} = \frac{2(n+1)}{z+\bar{z}} U$$

bzw. in die leichter zu lösende parameterfreie gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dU}{dz} = \frac{2(n+1)}{z+\bar{z}} U = \frac{2(n+1)}{2z+\xi} U$$

über, wobei im Term rechts bereits die Gleichung der Charakteristik (3.31) eingesetzt wurde. Nun kann die gewöhliche Differentialgleichung für U durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\frac{dU}{U} = 2(n+1)\frac{dz}{2z+\xi} \quad \Rightarrow \quad \ln U = (n+1)\ln(2z+\xi) + \ln K(\xi) \quad \Leftrightarrow$$
$$U = K(\xi)(2z+\xi)^{n+1}.$$

Hierbei bezeichnet $K(\xi)$ die von der Charakteristik (3.31) abhängige Integrationskonstante. Mit (3.31) erhält man die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (3.30) durch

$$U(z,\bar{z}) = K(z-\bar{z})(z+\bar{z})^{n+1}. \tag{3.32}$$

Als nächsten Schritt bildet man die Linearkombination

$$U(z,\bar{z}) = U^{*}(z,\bar{z}) + U^{**}(z,\bar{z})$$

aus den zwei Lösungen

$$U^*(z,\bar{z}) = (z+\bar{z})^{n+1},$$
$$U^{**}(z,\bar{z}) = (z-\bar{z})(z+\bar{z})^{n+1}$$

der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (3.30) gemäß (3.32). Nun gilt, dass die Erzeugenden der Lösung $U^*(z,\bar{z})$ durch

$$\begin{aligned} g^*(z) &= a_{2n+1}z^{2n+1} \\ h^*(z) &= b_{2n+1}z^{2n+1} \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad a_{2n+1} = b_{2n+1} = \frac{1}{n!}$$

und jene der Lösung $U^{**}(z,\bar{z})$ durch

$$\begin{aligned} g^{**}(z) &= a_{2n+2}z^{2n+2} \\ h^{**}(\bar{z}) &= b_{2n+2}z^{2n+2} \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad a_{2n+2} = \frac{1}{(n+1)!},\ b_{2n+2} = -\frac{1}{(n+1)!}$$

gegeben sind. Der Beweis dieser beiden Aussagen kann den Abschnitten A.2 und A.3 des Anhangs entnommen werden.

Insgesamt folgt nun, dass die Erzeugenden der Nulllösung $W_1 = 0$ der Differentialgleichung (3.22) eine Linearkombination der Erzeugenden aus den obigen Fällen (i) und (ii) sind, also:

$$\begin{aligned} g_0(z) &= \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu z^\mu + g^*(z) + g^{**}(z) \\ &= \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu z^\mu + a_{2n+1}z^{2n+1} + a_{2n+2}z^{2n+2}, \\ &= \sum_{\mu=0}^{2n+2} a_\mu z^\mu, \\ h_0(z) &= \sum_{\mu=0}^{2n} b_\mu z^\mu + h^*(z) + h^{**}(z) \\ &= \sum_{\mu=0}^{2n} b_\mu z^\mu + b_{2n+1}z^{2n+1} + b_{2n+2}z^{2n+2} \\ &= \sum_{\mu=0}^{2n+2} b_\mu z^\mu. \end{aligned}$$

Weiters erfüllen die Koeffizienten die Bedingung (3.29), da

$$\begin{aligned} a_{2n+1} - \overline{b_{2n+1}} &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{n!} = 0, \\ a_{2n+2} + \overline{b_{2n+2}} &= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = 0 \end{aligned}$$

gilt. Somit ist der Induktionsschritt gezeigt.
Der Rest des Beweises von Punkt (c) von Satz 5 kann nun leicht gezeigt werden (vgl. [2, 7]). Hierfür geht man wieder von den Gleichungen (3.24) aus, die laut obiger Prozedur mit einem Polynom vom Grad $2n$ gleichzusetzen sind:

$$g_1(z) - g_2(z) = g_0(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu z^\mu,$$

$$h_1(z) - h_2(z) = h_0(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} b_\mu z^\mu \overset{(3.27)}{=} \sum_{\mu=0}^{2n} -(-1)^\mu \overline{a_\mu} z^\mu = -\sum_{\mu=0}^{2n} \overline{a_\mu}(-z)^\mu$$

mit $a_\mu \in \mathbb{C}$. Dies bedeutet aber gleichzeitig, dass $g_1(z)$ bzw. $h_1(z)$ nur bis auf ein Polynom vom Grad $2n$ eindeutig bestimmt sind und somit ist Punkt (c) vollständig bewiesen.
Zu (d): Zum Beweis kann die Gleichung (3.12) herangezogen werden, wobei man darin anstatt der beliebigen in D holomorphen Funktion $p_0(z)$ die Relation (3.20) einsetzt:

$$D_z^n U = \sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-\lambda)!}(-1)^\lambda (z+\bar{z})^{2n-\lambda} g^{(2n-\lambda)}(z) + (2n)!\overline{h(z)}.$$

Wenn sich die Lösung $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) im einfach zusammenhängenden Gebiet D nun mithilfe der Erzeugenden $h(z)$ allein darstellen lässt, so ist durch das Nullsetzen der anderen Erzeugenden $g(z)$ in der obigen Darstellung die Erzeugende $h(z)$ eindeutig durch die Relation

$$\overline{h(z)} = \frac{1}{(2n)!} D_z^n U$$

oder

$$h(z) = \frac{1}{(2n)!} \overline{D_z^n U}$$

bestimmt. Aufgrund der Symmetrie der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) bezüglich z und $\bar{z}$ kann man eine entsprechende Gleichung für $D_{\bar{z}}^n U$ angeben, wobei diesmal

$$p_0(z) = (2n)! g(z)$$

gesetzt wird. Durch das in diesem Fall alleinige Auftreten der Erzeugenden $g(z)$ könnte man diese Funktion dann schließlich durch

$$g(z) = \frac{1}{(2n)!} D_{\bar{z}}^n U$$

eindeutig bestimmen (vgl. [2, 7]).
Somit sind die Punkte (c) und (d) des Satzes 5 ebenfalls bewiesen. □

Nachdem die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) mit dem Index $n \in \mathbb{N}$ nun ausgiebig untersucht wurde, soll nun eine weitere Verallgemeinerung dieser Gleichung betrachtet werden, in der zwei Indizes $m, n \in \mathbb{N}$ auftreten.

3.2. Die Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe

In einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ sei die folgende Differentialgleichung in der ersten verkürzten Form gegeben:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n-m}{z+\bar{z}} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{n(m+1)}{(z+\bar{z})^2} U = 0, \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{3.33}$$

Diese bezeichnet die Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (vgl. [5] bzw. Seite 23 in [8]). Damit die gesuchte Lösung $U(z, \bar{z})$ in D analytisch ist, müssen die beiden Koeffizientenfunktionen

$$\begin{aligned} \hat{a}(z, \bar{z}) &= \frac{n-m}{z+\bar{z}}, \\ \hat{b}(z, \bar{z}) &= -\frac{n(m+1)}{(z+\bar{z})^2}, \end{aligned}$$

in D analytisch sein. Dies wird analog wie für die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) durch die Forderung $z + \bar{z} \neq 0$ an das Gebiet D erreicht.

Bemerkung. Setzt man $m = n$ in der Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (3.33), so erhält man die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2).

Nun ist man an der Darstellung der Lösungen der Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (3.33) interessiert. Dazu lässt sich der folgende Satz formulieren (vgl. [5] bzw. die Seiten 23 bis 25 in [8]):

Satz 6. *Bezeichne D ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, in dem $z + \bar{z} \neq 0$ gilt. Weiters benötigt man die beiden Differentialoperatoren (3.3) und (3.4), die bereits in Satz 5 definiert wurden. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Alle im Gebiet D definierten, analytischen Lösungen $U(z, \bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (3.33) lassen sich mithilfe von zwei in D definierten, holomorphen Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ wie folgt darstellen:

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+m-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \left[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \right] \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}. \tag{3.34}$$

Die Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ werden dabei die Erzeugenden genannt und

$$g^{(\nu)}(z) := \frac{d^\nu g(z)}{dz^\nu} \quad \text{bzw.} \quad \overline{h^{(\nu)}(z)} := \frac{d^\nu \overline{h(z)}}{d\bar{z}^\nu}$$

für $\nu = 0, \ldots, n$.

(b) Umgekehrt stellt (3.34) für alle in D holomorphen Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ eine Lösung $U(z, \bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (3.33) dar.

(c) *Ist die Lösung $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (3.33) in D vorgegeben, so sind die $(n+m+1)-$ten Ableitungen der Erzeugenden eindeutig bestimmt und es gilt:*

$$g^{(n+m+1)}(z) = \frac{n!D_z^{m+1}\Big((z+\bar{z})^{n-m}U\Big)}{m!(z+\bar{z})^{n+m+2}} \quad \textit{bzw.} \quad \overline{h^{(n+m+1)}(z)} = \frac{m!D_{\bar{z}}^{n+1}U}{n!(z+\bar{z})^{n+m+2}}.$$

Die Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ selbst sind in diesem Fall nur bis auf ein Polynom vom Grad $n+m$ bestimmt. Das allgemeinste Erzeugendenpaar folgt gemäß:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= g_2(z) + \sum_{\mu=0}^{m+n} a_\mu z^\mu, \\ h_1(z) &= h_2(z) + \frac{m!}{n!}(-1)^{n+m+1}\sum_{\mu=0}^{m+n} \overline{a_\mu}(-z)^\mu, \quad a_\mu \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

(d) *Lässt sich die Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (3.33) in D allein durch eine Erzeugende $h(z)$ über die Relation*

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(n+m-\nu)!}{\nu!(m-\nu)!}\overline{h^{(\nu)}(z)}\frac{(-1)^{m-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}$$

darstellen, so ist diese Erzeugende eindeutig durch

$$h(z) = \frac{1}{(n+m)!}\overline{D_z^m\Big((z+\bar{z})^{n-m}U\Big)}$$

bestimmt. Analog gilt: Wenn die Lösung in D allein durch die Erzeugende $g(z)$ über die Beziehung

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+m-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(\nu)}(z)\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}$$

dargestellt werden kann, so ist diese Erzeugende eindeutig durch

$$g(z) = \frac{1}{(n+m)!}D_{\bar{z}}^n U$$

bestimmt.

Der Beweis dieses Satzes könnte ähnlich wie jener von Satz 5 für die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe geführt werden.

4. Die verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichungen im bikomplexen Raum

Am Anfang dieses Kapitels werden die bikomplexen Zahlen und deren wichtigsten Eigenschaften wie z.B. ihre idempotente Darstellung vorgestellt. Danach sollen die Begriffe der Holomorphie und der Differenzierbarkeit einer Funktion einer bikomplexen Variable eingeführt werden. Ein wichtiges Ergebnis in diesem Zusammenhang ist, dass eine bikomplexe holomorphe bzw. differenzierbare Funktion mithilfe von zwei holomorphen Funktionen dargestellt werden kann, die komplexe Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen erfüllen bzw. harmonisch bezüglich der komplexen Variablen sind.
Im dritten Abschnitt dieses Kapitels wird dann auf bikomplexe Differentialoperatoren und auf den komplexen Laplace–Operator näher eingegangen.
Zu guter Letzt werden schließlich die sogenannten verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichungen und deren Lösungsdarstellungen im Raum der bikomplexen Zahlen betrachtet.

4.1. Die bikomplexen Zahlen und ihre Eigenschaften

Um die Gestalt der bikomplexen Zahlen besser zu verstehen bzw. zur Motivation ihrer Einführung soll zunächst die Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

näher betrachtet werden. Wie an der obigen Definition erkennbar, setzt sich eine komplexe Zahl aus den beiden reellen Zahlen x, y und der imaginären Einheit i mit $i^2 = -1$ zusammen. Man kann die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ jedoch auch als die Menge der geordneten Paare von reellen Zahlen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ansehen (vgl. [30]). Hierbei bezeichnet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ das kartesische Produkt der Menge $\mathbb{R}$ mit sich selbst. So gesehen sind die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ eine mit der imaginären Einheit i versehene Verdoppelung der rellen Zahlen $\mathbb{R}$ (vgl. [26]), auf denen die üblichen Rechenoperationen wie die Addition, Multiplikation und das Distributivgesetz erklärt sind.
Nun wird die Idee der Verdoppelung auf die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ angewendet, um eine neue Menge von Zahlen zu definieren (vgl. [26]). Ersetzt man in der komplexen Zahl

$x+iy$ die reellen Zahlen x und y durch die zwei komplexen Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$, so erhält man zunächst wieder eine komplexe Zahl:

$$z_1 + iz_2 = (x_1 + iy_1) + i(x_2 + iy_2) = (x_1 - y_2) + i(x_2 + y_2).$$

Ersetzt man jedoch hierin die ursprüngliche imaginäre Einheit i durch die neue imaginäre Einheit j, so erhält man ein neuen Typ von Zahl, die nun nicht mehr komplex, sondern bikomplex ist:

$$z_1 + jz_2 = (x_1 + iy_1) + j(x_2 + iy_2).$$

Die obige Zahl $Z = z_1 + jz_2$ kann nun wiederum mit einem Punkt $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, der Verdoppelung von $\mathbb{C}$, identifiziert werden (vgl. [20]).
Schließlich ergibt sich die folgende Definition (vgl. [20, 26, 25, 10] und Abschnitt 1.1 in [24]):

Definition 4.1. Die Menge der **bikomplexen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{BC} := \{z_1 + jz_2 : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\},$$

wobei j hierbei die zweite neue imaginäre Einheit mit $j^2 = -1$ bezeichnet. Diese kommutiert mit der ersten ursprünglichen imaginären Einheit i der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$ gemäß der Rechenregel:

$$ij = ji. \tag{4.1}$$

Neben der kartesischen Form einer bikomplexen Zahl

$$Z = z_1 + jz_2 \quad \text{mit } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

gibt es noch eine weitere Darstellungsform, die man durch explizites Einsetzen der komplexen Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ in die kartesische Form erhält:

$$Z = x_1 + iy_1 + jx_2 + ijy_2 \quad \text{mit } x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Nun stellt sich die Frage welche Rechenoperationen auf der Menge der bikomplexen Zahlen erklärt sind. Hierzu werden für die beiden bikomplexen Zahlen $Z_1 = z_{11} + jz_{12}$ und $Z_2 = z_{21} + jz_{22}$ die Addition durch

$$Z_1 + Z_2 := (z_{11} + z_{21}) + j(z_{12} + z_{22})$$

und die Multiplikation durch

$$Z_1 \cdot Z_2 := (z_{11}z_{21} - z_{12}z_{22}) + j(z_{11}z_{22} + z_{21}z_{12})$$

definiert (vgl. [20, 26]).

Als nächstes sollen einige Eigenschaften der bikomplexen Zahlen aufgelistet werden:

- Die bikomplexen Zahlen mit der oben definierten Addition und Multiplikation sind ein kommutativer Ring.
  Die Addition ist assoziativ und kommutativ (dies folgt aus der assoziativen und kommutativen Addition der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$). Weiters gibt es ein additives neutrales Element $0 = 0 + j0$, das sich aus dem additiven neutralen Element der komplexen Zahlen $0 + i0$ zusammensetzen lässt. Das additive inverse Element ist durch $-z_1 + j(-z_2)$ und den komplexen additiven inversen Elementen $-z_1$ und $-z_2$ gegeben.
  Die Multiplikation ist assoziativ (dies folgt wiederum aus selbigen Eigenschaften der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$) und es gibt ein multiplikatives neutrales Element $1 = 1 + j0$, das sich aus dem komplexen multiplikativen neutralen Element $1 + i0$ ergibt. Die Kommutativität der Multiplikation folgt aus der kommutativen Multiplikation der komplexen Zahlen und der Rechenregel (4.1) der imaginären Einheiten.
  Für beliebige $Z, Z_1, Z_2 \in \mathbb{BC}$ gilt das Distributivgesetz
  $$Z(Z_1 + Z_2) = ZZ_1 + ZZ_2,$$
  welches aus den obigen Rechenregeln für bikomplexe Zahlen und der Rechenregel (4.1) folgt (vgl. [20, 26, 25, 10] bzw. Abschnitt 1.2 und 1.4 in [24]).
- Eine bikomplexe Zahl $Z = z_1 + jz_2$ besitzt die folgenden drei Arten der Konjugation (vgl. [25, 9]):
  $$Z^{\dagger} = z_1 - jz_2, \tag{4.2}$$
  $$Z^{\star} = \bar{z}_1 + j\bar{z}_2, \tag{4.3}$$
  $$Z^{*} = \bar{z}_1 - j\bar{z}_2. \tag{4.4}$$
  Die erste Art (4.2) ist die gwöhnliche bikomplexe Konjugation bezüglich der neuen imaginären Einheit j (vgl. [20, 26, 25]). Die zweite Art (4.3) stellt die gewöhnliche Konjugation $\bar{z}_k$ der komplexen Zahl $z_k \in \mathbb{C}$ für $k = 1, 2$ bezüglich der ursprünglichen imaginären Einheit i dar (vgl. [25, 26]). Die dritte Art (4.4) kann als eine Kombination aus der komplexen und der bikomplexen Konjugation verstanden werden (vgl. [26]).
- Für die bikomplexe Zahl $Z = z_1 + jz_2$ gibt es zwei wichtige Beträge. Zunächst kann der reelle Betrag der bikomplexen Zahl Z in ihrer kartesischen und zweiten Darstellungsform definiert werden als
  $$|Z|_{\mathbb{R}} := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}. \tag{4.5}$$
  Die Funktion $|.|_{\mathbb{R}} : \mathbb{BC} \to \mathbb{R}_0^+$ stellt also die Euklidische Norm im $\mathbb{C}^2$ bzw. im $\mathbb{R}^4$ dar (vgl. [26]). Dies kann auch damit erklärt werden, dass man die bikomplexe Zahl $Z = z_1 + jz_2 = x_1 + iy_1 + jx_2 + ijy_2$ mit dem Punkt $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ identifizieren und somit der Raum der bikomplexen Zahlen $\mathbb{BC}$ als isomorph zum $\mathbb{R}^4$ angesehen werden kann. Da der $\mathbb{R}^4$ bezüglich der Euklidischen Norm ein

vollständiger Raum ist, ist nun $(\mathbb{BC}, +, \cdot, |.|_{\mathbb{R}})$ ebenfalls ein reeller Banachraum (vgl. [26] und Seite 5 in [24]).
Der zweite Betrag wird der komplexe Betrag der bikomplexen Zahl $Z = z_1 + jz_2$ genannt und ist durch

$$|Z|_{\mathbb{C}} := \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

gegeben. Dieser ist für bikomplexe Zahlen das Analogon zum Betrag einer komplexen Zahl $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$, da

$$|Z|_{\mathbb{C}}^2 = ZZ^{\dagger} = z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{C} \tag{4.6}$$

gilt (vgl. [20, 26].

Für die nächste Eigenschaft benötigt man zunächst die folgende Definition (vgl. Seite 9 in [24]):

Definition 4.2. Gegeben seien die beiden bikomplexen Zahlen Z_1 und Z_2, sodass $Z_1 Z_2 = 1$ ist. Dann ist Z_1 das **multiplikative inverse Element** von Z_2 und Z_2 ist das multiplikative inverse Element von Z_1.
Die bikomplexe Zahl Z_1 heißt **invertierbar**, wenn sie ein multiplikatives inverses Element besitzt. Gibt es kein multiplikatives inverses Element zu Z_1, so heißt Z_1 **nicht invertierbar**.

- Eine bikomplexe Zahl $Z = z_1 + jz_2$ ist genau dann invertierbar, wenn ihr komplexer Betrag

$$|Z|_{\mathbb{C}}^2 = z_1^2 + z_2^2 \neq 0$$

ist (vgl. [20, 26, 25]). Diese Bedingung entspricht $|z|^2 \neq 0$ für die Invertierbarkeit der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$.
Die Menge der nicht invertierbaren bikomplexen Zahlen ist somit gegeben durch

$$\mathcal{O}_2 = \{z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC} : |Z|_{\mathbb{C}}^2 = z_1^2 + z_2^2 = 0\} \tag{4.7}$$

(vgl. [26, 10]). Dies ist laut Definition 4.2 jene Menge von bikomplexen Zahlen, die keine multiplikativen inversen Elemente besitzen (vgl. Seite 12 in [24]). Im Gegensatz zu den reellen und komplexen Zahlen besteht die Menge der nicht invertierbaren bikomplexen Zahlen $\mathcal{O}_2$ aus mehr als einem Element. Die reellen bzw. komplexen Zahlen haben nämlich jeweils nur ein Element 0 und $0 + i0$, das kein multiplikatives inverses Element besitzt (vgl. Seite 12 in [24]).

- Nun soll das multiplikative inverse Element Z^{-1} der bikomplexen Zahl $Z = z_1 + jz_2$ bestimmt werden. Hierfür betrachtet man die Beziehung (4.6)

$$ZZ^{\dagger} = z_1^2 + z_2^2.$$

Ist die bikomplexe Zahl Z invertierbar, so gilt $|Z|^2_{\mathbb{C}} = z_1^2 + z_2^2 \neq 0$ und es ergibt sich die Gleichung

$$Z \frac{Z^\dagger}{z_1^2 + z_2^2} = 1.$$

Aus Definition 4.2 folgt nun, dass

$$\frac{Z^\dagger}{z_1^2 + z_2^2} = Z^{-1} = \frac{1}{Z}$$

die multiplikative inverse bikomplexe Zahl zu Z ist (vgl. [26, 20, 25]). Ferner hat man damit gezeigt, dass die Menge der bikomplexen Zahlen $\mathbb{BC}$ sogar ein kommutativer Ring mit Eins ist (vgl. [26]).

- Die Division der bikomplexen Zahl $Z_1 = z_{11} + jz_{12}$ durch die bikomplexe Zahl $Z_2 = z_{21} + jz_{22}$ ist gegeben durch

$$\frac{Z_1}{Z_2} := \frac{Z_1 Z_2^\dagger}{|Z_2|^2_{\mathbb{C}}} = \frac{(z_{11} + jz_{22})(z_{21} - jz_{22})}{z_{12}^2 + z_{22}^2}$$

und setzt voraus, dass die bikomplexe Zahl Z_2 invertierbar ist bzw. $|Z_2|^2_{\mathbb{C}} = z_{21}^2 + z_{22}^2 \neq 0$ gilt (vgl. Seite 14 in [24]).

Für die nächste wichtige Eigenschaft der bikomplexen Zahlen $\mathbb{BC}$ benötigt man zunächst die folgende Definition (vgl. [20] und Seite 18 in [24]):

Definition 4.3. Die bikomplexen Zahlen Z_1 und Z_2 heißen **Nullteiler**, wenn trotz $Z_1 \neq 0$ und $Z_2 \neq 0$ das Produkt $Z_1 Z_2 = 0$ ist.

- Die bikomplexen Zahlen $\mathbb{BC}$ besitzen Nullteiler und sind deswegen kein Körper. Dies unterscheidet sie von den nullteilerfreien Körpern $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ (vgl. [20, 26, 25]). Angenommen, die komplexen Zahlen z_1 und z_2 in der kartesischen Form der bikomplexen Zahl $Z = z_1 + jz_2$ seien ungleich Null (woraus $Z \neq 0$ und $Z^\dagger \neq 0$ folgt), der komplexe Betrag $|Z|^2_{\mathbb{C}} = z_1^2 + z_2^2$ sei aber gleich Null. Dann sind Z und ihre bikomplex konjugierte Zahl $Z^\dagger$ wegen der Relation (4.6) jeweils Nullteiler (vgl. [20, 26]).
  Die Bedingung, dass $|Z|^2_{\mathbb{C}} = z_1^2 + z_2^2 = 0$ sein soll, bedeutet aber gleichzeitig auch, dass Z nicht invertierbar ist. Folglich kann die Menge der Nullteiler ebenfalls durch die Menge $\mathcal{O}_2$ der nicht invertierbaren Elemente gemäß (4.7) angegeben werden (vgl. [26, 25]).

Die nächste Eigenschaft der bikomplexen Zahlen $\mathbb{BC}$ benötigt die folgende Definition (vgl. Seite 18 in [24] und [26]):

Definition 4.4. Ein Element $Z \in \mathbb{BC}$ heißt **idempotent**, wenn $Z^2 = Z$ ist.

- Die bikomplexen Zahlen $\mathbb{BC}$ besitzen genau vier idempotente Elemente:

$$0, \quad 1, \quad \frac{1+ij}{2}, \quad \frac{1-ij}{2}.$$

Die letzten beiden bikomplexen Zahlen sind dabei besonders wichtig und werden daher als

$$e_1 := \frac{1+ij}{2} \quad \text{und} \quad e_2 := \frac{1-ij}{2} \tag{4.8}$$

definiert. Diese beiden Elemente sind Beispiele für Nullteiler, da sie als Elemente ungleich Null trotzdem die Gleichung $e_1 e_2 = 0$ erfüllen (vgl. [26, 20]). Zusätzlich sind e_1 und e_2 nicht invertierbar, da

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\right)^2 = 0$$

ist (vgl. Seite 19 in [24]). Weiters gilt, dass $e_1 + e_2 = 1$ ist (vgl. [20, 26]).
Die Wichtigkeit der idempotenten Elemente e_1 und e_2 soll durch den folgenden Satz verdeutlicht werden (vgl. [20] und Seite 19 in [24]):

Satz 7. *Die idempotenten Elemente $e_1, e_2 \in \mathbb{BC}$ seien durch (4.8) gegeben. Jede bikomplexe Zahl $Z = z_1 + jz_2$ besitzt die idempotente Darstellung*

$$Z = \alpha e_1 + \beta e_2, \tag{4.9}$$

wobei die beiden eindeutigen komplexen Zahlen

$$\alpha = z_1 - iz_2 \quad \textit{und} \quad \beta = z_1 + iz_2$$

die idempotenten Komponenten der bikomplexen Zahl $Z = z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC}$ genannt werden.

Beweis. Gegeben seien die beiden beliebigen komplexen Zahlen α und β, sodass

$$Z = \alpha e_1 + \beta e_2$$

ist. Hierin die Definition (4.8) der beiden idempotenten Elemente e_1 und e_2 eingesetzt, ergibt die Gleichung:

$$\begin{aligned} Z &= \alpha\frac{1+ij}{2} + \beta\frac{1-ij}{2} \\ &= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) + j\left(\frac{\alpha i}{2} - \frac{\beta i}{2}\right) \\ &\overset{!}{=} z_1 + jz_2. \end{aligned}$$

Der Vergleich des Realteils und des Imaginärteils bezüglich der zweiten imaginären Einheit j liefert dann die Relationen:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = z_1 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha i}{2} - \frac{\beta i}{2} = z_2. \tag{4.10}$$

Dies ist ein Gleichungssystem für die beiden Unbekannten α und β, das die eindeutige Lösung

$$\alpha = z_1 - iz_2 \quad \text{und} \quad \beta = z_1 + iz_2$$

besitzt. Folglich hat die bikomplexe Zahl $Z = z_1 + jz_2$ tatsächlich die idempotente Darstellung (4.9) mit den beiden eindeutigen idempotenten Komponenten α und β von oben (vgl. Seite 19 in [24] und [20]). □

Die idempotente Darstellung (4.9) kann nur für bikomplexe Zahlen Z angegeben werden und ist folglich eine Besonderheit der Menge $\mathbb{BC}$. Es gibt kein Analogon dafür im Komplexen (vgl. [20]).
Der Vorteil der idempotenten Darstellung von bikomplexen Zahlen zeigt sich bei deren Addition, Multiplikation und Division. Diese Operationen vereinfachen sich nämlich aufgrund der Eigenschaften von e_1 und e_2 auf die Addition, Multiplikation und Division ihrer idempotenten Komponenten. Seien $Z_1 = \alpha e_1 + \beta e_2$ und $Z_2 = \gamma e_1 + \delta e_2$ zwei bikomplexe Zahlen in ihrer jeweiligen idempotenten Darstellung. Dann gilt:

$$Z_1 + Z_2 = [\alpha + \gamma]e_1 + [\beta + \delta]e_2, \tag{4.11}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = \alpha\gamma e_1 + \beta\delta e_2,$$

$$Z_1^n = \alpha^n e_1 + \beta^n e_2 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.12}$$

sowie

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\alpha}{\gamma} e_1 + \frac{\beta}{\delta} e_2 \qquad \text{für } \gamma \neq 0 \text{ und } \delta \neq 0$$

(vgl. [20] und Abschnitt 1.6 in [24]).
Eine bikomplexe Zahl in ihrer idempotenten Darstellung $Z = \alpha e_1 + \beta e_2$ ist nicht invertierbar genau dann, wenn eine der idempotenten Komponenten $\alpha = z_1 - iz_2$ oder $\beta = z_1 + iz_2$ gleich Null ist. Sie ist invertierbar genau dann, wenn beide idempotenten Komponenten α und β ungleich Null sind (vgl. Seite 10 in [24]).
Das multiplikative inverse Element der invertierbaren bikomplexen Zahl $Z = \alpha e_1 + \beta e_2$ ist gegeben durch

$$Z^{-1} = \alpha^{-1} e_1 + \beta^{-1} e_2 = \frac{1}{\alpha} e_1 + \frac{1}{\beta} e_2,$$

wobei α^{-1} und β^{-1} die muliplikativen inversen Elemente der komplexen Zahlen α und β bezeichnen (vgl. [20]).
Schließlich kann der reelle Betrag einer bikomplexen Zahl in ihrer idempotenten Darstellung durch

$$|Z|_{\mathbb{R}} = |\alpha e_1 + \beta e_2|_{\mathbb{R}} = \sqrt{\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} = \sqrt{\frac{|z_1 - iz_2|^2 + |z_1 + iz_2|^2}{2}} \tag{4.13}$$

angegeben werden (vgl. Seite 21 in [24]).

4.2. Differenzierbarkeit und Holomorphie einer bikomplexen Funktion

Analog wie bei der Definition der komplexen Differentierbarkeit am Anfang von Kapitel 1, benötigt man hier ebenfalls als Grundlage den Begriff eines Gebiets im bikomplexen Raum $\mathbb{BC}$. Hierfür wiederum spielt die folgende Definition eine wichtige Rolle (vgl. die Seiten 40 und 45 in [24]):

Definition 4.5. Bezeichne mit den beiden Mengen

$$A_1 := \{z_1 - iz_2 : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

und

$$A_2 := \{z_1 + iz_2 : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

zwei komplexe Hilfsräume. Wenn es zwei Teilmengen $X_1 \subset A_1$ und $X_2 \subset A_2$ gibt, sodass

$$X = \{z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC} : z_1 + jz_2 = w_1e_1 + w_2e_2, (w_1, w_2) \in X_1 \times X_2\}$$

ist, so wird die obige Menge $X \subset \mathbb{BC}$ das **kartesische Produkt der Mengen** X_1 **und** X_2 genannt. Ein spezielles kartesisches Produkt der zwei offenen komplexen Mengen

$$X_1 = \{w_1 \in A_1 : |w_1 - (a_1 - ia_2)| < r_1\},$$
$$X_2 = \{w_2 \in A_2 : |w_2 - (a_1 + ia_2)| < r_2\}$$

ist der sogenannte **Diskus**

$$D(A; r_1, r_2) = \{z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC} : z_1 + jz_2 = w_1e_1 + w_2e_2, (w_1, w_2) \in X_1 \times X_2\} \subset \mathbb{BC}$$

mit Mittelpunkt $A = a_1 + ja_2 \in \mathbb{BC}$ und den reellen Radien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$.

Bemerkung. Identifiziert man die bikomplexe Zahl $Z = z_1 + jz_2$ mit dem Punkt $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, so entspricht der Diskus $D(A; r_1, r_2)$ aufrund der idempotenten Zerlegung von Z dem Bizylinder

$$\Big(K(a_1 - ia_2, r_1), K(a_1 + ia_2, r_2)\Big)$$

aus der Definition 1.11 im ersten Kapitel.

Schließlich können Mengen $X \subset \mathbb{BC}$ nun näher beschrieben werden (vgl. Seite 84 in [24]):

Definition 4.6. Eine Menge $X \subset \mathbb{BC}$ heißt **offen**, wenn es um jeden Punkt $Z = z_1 + jz_2 \in X$ einen Diskus $D(Z; r_1, r_2)$ in X gibt.

Definition 4.7. Eine Menge $X \subset \mathbb{BC}$ heißt **zusammenhängend**, wenn zwei beliebige Punkte $Z_1 = z_{11} + jz_{12}$ und $Z_2 = z_{21} + jz_{22}$ durch einen Polygonzug verbunden werden können, der ganz in der Menge X enthalten ist.

Definition 4.8. Eine Menge $X \subset \mathbb{BC}$ heißt **Gebiet**, wenn sie offen und zusammenhängend ist.

Zur Anwendung des kartesischen Produkts von komplexen Mengen, kann der folgende Satz formuliert werden (vgl. Seite 40 und 43 in [24]):

Satz 8. *Sei X das kartesische Produkt der Mengen $X_1 \subset A_1$ und $X_2 \subset A_2$. Sind X_1 und X_2 zwei Gebiete in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, so ist X ein Gebiet in $\mathbb{BC}$.*

Beweis. Auf Seite 40 in [24] wird aus der Offenheit der beiden komplexen Mengen $X_1 \subset A_2$ und $X_2 \subset A_2$ auf die Offenheit der Menge $X \subset \mathbb{BC}$ geschlossen. Auf Seite 43 in [24] folgt selbige Aussage bezüglich des Zusammenhangs von Mengen. □

Für die Umkehrung muss X keine kartesische Menge mehr sein (vgl. Seite 38 und 42 in [24]):

Satz 9. *Sei X eine Menge in $\mathbb{BC}$ und*

$$h_1: \quad \begin{aligned} \mathbb{BC} &\to \mathbb{C} \\ z_1 + jz_2 &\mapsto z_1 - iz_2 \end{aligned} \qquad\qquad h_2: \quad \begin{aligned} \mathbb{BC} &\to \mathbb{C} \\ z_1 + jz_2 &\mapsto z_1 + iz_2 \end{aligned}$$

seien zwei Funktionen. Wenn X ein Gebiet in $\mathbb{BC}$ ist und $X_1 = h_1(X)$ bzw. $X_2 = h_2(X)$, so sind die Mengen $X_1 \subset A_1$ und $X_2 \subset A_2$ Gebiete in $\mathbb{C}$.

Beweis. Der Beweis, dass aus der Offenheit von $X \subset \mathbb{BC}$ die Offenheit der beiden komplexen Mengen $X_1 \subset A_1$ und $X_2 \subset A_2$ folgt, kann Seite 38 in [24] entnommen werden. Auf Seite 42 in [24] wird gezeigt, dass wenn $X \subset \mathbb{BC}$ eine zusammenhängende Menge ist, so sind die komplexen Mengen $X_1 \subset A_1$ und $X_2 \subset A_2$ ebenso zusammenhängend. □

Nun soll der erste wichtige Teil dieses Abschnitts behandelt werden, nämlich die $\mathbb{BC}-$Holomorphie einer auf dem Gebiet $X \subset \mathbb{BC}$ definierten Funktion

$$f: \quad \begin{aligned} X &\to \mathbb{BC} \\ z_1 + jz_2 &\mapsto f(z_1 + jz_2). \end{aligned}$$

Bevor dieser Begriff jedoch genau definiert wird und zum besseren Verständnis des damit verbundenen wichtigen Satzes 10, ist ein Exkurs zu bikomplexen Potenzreihen notwendig:
Die bikomplexe Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + jb_k)(z_1 + jz_2)^k \tag{4.14}$$

mit den Koeffizienten $a_k + jb_k \in \mathbb{BC}$ und dem Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{BC}$ besitzt die idempotente Darstellung

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + jb_k)(z_1 + jz_2)^k = \left[\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - ib_k)(z_1 - iz_2)^k\right]e_1 + \left[\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + ib_k)(z_1 + iz_2)^k\right]e_2$$

mit den zwei Potenzreihen der idempotenten Komponenten

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - ib_k)(z_1 - iz_2)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + ib_k)(z_1 + iz_2)^k, \tag{4.15}$$

die jeweils komplexe Potenzreihen sind (vgl. Seite 64 in [24]). Die bikomplexe Potenzreihe (4.14) konvergiert für alle $z_1 + jz_2 \in D(0; r_1, r_2)$ genau dann, wenn die komplexen Potenzreihen der idempotenten Komponenten (4.15) jeweils in den Kreisen $|z_1 - iz_2| < r_1$ und $|z_1 + iz_2| < r_2$ mit den Radien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$ in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ konvergieren (vgl. Seite 65 in [24]).
Definiert man nun die bikomplexe Funktion $f(z_1 + jz_2)$ durch die bikomplexe Potenzreihe (4.14) im Diskus $D(0; r_1, r_2)$, also

$$f(z_1 + jz_2) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + jb_k)(z_1 + jz_2)^k \quad \text{für } z_1 + jz_2 \in D(0; r_1, r_2),$$

so lassen sich auf den zwei Konvergenzkreisscheiben der Potenzreihen der idempotenten Komponenten (4.15) die folgenden zwei komplexwertigen Funktionen definieren:

$$f_1(z_1 - iz_2) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k - ib_k)(z_1 - iz_2)^k \quad \text{auf } |z_1 - iz_2| < r_1,$$
$$f_2(z_1 + iz_2) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + ib_k)(z_1 + iz_2)^k \quad \text{auf } |z_1 + iz_2| < r_2.$$

Aufgrund der oben besprochenen Konvergenzeigenschaften der bikomplexen bzw. komplexen Potenzreihen folgt nun:

$$f(z_1 + jz_2) = f_1(z_1 - iz_2)e_1 + f_2(z_1 + iz_2)e_2 \quad \forall z_1 + jz_2 \in D(0; r_1, r_2)$$

(vgl. Seite 75 in [24]).

Die Definition einer $\mathbb{BC}-$holomorphen Funktion umfasst nun allgemeine bikomplexe Potenzreihen mit einem beliebigen Entwicklungspunkt $A \in \mathbb{BC}$ statt $0 \in \mathbb{BC}$ (vgl. Seite 84 in [24]):

Definition 4.9. Sei $X \subset \mathbb{BC}$ ein Gebiet. Die Funktion f der bikomplexen Variable $Z = z_1 + jz_2 \in X$ heißt $\mathbb{BC}-$**holomorph im Gebiet** X, wenn es zu jedem Punkt $A = a_1 + ja_2 \in X$ einen Diskus $D(A; r_1, r_2)$ und eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + jb_k)\Big[(z_1 + jz_2) - (a_1 + ja_2)\Big]^k$$

mit dem Entwicklungspunkt $A \in \mathbb{BC}$ und den Koeffizienten $a_k + jb_k$ gibt, sodass

$$f(z_1 + jz_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + jb_k)\Big[(z_1 + jz_2) - (a_1 + ja_2)\Big]^k$$

für alle $z_1 + jz_2 \in D(A; r_1, r_2)$.

Der folgende Satz über $\mathbb{BC}-$holomorphe Funktionen basiert im Wesentlichen auf den oben erwähnten Betrachtungen bezüglich der bikomplexen Potenzreihen (vgl. Seite 85 und 87 in [24] bzw. [25]):

Satz 10. *Seien $X \subset \mathbb{BC}, X_1 \subset \mathbb{C}$ und $X_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete. Die Funktion $f : X \to \mathbb{BC}$ ist genau dann $\mathbb{BC}-$holomorph in X, wenn es zwei holomorphe Funktionen $f_1 : X_1 \to \mathbb{C}$ und $f_2 : X_2 \to \mathbb{C}$ gibt, sodass*

$$f(z_1 + jz_2) = f_1(z_1 - iz_2)e_1 + f_2(z_1 + iz_2)e_2 \quad \forall z_1 + jz_2 \in X$$

gilt. Definiert man weiters zwei komplexwertige Funktionen $u(z_1, z_2)$ und $v(z_1, z_2)$ als

$$\begin{aligned} u(z_1, z_2) &= \frac{f_1(z_1 - iz_2) + f_2(z_1 + iz_2)}{2}, \\ v(z_1, z_2) &= \frac{i[f_1(z_1 - iz_2) - f_2(z_1 + iz_2)]}{2} \end{aligned} \tag{4.16}$$

für alle $z_1 + jz_2 \in X$, so sind die komplexen Funktionen f_1, f_2 und die bikomplexe Funktion f durch

$$\begin{aligned} f_1(z_1 - iz_2) &= u(z_1, z_2) - iv(z_1, z_2), \\ f_2(z_1 + iz_2) &= u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2), \\ f(z_1 + jz_2) &= u(z_1, z_2) + jv(z_1, z_2) \end{aligned}$$

für alle $z_1 + jz_2 \in X$ gegeben. Außerdem erfüllen $u(z_1, z_2)$ und $v(z_1, z_2)$ die folgenden komplexen Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = \frac{\partial v}{\partial z_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial z_2} = -\frac{\partial v}{\partial z_1} \tag{4.17}$$

und wegen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z_2^2} = 0$$

sind sie harmonische Funktionen der komplexen Variablen z_1 und z_2.

Beweis. Die Behauptung, dass aus den beiden holomorphen Funktionen f_1 und f_2 der komplexen Variablen $z_1 - iz_2$ und $z_1 + iz_2$ die $\mathbb{BC}-$holomorphe Funktion f durch $f_1e_1 + f_2e_2$ konstruiert werden kann, ist auf Seite 85 in [24] bewiesen. Hierfür muss X übrigens das kartesische Produkt der Mengen X_1 und X_2 sein (siehe Satz 8).

Die Umkehrung der obigen Aussage ist auf Seite 87 in [24] bewiesen.
Die Definition der Funktionen $u(z_1, z_2)$ und $v(z_1, z_2)$ ist auf Seite 75 oder 89 in [24] zu finden. Der Beweis der komplexen Cauchy–Riemannschen Differentialgleichung bzw. dass $u(z_1, z_2)$ und $v(z_1, z_2)$ harmonisch sind, kann Seite 77 oder 89 in [24] entnommen werden. □

Als nächstes soll der zweite wichtige Teil dieses Abschnitts, die $\mathbb{BC}-$Differenzierbarkeit einer bikomplexen Funktion definiert werden (vgl. Seite 140 in [24] bzw. [20, 25, 10]):

Definition 4.10. Gegeben sei ein Gebiet $X \subset \mathbb{BC}$. Die Funktion $f : X \to \mathbb{BC}$ ist $\mathbb{BC}-$**differenzierbar** im Punkt $Z_0 \in X$, wenn der Grenzwert

$$f'(Z_0) := \lim_{Z \to Z_0} \frac{f(Z) - f(Z_0)}{Z - Z_0} \quad \text{für } Z - Z_0 \notin \mathcal{O}_2, \tag{4.18}$$

existiert. Weiters ist f $\mathbb{BC}-$differenzierbar im ganzen Gebiet X, wenn f in jedem Punkt von X $\mathbb{BC}-$differenzierbar ist.

Bemerkung. Gemäß der Betrachtungen im vorigen Abschnitt ist $(\mathbb{BC}, +, \cdot, |.|_{\mathbb{R}})$ ein reeller Banachraum. Somit ist der obige Grenzwert bezüglich der Euklidischen Norm (4.5) (bzw. bezüglich (4.13) für die idempotente Darstellung) erklärt (vgl. Seite 55 in [24] und [20]).

Nun kann der folgende wichtige Satz formuliert werden (vgl. die Seiten 42 bzw. 175 in [24] und [25, 10]):

Satz 11. *Sei $X \subset \mathbb{BC}$ ein Gebiet. Die Funktion $f : X \to \mathbb{BC}$ ist genau dann $\mathbb{BC}-$holomorph in X, wenn sie $\mathbb{BC}-$differenzierbar in jedem Punkt von X ist.*

Beweis. Der Beweis dieser Behauptung ist auf Seite 176 in [24] zu finden. □

Bemerkung. Laut obigem Satz gelten also alle Aussagen für $\mathbb{BC}-$holomorphe Funktionen aus Satz 10 ebenso für $\mathbb{BC}-$differenzierbare Funktionen: In einem Gebiet $X \subset \mathbb{BC}$ ist die Funktion $f : X \to \mathbb{BC}$ genau dann $\mathbb{BC}-$differenzierbar, wenn es zwei holomorphe Funktionen $f_1 : X_1 \to \mathbb{C}$ und $f_2 : X_2 \to \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$f(z_1 + jz_2) = f_1(z_1 - iz_2)e_1 + f_2(z_1 + iz_2)e_2 \tag{4.19}$$

ist. Außerdem sind die komplexwertigen Funktionen $u(z_1, z_2)$ und $v(z_1, z_2)$ wie in (4.16) definiert und erfüllen die komplexen Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen (4.17). Weiters sind beide harmonisch bezüglich der komplexen Variablen z_1 und z_2 (vgl. die Seiten 166 und 167 in [24] bzw. [25, 20]).

Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass eine $\mathbb{BC}-$differenzierbare bzw. $\mathbb{BC}-$holomorphe bikomplexe Funktion durch zwei holomorphe Funktionen u und v darstellbar ist, welche die komplexen Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen (vgl. [20]). Diese Eigenschaft spiegelt ebenfalls die Ähnlichkeit der bikomplexen Zahlen zu den gewöhnlichen komplexen Zahlen wider.

4.3. Die bikomplexen Differentialoperatoren

Zu Beginn sollen zunächst die vier verschiedenen bikomplexen Differentialoperatoren vorgestellt werden. Analog zum komplexen Fall in Kapitel 1, in dem gemäß der komplexen Zahl $z = x + iy$ und ihrer konjugiert komplexen Zahl $\bar{z} = x - iy$ die beiden Wirtinger–Operatoren (1.5) und (1.6)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

hergeleitet werden konnten, können nun gemäß der bikomplexe Zahl $Z = z_1 + jz_2$ und ihrer drei Konjugationen (4.2), (4.3) und (4.4) die folgenden vier bikomplexen Differentialoperatoren angeben werden (vgl. [25, 10]):

$$D^\dagger := \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - j\frac{\partial}{\partial z_2}\right), \tag{4.20}$$

$$D := \frac{\partial}{\partial Z^\dagger} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + j\frac{\partial}{\partial z_2}\right), \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial Z^\star} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - j\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial Z^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + j\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right).$$

Nun lässt sich der folgende Satz formulieren (vgl. [25, 10]):

Satz 12. *Gegeben sei ein Gebiet $X \subset \mathbb{BC}$, auf dem die bikomplexe Funktion*

$$f(Z) = u(z_1, z_2) + jv(z_1, z_2)$$

definiert sei, wobei $u(z_1, z_2)$ und $v(z_1, z_2)$ hierbei zwei komplexwertige Funktionen bezeichnen. Wenn die Funktion f $\mathbb{BC}-$differenzierbar in einem beliebigen Punkt $Z_0 \in \mathbb{BC}$ ist, d.h. also wenn der Grenzwert (4.18) existiert, dann existieren die komplexen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial z_1}, \ \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ \frac{\partial v}{\partial z_1} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial v}{\partial z_2} \tag{4.22}$$

und es gilt:

$$D^\dagger f(Z_0) = \frac{\partial f}{\partial Z}(Z_0) = f'(Z_0) = \frac{\partial u}{\partial z_1} + j\frac{\partial v}{\partial z_1}, \tag{4.23}$$

$$Df(Z_0) = \frac{\partial f}{\partial Z^\dagger}(Z_0) = 0, \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Z^\star}(Z_0) = 0, \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Z^*}(Z_0) = 0. \tag{4.26}$$

Umgegekehrt gilt: Wenn die komplexen Ableitungen (4.22) existieren und in einer Umgebung von $Z_0 \in \mathbb{BC}$ stetig sind und wenn die Gleichungen (4.23)–(4.26) gelten, dann ist die Funktion f $\mathbb{BC}-$differenzierbar bzw. der Grenzwert (4.18) existiert.

Beweis. Siehe [25]. □

Bemerkung. Die Gleichungen (4.23)–(4.26) kennzeichnen eine $\mathbb{BC}-$holomorphe Funktion $f : X \to \mathbb{BC}$ (vergleiche dazu eine holomorphe Funktion f, die die Bedingung $f_{\bar{z}} = 0$ erfüllt). Hierbei ist die Gleichung (4.24) äquivalent zu den komplexen Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen (4.17). Die Gleichung (4.25) entspricht dem Gleichungssystem

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} = -\frac{\partial v}{\partial \bar{z}_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial v}{\partial \bar{z}_1}$$

und die Gleichung (4.26) beschreibt das Gleichungssystem

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial v}{\partial \bar{z}_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} = -\frac{\partial v}{\partial \bar{z}_1}.$$

Weiters kann man nun analog zum ersten Kapitel, in dem mithilfe der Wirtinger–Operatoren (1.5) und (1.6) der reelle Laplace–Operator für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

ausgedrückt wurde, die beiden bikomplexen Differentialoperatoren (4.20) und (4.21) dazu benützen, den komplexen Laplace–Operator

$$\Delta_{\mathbb{C}} = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \tag{4.27}$$

für $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ auf die Darstellung

$$\Delta_{\mathbb{C}} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - j\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + j\frac{\partial}{\partial z_2}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial Z \partial Z^\dagger} = 4D^\dagger D \tag{4.28}$$

umzuschreiben (vgl. [25]). Diese Relation wird sich für den nächsten Abschnitt als wichtig erweisen.

4.4. Die verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichungen

Die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe in einem Gebiet $\hat{X} \subset \mathbb{C}^2$, in dem $z_1 \neq 0$ gilt, ist gegeben durch die Gleichung

$$\Delta_{\mathbb{C}}\hat{w} - \frac{n(n+1)}{z_1^2}\hat{w} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.29}$$

Hierin bezeichnet $\hat{w}(z_1, z_2)$ die gesuchte Lösung in Abhängigkeit vom Punkt $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ und $\Delta_{\mathbb{C}}$ ist der komplexe Laplace–Operator aus (4.27).
Führt man nun die bikomplexe Variable $Z = z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC}$ und das bikomplexe Gebiet $X \subset \mathbb{BC}$ ein, das mit dem obigen Gebiet $\hat{X}$ identifiziert werden kann, und drückt $z_1 \in \mathbb{C}$ mithilfe von $Z \in \mathbb{BC}$ und der zugehörigen bikomplexen Konjugierten $Z^\dagger$ durch

$$z_1 = \frac{Z + Z^\dagger}{2}$$

aus, so erhält man gemäß der Relation (4.28) aus (4.29) die bikomplexe verallgemeinerte Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe:

$$D^\dagger D w - \frac{n(n+1)}{(Z + Z^\dagger)^2} w = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.30}$$

Hierin bezeichnen $D^\dagger$ und D die in (4.20) und (4.21) definierten bikomplexen Differentialoperatoren und $w(Z, Z^\dagger)$ ist die gesuchte Lösung im Gebiet $X \subset \mathbb{BC}$, in dem nun $Z + Z^\dagger \neq 0$ gelten muss (vgl. [10]).
Für die Darstellung der Lösungen dieser bikomplexen Differentialgleichung (4.30) kann der folgende Satz herangezogen werden (vgl. [10]):

Satz 13. *Bezeichne $X \subset \mathbb{BC}$ ein Gebiet im bikomplexen Raum, in dem $Z + Z^\dagger \neq 0$ gilt. Weiters seien durch*

$$P := (Z + Z^\dagger)^2 D^\dagger, \tag{4.31}$$

$$Q := (Z + Z^\dagger)^2 D \tag{4.32}$$

zwei bikomplexe Operatoren gegeben, wobei $D^\dagger$ und D die beiden in (4.20) und (4.21) definierten bikomplexen Differentialoperatoren bezeichen. Nun gelten die folgenden Aussagen:

(a) Alle im Gebiet X definierten, $\mathbb{BC}-$holomorphen Lösungen $w(Z, Z^\dagger)$ der bikomplexen verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (4.30) lassen sich mithilfe von zwei in X definierten, $\mathbb{BC}-$holomorphen Funktionen bzw. Erzeugenden $g(Z)$ und $h(Z)$ wie folgt darstellen:

$$w(Z, Z^\dagger) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \left[(D^\dagger)^\nu g(Z) + D^\nu [h(Z)]^\dagger \right] \frac{(-1)^{n-\nu}}{(Z + Z^\dagger)^{n-\nu}}. \tag{4.33}$$

Hierin bezeichnet $[h(Z)]^\dagger$ die bikomplexe konjugierte Funktion von $h(Z)$.

(b) Umgekehrt stellt (4.33) für alle $\mathbb{BC}-$holomorphen Funktionen $g(Z)$ und $h(Z)$ in X eine Lösung $w(Z, Z^\dagger)$ der bikomplexen verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (4.30) dar.

(c) Ist die Lösung $w(Z, Z^\dagger)$ der bikomplexen verallgemeinerten Bauer–Peschl– Gleichung erster Stufe (4.30) in X vorgegeben, so sind die $(2n+1)-$ten Ableitungen der Erzeugenden eindeutig bestimmt und es gilt:

$$(D^\dagger)^{2n+1} g(Z) = \frac{P^{n+1} w}{(Z + Z^\dagger)^{2n+2}} \qquad \textit{bzw.} \qquad D^{2n+1}[h(Z)]^\dagger = \frac{Q^{n+1} w}{(Z + Z^\dagger)^{2n+2}}.$$

Die Erzeugenden $g(Z)$ und $h(Z)$ selbst sind in diesem Fall nur bis auf ein Polynom vom Grad $2n$ eindeutig bestimmt. Das allgemeinste Erzeugendenpaar folgt gemäß:

$$g_1(Z) = g_2(Z) + \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu Z^\mu,$$
$$h_1(Z) = h_2(Z) - \sum_{\mu=0}^{2n} a_\mu^\dagger (-Z)^\mu, \quad a_\mu \in \mathbb{BC}.$$

(d) *Lässt sich die Lösung der bikomplexen verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (4.30) in X allein durch eine Erzeugende $h(Z)$ über die Relation*

$$w(Z, Z^\dagger) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} D^\nu [h(Z)]^\dagger \frac{(-1)^{n-\nu}}{(Z+Z^\dagger)^{n-\nu}}$$

darstellen, so ist diese Erzeugende eindeutig durch

$$h(Z) = \frac{1}{(2n)!} [P^n w]^\dagger$$

bestimmt. Analog gilt: Wenn die Lösung in X allein durch die Erzeugende $g(Z)$ über die Beziehung

$$w(Z, Z^\dagger) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} (D^\dagger)^\nu g(Z) \frac{(-1)^{n-\nu}}{(Z+Z^\dagger)^{n-\nu}}$$

dargestellt werden kann, so ist diese Erzeugende eindeutig durch

$$g(Z) = \frac{1}{(2n)!} Q^n w$$

bestimmt.

Beweis. Da das Kriterium von Heersink, mit dem man entscheiden kann, ob alle Lösungen mithilfe der Differerentialoperatordarstellung (4.33) erhalten werden können (vgl. [14]), nun nicht zur Verfügung steht, kann man Punkt (a) wie folgt beweisen: Die bikomplexe Zahl $Z = z_1 + jz_2$ lässt sich in ihrer idempotenten Darstellung (4.9) durch

$$Z = \alpha e_1 + \beta e_2$$

angeben, wobei

$$\alpha := z_1 - iz_2 \quad \text{und} \quad \beta := z_1 + iz_2$$

jeweils komplexe Zahlen sind. Laut (4.19) kann eine $\mathbb{BC}-$differenzierbare Funktion $f(Z)$ mithilfe ihrer komplexen idempotenten Komponenten $f_1(\alpha)$ und $f_2(\beta)$ durch

$$f(Z) = f_1(\alpha)e_1 + f_2(\beta)e_2$$

dargestellt werden. Der bikomplexe Differentialoperator (4.20) lässt sich nun ebenfalls durch die idempotente Darstellung

$$D^\dagger = \frac{\partial}{\partial\alpha}e_1 + \frac{\partial}{\partial\beta}e_2 \tag{4.34}$$

ausdrücken und auf die bikomplexe Funktion $f(Z)$ folgendermaßen anwenden (vgl. Seite 144 in [24]):

$$D^\dagger f(Z) = \frac{\partial f_1(\alpha)}{\partial\alpha}e_1 + \frac{\partial f_2(\beta)}{\partial\beta}e_2.$$

Analog kann für die zu Z bikomplex konjugierte Zahl $Z^\dagger = z_1 - jz_2$ die idempotente Darstellung

$$Z^\dagger = \beta e_1 + \alpha e_2$$

angegeben werden. Auf die zu $f(Z)$ bikomplex konjugierte Funktion in ihrer idempotenten Darstellung

$$[f(Z)]^\dagger = f_2(\beta)e_1 + f_1(\alpha)e_2$$

kann dann der bikomplexe Differentialoperator (4.21) in seiner idempotenten Darstellung

$$D = \frac{\partial}{\partial\beta}e_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha}e_2 \tag{4.35}$$

wie folgt angewendet werden:

$$D[f(Z)]^\dagger = \frac{\partial f_2(\beta)}{\partial\beta}e_1 + \frac{\partial f_1(\alpha)}{\partial\alpha}e_2.$$

Betrachtet man nun die verallgemeinerte Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (4.30), stellt die gesuchte bikomplexe Funktion w mithilfe ihrer komplexen idempotenten Komponenten durch

$$w = w_1e_1 + w_2e_2 \tag{4.36}$$

dar und verwendet die idempotenten Darstellungen der bikomplexen Differentialoperatoren (4.34) und (4.35), so erhält man mithilfe der Eigenschaften von e_1 und e_2 bzw. mithilfe der Rechenregeln (4.11) und (4.12) die folgende idempotente Darstellung der verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe:

$$\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha\partial\beta}e_1 + \frac{\partial^2 w_2}{\partial\beta\partial\alpha}e_2\right] - \frac{n(n+1)}{(2z_1)^2}\left[w_1e_1 + w_2e_2\right] = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit die obige Differentialgleichung erfüllt ist, müssen die idempotenten Komponenten der obigen Darstellung gleich Null sein, also:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{n(n+1)}{(\alpha+\beta)^2} w_1 = 0, \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial\beta\partial\alpha} - \frac{n(n+1)}{(\alpha+\beta)^2} w_2 = 0, \tag{4.38}$$

wobei hierin die aus Gleichung (4.10) folgende Relation

$$(2z_1)^2 = (\alpha+\beta)^2$$

verwendet wurde. Die komplexen idempotenten Komponenten w_1 und w_2 müssen also die gewöhnlichen Bauer–Peschl–Gleichungen erster Stufe (4.37) und (4.38) erfüllen. Somit besitzen die idempotenten Komponenten w_1 und w_2 laut Satz 5 die folgenden Lösungsdarstellungen gemäß (3.5):

$$w_1 = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \Big[g_1^{(\nu)}(\alpha) + \overline{h_1^{(\nu)}(\beta)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}, \tag{4.39}$$

$$w_2 = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \Big[g_2^{(\nu)}(\alpha) + \overline{h_2^{(\nu)}(\beta)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}. \tag{4.40}$$

Hierbei bezeichnen $g_1(\alpha), g_2(\alpha), h_1(\beta)$ und $h_2(\beta)$ holomorphe Funktionen. Weiters erhält man mithilfe der obigen Darstellungen von w_1 und w_2 alle Lösungen der Bauer–Peschl–Gleichungen erster Stufe (4.37) und (4.38). Setzt man nun die obigen Lösungsdarstellungen von w_1 und w_2 wieder in die idempotente Darstellung (4.36) von w ein, so erhält man damit auch alle Lösungen w der bikomplexen verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (4.30). Dies soll nun am Beispiel der bikomplexen verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (4.30) mit dem Index $n = 1$

$$D^\dagger D w - \frac{2}{(Z+Z^\dagger)^2} w = 0,$$

demonstriert werden. Diese bikomplexe Differentialgleichung besitzt bei der Betrachtung ihrer idempotenten Darstellung die folgenden zwei idempotenten Komponenten:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{2}{(\alpha+\beta)^2} w_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial\beta\partial\alpha} - \frac{2}{(\alpha+\beta)^2} w_2 = 0.$$

Diese beiden gewöhnlichen Bauer–Peschl–Gleichungen erster Stufe besitzen die oben angegebenen Lösungdarstellungen (4.39) und (4.40) für $n = 1$:

$$w_1 = -\frac{2}{\alpha+\beta} \Big[g_1(\alpha) + \overline{h_1(\beta)} \Big] + g_1'(\alpha) + \overline{h_1'(\beta)},$$

$$w_2 = -\frac{2}{\alpha+\beta} \Big[g_2(\alpha) + \overline{h_2(\beta)} \Big] + g_2'(\alpha) + \overline{h_2'(\beta)}.$$

Die darin vorkommenden Funktionen $g_1(\alpha), g_2(\alpha), h_1(\beta)$ und $h_2(\beta)$ sind holomorph. Setzt man nun w_1 und w_2 gemäß der idempotenten Darstellung (4.36) zur bikomplexen Funktion w zusammen, so ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} w &= w_1 e_1 + w_2 e_2 \\ &= \left(-\frac{2}{\alpha+\beta}\Big[g_1(\alpha) + \overline{h_1(\beta)}\Big] + g_1'(\alpha) + \overline{h_1'(\beta)} \right) e_1 + \\ &\quad + \left(-\frac{2}{\alpha+\beta}\Big[g_2(\alpha) + \overline{h_2(\beta)}\Big] + g_2'(\alpha) + \overline{h_2'(\beta)} \right) e_2. \end{aligned}$$

Sortiert man nun die Terme dieser Relation ein wenig um, so folgt:

$$\begin{aligned} w = &-\frac{2}{\alpha+\beta}\Big[g_1(\alpha)e_1 + \overline{h_2(\beta)}e_2\Big] + g_1'(\alpha)e_1 + \overline{h_2'(\beta)}e_2 - \\ &- \frac{2}{\alpha+\beta}\Big[\overline{h_1(\beta)}e_1 + g_2(\alpha)e_2\Big] + \overline{h_1'(\beta)}e_1 + g_2'(\alpha)e_2. \end{aligned}$$

Definiert man die zwei bikomplexen Funktionen $g(Z)$ und $[h(Z)]^\dagger$ durch

$$\begin{aligned} g(Z) &:= g_1(\alpha)e_1 + \overline{h_2(\beta)}e_2, \\ [h(Z)]^\dagger &:= \overline{h_1(\beta)}e_1 + g_2(\alpha)e_2 \end{aligned}$$

und berücksichtigt die idempotente Darstellung der bikomplexen Differentialoperatoren (4.34) und (4.35), so erhält man die gesuchte Darstellung (4.33) aller Lösungen der verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (4.30) mit dem Index $n = 1$:

$$w = -\frac{2}{\alpha+\beta}g(Z) + D^\dagger g(Z) - \frac{2}{\alpha+\beta}[h(Z)]^\dagger + D[h(Z)]^\dagger.$$

Da die idempotenten Komponenten $g_1(\alpha), g_2(\alpha), h_1(\beta)$ und $h_2(\beta)$ der bikomplexen Funktionen $g(Z)$ und $[h(Z)]^\dagger$ holomorph sind, sind die Funktionen $g(Z)$ und $[h(Z)]^\dagger$ selbst $\mathbb{BC}-$holomorph.
Die Punkte (b)–(d) des Satzes können ganz analog wie jene des Satzes 5 im dritten Kapitel bewiesen werden. □

Die verallgemeinerte Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe im bikomplexen Gebiet $X \subset \mathbb{BC}$, welches $Z + Z^\dagger \neq 0$ erfüllt, ist durch

$$D^\dagger D w + \frac{n-m}{Z+Z^\dagger} D w - \frac{n(m+1)}{(Z+Z^\dagger)^2} w = 0, \quad n, m \in \mathbb{N} \tag{4.41}$$

gegeben. Für die Darstellung der Lösungen $w(Z, Z^\dagger)$ dieser bikomplexen Differentialgleichung (4.41) gilt nun der folgende Satz:

Satz 14. *Bezeichne X ein Gebiet im bikomplexen Raum $\mathbb{BC}$, in dem $Z + Z^\dagger \neq 0$ gilt. Weiters benötigt man die beiden Differentialoperatoren (4.31) und (4.32), die im vorigen Satz definiert wurden. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Alle im Gebiet X definierten, $\mathbb{BC}-$holomorphen Lösungen $w(Z, Z^\dagger)$ der bikomplexen verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (4.41) lassen sich mithilfe von zwei in X definierten, $\mathbb{BC}-$holomorphen Funktionen $g(Z)$ und $h(Z)$ wie folgt darstellen:*

$$w(Z, Z^\dagger) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+m-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \Big[(D^\dagger)^\nu g(Z) + D^\nu [h(Z)]^\dagger\Big] \frac{(-1)^{n-\nu}}{(Z+Z^\dagger)^{n-\nu}}. \tag{4.42}$$

Die Funktion $[h(Z)]^\dagger$ ist dabei die bikomplexe konjugierte Funktion von $h(Z)$.

(b) *Umgekehrt stellt (4.42) für alle $\mathbb{BC}-$holomorphen Funktionen $g(Z)$ und $h(Z)$ in X eine Lösung $w(Z, Z^\dagger)$ der bikomplexen verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (4.41) dar.*

(c) *Ist die Lösung $w(Z, Z^\dagger)$ der bikomplexen verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (4.41) in X vorgegeben, so sind die $(n+m+1)-$ten Ableitungen der Erzeugenden eindeutig bestimmt und es gilt:*

$$(D^\dagger)^{n+m+1} g(Z) = \frac{n! P^{m+1}\Big((Z+Z^\dagger)^{n-m} w\Big)}{m!(Z+Z^\dagger)^{n+m+2}},$$
$$D^{n+m+1}[h(Z)]^\dagger = \frac{m! Q^{n+1} w}{n!(Z+Z^\dagger)^{n+m+2}}.$$

Die Erzeugenden $g(Z)$ und $h(Z)$ selbst sind in diesem Fall nur bis auf ein Polynom vom Grad $n+m$ bestimmt. Das allgemeinste Erzeugendenpaar folgt gemäß:

$$g_1(Z) = g_2(Z) + \sum_{\mu=0}^{m+n} a_\mu Z^\mu,$$
$$h_1(Z) = h_2(Z) + \frac{m!}{n!}(-1)^{n+m+1} \sum_{\mu=0}^{m+n} a_\mu^\dagger (-Z)^\mu, \quad a_\mu \in \mathbb{BC}.$$

(d) *Lässt sich die Lösung der bikomplexen verallgemeinerten Bauer–Peschl–Gleichung zweiter Stufe (4.41) in X allein durch eine Erzeugende $h(Z)$ über die Relation*

$$w(Z, Z^\dagger) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(n+m-\nu)!}{\nu!(m-\nu)!} D^\nu [h(Z)]^\dagger \frac{(-1)^{m-\nu}}{(Z+Z^\dagger)^{n-\nu}}$$

darstellen, so ist diese Erzeugende eindeutig durch

$$h(Z) = \frac{1}{(n+m)!} \Big[P^m\Big((Z+Z^\dagger)^{n-m} w\Big)\Big]^\dagger$$

bestimmt. Analog gilt: Wenn die Lösung in X allein durch die Erzeugende $g(Z)$ über die Beziehung

$$w(Z, Z^\dagger) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(n+m-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} (D^\dagger)^\nu g(Z) \frac{(-1)^{n-\nu}}{(Z+Z^\dagger)^{n-\nu}}$$

dargestellt werden kann, so ist diese Erzeugende eindeutig durch

$$g(Z) = \frac{1}{(n+m)!} Q^n w$$

bestimmt.

Zur Anwendung von bikomplexen pseudoanalytischen Funktionen und ihrer Darstellung mithilfe geeigneter Differentialoperatoren siehe [21].

A. Zusätzliche Beweise

A.1. Eine andere Form der Lösungsdarstellung für die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe

Im einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ mit $z + \bar{z} \neq 0$ wurde für die Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(z+\bar{z})^2} U = 0$$

in Kapitel 3, Satz 5 die Lösungsdarstellung (3.5) als

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}$$

angegeben. Für die beiden nächsten Abschnitte wird jedoch eine andere Form der Lösungsdarstellung benötigt, die zur ursprünglichen Form (3.5) äquivalent ist (vgl. Seite 31 in [8] bzw. [7]):

Behauptung. Es gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \Big[g^{(\nu)}(z) + \overline{h^{(\nu)}(z)} \Big] \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}} = \\ = (z+\bar{z})^{n+1} \left[\frac{\partial^n}{\partial z^n} \left\{ \frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}} \right\} + \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} \left\{ \frac{\overline{h(z)}}{(z+\bar{z})^{n+1}} \right\} \right]. \tag{A.1}$$

Beweis. Dieser wird durch vollständige Induktion geführt. Um den Beweis jedoch ein wenig zu vereinfachen, spaltet man das Ergebnis (A.1) in die folgenden zwei Aussagen auf (vgl. [7]):

$$(z+\bar{z})^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left\{ \frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}} \right\} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(\nu)}(z) \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}, \tag{A.2}$$

$$(z+\bar{z})^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} \left\{ \frac{\overline{h(z)}}{(z+\bar{z})^{n+1}} \right\} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} \overline{h^{(\nu)}(z)} \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{n-\nu}}. \tag{A.3}$$

Nun soll der Induktionsbeweis nur für die erste Aussage (A.2) durchgeführt werden, da die zweite Aussage (A.3) ganz analog bewiesen werden kann. Am Ende können dann beide bewiesenen Aussagen (A.2) und (A.3) wieder zur geforderten Relation (A.1)

zusammengesetzt werden, die dadurch ebenfalls bewiesen ist.
Basis: Zeige (A.2) für $n = 1$:

$$
\begin{aligned}
(z+\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^2}\right\} &= (z+\bar{z})^2\left[\frac{g'(z)(z+\bar{z})^2 - g(z)2(z+\bar{z})}{(z+\bar{z})^4}\right] \\
&= g'(z) - 2\frac{g(z)}{z+\bar{z}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{1} \frac{(2-\nu)!}{\nu!(1-\nu)!} g^{(\nu)}(z) \frac{(-1)^{1-\nu}}{(z+\bar{z})^{1-\nu}}.
\end{aligned}
$$

Die Basis ist also erfüllt.
Annahme: Die Aussage (A.2) gilt für beliebiges n.
Schritt: Nun soll die Relation (A.2) für $n+1$ gezeigt werden. Hierfür muss man zunächst

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} &= \frac{g'(z)(z+\bar{z})^{n+1} - g(z)(n+1)(z+\bar{z})^n}{(z+\bar{z})^{2n+2}} \\
&= \frac{g'(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}} - (n+1)\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+2}}
\end{aligned}
$$

berücksichtigen. Leitet man nun beide Seiten obiger Gleichung $(n+1)$mal nach z ab, so ergibt sich:

$$
\frac{\partial^{n+2}}{\partial z^{n+2}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g'(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} - (n+1)\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+2}}\right\}
$$

bzw.

$$
(n+1)\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+2}}\right\} = \frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g'(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} - \frac{\partial^{n+2}}{\partial z^{n+2}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}. \tag{A.4}
$$

Nun können die zwei Terme auf der rechten Seite obiger Gleichung weiter umgeformt werden. In den ersten Term auf der rechten Seite von (A.4) setzt man nun die durch $(z+\bar{z})^{n+1}$ dividierte Induktionsannahme (A.2) mit $g'(z)$ statt $g(z)$ ein und erhält:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g'(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^{n}}{\partial z^{n}}\left\{\frac{g'(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!} g^{(\nu+1)}(z) \frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}\right\} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}(-1)^{n-\nu} \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{g^{(\nu+1)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Der zweite Term auf der rechten Seite von (A.4) wird mithilfe der durch $(z+\bar{z})^{n+1}$

dividierten Induktionsannahme (A.2) zu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+2}}{\partial z^{n+2}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}\right\} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}g^{(\nu)}(z)\frac{(-1)^{n-\nu}}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}\right\} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!}(-1)^{n-\nu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{g^{(\nu)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}\right\}.\end{aligned}$$

Diese zwei neuen Terme wieder in (A.4) rückeingesetzt und die resultierende Gleichung durch $(n+1)$ dividiert, liefert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+2}}\right\} = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!(n+1)}(-1)^{n-\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{g^{(\nu+1)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}\right\}- \\ -\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!(n+1)}(-1)^{n-\nu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{g^{(\nu)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}\right\}.\end{aligned} \tag{A.5}$$

Nun sollen die oben vorkommenden partiellen Ableitungen extra berechnet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{g^{(\nu+1)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}\right\} &= \frac{g^{(\nu+2)}(z)(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}-g^{(\nu+1)}(z)(2n+1-\nu)(z+\bar{z})^{2n-\nu}}{(z+\bar{z})^{4n+2-2\nu}} \\ &= \frac{g^{(\nu+2)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}-(2n+1-\nu)\frac{g^{(\nu+1)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+2-\nu}}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{g^{(\nu)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}\right\} &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{g^{(\nu+1)}(z)(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}-g^{(\nu)}(z)(2n+1-\nu)(z+\bar{z})^{2n-\nu}}{(z+\bar{z})^{4n+2-2\nu}}\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{g^{(\nu+1)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}-(2n+1-\nu)\frac{g^{(\nu)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+2-\nu}}\right\} \\ &= \frac{g^{(\nu+2)}(z)(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}{(z+\bar{z})^{4n+2-2\nu}}-\frac{g^{(\nu+1)}(z)(2n+1-\nu)(z+\bar{z})^{2n-\nu}}{(z+\bar{z})^{4n+2-2\nu}}- \\ &\quad -(2n+1-\nu)\frac{g^{(\nu+1)}(z)(z+\bar{z})^{2n+2-\nu}}{(z+\bar{z})^{4n+4-2\nu}}+ \\ &\quad +(2n+1-\nu)\frac{g^{(\nu)}(z)(2n+2-\nu)(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}{(z+\bar{z})^{4n+4-2\nu}} \\ &= \frac{g^{(\nu+2)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}-2(2n+1-\nu)\frac{g^{(\nu+1)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+2-\nu}}+ \\ &\quad +(2n+1-\nu)(2n+2-\nu)\frac{g^{(\nu)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+3-\nu}}.\end{aligned}$$

Diese partiellen Ableitungen wiederum in (A.5) rückeingesetzt, ergibt die Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+2}}\right\} = &\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!(n+1)}(-1)^{n-\nu}\Bigg[\frac{g^{(\nu+2)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}-\\ &-(2n+1-\nu)\frac{g^{(\nu+1)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+2-\nu}}\Bigg]-\\ &-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu)!}{\nu!(n-\nu)!(n+1)}(-1)^{n-\nu}\Bigg[\frac{g^{(\nu+2)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+1-\nu}}-\\ &-2(2n+1-\nu)\frac{g^{(\nu+1)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+2-\nu}}+\\ &+(2n+1-\nu)(2n+2-\nu)\frac{g^{(\nu)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+3-\nu}}\Bigg]\\ =&\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu+1)!}{\nu!(n-\nu)!(n+1)}(-1)^{n-\nu}\frac{g^{(\nu+1)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+2-\nu}}-\\ &-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu)!(n+1)}(-1)^{n-\nu}\frac{g^{(\nu)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+3-\nu}}.\end{aligned}$$

Durch die Indextransformation $\hat{\nu}=\nu+1$ in der ersten Summe erhält man dann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+2}}\right\} = &\sum_{\hat{\nu}=1}^{n+1}\frac{(2n-\hat{\nu}+2)!}{(\hat{\nu}-1)!(n-\hat{\nu}+1)!(n+1)}(-1)^{n-\hat{\nu}+1}\frac{g^{(\hat{\nu})}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+3-\hat{\nu}}}\\ &-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2n-\nu+2)!}{\nu!(n-\nu)!(n+1)}(-1)^{n-\nu}\frac{g^{(\nu)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+3-\nu}}.\end{aligned}$$

Die Umbenennung von $\hat{\nu}$ zu ν und das Herausziehen der Terme für $\nu=0$ und $\nu=n+1$ liefert folgendes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+2}}\right\}= &-\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}(-1)^{n}\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{2n+3}}+\frac{g^{(n+1)}(z)}{(z+\bar{z})^{n+2}}+\\ &+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(2n-\nu+2)!}{(\nu-1)!(n-\nu)!(n+1)}(-1)^{n-\nu+1}\left[\frac{1}{n-\nu+1}+\frac{1}{\nu}\right]\frac{g^{(\nu)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+3-\nu}}.\end{aligned}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer lautet nun:

$$\frac{1}{n-\nu+1}+\frac{1}{\nu}=\frac{\nu+n-\nu+1}{\nu(n-\nu+1)}=\frac{n+1}{\nu(n-\nu+1)}.$$

Setzt man dies wieder in die vorletzte Gleichung ein und fasst alle darin vorkommenden Terme wieder zu einer einzigen Summe zusammen, so bekommt man die Relation:

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+2}}\right\}=\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{(\nu)!(n-\nu+1)!}(-1)^{n-\nu+1}\frac{g^{(\nu)}(z)}{(z+\bar{z})^{2n+3-\nu}}.$$

Multipliziert man nun beide Seiten obiger Gleichung mit $(z+\bar{z})^{n+2}$, so erhält man die Relation (A.2) mit $n+1$ statt n:

$$(z+\bar{z})^{n+2}\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left\{\frac{g(z)}{(z+\bar{z})^{n+2}}\right\}=\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{(2n-\nu+2)!}{(\nu)!(n-\nu+1)!}g^{(\nu)}(z)\frac{(-1)^{n-\nu+1}}{(z+\bar{z})^{n+1-\nu}}.$$

Somit ist der Induktionsschritt gezeigt.

Nach analogem Beweis der Aussage (A.3) ist die Behauptung (A.1) somit insgesamt bewiesen (vgl. [7]). □

A.2. Die Erzeugenden der Funktion $U^*(z,\bar{z})$

Im Beweis von Punkt (c) des Satzes 5 wurde folgende Aussage für die spezielle Lösung

$$U^*(z,\bar{z})=(z+\bar{z})^{n+1}$$

der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (3.30)

$$\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}=\frac{2(n+1)}{z+\bar{z}},$$

die laut Voraussetzung ebenfalls eine Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) ist, getätigt:

Behauptung. Die Erzeugenden der speziellen Lösung $U^*(z,\bar{z})$ sind durch

$$\begin{aligned} g^*(z)&=a_{2n+1}z^{2n+1}\\ h^*(z)&=b_{2n+1}z^{2n+1}\end{aligned}\qquad\text{mit}\qquad a_{2n+1}=b_{2n+1}=\frac{1}{n!}$$

gegeben.

Beweis. Zunächst gelten die folgenden zwei Relationen:

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}=\frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\,\bar{z}^{j},\qquad\text{(A.6)}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}=\frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}z^{j}\,\bar{z}^{2n+1-j}\qquad\text{(A.7)}$$

für $k=0,\dots,n$ mit $n\in\mathbb{N}$. Diese können durch vollständige Induktion bewiesen werden, wie nun anhand von (A.6) gezeigt werden soll:

Basis: Mit $k=1$ betrachtet man zunächst die linke Seite von (A.6):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}&=\frac{(2n+1)z^{2n}(z+\bar{z})^{n+1}-z^{2n+1}(n+1)(z+\bar{z})^{n}}{(z+\bar{z})^{2n+2}}\\&=\frac{(2n+1)z^{2n}(z+\bar{z})-z^{2n+1}(n+1)}{(z+\bar{z})^{n+2}}\\&=\frac{(2n+1)z^{2n+1}+(2n+1)z^{2n}\bar{z}-(n+1)z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+2}}\\&=\frac{nz^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+2}}+\frac{(2n+1)z^{2n}\bar{z}}{(z+\bar{z})^{n+2}}.\end{aligned}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis nun mit der rechten Seite von (A.6)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2}}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-1)!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j} = \\
&= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2}}\left[\binom{1}{0}\frac{n!(2n+1)!}{(n-1)!(2n+1)!}z^{2n+1} + \binom{1}{1}\frac{(n-1)!(2n+1)!}{(n-1)!(2n)!}z^{2n}\bar{z}\right] \\
&= \frac{nz^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+2}} + \frac{(2n+1)z^{2n}\bar{z}}{(z+\bar{z})^{n+2}},
\end{aligned}$$

so ist die Äquivalenz beider Seiten gezeigt und die Induktionsbasis gesichert.
<u>Annamhme</u>: Die Relation (A.6) gilt für k.
<u>Schritt</u>: Zum Beweis der Relation (A.6) für $k+1$, geht man von deren linken Seite aus:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^{k}}{\partial z^{k}}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \\
&\overset{(A.6)}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j}\right\} \\
&= \frac{-(n+1+k)(z+\bar{z})^{n+k}}{(z+\bar{z})^{2n+2+2k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j} + \\
&\quad + \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}(2n+1-j)z^{2n-j}\bar{z}^{j} \\
&= -\frac{(n+1+k)}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j} + \\
&\quad + \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n-j)!}z^{2n-j}\bar{z}^{j} \\
&= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n-j)!}z^{2n-j}\bar{z}^{j}\left[-\frac{(n+1+k)z}{(z+\bar{z})(2n+1-j)} + 1\right].
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die eckige Klammer näher, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
-\frac{(n+1+k)z}{(z+\bar{z})(2n+1-j)} + 1 &= \frac{-(n+1+k)z + (z+\bar{z})(2n+1-j)}{(z+\bar{z})(2n+1-j)} \\
&= \frac{z(-n-1-k+2n+1-j) + \bar{z}(2n+1-j)}{(z+\bar{z})(2n+1-j)} \\
&= \frac{z(n-k-j)}{(z+\bar{z})(2n+1-j)} + \frac{\bar{z}}{(z+\bar{z})}.
\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck wieder an seine ursprüngliche Stelle rückeingesetzt und das Resultat in zwei Summen aufgespalten, liefert folgendes:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \\
&= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n-j)!}z^{2n-j}\bar{z}^{j}\frac{z(n-k-j)}{(z+\bar{z})(2n+1-j)}+ \\
&\quad + \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n-j)!}z^{2n-j}\bar{z}^{j}\frac{\bar{z}}{(z+\bar{z})} \\
&= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!(n-k-j)}{(n-k)!(2n+1-j)!}z^{2n-j+1}\bar{z}^{j}+ \\
&\quad + \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n-j)!}z^{2n-j}\bar{z}^{j+1}.
\end{aligned}
$$

Mithilfe der Indextransformation $\hat{j} = j + 1$ in der zweiten Summe folgt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \\
&= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!(n-k-j)}{(n-k)!(2n+1-j)!}z^{2n-j+1}\bar{z}^{j}+ \\
&\quad + \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\sum_{\hat{j}=1}^{k+1}\binom{k}{\hat{j}-1}\frac{(n-\hat{j}+1)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-\hat{j})!}z^{2n-\hat{j}+1}\bar{z}^{\hat{j}}.
\end{aligned}
$$

Die Umbenennung von $\hat{j}$ zu j, das Herausziehen der Terme für $j = 0$ und $j = k + 1$ und das Einsetzen der Definition des Binomialkoeffizienten ergibt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \\
&= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\frac{n!}{(n-k-1)!}z^{2n+1} + \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\frac{(2n+1)!}{(2n-k)!}z^{2n-k}\bar{z}^{k+1}+ \\
&\quad + \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{(n-j)!(2n+1)!(n-k-j)}{(n-k)!(2n+1-j)!}+\right. \\
&\quad \left. + \frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!}\frac{(n-j+1)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}\right]z^{2n-j+1}\bar{z}^{j}.
\end{aligned}
$$

Die eckige Klammer kann nun umgeschrieben werden zu:

$$
\begin{aligned}
&\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{(n-j)!(2n+1)!(n-k-j)}{(n-k)!(2n+1-j)!}+\frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!}\frac{(n-j+1)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}=\\
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}\left[\frac{n-k-j}{j}+\frac{n-j+1}{k-j+1}\right]\\
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}\left[\frac{(n-k-j)(k-j+1)+j(n-j+1)}{j(k-j+1)}\right]\\
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}\left[\frac{(1-j)(n-k-j+j)+k(n-k-j)+jn}{j(k-j+1)}\right]\\
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}\left[\frac{(1-j)(n-k)+k(n-k)-jk+jn}{j(k-j+1)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}\left[\frac{(n-k)(1-j+k+j)}{j(k-j+1)}\right]\\
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k)!(2n+1-j)!}\left[\frac{(n-k)(k+1)}{j(k-j+1)}\right]\\
&=\frac{(k+1)!}{j!(k-j+1)!}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k-1)!(2n+1-j)!}\\
&=\binom{k+1}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k-1)!(2n+1-j)!}.
\end{aligned}
$$

Setzt man dieses Ergebnis nun wieder an die ursprüngliche Stelle ein und zieht die Terme für $j=0$ und $j=k+1$ wieder unter das Summenzeichen hinein, so erhält man die Relation (A.6) mit $k+1$ statt k:

$$
\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}=\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(n-k-1)!(2n+1-j)!}z^{2n-j+1}\bar{z}^{j}.
$$

Somit ist der Induktionsschritt gezeigt. Analog kann die Relation (A.7) bewiesen werden.
Für den weiteren Verlauf des Beweises bezüglich der Gestalt der Erzeugenden aus der Behauptung, setzt man in den beiden Gleichungen (A.6) und (A.7) $k=n$, also

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{n}}{\partial z^{n}}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}&=\frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j},\\
\frac{\partial^{n}}{\partial \bar{z}^{n}}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}&=\frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(2n+1-j)!}z^{j}\bar{z}^{2n+1-j}
\end{aligned}
$$

und addiert diese beiden Relationen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}+\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}&=\\ =\frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}&\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j}+\right.\\ &\left.+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(2n+1-j)!}z^{j}\bar{z}^{2n+1-j}\right].\end{aligned}$$

Nun führt man in der zweiten Summe die Indextransformation $\hat{j}=2n+1-j$ durch und erhält:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}+\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}&=\\ =\frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}&\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j}+\right.\\ &\left.+\sum_{\hat{j}=n+1}^{2n+1}\binom{n}{2n+1-\hat{j}}\frac{(\hat{j}-n-1)!(2n+1)!}{\hat{j}!}z^{2n+1-\hat{j}}\bar{z}^{\hat{j}}\right].\end{aligned}\tag{A.8}$$

Da nach der Umbenennung von $\hat{j}$ zu j die Relation

$$\begin{aligned}\binom{n}{j}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(2n+1-j)!}&=\frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!(2n+1)!}{(2n+1-j)!}\\ &=\frac{n!(2n+1)!}{j!(2n+1-j)!}\\ &=\frac{n!}{(2n+1-j)!(j-1-n)!}\frac{(j-1-n)!(2n+1)!}{j!}\\ &=\binom{n}{2n+1-j}\frac{(j-1-n)!(2n+1)!}{j!}\end{aligned}\tag{A.9}$$

gilt, können die zwei Summen aus (A.8) zu einer einzigen Summe mithilfe von (A.9) zusammengesetzt werden:

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}+\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}=\frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\sum_{j=0}^{2n+1}\frac{n!(2n+1)!}{j!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j}.$$

Mithilfe des binomischen Lehrsatzes

$$(z+\bar{z})^{2n+1}=\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j}=\sum_{j=0}^{2n+1}\frac{(2n+1)!}{j!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j}$$

folgt somit die wichtige Gleichung:

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}+\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}=\frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}n!(z+\bar{z})^{2n+1}=n!. \tag{A.10}$$

Laut Abschnitt A.1 kann eine Lösung $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) im einfach zusammenhängenden Gebiet $D\subset\mathbb{C}$ ebenfalls durch die Beziehung (A.1)

$$U(z,\bar{z})=(z+\bar{z})^{n+1}\left[\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{g^*(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}+\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\overline{h^*(z)}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}\right]$$

dargestellt werden, wobei hierin

$$\begin{aligned} g^*(z)&=a_{2n+1}z^{2n+1}=\frac{1}{n!}z^{2n+1},\\ h^*(z)&=b_{2n+1}z^{2n+1}=\frac{1}{n!}z^{2n+1}\end{aligned}$$

die Erzeugenden aus der Behauptung bezeichnen sollen, also:

$$\begin{aligned} U(z,\bar{z})&=(z+\bar{z})^{n+1}\left[\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{n!}\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}+\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{1}{n!}\frac{\bar{z}^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}\right]\\ &=(z+\bar{z})^{n+1}\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}+\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}\right]\\ &\overset{(A.10)}{=}(z+\bar{z})^{n+1}\frac{1}{n!}n!\\ &=(z+\bar{z})^{n+1}\\ &=U^*(z,\bar{z}).\end{aligned}$$

Man sieht folglich, dass die Erzeugenden $g^*(z)$ und $h^*(z)$ aus der Behauptung tatsächlich die spezielle Lösung $U^*(z,\bar{z})=(z+\bar{z})^{n+1}$ erzeugen. □

A.3. Die Erzeugenden der Funktion $U^{**}(z,\bar{z})$

Der Beweis von Satz (5) (c) benötigt für die spezielle Lösung

$$U^{**}(z,\bar{z})=(z-\bar{z})(z+\bar{z})^{n+1}$$

der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (3.30)

$$\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}=\frac{2(n+1)}{z+\bar{z}},$$

die laut Voraussetzung ebenfalls eine Lösung der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) ist, die Verifikation der folgenden Aussage:

Behauptung. Die Erzeugenden der speziellen Lösung $U^{**}(z,\bar{z})$ sind durch

$$\begin{aligned} g^{**}(z) &= a_{2n+2} z^{2n+2} \\ h^{**}(z) &= b_{2n+2} z^{2n+2} \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad a_{2n+2} = \frac{1}{(n+1)!},\ b_{2n+2} = -\frac{1}{(n+1)!}$$

gegeben.

Beweis. Man benötigt für den späteren Verlauf des Beweises die folgenden beiden Relationen:

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!} z^{2n+2-j}\bar{z}^j, \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+1}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!} z^{j}\bar{z}^{2n+2-j} \tag{A.12}$$

für $k = 0, \ldots, n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Da beide völlig analog mithilfe der vollständigen Induktion bewiesen werden können, soll dies hier nur für die Relation (A.11) vorgezeigt werden:
Basis: Für $k = 1$ berechnet man die linke und die rechte Seite von (A.11) getrennt voneinander, um deren Äquivalenz zu demonstrieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} &= \frac{(2n+2)z^{2n+1}(z+\bar{z})^{n+1} - z^{2n+2}(n+1)(z+\bar{z})^n}{(z+\bar{z})^{2n+2}} \\ &= \frac{(2n+2)z^{2n+1}(z+\bar{z}) - z^{2n+2}(n+1)}{(z+\bar{z})^{n+2}} \\ &= \frac{(2n+2)z^{2n+2} + (2n+2)z^{2n+1}\bar{z} - (n+1)z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+2}} \\ &= \frac{(n+1)z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+2}} + \frac{(2n+2)z^{2n+1}\bar{z}}{(z+\bar{z})^{n+2}}, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2}} \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} \frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{n!(2n+2-j)!} z^{2n+2-j}\bar{z}^j = \\ &= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2}} \left[\binom{1}{0} \frac{(n+1)!(2n+2)!}{n!(2n+2)!} z^{2n+2} + \binom{1}{1} \frac{n!(2n+2)!}{n!(2n+1)!} z^{2n+1}\bar{z}\right] \\ &= \frac{(n+1)z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+2}} + \frac{(2n+2)z^{2n+1}\bar{z}}{(z+\bar{z})^{n+2}}. \end{aligned}$$

Somit ist die Basis gezeigt.
Annahme: Die Aussage (A.11) gilt für beliebiges k.

Schritt: Man startet bei der linken Seite von (A.11) mit $k+1$ statt k:

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} =$$

$$\overset{(A.11)}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\bar{z}^j\right\}$$

$$= \frac{-(n+1+k)(z+\bar{z})^{n+k}}{(z+\bar{z})^{2n+2+2k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\bar{z}^j +$$

$$+ \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}(2n+2-j)z^{2n+1-j}\bar{z}^j$$

$$= -\frac{(n+1+k)}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\bar{z}^j +$$

$$+ \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^j$$

$$= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^j\left[\frac{-(n+1+k)z}{(z+\bar{z})(2n+2-j)}+1\right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann nun umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned}\frac{-(n+1+k)z}{(z+\bar{z})(2n+2-j)}+1 &= \frac{-(n+1+k)z+(z+\bar{z})(2n+2-j)}{(z+\bar{z})(2n+2-j)}\\ &= \frac{z(-n-1-k+2n+2-j)+\bar{z}(2n+2-j)}{(z+\bar{z})(2n+2-j)}\\ &= \frac{z(n-k-j+1)}{(z+\bar{z})(2n+2-j)}+\frac{\bar{z}}{(z+\bar{z})}.\end{aligned}$$

Dies nun wieder an die ursprüngliche Stelle rückeingesetzt und das Resultat in zwei Summen aufgespalten, liefert folgende Gleichung:

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^j\frac{z(n-k-j+1)}{(z+\bar{z})(2n+2-j)} +$$

$$+ \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+1+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^j\frac{\bar{z}}{(z+\bar{z})}$$

$$= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!(n-k-j+1)}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\bar{z}^j +$$

$$+ \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+1-j)!}z^{2n+1-j}\bar{z}^{j+1}.$$

Führt man in der zweiten Summe die Indextransformation $\hat{j} = j + 1$ durch, so erhält man:

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}} \left\{ \frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}} \right\} =$$
$$= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(n+1-j)!(2n+2)!(n-k-j+1)}{(n+1-k)!(2n+2-j)!} z^{2n+2-j} \bar{z}^{j} +$$
$$+ \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}} \sum_{\hat{j}=1}^{k+1} \binom{k}{\hat{j}-1} \frac{(n+2-\hat{j})!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-\hat{j})!} z^{2n+2-\hat{j}} \bar{z}^{\hat{j}}.$$

Die Umbenennung von $\hat{j}$ zu j, das Herausziehen der Terme für $j = 0$ und $j = k + 1$ und das Einsetzen der Definition des Binomialkoeffizienten ergibt:

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}} \left\{ \frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}} \right\} =$$
$$= \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}} \frac{(n+1)!}{(n-k)!} z^{2n+2} + \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}} \frac{(2n+2)!}{(2n+1-k)!} z^{2n+1-k} \bar{z}^{k+1} +$$
$$+ \frac{1}{(z+\bar{z})^{n+2+k}} \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{k!}{j!(k-j)!} \frac{(n+1-j)!(2n+2)!(n-k-j+1)}{(n+1-k)!(2n+2-j)!} + \right.$$
$$\left. + \frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!} \frac{(n+2-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!} \right] z^{2n+2-j} \bar{z}^{j}.$$

Die darin vorkommende eckige Klammer lautet nun:

$$
\begin{aligned}
&\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!(n-k-j+1)}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}+\\
&+\frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!}\frac{(n+2-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}=\\
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}\left[\frac{n-k-j+1}{j}+\frac{n+2-j}{k-j+1}\right]\\
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}\cdot\\
&\quad\cdot\left[\frac{(n-k-j+1)(k-j+1)+j(n+2-j)}{j(k-j+1)}\right]\\
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}\cdot\\
&\quad\cdot\left[\frac{nk-nj+n-k^2+kj-k-kj+j^2-j+k-j+1+nj+2j-j^2}{j(k-j+1)}\right]\\
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}\left[\frac{nk+n-k^2+1}{j(k-j+1)}\right]\\
&=\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n+1-k)!(2n+2-j)!}\frac{(k+1)(n-k+1)}{j(k-j+1)}\\
&=\frac{(k+1)!}{j!(k-j+1)!}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n-k)!(2n+2-j)!}
\end{aligned}
$$

Setzt man dieses Ergebnis nun wieder an die ursprüngliche Stelle ein und zieht die Terme für $j=0$ und $j=k+1$ wieder unter das Summenzeichen hinein, so erhält man die Relation (A.11) mit $k+1$ statt k:

$$
\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}=\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(n-k)!(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\bar{z}^{j}.
$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. Die zweite Relation (A.12) kann analog bewiesen werden.

Um nun die spezielle Gestalt der Erzeugenden aus der Behauptung zu zeigen, setzt man zunächst in den beiden Gleichungen (A.11) und (A.12) $k=n$, also

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}&=\frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\bar{z}^{j},\\
\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}&=\frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(2n+2-j)!}z^{j}\bar{z}^{2n+2-j}
\end{aligned}
$$

und subtrahiert dann diese beiden Relationen voneinander:

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} - \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} =$$
$$= \frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\bar{z}^j - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(2n+2-j)!}z^j\bar{z}^{2n+2-j}\right].$$

Die Indextransformation $\hat{j} = 2n+2-j$ in der zweiten Summe führt auf folgendes:

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} - \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} =$$
$$= \frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\bar{z}^j - \right.$$
$$\left. - \sum_{\hat{j}=n+2}^{2n+2}\binom{n}{2n+2-\hat{j}}\frac{(\hat{j}-n-1)!(2n+2)!}{\hat{j}!}z^{2n+2-\hat{j}}\bar{z}^{\hat{j}}\right].$$

Durch die Umbenennung von $\hat{j}$ zu j und mithilfe der Definition des Binomialkoeffizienten ergibt sich:

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} - \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} =$$
$$= \frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n+1-j)!(2n+2)!}{(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\bar{z}^j - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=n+2}^{2n+2}\frac{n!}{(2n+2-j)!(j-n-2)!}\frac{(j-n-1)!(2n+2)!}{j!}z^{2n+2-j}\bar{z}^j\right]$$
$$= \frac{1}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}\frac{(n-j+1)(2n+2)!}{(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\bar{z}^j - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=n+2}^{2n+2}\frac{n!}{(2n+2-j)!}\frac{(j-n-1)(2n+2)!}{j!}z^{2n+2-j}\bar{z}^j\right].$$

Nun gilt die Beziehung

$$n!(2n+2)! = n!(2n+1)!(2n+2) = n!(2n+1)!2(n+1) = (2n+1)!2(n+1)!$$

Diese in die vorletzte Gleichung eingesetzt, liefert:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} - \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \\
&= \frac{2(n+1)!}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{(n-j+1)(2n+1)!}{j!(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\,\bar{z}^j - \right.\\
&\quad\left. - \sum_{j=n+2}^{2n+2}\frac{-(n-j+1)(2n+1)!}{j!(2n+2-j)}z^{2n+2-j}\,\bar{z}^j\right]\\
&= \frac{2(n+1)!}{(z+\bar{z})^{2n+1}}\sum_{j=0}^{2n+2}\frac{(n-j+1)(2n+1)!}{j!(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\,\bar{z}^j,
\end{aligned}$$

da der Term für $j = n+1$ Null ist. Nun gilt, dass

$$2\sum_{j=0}^{2n+2}\frac{(n-j+1)(2n+1)!}{j!(2n+2-j)!}z^{2n+2-j}\,\bar{z}^j = (z+\bar{z})^{2n+1}(z-\bar{z}) \tag{A.13}$$

ist.

Beweis der Gleichung (A.13): Mit dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$\begin{aligned}
(z+\bar{z})^{2n+1}(z-\bar{z}) &= \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}z^{2n+1-j}\,\bar{z}^j(z-\bar{z})\\
&= \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}z^{2n+2-j}\,\bar{z}^j - \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}z^{2n+1-j}\,\bar{z}^{j+1}.
\end{aligned}$$

Führt man in der zweiten Summe die Indextransformation $\hat{j} = j+1$ durch, so ergibt sich die Gleichung:

$$(z+\bar{z})^{2n+1}(z-\bar{z}) = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}z^{2n+2-j}\,\bar{z}^j - \sum_{\hat{j}=1}^{2n+2}\binom{2n+1}{\hat{j}-1}z^{2n+2-\hat{j}}\,\bar{z}^{\hat{j}}.$$

Nun bezeichnet man $\hat{j}$ mit j und zieht die Terme für $j = 0$ und $j = 2n+2$ aus den Summen heraus:

$$(z+\bar{z})^{2n+1}(z-\bar{z}) = z^{2n+2} - \bar{z}^{2n+2} + \sum_{j=1}^{2n+1}\left[\binom{2n+1}{j} - \binom{2n+1}{j-1}\right]z^{2n+2-j}\,\bar{z}^j.$$

Die eckige Klammer lautet:

$$\begin{aligned}\binom{2n+1}{j} - \binom{2n+1}{j-1} &= \frac{(2n+1)!}{j!(2n+1-j)!} - \frac{(2n+1)!}{(j-1)!(2n+2-j)!} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(j-1)!(2n+1-j)!}\left[\frac{1}{j} - \frac{1}{2n+2-j}\right] \\ &= \frac{(2n+1)!}{(j-1)!(2n+1-j)!}\frac{2(n+1-j)}{j(2n+2-j)} \\ &= \frac{(2n+1)!2(n+1-j)}{j!(2n+2-j)!}.\end{aligned}$$

Also folgt die Beziehung:

$$\begin{aligned}(z+\bar{z})^{2n+1}(z-\bar{z}) &= z^{2n+2} - \bar{z}^{2n+2} + \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!2(n+1-j)}{j!(2n+2-j)!} z^{2n+2-j}\bar{z}^j \\ &= 2\sum_{j=0}^{2n+2} \frac{(2n+1)!(n+1-j)}{j!(2n+2-j)!} z^{2n+2-j}\bar{z}^j.\end{aligned}$$

Somit ist die Gültigkeit der Gleichung (A.13) gezeigt.

Schließlich folgt damit nun die wichtige Relation:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} - \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(z+\bar{z})^{2n+1}} 2\sum_{j=0}^{2n+2} \frac{(n-j+1)(2n+1)!}{j!(2n+2-j)!} z^{2n+2-j}\bar{z}^j \\ &\overset{(A.13)}{=} \frac{(n+1)!}{(z+\bar{z})^{2n+1}}(z+\bar{z})^{2n+1}(z-\bar{z}) \\ &= (n+1)!(z-\bar{z}).\end{aligned} \tag{A.14}$$

Laut Formel (A.1) in Abschnitt A.1 kann eine Lösung $U(z,\bar{z})$ der Bauer–Peschl–Gleichung erster Stufe (3.2) durch die Lösungsdarstellung (A.1)

$$U(z,\bar{z}) = (z+\bar{z})^{n+1}\left[\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{g^{**}(z)}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\} + \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\overline{h^{**}(z)}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}\right]$$

angegeben werden, wobei hierin

$$\begin{aligned}g^{**}(z) &= a_{2n+2}z^{2n+2} = \frac{1}{(n+1)!}z^{2n+2}, \\ h^{**}(z) &= b_{2n+2}z^{2n+2} = -\frac{1}{(n+1)!}z^{2n+2}\end{aligned}$$

die Erzeugenden aus der Behauptung bezeichnen sollen, also:

$$\begin{aligned}
U(z,\bar{z}) &= (z+\bar{z})^{n+1}\left[\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{(n+1)!}\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}+\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{-\frac{1}{(n+1)!}\frac{\bar{z}^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}\right]\\
&= (z+\bar{z})^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{z^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}-\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}\left\{\frac{\bar{z}^{2n+2}}{(z+\bar{z})^{n+1}}\right\}\right]\\
&\overset{(A.14)}{=} (z+\bar{z})^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}(n+1)!(z-\bar{z})\\
&= (z+\bar{z})^{n+1}(z-\bar{z})\\
&= U^{**}(z,\bar{z}).
\end{aligned}$$

Man sieht hieran, dass die Erzeugenden $g^{**}(z)$ und $h^{**}(z)$ aus der Behauptung die spezielle Lösung $U^{**}(z,\bar{z}) = (z-\bar{z})(z+\bar{z})^{n+1}$ tatsächlich erzeugen. □

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, K.W.: Über eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit zwei unabhängigen komplexen Variablen. In: *Monatshefte für Mathematik* 70 (1966), S. 385–418

[2] Bauer, K.W.: Über Lösungen der elliptischen Differentialgleichung $(1 \pm z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \lambda w = 0$. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 221 (1966), S. 48–84

[3] Bauer, K.W.: Über Differentialgleichungen der Form $F(z, \bar{z}) w_{z\bar{z}} - n(n+1)w = 0$. In: *Monatshefte für Mathematik* 75 (1971), S. 1–13

[4] Bauer, K.W.: Differentialoperatoren bei partiellen Differentialgleichungen. In: *Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung: Bonn* (1973), Nr. 77, S. 7–17

[5] Bauer, K.W.: Polynomoperatoren bei Differentialgleichungen der Form $w_{z\bar{z}} + Aw_{\bar{z}} + Bw = 0$. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 283/284 (1976), S. 364–369

[6] Bauer, K.W.: *Berichte der Mathematisch-Statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz*. Bd. 121: *Differentialoperatoren bei verallgemeinerten Euler–Gleichungen*. Forschungszentrum Graz, 1979

[7] Bauer, K.W. ; Jank, G.: Differentialoperatoren bei einer inhomogenen elliptischen Differentialgleichung. In: *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste* 3 (1971), S. 140–168

[8] Bauer, K.W. ; Ruscheweyh, S.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 791: *Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications*. Berlin : Springer, 1980

[9] Berglez, P.: Über Lösungsdarstellungen bei partiellen Differentialgleichungen durch Differentialoperatoren. In: *Mathematical Research* 53 (1989), S. 24–38

[10] Berglez, P.: On Some Classes of Bicomplex Pseudoanalytic Functions. In: *Progress in Analysis and Its Applications: Proceedings of the 7th International Isaac Congress*, World Scientific, 2010, S. 81–88

[11] Florian, H. ; Püngel, J. ; Tutschke, W.: *Berichte der Mathematisch-Statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz*. Bd. 258: *Complex Methods for Linear Elliptic Equations in Formally Hyperbolic Canonical Form*. Forschungsgesellschaft Joanneum, 1985

[12] Gilbert, R.P.: *Mathematics in Science and Engineering.* Bd. 54: *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations.* New York, London : Academic Press, 1969

[13] Hazewinkel, M.: *Encyclopedia of Mathematics: C.* Dordrecht : Reidel, 1988

[14] Heersink, R.: Characterization of Certain Differential Operators in the Solution of Linear Partial Differential Equations. In: *Glasgow Mathematical Journal* 17 (1976), S. 83–88

[15] Heersink, R.: *Berichte der Mathematisch-Statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz.* Bd. 67: *Über Lösungsdarstellungen und funktionentheoretische Methoden bei elliptischen Differentialgleichungen.* Forschungszentrum Graz, 1976

[16] Henrici, P.: A Survey of I.N. Vekua's Theory of Elliptic Partial Differential Equations with Analytic Coefficients. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 8 (1957), S. 169–203

[17] Jeffrey, A.: *Applied Partial Differential Equations: An Introduction.* San Diego : Academic Press, 2003

[18] Leitenmüller, M.: *Zur Bestimmung der Riemann–Funktion*, TU Graz, Diplomarbeit, 1994

[19] López, G.: *Partial Differential Equations of First Order and Their Applications to Physics.* Singapore : World Scientific Publishing, 1999

[20] Luna-Elizarrarás, M.E. ; Shapiro, M. ; Struppa, D.C. ; Vajiac, A.: Bicomplex Numbers and their Elementary Functions. In: *CUBO A Mathematical Journal* 14 (2012), Nr. 2, S. 61–80

[21] Luong, T.T.: *On a Class of Pseudoanalytic Functions: Representations, Generalizations and Applications*, TU Graz, Dissertation, 2013

[22] Meister, E.: *Partielle Differentialgleichungen: Eine Einführung für Physiker und Ingenieure in die klassische Theorie.* Berlin : Akademie Verlag, 1996

[23] Miranda, C.: *Partial Differential Equations of Elliptic Type.* Berlin : Springer, 1970

[24] Price, G.B.: *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions.* New York : Dekker, 1991

[25] Rochon, D.: On a Relation of Bicomplex Pseudoanalytic Function Theory to the Complexified Stationary Schrödinger Equation. In: *Complex Variables and Elliptic Equations* 53 (2008), Nr. 6, S. 501–521

[26] Rochon, D. ; Shapiro, M.: On Algebraic Properties of Bicomplex and Hyperbolic Numbers. In: *Annals of Oradea University: Mathematics Fascicola* 11 (2004), S. 71–110

[27] Tomantschger, K.W.: *AK Analysis: Spezielle Funktionen.* Vorlesungsskript, SS 2009. – TU Graz

[28] Tomantschger, K.W.: *AK Analysis: Elliptische Differentialgleichungen.* Vorlesungsskript, WS 2012/13. – TU Graz

[29] Tutschke, W.: *Hochschulbücher für Mathematik*. Bd. 82: *Partielle komplexe Differentialgleichungen in einer und in mehreren komplexen Variablen*. Berlin : Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1977

[30] Tutschke, W. ; Vasudeva, H.: *Modern Analysis Series*. Bd. 7: *An Introduction to Complex Analysis: Classical and Modern Approaches*. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2005

[31] Vekua, I.N.: *New Methods for Solving Elliptic Equations.* Amsterdam : North–Holland Publishing Company, 1967

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am ....

(Unterschrift)