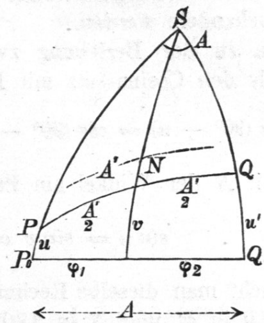
2) Unter welcher Neigung u' der Strahl JQ austritt.

3) Welche Differenz zwischen $P_0 N_0$ und $N_0 Q_0$ besteht, denn es ist zwar $PN = NQ$, aber die Projectionen $P_0 N_0$ und $N_0 Q_0$ sind im Allgemeinen einander nicht gleich.

Fig. 2. Mitteltheil von Fig. 1.



Zur Beantwortung dieser drei Fragen zeichnen wir in Fig. 2. die in Betracht kommenden Theile von Fig. 1. nochmals besonders heraus, und fügen die Bezeichnungen A A' φ_1 φ_2 bei. Nun ist zuerst:

$$\cos PQ = \cos A' = \cos(90^0 - u) \cos(90^0 - u') + \sin(90^0 - u) \sin(90^0 - u') \cos A$$
$$\cos A' = \sin u \sin u' + \cos u \cos u' \cos A$$

bis zur zweiten Potenz entwickelt:

$$\cos A' = u u' + \left(1 - \frac{u^2 + u'^2}{2}\right) \cos A$$

$$\cos A' - \cos A = u u' - \frac{u^2 + u'^2}{2} \cos A$$

Andererseits ist genähert:

$$\cos A' - \cos A = (A - A') \sin A, \text{ also}$$

$$A - A' = \frac{u u'}{\sin A} - \frac{u^2 + u'^2}{2} \operatorname{cotg} A \tag{1}$$

worin rechts auch A' statt A gesetzt werden darf.

Diese Formel (1) lässt sich auch noch weiter umformen,

$$\begin{aligned} (u + u')^2 &= u^2 + 2uu' + u'^2 \\ (u - u')^2 &= u^2 - 2uu' + u'^2 \\ \hline 2(u^2 + u'^2) &= (u + u')^2 + (u - u')^2 \\ 4uu' &= (u + u')^2 - (u - u')^2 \end{aligned}$$

Dieses in (1) eingesetzt gibt:

$$A - A' = \frac{1}{4 \sin A} \left\{ (u + u')^2 - (u - u')^2 - (u + u')^2 \cos A - (u - u')^2 \cos A \right\}$$

$$A - A' = \frac{1}{4 \sin A} \left\{ (u + u'^2)(1 - \cos A) - (u - u')^2 (1 + \cos A) \right\}$$

Wegen $1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$, $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$, $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

geht dieses über in:

$$A - A' = \left(\frac{u + u'}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{A}{2} - \left(\frac{u - u'}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \tag{2}$$

worin rechtseitig auch A' statt A gesetzt werden darf.