§ 21. Bestimmung der Breite und der Ortszeit aus beliebig zerstreuten Höhen.

Sobald man Näherungswerthe der Breite und der Ortszeit hat, kann jede Höhenmessung eines Gestirns zur weiteren Verbesserung dieser Näherungswerthe benutzt werden. Eine Höhe gegen Westen oder Osten gibt einen Beitrag für die Ortszeitbestimmung, eine Höhe im Meridian gibt einen Beitrag zur Breitenverbesserung, indessen jede Höhe in beliebigem Azimut gibt durch Differentiiren nach φ und t im Allgemeinen eine Fehlergleichung, welche zur Verbesserung von φ und von t benutzt werden kann. Diese Betrachtung bezieht sich auf beliebige Höhen der verschiedensten Gestirne, für Tagesbeobachtungen hat man jedoch nur die Sonne in verschiedenen Stellungen zur Verfügung.

Zu einem Beispiel nehmen wir eine Anzahl Sonnenhöhen, welche im Seebad Niendorf bei Travemünde am 14. Juli 1883 gemessen wurden.

Die Messungen wurden nicht mit dem Theodolit, sondern mit dem Sextanten (§ 28.) über einem künstlichen Flüssigkeitshorizont gemacht, da jedoch alle hierauf bezüglichen Reductionen (Indexfehler, Excentricität etc.) bereits an den nachstehenden Messungen (1) angebracht sind, so können wir wohl diese Messungen hier schon behandeln.

Wir haben bei (1) auch schon die Refraction und die Parallaxe in Rechnung gebracht, weil diese Reductionen für die Ausgleichung keine Fehler erzeugen.

Nummer	Chronometer		Wahre Sonnenhöhe h (als gemessen zu behandeln)	
1.	$9^h\ 31^m\ 42{,}7^s$	Vormittags	$47^0\ 26'\ 11''$	(1)
2.	9 41 51,0	„	48 38 7	
3.	10 22 17,4	„	52 53 37	
4.	10 28 24,2	„	53 26 56	
5.	11 53 6,0	„	57 41 54	
6.	11 56 22,3	„	57 42 51	
7.	12 4 18,7	Nachmittags	57 42 2	
8.	12 18 26,4	„	57 30 31	
9.	1 30 15,0	„	53 23 4	
10.	1 38 44,6	„	52 35 59	

Diese Resultate sind selbst Mittel aus Gruppen von je 2 bis 5 Einzelmessungen. In der Nähe der Culmination sind nur je 2—4, weiter vom Mittag entfernt, je 5 Messungen zusammengezogen; es sind jedoch keine grösseren Zwischenzeiten zugelassen, als solche, welche nach den Betrachtungen von § 15. S. 69 Mittelbildung ohne grössere Fehler als 1″ gestatten. Wenn sich hieraus schon die oben erwähnte Vermehrung der Gruppenzahlen entfernt vom Mittag erklärt, so kommt auch noch der Umstand hinzu, dass Morgens bei starker Höhenänderung die Zeitgenauigkeit viel wichtiger ist als in der Nähe des Mittags.

Wir behandeln nun die Zahlen der Tabelle (1) wie 10 gleichgewichtige Original-Beobachtungen, bei deren Ausgleichung alle Fehler den Höhenmessungen zugewiesen werden sollen (Chronometerablesungen als fehlerfrei eingeführt).

Als ersten Näherungswerth für die Breite nehmen wir:

$$\varphi_0 = 54^0\ 0'\ 0'' \tag{2}$$

In die Näherungs-Annahme für die Ortszeit nehmen wir auch den Gang des Chronometers auf, derselbe ist nämlich $= 3{,}0^s$ pro 1 Tag verzögernd aus den Messungen jener Zeit anderwärts genügend bekannt, was auf 1 Stunde $0{,}125^s$ ausmacht, und da eine Auswahl der Vormittagsmessungen von (1) durch eine Berechnung nach § 13. die Chronometer-Correction $= + 6^m\ 29^s$ ergeben hat, nehmen wir mit Rücksicht auf den erwähnten verzögernden Gang an:

Chronometer $=$	9^h	Ortszeit $=$	Chronometer $+$	$6^m\ 29{,}4^s$	(3)
„	10	„	„	29,5	
„	11	„	„	29,6	
„	12	„	„	29,8	
„	1	„	„	29,9	
„	2	„	„	30,0	

Nun berechnet man für die 10 Zeitmomente, welche durch die Chronometerangaben (1) und durch die Correctionen (3), nebst der Länge $43^m\ 18^s$ östl. von Greenwich, bestimmt sind, unter Voraussetzung der Breite $\varphi_0 = 54^0\ 0'\ 0''$ die 10 wahren Höhen (h) und nebenbei auch die Azimute, die Höhen auf $1''$ genau; die Azimute, welche nur zu den Coefficienten gebraucht werden, sind kaum auf $1'$ genau nöthig. Die Sonnendeclination ist hiebei zwischen $21^0\ 43'\ 44''$ und $21^0\ 42'\ 11''$, die Zeitgleichung zwischen $+ 5^m\ 32{,}6^s$ und $+ 5^m\ 33{,}8^s$.

Nummer	Höhe (h)	Azimut a	
1.	$47^0\ 26'\ 11''$	$- 55^0\ 25'$	(4)
2.	48 38 21	$-$ 52 24	
3.	52 53 41	$-$ 39 8	
4.	53 26 52	$-$ 36 57	
5.	57 41 39	$-$ 2 35	
6.	57 42 35	$-$ 1 10	
7.	57 41 50	$+$ 2 17	
8.	57 30 10	$+$ 8 23	
9.	53 22 57	$+$ 37 7	
10.	52 36 10	$+$ 40 8	

Für die Fehlergleichungen hat man:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

Die Ableitung nach t ist schon in (15) § 15. S. 70 behandelt worden und hat gegeben:

$$\frac{dh}{dt} = -15 \cos \varphi \sin a \tag{5}$$

wo das Azimut a von Süden nach Westen, d. h. Vormittags negativ, Nachmittags positiv, gezählt wird.

Die Ableitung nach φ gibt:

$$\cos h \; dh = (\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t) \; d\varphi \tag{6}$$

Wenn man eine der sphärisch-trigonometrischen Formeln (8) § 1. S. 2 mit entsprechender Buchstabenvertauschung auf das nautische Dreieck Fig. 3. § 4. S. 11 anwendet, so erhält man zunächst:

$$\tan \delta \cos \varphi = \sin \varphi \cos t + \sin t \cot (180^0 - a)$$

wo das Azimut a ebenso wie bei (5) gezählt ist, also:

$$\sin \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \delta \cos t = - \cos \delta \sin t \cot a$$

Dieses in (6) eingesetzt gibt:

$$\frac{dh}{d\varphi} = - \frac{\cos \delta \sin t \cos a}{\cos h \sin a}$$

und da das nautische Dreieck Fig. 3. § 4. S. 11 auch noch das Sinusverhältniss gibt

$$\frac{\sin t}{\cos h} = \frac{\sin a}{\cos \delta}$$

so hat man nun:

$$\frac{dh}{d\varphi} = - \cos a \tag{7}$$

Um hiernach die Fehlergleichung zu bilden, betrachtet man die Höhe h als Funktion des Stundenwinkels t und der Breite φ d. h.

$$\begin{aligned} h &= f(t, \varphi) = f(t_0 + \Delta t, \varphi_0 + \Delta \varphi) \\ &= f(t_0, \varphi_0) + \frac{dh}{dt} \Delta t + \frac{dh}{d\varphi} \Delta \varphi \end{aligned} \tag{8}$$

wo t_0 und φ_0 Näherungswerthe von t und φ sind.

Setzt man die Differentialquotienten bezw. $= a$ und $= b$ (Coefficient a und Azimut a können nicht verwechselt werden), und bezeichnet man $f(t_0 \; \varphi_0) = (h)$ wie schon bei (4) eingeführt ist, so hat man jetzt aus (8):

$$v = a \, \Delta t + b \, \Delta \varphi + l \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wo Coefficient } a &= \frac{dh}{dt} = - 15 \cos \varphi \sin a \\ b &= \frac{dh}{d\varphi} = - \cos a \\ l &= (h) - h = \text{berechnete Höhe} - \text{beobachtete Höhe} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

v, Δt, $\Delta \varphi$ sind die Verbesserungen der gemessenen Höhen h nach (1), des Stundenwinkels t nach (3) und der genäherten Breite φ_0 nach (2).

Die Berechnung der a b l nach (10) zeigt folgende Tabelle (11), welche zugleich auch die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Fehler

v enthält, und ausserdem in einer letzten Spalte die übrig bleibenden Fehler v' einer zweiten Ausgleichung, von welcher nachher die Rede sein wird.

				nach der Ausgleichung		
Nummer	a	b	l	v	v'	
1.	+ 7,3	− 0,57	0″	− 1″	− 10″	(11)
2.	+ 7,0	− 0,61	+ 14	+ 14	+ 6	
3.	+ 5,6	− 0,78	+ 4	+ 6	+ 6	
4.	+ 5,3	− 0,80	− 4	− 2	0	
5.	+ 0,4	− 1,00	− 15	− 8	0	
6.	+ 0,2	− 1,00	− 16	− 8	− 1	
7.	− 0,4	− 1,00	− 12	− 3	+ 3	
8.	− 1,3	− 0,99	− 21	− 13	− 7	
9.	− 5,3	− 0,80	− 7	+ 4	− 7	
10.	− 5,7	− 0,76	+ 11	+ 23	+ 8	
	+ 13,1	− 8,31	− 46	$(v\,v) = 1088$	$(v'v') = 344$	

Die Normalgleichungen werden:

$$\left.\begin{array}{rrrr} \underline{224{,}37\ \Delta t} & -\ 7{,}38\ \Delta\varphi & +\ 96{,}50 & = 0 \\ & \underline{+\ 7{,}14\ \Delta\varphi} & +\ 52{,}57 & = 0 \\ & & \underline{+\ 1464{,}00} & \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Die Auflösung gibt

$$\left.\begin{array}{rcl} \Delta t & = & -\ 0{,}70^s \pm 0{,}85^s \\ \Delta\varphi & = & -\ 8'' \pm 4'' \\ \text{hiezu } \varphi_0 & = & 54^0\ 0'\ 0'' \\ \hline \text{Resultat } \varphi & = & 53^0\ 59'\ 52'' \pm 4'' \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Mittlerer Fehler einer Höhe $= \pm 12''$.

Um die einzelnen nach der Ausgleichung übrig bleibenden Fehler v zu erlangen, hat man alle Stundenwinkel t nach (13) um $0{,}7^s$ oder $10''$ zu verkleinern, mit dem endgültigen φ von (13) die Höhen h neu zu berechnen, und mit den gemessenen h von (1) zu vergleichen, die so erhaltenen Werthe v sind in der vorletzten Spalte von (11) angegeben.

Betrachtet man diese Werthe v, so findet man ihre Vertheilung nicht recht befriedigend, man kann auf die Vermuthung kommen, dass eine constante Fehlerursache die positiven v im Wesentlichen an die Enden und die negativen v in die Mitte gehäuft hätte.

Diese Vermuthung und eine selbstständige Ueberlegung der einzelnen Fehlerquellen kann dazu führen, in die Fehlergleichung (9) ein constantes Glied x aufzunehmen, welches etwa dem Indexfehler der Höhenmessung entspricht, also zu setzen:

$$v' = x + a\,\Delta t + b\,\Delta\varphi + l$$

worauf die Normalgleichungen an Stelle von (12) nun werden

$$\left.\begin{array}{rrrrr} \underline{+\ 10{,}00\,x} & +\ 13{,}10\ \Delta t & -\ 8{,}31\ \Delta\varphi & -\ 46{,}00 & = 0 \\ & \underline{+\ 224{,}37\ \Delta t} & -\ 7{,}38\ \Delta\varphi & +\ 96{,}50 & = 0 \\ & & \underline{+\ 7{,}14\ \Delta\varphi} & +\ 52{,}57 & = 0 \\ & & & \underline{+\ 1464{,}00} & \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Die Auflösung gibt:

$$x = -50'' \pm 15'' \quad \varDelta t = +0{,}34^s \pm 0{,}58'' \quad \varDelta\varphi = -65'' \pm 17'' \quad (15)$$

die einzelnen v' nach (11) mit $(v'v') = 344$ und mittlerem Gewichtseinheitsfehler $= \pm 7''$.

Die Vergleichung der Resultate (13) und (15) beider Ausgleichungen gibt nach (11) zwar eine erheblich kleinere Fehlerquadratsumme $(v'v') = 344$ als $(vv) = 1088$ und entsprechend auch einen kleineren Gewichtseinheitsfehler $7''$ gegen $12''$ im ersten Fall, allein der mittlere Fehler des Hauptresultates φ oder $\varDelta\varphi$ ist erheblich gewachsen, nämlich von $\pm 4''$ auf $\pm 17''$ und die Annahme einer constanten Correction der Höhen $= -50'' \pm 15''$ nach (15) entspricht durchaus nicht den wirklichen Verhältnissen, abgesehen davon, dass das Resultat $\varphi = 54^0\ 0'\ 0'' - 65'' = 53'\ 58'\ 55''$, welches aus (15) folgen würde, mit anderen Bestimmungen durchaus nicht sich verträgt. All dieses und nähere Betrachtung der scheinbar besseren Fehlervertheilung v' in (11) im Zusammenhang mit den nur um 10^0 unter einander verschiedenen Höhen, führen zu dem Schluss, dass die Einführung eines constanten Gliedes x in die Fehlergleichungen, welche in anderen Fällen ganz am Platze ist, in diesem Falle nicht gerechtfertigt war.

Wir bleiben daher bei dem ersten Resultat (13) stehen und haben:

$$\text{Niendorf Breite } \varphi = 53^0\ 59'\ 52'' \pm 4'' \quad (16)$$

§ 22. **Der Polarstern.**

Nächst der Sonne ist für die elementaren Ortsbestimmungsmethoden auf der nördlichen Halbkugel der Erde der Polarstern (Polaris, α Ursae Minoris) das wichtigste Gestirn. Durch einen glücklichen Zufall haben wir einen Stern zweiter Grösse in diesem Jahrhundert nur zwischen 1^0 und 2^0 vom Nordpol entfernt. Das Sternbild des kleinen Bären (Ursa Minor), zu welchem der Polarstern gehört, ist in der Fig. 4. § 3. S. 9 gezeichnet. Der Polarstern liegt nahezu auf der Verlängerung der Verbindung der beiden Sterne α und β des grossen Bären (Ursa Major).

Nach dem Nautical Almanac hat der Polarstern in den nächsten Jahren folgende Rectascensionen und Polabstände:

Rectascension Polaris.

	1885	1886	1887	1888
1. Januar	$1^h\ 17^m\ 12^s$	$1^h\ 17^m\ 32^s$	$1^h\ 17^m\ 49^s$	$1^h\ 18^m\ 5^s$
1. April	1 16 10	1 16 29	1 16 45	1 17 0
1. Juli	1 17 3	1 17 22	1 17 37	1 17 54
1. October	1 18 10	1 18 27	1 18 43	1 18 58