

II. Abschnitt.

Festigkeit der Baumaterialien.

1. Zugfestigkeit.

Wird ein prismatischer Körper an einem seiner Enden festgehalten, am andern von einer in der Prismenaxe wirkenden Kraft angegriffen, welche ihn zu zerreißen sucht, so nennt man den dabei geleisteten Widerstand die Zugfestigkeit (absolute Festigkeit) des betreffenden Materiales; insbesondere wird der unmittelbar vor dem Zerreißen pro Flächeneinheit des Prismenquerschnittes geleistete Widerstand als Zugfestigkeit ($\hat{\alpha}_0$) bezeichnet. Elastische Körper erleiden bei irgend einer solchen Inanspruchnahme immer eine Dehnung, welche nach Beseitigung der Kraft entweder vollständig wieder verschwindet oder nicht. Bleibt eine merkliche Dehnung zurück, so war die sogenannte Elasticitätsgrenze überschritten, was bei Bautheilen, — Gerüste und provisorische Constructionen ausgenommen —, nie der Fall sein soll.

Die pro Flächeneinheit zulässige Spannung, der Festigkeitscoefficient ($\hat{\alpha}$), wird bei Eisen und Holz unter den günstigsten Umständen bis zur Elasticitätsgrenze, bei Steinmaterialien dagegen, für welche die Versuche eine solche Grenze nicht ergeben, bis zu $\frac{1}{10}$ der Zugfestigkeit angenommen. Bei ungünstigen Umständen nimmt man den Werth $\hat{\alpha}$ um so geringer, je stärkeren Erschütterungen der angegriffene Körper ausgesetzt ist, nämlich bei geringen Erschütterungen für Eisen $\hat{\alpha} \cong \frac{1}{5} \hat{\alpha}_0$, für Holz $\hat{\alpha} \cong \frac{1}{8} \hat{\alpha}_0$; bei stärkeren Erschütterungen für Eisen $\hat{\alpha} \cong \frac{1}{8} \hat{\alpha}_0$, für Holz $\hat{\alpha} \cong \frac{1}{10} \hat{\alpha}_0$; Steinmaterialien sind in solchen Fällen überhaupt nicht zu verwenden.

Ausser der Zugfestigkeit ($\hat{\alpha}_0$) und ausser den verschiedenen, hieraus abgeleiteten Festigkeitscoefficienten ($\hat{\alpha}$) sind in der folgenden Tabelle die Werthe des sogenannten Elasticitätsmoduls oder Elasticitätscoefficienten ($\hat{\epsilon}$) in Kilogrammen pro \square^{cm} ausgedrückt angegeben, mit denen die Zugkräfte dividirt werden müssen, wenn man die den letzteren entsprechenden relativen Dehnungen, das Verhältniss der eingetretenen Verlängerung zur ursprünglichen Länge des prismatischen Körpers ($\frac{s}{l}$), erhalten will.

Die Beziehungen zwischen den inneren, Widerstand leistenden und zwischen den äusseren, angreifenden Kräften sind ausgedrückt durch:

$$F \cdot \hat{\alpha}_0 = \hat{Q}_0 \dots (1); \quad F \cdot \hat{\alpha} = \hat{Q} \dots (2);$$

$$F \cdot \frac{s}{l} \cdot \hat{\epsilon} = \hat{Q} \dots (3).$$

Aus Gleichung (1) ist die Kraft (\hat{Q}_0), welche ein Prisma vom Querschnitte F und der Zugfestigkeit $\hat{\alpha}_0$ zu zerreißen vermag, aus Gleichung (2) die für ein solches Prisma zulässige Zugbelastung (\hat{Q}) und aus Gleichung (3), wenn die übrigen Grössen bekannt sind, die Verlängerung s zu bestimmen. —

(Siehe Tabelle über die Zugfestigkeit der Baumaterialien S. 9.)

2. Druckfestigkeit.

Wird ein prismatischer Körper in der Richtung seiner Längsaxe gedrückt, so ist sein Verhalten ein mit seiner Länge wechselndes.

Kurze Stäbe, d. h. solche, bei denen die kürzere Seite des den Querschnitt einschliessenden, kleinsten Rechteckes (der kleinste Durchmesser) nur wenig kleiner ist als die Stablänge, erleiden, wenn sie überhaupt als elastisch angenommen werden, unter Druckeinwirkung zunächst Verkürzungen, welche wie bei den gezogenen Stäben mehr oder weniger wieder verschwinden können, dann bei zunehmender Kraft Stauchungen, welche mit der Zersplitterung in Prismen oder Pyramiden endigen. Die hier in gleichem Sinne wie bei der Zugfestigkeit geltende Elasticitätsgrenze oder grösstzulässige Druckspannung pro Flächeneinheit wird bei den in der auf Seite 10 folgenden Tabelle unter Ziffer 1 angegebenen Inanspruchnahmen erreicht. Die übrigen Zahlenwerthe haben ähnliche Bedeutung wie bei der Tabelle über die Zugfestigkeit der Materialien. Der unmittelbar vor dem Zermahlen pro Flächeneinheit des Prismenquerschnittes geleistete Widerstand des Materiales wird als absolut rückwirkende oder Druckfestigkeit ($\hat{\beta}_0$), die pro Flächeneinheit zulässige Pressung wird als Festigkeitscoefficient ($\hat{\beta}$) bezeichnet.

Tabelle über die Zugfestigkeit der Baumaterialien.

Bezeichnung der Baumaterialien.	Zugfestigkeit (Zerreißungskraft). \hat{z}_0	Festigkeits-Coefficienten (\hat{z})			Elasticitäts-Coefficienten ($\hat{\epsilon}$)		
		1. unter den günstigsten Umständen (Elasticitätsgrenze).	2. bei geringen Erschütterungen.	3. bei starken Erschütterungen.	Elasticitäts-Modul ad 1.	Elasticitäts-Modul ad 2.	Elasticitäts-Modul ad 3.
Kilogramme pro □ Centimeter.							
Schmiedeseisen	4040	1600	1340	600	2020000	1940000	1860000
Eisenblech, parallel zur Walzrichtung	3630	1450	1210	600	1800000	1700000	1600000
„ senkrecht zur Walzrichtung	3330	1250	—	—	1800000	—	—
Eisendraht	6460	2580	2150	1070	2200000	2100000	2020000
Stahl	8000	3000	—	—	2030000	—	—
Gussstahl	10000	5000	—	—	2000000	—	—
Gusseisen	1450	650	400	—	1010000	970000	—
Eichenholz	810	260	160	80	120000	120000	113000
Fichtenholz	800	230	160	80	120000	120000	113000
Kiefern- (Föhren-)holz	1050	290	210	105	130000	130000	120000
Lärchenholz	1130	320	230	113	130000	130000	120000
Tannenholz	970	260	190	100	130000	130000	120000
Schwarz-weißer Granit von Hauzenberg bei Passau, parallel zum Lager	44,5*	4,5	—	—	510000*	—	—
Desgl. senkrecht zum Lager	32,5*	3,0	—	—	270000*	—	—
Gelblicher Granit von Fürstenstein bei Passau, parallel z. Lager	22,0*	2,2	—	—	150000*	—	—
Desgl. senkrecht zum Lager	19,0*	1,9	—	—	120000*	—	—
Grünstein von Ottendorf in Oberfranken, senkrecht zum Lager	50*	5,0	—	—	—	—	—
Muschelkalk von Randersacker oberhalb Würzburg	27*	2,7	—	—	—	—	—
Dolomit von Lohstadt bei Kelheim, parallel zum Lager	15* u. 33*	1,5 u. 3,3	—	—	435000*	—	—
Desgl. senkrecht zum Lager	32* u. 36*	3,2 u. 3,6	—	—	400000*	—	—
Grünsandstein von Kapfelberg bei Kelheim, parallel z. Lager	12,5*	1,2	—	—	120000*	—	—
Hartgebrannte Maschinenziegel a. d. Münchener Actenziegelei	5,0*—6,4*	0,5—0,6	—	—	—	—	—
Klinker, Qualität I ^a , von Grosshesselohe	20*	2,0	—	—	—	—	—
Prismen aus Perlmooser Portland-Cement nach 60 tägiger Erhärtung aus							
1 Theil Cement und 1 Theil Sand	14*	1,4	—	—	—	—	—
1 „ „ „ 2 „ „	13*	1,3	—	—	—	—	—
1 „ „ „ 4 „ „	10,5*	1,0	—	—	—	—	—

Anmerkung. Die mit * bezeichneten Angaben sind den „Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der königl. polytechnischen Schule in München“ von Herrn Professor J. Bauschinger entnommen.

Die Beziehungen zwischen den inneren, Widerstand leistenden und zwischen den äusseren, angreifenden Kräften sind ausgedrückt durch

$$F \cdot \beta_0^3 = \hat{Q}_0 \dots (1); \quad F \cdot \beta = \hat{Q} \dots (2);$$

$$F \cdot \frac{s}{l} \cdot \hat{\epsilon} = \hat{Q} \dots (3).$$

(Siehe Tabelle über die Druckfestigkeit der Baumaterialien bei kurzen Stäben S. 10.)

Bei den Angaben über die Druckfestigkeit der Steinmaterialien ist besonders hervorzuheben, dass fast in allen Fällen würfelförmige Steine mit genau eben und parallel zu einander abgeschliffenen Druckflächen untersucht wurden. —

Wesentlich anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn längere Stäbe in der Richtung ihrer Axe gedrückt werden.

Hier erfolgt, wenn Kraft- und Axenrichtung als nahezu zusammenfallend angenommen werden können, eine Ausbiegung senkrecht zu derjenigen Schwerpunktsaxe des Stabquerschnittes, für welche das Trägheitsmoment des letzteren am kleinsten ist.

Diese Ausbiegung setzt sich bei hinreichender Kraftwirkung so lange fort, bis der Stab abbricht.

Dabei hängt es von der Art der Befestigung der Stabenden ab, ob die Ausbiegung nach einer einfachen, doppelt oder mehrfach gebogenen Curve erfolgt, und zwar tritt letzterer Fall immer dann ein, wenn beide Enden des Stabes als festgeklemmt betrachtet werden können.

Von der Beanspruchung, wie sie bei ganz kurzen Stäben erfolgt, und von der eigentlichen Biegung bei normal zur Stabaxe einwirkenden Kräften unterscheidet man den eben betrachteten Fall dadurch, dass man ihn als

Tabelle über die Druckfestigkeit der Baumaterialien bei kurzen Stäben.

Bezeichnung der Baumaterialien.	Druckfestigkeit (Zerdrückungskraft). β_0	Festigkeits-Coefficienten (β)			Elasticitäts-Coefficienten (ϵ)		
		1. unter den günstigsten Umständen (Elasticitätsgrenze).	2. bei gerin- gen Erschüt- terungen.	3. beistarken Erschütte- rungen (und bei dünnen steinernen Pfeilern).	Elasticitäts- Modul ad 1.	Elasticitäts- Modul ad 2.	Elasticitäts- Modul ad 3.
Kilogramme pro □ Centimeter.							
Schmiedeeisen	3230	1600	1340	600	2020000	1940000	1860000
Stahl	7000	3000	—	—	2030000	—	—
Gusseisen	8000	2000	1600	—	1010000	970000	—
Eichenholz	540	215	130	65	120000	120000	113000
Fichtenholz	400	170	120	60	120000	120000	113000
Desgl. parallel zur Faserrichtung	300*	—	—	—	—	—	—
Desgl. senkrecht zur Faserrichtung	323	—	—	—	—	—	—
Kiefern-(Föhren-)holz	525	220	160	80	130000	130000	120000
Lärchenholz	565	240	170	85	130000	130000	120000
Tannenholz	485	200	140	75	130000	130000	120000
Schwarz-weisser Granit von Hauzenberg bei Passau, senkrecht zum Lager	1020*	100	50	25	413450*	441250*	458620*
Desgl. parallel zum Lager	1030*	100	50	25	490000*	490000*	490000*
Gelblicher Granit von Fürstenstein bei Passau, senkrecht zum Lager	850-1000*	92	46	23	184000*	184000*	184000*
Desgl. parallel zum Lager	880-990*	94	47	23	288000*	288000*	288000*
Grünstein von Ottendorf in Oberfranken, senkrecht zum Lager	1070-1970*	100-190	50-95	25-47	—	—	—
Desgl. parallel zum Lager	1400-1720*	140-170	70-85	35-42	—	—	—
Muschelkalk von Randersacker oberhalb Würzburg	440*	44	22	11	—	—	—
Dolomit von Lohstadt bei Kelheim, senkrecht zum Lager	980-1110*	98-111	49-55	24-27	560000*	560000*	560000*
Desgl. parallel zum Lager	1090-1280*	109-128	54-64	27-32	530000*	530000*	530000*
Weisser Bausandstein von Coburg, senkrecht zum Lager	316*	32	16	8	—	—	—
Desgl. parallel zum Lager	262*	26	13	6	—	—	—
Grünsandstein von Kapfelberg bei Kelheim, senkr. zum Lager	310*	31	15	7	86000*	86000*	124000*
Molasse-Sandstein vom Grünten bei Immenstadt, senkrecht zum Lager	1470*	147	70	35	—	—	—
Rother Sandstein von Sulz am Neckar, senkrecht zum Lager	630*	60	30	15	—	—	—
Desgl. parallel zum Lager	460*	46	23	11	—	—	—
Klinker, Qualität I ^a , von Grosshesselohe (Wenz)	720*	72	36	18	—	—	—
Gewöhnl. Mauerziegel aus der Fabrik Wienerberg bei Wien	187*	18	9	4	—	—	—
Gewöhnl. Ziegelmauerwerk, verbunden durch Mörtel von 1 Theil Perlmooser Portland-Cement und 3 Theilen feinen Isarsand nach 90 tägiger Erhärtung, senkrecht zu den Lagerflächen	95*	9,5	4	2	—	—	—
Desgl. mit Mörtel von 1 Theil Perlmooser hydraulischen Kalk und 3 Theilen feinen Isarsand	61*	6,0	3,0	1,5	—	—	—
Desgl. mit gewöhnlichem Luftmörtel von 1 Theil Kalk und 3 Theilen Sand	51*	5	2,5	1,2	—	—	—
Würfel aus Perlmooser reinem Portland-Cemente nach 100-tägiger Erhärtung	211-258*	21-25	10-12	5-6	—	—	—
Desgl. aus 1 Theil Cement und 1 Theil Sand	216-239*	21-23	10-11	5-6	—	—	—
Desgl. „ 1 „ „ 2 „ „	185-202*	18-20	9-10	4-5	—	—	—
Desgl. „ 1 „ „ 4 „ „	160*	16	8	4	—	—	—
Gut erhärteter Luftmörtel (nach älteren Versuchen)	36-80	3-8	2-4	1-2	—	—	—

Die mit * bezeichneten Werthe sind den „Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der königl. polytechnischen Schule in München“ von Herrn Professor Bauschinger (Bd VI der Zeitschrift des bayerischen Architekten- und Ingenieur-Vereins) entnommen.

eine Knickung bezeichnet und von einer Knickungs-
festigkeit (relativ rückwirkende Festigkeit) spricht. Als
Ergebniss der Theorie kann die folgende, von verschie-
denen Seiten als maasgebend anerkannte Formel betrachtet

werden, welche ausspricht, dass die für gedrückte kurze
Stäbe zulässige Inanspruchnahme β bei langen Stäben
in einer Weise reducirt werden muss, welche von dem
Stabquerschnitt (F), dem Trägheitsmomente (Θ) desselben

und von der freien Stablänge (l) abhängt. Es ist nämlich der reducirte Festigkeits-Coefficient

$$\beta_m = \frac{\beta}{1 + \nu \frac{F}{\Theta} l^2},$$

in welcher Formel, wenn Dimensionen und Gewichte in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt und abgeplattete Stabenden (stumpfer Stoss) angenommen werden, der Coefficient ν für verschiedene Materialien folgende Mittelwerthe hat:

für Schmiedeseisen	0,00009,	} Für Stäbe mit ganz frei beweglichen abgerundeten Enden (Charnieren) ist ν etwa dreimal grösser zu nehmen.
für Gusseisen	0,00022,	
für Holz	0,00020.	

Bezüglich der freien Länge l ist zu bemerken, dass dieselbe bei abgeplatteten Stabenden gleich der wirklichen Länge des Stabes, bei mehr oder weniger durch Einmauerung, Continuität der Construction etc. gesicherter Lage der Enden aber kleiner als diese Länge genommen werden dürfte, dass jedoch bei Brückenconstructions, wo die einzelnen Stücke wie die Gurtungstheile, Pfosten, Streben u. dergl. zwar fest, aber doch nicht vollkommen starr mit einander verbunden sind, der grösseren Sicherheit wegen vielfach l gleich der Stablänge gesetzt wird.

Für den Gebrauch der oben angegebenen Formel scheint es, bei der Wichtigkeit des Gegenstandes, angemessen, folgende näheren Betrachtungen anzustellen.

In jedem gegebenen Falle ist die Aufgabe immer die, für eine auf den betreffenden Constructionstheil einwirkende Kraft \hat{Q} , dann bei gegebener Länge desselben und bei bekanntem Festigkeits-Coefficienten β den zugehörigen Querschnitt seiner Grösse und Form nach zu bestimmen.

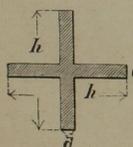
Da $\hat{Q} = \beta_m \cdot F$ sein muss, so hat man

$$\hat{Q} = \frac{\beta \cdot F}{1 + \nu \frac{F}{\Theta} l^2} \text{ oder } F = \frac{\hat{Q}}{\beta} \left(1 + \nu \frac{F}{\Theta} l^2 \right) \dots (*)$$

Diese Gleichung gibt F nicht unmittelbar, da Θ von F abhängig ist. Man hat demnach entweder für F (in der Klammer) und Θ zunächst approximative Werthe anzunehmen, durch Einsetzen des damit erhaltenen Werthes von F resp. von Θ in den rechtseitigen Theil der Gleichung F zu bestimmen und erforderlichen Falles dieses Verfahren zu wiederholen, bis die nöthige Genauigkeit erzielt ist, — oder man berechnet das für ähnliche Querschnittsfiguren als Function einer Querschnittsdimension sich ergebende Verhältniss $\frac{F}{\Theta}$, drückt F durch die gleiche Dimension aus und erhält so eine Bestimmungsgleichung für letztere, womit dann F und Θ gefunden sind.

Als Beispiel diene folgende Rechnung:

Ein Schmiedeseisenstab von kreuzförmigem Querschnitt werde bei einer Länge von 3^m von einer Kraft $\hat{Q} = 20000^k$ auf Knickung beansprucht; es ist der Querschnitt



desselben zu bestimmen unter der Annahme, dass $\beta = 600^k$ pro \square^{cm} sei.

Bei der angegebenen Bezeichnung ist

$$F = dh + d(h - d) = d(2h - d)$$

$$\Theta = \frac{1}{12} dh^3 + \frac{1}{12} (h - d) d^3 = \frac{1}{12} d(h^3 + hd^2 - d^3).$$

Wird nach Maassgabe einer Constructions-Skizze

$$d = \frac{1}{10} h \text{ gesetzt, so erhält man}$$

$$F = 0,19 h^2 \text{ und } \Theta = 0,0084 h^4, \text{ somit}$$

$$\frac{F}{\Theta} = \frac{22,62}{h^2}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in die Gleichung (*) ergibt sich:

$$0,19 h^2 = \frac{20000}{600} \left(1 + 0,00009 \frac{22,62}{h^2} 90000 \right)$$

$$0,19 h^4 - 33,33 h^2 = 6107$$

$$h = 16,95^{cm}.$$

Mit diesem direct gefundenen Werthe von h wird nun auch erhalten:

$$d = 1,695^{cm}, F = 54,59 \square^{cm} \text{ und } \Theta = 693,35^{cm^4},$$

während sich der reducirte Festigkeitscoefficient aus der Gleichung $\beta_m = \frac{\hat{Q}}{F}$ zu 366^k pro \square^{cm} bestimmt. —

Zur Vereinfachung der Rechnung kann man sich übrigens auch der Tabelle bedienen, welche Scheffler in seiner „Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken“ auf Grund von in England angestellten Versuchen berechnet hat und welche wir hier in der Weise abgeändert folgen lassen, dass aus derselben sofort für jedes Verhältniss $\frac{l}{d}$, wobei l die freie Länge und d den kleinsten

Durchmesser eines auf Knickung beanspruchten Stabes bezeichnet, der reducirte Festigkeitscoefficient β_m in Procenten des für kurze Stäbe geltenden Werthes von β entnommen werden kann.

(Siehe obenstehende Tabelle.)

Wenn Kraft- und Axenrichtung nicht, wie bis jetzt vorausgesetzt, zusammenfallen, so tritt eine Aenderung für die Bestimmung der mittleren zulässigen Pressung nur darin ein, dass das Trägheitsmoment hiebei auf die zur Richtung der Kraft senkrecht stehende Schwerpunktsaxe zu beziehen ist. —

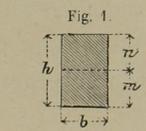
Als Abschluss vorstehender Betrachtungen über die Knickfestigkeit wird eine Zusammenstellung der Trägheitsmomente von Querschnittsformen angefügt, wie sie bei der Construction von Brücken am häufigsten vorkommen. Die Cotirung derselben ist so gewählt, dass die Ausdrücke für die Trägheitsmomente sich möglichst einfach ergeben; für die zur Schwerpunktsaxe nicht symmetrisch gestalteten Profile sind auch die Werthe von m und n , in welche die Höhe einer Figur durch die genannte Axe getheilt wird, angegeben; für alle übrigen Querschnitte ist $m = n = \frac{h}{2}$. Mit Rücksicht auf die späteren Be-

merkungen über die Biegefestigkeit sind auch die Trägheitsmomente für mehrere dort in Betracht kommende Querschnitte mitgetheilt.

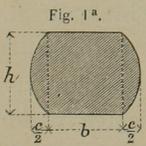
Tabelle zur Reduction des Werthes der zulässigen Pressung bei langen Stäben.

l/d	Gusseisen, voller Cylinder		Schmiedeeisen, voller Cylinder		Eichenholz, volles Quadrat, befestigte ebene Enden.	Fichtenholz, volles Quadrat, befestigte ebene Enden.
	bewegliche zugespitzte Enden.	„ befestigte ebene Enden.	bewegliche zugespitzte Enden.	„ befestigte ebene Enden.		
	$\beta_m =$					
0	1,00 β	1,00 β	1,00 β	1,00 β	1,00 β	1,00 β
1	0,97 „	0,99 „	1,00 „	1,00 „	1,00 „	1,00 „
2	0,90 „	0,96 „	0,98 „	1,00 „	0,99 „	0,99 „
3	0,81 „	0,93 „	0,97 „	0,99 „	0,98 „	0,98 „
4	0,73 „	0,89 „	0,94 „	0,98 „	0,97 „	0,96 „
5	0,65 „	0,85 „	0,91 „	0,97 „	0,95 „	0,95 „
6	0,58 „	0,80 „	0,88 „	0,96 „	0,93 „	0,92 „
7	0,51 „	0,75 „	0,84 „	0,94 „	0,91 „	0,90 „
8	0,45 „	0,71 „	0,81 „	0,93 „	0,88 „	0,87 „
9	0,40 „	0,67 „	0,77 „	0,91 „	0,86 „	0,84 „
10	0,36 „	0,63 „	0,73 „	0,89 „	0,83 „	0,81 „
11	0,33 „	0,59 „	0,69 „	0,87 „	0,80 „	0,78 „
12	0,29 „	0,55 „	0,65 „	0,85 „	0,77 „	0,75 „
15	0,21 „	0,46 „	0,58 „	0,79 „	0,68 „	0,66 „
20	0,13 „	0,30 „	0,44 „	0,67 „	0,55 „	0,52 „
25	0,09 „	0,26 „	0,31 „	0,57 „	0,44 „	0,41 „
30	0,07 „	0,19 „	0,22 „	0,55 „	0,35 „	0,36 „
35	0,05 „	0,15 „	0,16 „	0,43 „	0,30 „	0,26 „
40	0,04 „	0,12 „	0,12 „	0,36 „	0,23 „	0,20 „
45	0,03 „	0,10 „	0,10 „	0,30 „	0,18 „	0,16 „
50	0,03 „	0,08 „	0,08 „	0,25 „	0,15 „	0,13 „
60	0,02 „	0,06 „	0,06 „	0,17 „	0,10 „	0,09 „
70	0,02 „	0,05 „	0,04 „	0,13 „	0,07 „	0,07 „
80	0,01 „	0,04 „	0,03 „	0,10 „	0,06 „	0,05 „
90	0,01 „	0,03 „	0,02 „	0,08 „	0,04 „	0,04 „
100	0,01 „	0,03 „	0,02 „	0,06 „	0,04 „	0,03 „

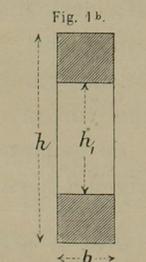
Zusammenstellung der Trägheitsmomente verschiedener Querschnitte.



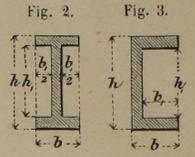
$$\Theta = \frac{1}{12} b h^3.$$



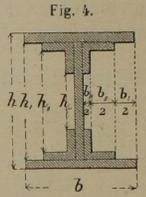
$$\Theta = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{1}{30} c h^3.$$



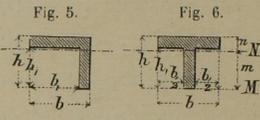
$$\Theta = \frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3).$$



$$\Theta = \frac{1}{12} (b h^3 - b_1 h_1^3).$$



$$\Theta = \frac{1}{12} [b h^3 - b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 - b_3 h_3^3].$$



$$\Theta = \frac{1}{3} (b h^3 - b_1 h_1^3) - \frac{1}{4} \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2}{b h - b_1 h_1}.$$

Zur Erläuterung:

Querschnittsfläche $F = b h - b_1 h_1$. Bestimmung der Höhenlage des Schwerpunkts: (für die Axe M)

$$F \cdot m = b h \cdot \frac{h}{2} - b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2};$$

$$m = \frac{1}{2} \frac{b h^2 - b_1 h_1^2}{b h - b_1 h_1}; \quad n = h - m.$$

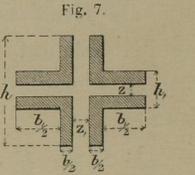
Trägheitsmoment für die Axe M:

$$\Theta = \frac{1}{3} b h^3 - \frac{1}{3} b_1 h_1^3;$$

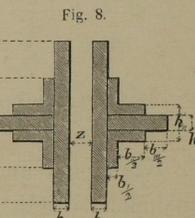
Trägheitsmoment für die Schwerpunktsaxe N:

$$\Theta = \Theta - F \cdot m^2;$$

$$\Theta = \frac{1}{3} (b h^3 - b_1 h_1^3) - \frac{1}{4} \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2}{b h - b_1 h_1} \text{ wie oben.}$$



$$\Theta = \frac{1}{12} (b h^3 + b_1 h_1^3 - (b + b_1) z^3).$$



$$\Theta = \frac{1}{12} (b h^3 + b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3 + b_3 h_3^3).$$

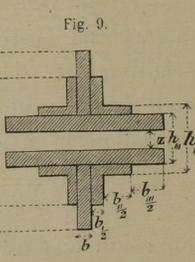


Fig. 8 um 90° gedreht.

$$\Theta = \frac{1}{12} [b h^3 + b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3 + b_3 h_3^3 - (b + b_1 + b_2 + b_3) z^3].$$

$$\Theta = \frac{1}{3} (b h^3 - b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 - b_3 h_3^3) - \frac{1}{4} \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2 - b_2 h_2^2 - b_3 h_3^2)^2}{b h - b_1 h_1 - b_2 h_2 - b_3 h_3}.$$

$$m = \frac{1}{2} \frac{b h^2 - b_1 h_1^2 - b_2 h_2^2 - b_3 h_3^2}{b h - b_1 h_1 - b_2 h_2 - b_3 h_3}.$$

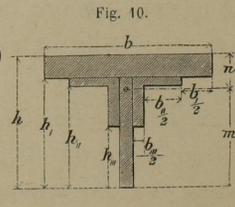


Fig. 11.

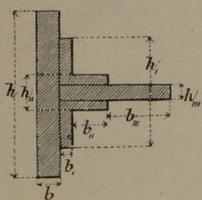
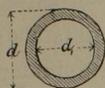


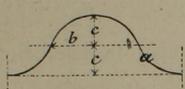
Fig. 10 um 90° gedreht.
 $\Theta = \frac{1}{12} (bh^3 + b_1h_1^3 + b_2h_2^3 + b_3h_3^3 + b_4h_4^3)$.

Fig. 12.



$$\Theta = \frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4)$$

Fig. 13.

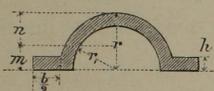


Für Wellenblech von der Dicke a, dessen Querschnittsform so beschaffen ist, dass $\frac{2c}{b} = \frac{4}{3}$, bestimmt sich das

Trägheitsmoment des Querschnitts nach Rebhann durch den Ausdruck: $\Theta = 1,0552 b^3 a$.

$$\Theta = 0,393 (r^4 - r_1^4) + \frac{1}{3} b h^3 - \frac{(\frac{2}{3}(r^3 - r_1^3) + \frac{1}{2} b h^2)^2}{1,57 (r^2 - r_1^2) + b h}$$

Fig. 14.



$$m = \frac{\frac{2}{3}(r^3 - r_1^3) + \frac{1}{2} b h^2}{1,57 (r^2 - r_1^2) + b h}$$

$$n = r - m$$

Zur Erläuterung:

Trägheitsmoment einer Halbkreisfläche für ihren Durchmesser ist

$$= \frac{1}{8} \pi r^4 = 0,393 r^4$$

Abstand des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche vom Durchmesser

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} = 0,4244 r$$

3. Schubfestigkeit.

Die Schubfestigkeit (Abscheerungs-, Scheer- oder Verschiebungsfestigkeit) eines Körpers wird in Anspruch genommen, wenn ein Theil desselben festgehalten und der andere durch Verschieben von dem ersteren zu trennen gesucht wird; insbesondere wird auch hier wieder unter Schubfestigkeit (γ_0) der pro Flächeneinheit des Querschnittes, nach welchem eine Trennung eintritt, unmittelbar vor dieser Trennung stattfindende Widerstand des Materiales verstanden.

Der Werth der Schubfestigkeit kann bei Schmiedeeisen als das geometrische Mittel zwischen der Zug- und Druckfestigkeit angenommen werden, so dass die zulässige Schubspannung (γ) in Kgr pro \square^{cm} ausgedrückt wird durch die Relation

$$\gamma = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$$

Für die übrigen Baumaterialien sind die Angaben mitunter noch sehr schwankend, so dass wir in der folgenden Tabelle für Holz und Stein ausschliesslich einige,

mit * bezeichnete derjenigen Werthe geben, welche Herr Professor Bauschinger in der jüngsten Zeit mit Hilfe der Werder'schen Festigkeitsmaschine erhalten und in seinen „Mittheilungen etc.“ veröffentlicht hat.

Tabelle über die Schubfestigkeit verschiedener Baumaterialien.

Bezeichnung der Materialien.	Richtung der Abschubfläche gegen die Fasern oder das Lager.	Schubfestigkeit (abschneidende Kraft) (γ_0) in Kgr pr. \square^{cm} .	Festigkeits-Coefficient γ in Kgr pr. \square^{cm} .
Schmiedeeisen	—	3612	600
Gusseisen, gute Qualität	—	1100	220
Gussstahl, gewöhnliche Qualität	—	4000	800
30jähriges Gebirgsfichtenholz	parallel z. d. Fasern	53*	10
Desgl.	senkrecht „ „	225*	45
Schwarz-weißer Granit von Hauzenberg	senkrecht z. d. Lager	93 u. 127*	9,3 u. 12,7
Desgl.	parallel „ „	109 u. 90*	10,9 u. 9,0
Gelblicher Granit von Fürstenstein	senkrecht „ „	82 u. 100*	8,2 u. 10
Desgl.	parallel „ „	60 u. 75*	6 u. 7,5
Grünstein von Ottendorf	senkrecht „ „	90 u. 66*	9 u. 6,6
Desgl.	parallel „ „	78—159*	7,8—15,9
Muschelkalk von Randersacker	—	51 u. 65*	5 u. 6,5
Dolomit von Lohstadt	senkrecht „ „	64 u. 55*	6,4 u. 5,5
Desgl.	parallel „ „	78 u. 87*	7,8 u. 8,7
Bausandstein v. Coburg	senkrecht „ „	16*	1,6
Desgl.	parallel „ „	13*	1,3
Grünsandstein von Kapfelberg	senkrecht „ „	32*	3,2
Desgl.	parallel „ „	17*	1,7
Sandstein vom Grünen Rother Sandstein von Sulz am Neckar	senkrecht „ „	150*	15,0
Gelber Sandstein von Zapfendorf b. Bamberg	„ „ „	75*	7,5
Sandstein von Kronach	„ „ „	25*	2,5
Kalkstein von Neuburg a/D.	„ „ „	21*	2,1
Maschinenziegel aus der Münchener Actien-Ziegelei, sehr hart gebrannt	—	30*	3,0
Desgl., sehr weich mit deutlich sichtbarer Faserstructur	parallel aber quer durch die Fasern	56—66*	5,6—6,6
Desgl.	längs der Faserrichtung	16,5*	1,6
Desgl.	—	10*	1,0
Klinker von A. Wenz in Grosshesselohe, Qualität I ^a	—	38*	3,8
Prismen aus reinem Perlmooser Portland-Cemente nach 60tägiger Erhärtung	—	20 u. 16*	2,0 u. 1,6
Desgl. aus Cementmörtel von 1 Th. Cement und 1 Th. Sand	—	34 u. 23*	3,4 u. 2,3
Desgl. aus Cementmörtel von 1 Th. Cement und 2 Th. Sand	—	30 u. 22*	3,0 u. 2,2
Desgl. aus Cementmörtel von 1 Th. Cement und 4 Th. Sand	—	26 u. 19*	2,6 u. 1,9

4. Biegungsfestigkeit.

Es soll hier selbstverständlich keine Theorie der Biegungs- (relativen) Festigkeit gegeben werden, vielmehr beschränken wir uns darauf, die wesentlichsten Ergebnisse derselben und einige Versuchsergebnisse über die Biegungsfestigkeit der Steinmaterialien vorzuschicken und sodann die Maximal-Momente für die wichtigsten Fälle der Belastung eines auf zwei Stützpunkten ruhenden Trägers, ferner die Auflager-Reactionen für continuirliche, auf 3 bis 6 Punkten aufliegende Träger bei einfacher Belastungsweise anzuführen.

Die theoretische Untersuchung eines auf Biegung in Anspruch genommenen Trägers, der in der Regel als horizontal auf zwei oder mehreren Stützpunkten aufliegend und von lothrecht wirkenden, der Länge nach gleichmässig vertheilten oder concentrirten Belastungen, welche ausserdem zu einer die Axe des Trägers enthaltenden Verticalebene symmetrisch gelegen sind, angegriffen vorausgesetzt wird, bezweckt die Ermittlung derjenigen inneren Kräfte und damit auch derjenigen Querschnittsflächen für jede Stelle des Trägers, welche den theils gegebenen, theils durch die Gleichgewichtsuntersuchungen ermittelten äusseren Kräften den erforderlichen Widerstand entgegenzusetzen vermögen.

Die Beziehungen, welche bei diesen über die Belastungen gemachten Voraussetzungen zwischen den in irgend einem durch den Träger angenommenen Verticalschnitte vorhandenen inneren Kräften und zwischen den auf einen abgeschnittenen Theil des Trägers wirkenden, äusseren Kräften im Falle des Gleichgewichtes stattfinden, lassen sich durch die folgenden drei Gleichungen ausdrücken:

$$\Sigma \dot{X} = 0 \dots (1); \quad \Sigma \dot{Y} = \dot{V} \dots (2); \quad \Sigma \dot{X} y = \mathfrak{M}_x \dots (3).$$

Gleichung (1) spricht für den vorliegenden Fall, in welchem horizontale äussere Kräfte nicht einwirken, die Bedingung aus, dass die algebraische Summe der im betrachteten Verticalschnitte vorhandenen inneren Kräfte ($\Sigma \dot{X}$) gleich Null, oder also die Summe der Druckspannungen gleich jener der Zugspannungen zu sein hat.

Nach Gleichung (2) muss der Verticalwiderstand ($\Sigma \dot{Y}$) in diesem Schnitte gleich der algebraischen Summe der auf den betrachteten Trägertheil einwirkenden, äusseren Kräfte (\dot{V}), und nach Gleichung (3) muss das auf einen der Einfachheit wegen im gedachten Verticalschnitte angenommenen Drehpunct bezogene Moment der inneren, horizontalen Kräfte ($\Sigma \dot{X} y$, das Widerstandsmoment) gleich der algebraischen Summe der Momente der äusseren, verticalen Kräfte (\mathfrak{M}_x) für diesen Drehpunct sein.

Wenn, wie nach den vorstehenden Tabellen für Eisen und Holz, die Elasticitätsmodule für Zug und Druck gleich gross sind, so fällt die neutrale Axe mit der Schwerpunktsaxe des Trägerquerschnittes zusammen, und es ist:

$$\Sigma \dot{X} y = \frac{\phi_1}{m} \Theta = \frac{\phi_2}{n} \Theta \dots (4), \text{ oder auch}$$

$$\Sigma \dot{X} y = \frac{\epsilon}{r} \Theta = \epsilon \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} \dots (5).$$

Dabei bezeichnet Θ das auf die Schwerpunktsaxe des betreffenden Querschnittes bezogene Trägheitsmoment, ϕ_1 und ϕ_2 die Spannungen der äussersten Fasern pro Flächeneinheit, m und n die bezüglichlichen Abstände dieser Fasern von der neutralen Faserschichte, ϵ den Elasticitätsmodul des in Frage stehenden Materiales, r den Krümmungshalbmesser der neutralen Faser an der betrachteten Stelle, dessen Reciproke in abgekürzter Form durch $\frac{d^2 y}{dx^2}$ unter der Voraussetzung ausgedrückt ist, dass die thatsächlich auftretenden Biegungen äusserst klein sind, und dass die Gleichung der elastischen Linie auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem mit horizontaler Abscissenaxe (x) bezogen sein soll.

Wird für die betrachtete Stelle des Trägers das Moment der äusseren, je nach den Belastungsfällen sehr verschieden wirkenden Kräfte mit \mathfrak{M}_x , wie oben, bezeichnet, so hat nach Gleichung (3)

$$\mathfrak{M}_x = \frac{\phi_1}{m} \Theta \text{ oder } = \frac{\phi_2}{n} \Theta \dots (6)$$

zu sein, und es darf im äussersten Falle $\phi_1 = \alpha$ oder $\phi_2 = \beta$ werden. Diejenige Gleichung, bei welcher dieser Grenzwert zuerst erreicht wird, ist der Berechnung des Querschnittes zu Grund zu legen.

Für den sogenannten gefährlichen Querschnitt, woselbst das Moment seinen grössten Werth (\mathfrak{M}_m) annimmt, darf höchstens

$$\mathfrak{M}_m = \frac{\alpha}{m} \Theta \text{ oder } = \frac{\beta}{n} \Theta \dots (7)$$

werden. Durch die Relationen 2, 6 und 7 lassen sich die erforderlichen Querschnittsdimensionen eines Trägers in jedem Falle der angenommenen Art bestimmen. Bei gleich bleibendem Querschnitte kommen nur die Gleichungen (2) und (7), und bei einem derartigen rechteckigen Querschnitte nur Gleichung (7) in Betracht, da hiebei, wenn dieser genügt wird, Gleichung (2) ohnedies bei den meist vorkommenden Trägerlängen erfüllt ist. —

Nach Gleichung (3) und (5) ergibt sich ferner

$$\epsilon \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = \mathfrak{M}_x \dots (8),$$

eine Relation, aus welcher die Gleichung der elastischen Linie, und also auch die Einbiegung des Trägers an irgend einer Stelle abzuleiten ist. —

Wenn ausser den auf Biegung, also senkrecht zur Axe des Trägers wirkenden Kräften, gleichmässig über den Querschnitt desselben vertheilte Kräfte, deren Mittelkraft \dot{H} sein soll, vorhanden sind, so darf die Summe aller pro Flächeneinheit an den meist beanspruchten

Stellen auftretenden Spannungen den zulässigen Grenzwert ($\dot{\alpha}$ oder $\dot{\beta}$) nicht überschreiten.

Für die meist gespannten Fasern des gefährlichen Querschnittes wird, wenn die gleichmässig vertheilten Kräfte auf Zug wirken:

$$\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha} = \frac{\mathfrak{M}_m \cdot m}{\Theta} + \frac{\dot{H}}{F} \dots (9),$$

und für die meist gepressten Fasern jenes Querschnittes wird, wenn diese Kräfte auf Druck wirken:

$$\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 = \dot{\beta} = \frac{\mathfrak{M}_m \cdot n}{\Theta} + \frac{\dot{H}}{F} \dots (10)$$

als Bedingungsgleichung der Berechnung zu Grund gelegt. —

Da für Steinmaterialien, wie aus den mitgetheilten Versuchsergebnissen zu entnehmen ist, die Elasticitätsmodule für Druck und Zug verschieden gross sind, so fällt die neutrale Axe nicht mehr mit der Schwerpunktsaxe des Querschnittes zusammen, wenn ein derartiger prismatischer Träger auf Biegung angegriffen wird.

Wenn auch Steine nur in seltenen Fällen solchen Angriffen ausgesetzt sind, da hiebei eine ökonomische Verwerthung des Materiales nicht stattfindet, so sind doch die Versuchsergebnisse, welche Herr Professor Bauschinger hiefür erhalten und in seinen mehrfach angezogenen „Mittheilungen etc.“ veröffentlicht hat, von grossem Interesse, und wir fügen deshalb in der folgenden Tabelle einige dieser Werthe an.

Zum richtigen Verständnisse derselben schicken wir voraus, dass die in gleichem Sinne wie die Druck- und Zugfestigkeit aufzufassende Biegefestigkeit $\dot{\delta}_0$ aus der Gleichung abgeleitet wurde:

$$\dot{\delta}_0 = \frac{3}{2} \frac{\dot{Q} l}{b h^2},$$

in welcher \dot{Q} das in der Mitte des Trägers von der Stützweite l aufgelegte, den Bruch bewirkende Gewicht, b die Breite und h die Höhe des rechteckigen Trägerquerschnittes bezeichnet, und in welcher also das auf die Schwerpunktsaxe bezogene Trägheitsmoment des letzteren $\Theta = \frac{1}{12} b h^3$ analog dem Falle eingeführt ist, dass die neutrale mit der Schwerpunktsaxe zusammenfällt. —

(Siehe folgende Tabelle.)

Die Werthe der auf die Schwerpunktsaxe bezogenen Trägheitsmomente (Θ) wurden bereits früher (S. 12) für die gebräuchlichsten Querschnitte mitgetheilt, die Werthe von \mathfrak{M}_m sind für die wichtigsten Belastungsfälle eines discontinuirlichen Trägers in der ersten Reihe der unten folgenden Zusammenstellung angegeben, während die zweite Reihe nur die Auflager-Reactionen $\dot{D}_1, \dot{D}_2 \dots$ für continuirliche Träger mit einfacher Belastungsweise enthält, indem eine eingehende Untersuchung der letzteren hier zu weit führen würde, mit den gegebenen Auflager-Reactionen aber auch leicht die Kraftmomente für jede beliebige Stelle eines solchen Trägers gefunden werden können.

Etwas ausführlicher ist der Fall eines auf 4 Stützen aufliegenden, continuirlichen Trägers aus dem Grunde behandelt, weil derselbe bei Brücken-Constructionen besonders häufig vorkommt.

Tabelle über die Biegefestigkeit verschiedener Steinmaterialien.

Bezeichnung der Materialien	Richtung der Bruchfläche gegen das Lager.	Biegefestigkeit (Bruchgewicht)	Festigkeits-Coefficient ($\dot{\delta}$) unter den günstigsten Umständen.
		Kilogr. pr. <input type="checkbox"/> Centim.	
Schwarz-weisser Granit von Hauzenberg . .	senkrecht z. Lager	210*	21
Desgl.	parallel „ „	149*	15
Gelblicher Granit von Fürstenstein	senkrecht „ „	92*	9
Desgl.	parallel „ „	95 u. 100*	10
Grünstein von Ottendorf	senkrecht „ „	300*	30
Desgl.	parallel „ „	250*	25
Muschelkalk von Randersacker	—	69*	7
Dolomit von Lohstadt (bei guten Stücken) .	senkrecht „ „	128*	13
Desgl.	parallel „ „	157*	16
Bausandstein von Coburg	senkrecht „ „	30*	3
Grünsandstein von Kapfelberg	„ „ „	50*	5
Prismen von Perlmooser Portland-Cement nach 60 tägiger Erhärtung aus reinem Cemente .	—	25*	2,5
Desgl. aus 1 Th. Cement und 2 Th. Sand . . .	—	28*	3
Desgl. aus 1 Th. Cement und 4 Th. Sand . . .	—	26*	2,6

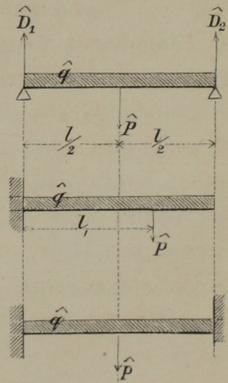
Zusammenstellung der Kraftmomente und Auflager-Reactionen für verschiedene Belastungsfälle relativ angegriffener Träger.

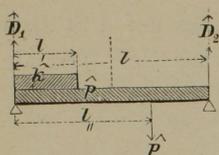
$$\dot{D}_1 = \dot{D}_2 = \frac{\dot{q} l}{2} + \frac{\dot{P}}{2}$$

$$\mathfrak{M}_m = \frac{\dot{q} l^2}{8} + \frac{\dot{P} l}{4} \text{ (für die Trägermitte);}$$

$$\mathfrak{M}_m = \frac{\dot{q} l^2}{2} + \dot{P} l \text{ (für das eingespannte Trägerende);}$$

$$\mathfrak{M}_m = \frac{\dot{q} l^2}{12} + \frac{\dot{P} l}{8} \text{ (für die eingespannten Trägerenden);}$$





$$\hat{D}_1 = \frac{\hat{p}l}{2} + \frac{\hat{k}l}{2l}(2l-1) + \frac{\hat{P}}{l}(l-1)$$

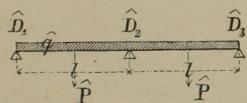
$$\hat{D}_2 = \frac{\hat{p}l}{2} + \frac{\hat{k}l^2}{2l} + \frac{\hat{P}l}{l}$$

$$\hat{M}_1 = \frac{\hat{p}l^2}{2} + \frac{\hat{k}l^2}{2l}(2l-1) + \frac{\hat{P}l}{l}(l-1) - (\hat{p} + \hat{k}) \frac{l^2}{2}$$

(für $x = l$);

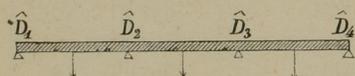
$$\hat{M}_2 = \frac{\hat{p}l^2}{2} + \frac{\hat{k}l^2}{2l}(2l-1) + \frac{\hat{P}l}{l}(l-1) - \frac{\hat{p}l^2}{2}$$

- $\hat{k}l \left(l - \frac{1}{2} \right)$
(für $x = l$).



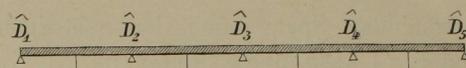
$$\hat{D}_1 = \hat{D}_3 = \frac{5}{16} \hat{P} + \frac{3}{8} \hat{q}l$$

$$\hat{D}_2 = \frac{22}{16} \hat{P} + \frac{10}{8} \hat{q}l$$



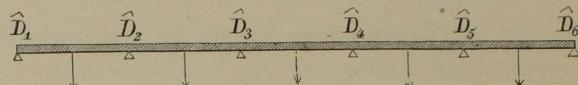
$$\hat{D}_1 = \hat{D}_4 = \frac{7}{20} \hat{P} + \frac{4}{10} \hat{q}l$$

$$\hat{D}_2 = \hat{D}_3 = \frac{23}{20} \hat{P} + \frac{11}{10} \hat{q}l$$



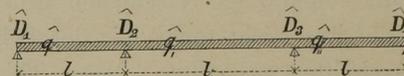
$$\hat{D}_1 = \hat{D}_5 = \frac{19}{56} \hat{P} + \frac{11}{28} \hat{q}l \quad \hat{D}_2 = \hat{D}_4 = \frac{68}{56} \hat{P} + \frac{32}{28} \hat{q}l$$

$$\hat{D}_3 = \frac{50}{56} \hat{P} + \frac{26}{28} \hat{q}l$$



$$\hat{D}_1 = \hat{D}_6 = \frac{26}{76} \hat{P} + \frac{15}{38} \hat{q}l \quad \hat{D}_2 = \hat{D}_5 = \frac{91}{76} \hat{P} + \frac{43}{38} \hat{q}l$$

$$\hat{D}_3 = \hat{D}_4 = \frac{73}{76} \hat{P} + \frac{37}{38} \hat{q}l$$



$$\hat{D}_1 = \frac{\hat{q} (6l^2l^2 + 14l^3l + 6l^4) - \hat{q}l^3(2l+1) + \hat{q}_l l^3l}{12l^2l^2 + 32l^2l + 16l^3}$$

$$\hat{D}_2 = \frac{\hat{q} (4l^2l^2 + 6l^2l + 3l^3) + \hat{q}_l l^3 - \hat{D}_1 (12l^2l + 8l^2 + 4l^2)}{4l^2}$$

$$\hat{D}_3 = \frac{\hat{q}_l (4l^2l^2 + 6l^2l + 3l^3) + \hat{q}_l l^3 - \hat{D}_4 (12l^2l + 8l^2 + 4l^2)}{4l^2}$$

$$\hat{D}_4 = \frac{\hat{q}_l (6l^2l^2 + 14l^3l + 6l^4) - \hat{q}_l l^3(2l+1) + \hat{q}_l l^3l}{12l^2l^2 + 32l^2l + 16l^3}$$