laftung der übrigen Zonen ift auf die Ringfpannung ohne Einflufs. Wir können demnach auch fagen, dafs die gröfste Ringfpannung in allen Ringen bei mobiler Belaftung des ganzen Daches ftattfindet.

Im Mauerring findet der gröfste Zug durch mobile Belaftung bei totaler Belaftung ftatt, und es ift derfelbe

$$R_r^{p_{max}} = \frac{(P_1 + P_2 \dots + P_{r-1}) \operatorname{cotg} \alpha}{2 \ n \sin \frac{\pi}{n}} \qquad \dots \qquad 344$$

Druck findet in demfelben nicht ftatt.

δ) Spannungen in den Diagonalen. Für diefelbe Belaftungsart, welche bei den Kuppeln zu Grunde gelegt ift, ergiebt fich die Spannungsdifferenz in zwei benachbarten Sparren, zwifchen denen die Belaftungsgrenze liegt, zu

$$\Delta = \frac{\frac{\sum}{1}^{m} (P+G)}{n \sin \alpha} - \frac{\sum}{1}^{m} (G)}{n \sin \alpha} = \frac{\sum}{1}^{m} (P)}{n \sin \alpha}$$

und die Spannung in der Diagonalen, welche diefelbe übertragen foll, höchftens zu

$$Y = \frac{\sum_{1}^{m} (P)}{n \sin \alpha \cos \gamma}$$

wenn γ der Winkel zwifchen der Diagonalen und dem Sparren ift. Demnach wird

$$Y_{1} \leq \frac{P_{1}}{n \sin \alpha \cos \gamma_{1}};$$

$$Y_{2} \leq \frac{P_{1} + P_{2}}{n \sin \alpha \cos \gamma_{2}} \text{ etc.} 345$$

Um die Stabfpannungen auf geometrifchem Wege (Fig. 326 und 327) zu ermitteln, feien die Belaftungen der einzelnen Knotenpunkte *I*, 2, 3, 4; alsdann ergiebt fich leicht, wenn $\alpha\beta = I$, $\beta\gamma = 2$, $\gamma \delta = 3$, $\delta \varepsilon = 4$ gemacht wird, $\beta \zeta = S_1$, $\zeta \alpha = H_1$, $\gamma \eta = S_2$, $\eta \zeta = H_2$, $\delta \vartheta = S_3$, $\vartheta \eta = H_3$, $\varepsilon \alpha = S_4$, $\alpha \vartheta = H_4$; ferner $\varepsilon \alpha = D_0$, $\alpha \alpha = H_5$, $\zeta \lambda = \lambda \alpha = R_1$,









460. Graphifche Ermittelung der Stabfpannungen.

 $\eta \mu = \mu \zeta = R_2, \ \vartheta \nu = \nu \eta = R_3, \ \varkappa o = o \ \vartheta = R_4$ und $= \alpha \sigma = \sigma \varkappa = R_5$ (= Mauerringfpannung). Je nachdem nun die Kräfte 1, 2, 3, 4 die Eigengewichte oder die mobilen Laften bedeuten, erhält man die durch die eine oder andere Belaftung erzeugten Spannungen. Die Spannungen in den Diagonalen find leicht zu conftruiren.

c) Steile Zeltdächer (Thurmdächer).

Als verticale Belaftung ift hier nur das Eigengewicht einzuführen. Eine Belaftung durch Schnee findet nicht ftatt, weil wegen der großen Steilheit des Daches der Schnee nicht liegen bleibt. Diefe verticale Belaftung erzeugt, da die Conftruction genau fo, wie bei den flachen Zeltdächern, aus Sparren und Ringen zufammengefetzt wird, Spannungen, welche genau, wie dort gezeigt wurde, zu berechnen find. Auf diefe Berechnung foll defshalb hier nicht weiter eingegangen werden. Dagegen fpielt der Winddruck hier eine große Rolle, und es follen die durch diefen erzeugten Spannungen berechnet werden. Wir werden zunächft die Berechnung für ein vierfeitiges Pyramidendach zeigen, für welches eine genaue Berechnung möglich ift.

1) Vierfeitiges Pyramidendach.

461. Belaftung Der Winddruck auf eine Pyramidenfeite ift am größten, wenn die Windrichtung im Grundrifs normal zu der betreffenden Rechteckfeite fteht. Alsdann ift der Winddruck pro 1^{qm} fchräger Dachfläche (Fig. 328 und 329) nach Gleichung 273. $\nu = 120 \sin^2 (\alpha + 10^{\circ})$; die vom Winde getroffene fchräge Dachfläche ift







 $F = \frac{a \lambda}{2} = \frac{a h}{2 \sin \alpha},$

mithin der Gefammtdruck gegen eine Pyramidenfeite

$$N = \frac{a h v}{2 \sin \alpha} \quad . \quad 346.$$

Wir denken uns nun in der Symmetrieebene IIeinen ideellen Binder ACB(Fig. 330) und beftimmen die darin durch den Winddruck entstehenden Spannungen; wir nehmen vorläufig die Horizontalen und Diagonalen, wie in Fig. 330 gezeichnet, an. Auf ein oben befindliches Kreuz wirke ein Winddruck W in der Höhe e_0



Fig. 330.

über dem Firftpunkt C; aufserdem wirken in den Knotenpunkten C, E, F, G... die Kräfte N_0 , N_1 , N_2 , N_3 normal zur Dachfläche; die Gröfse

diefer Kräfte ift leicht aus den auf die unkte entfallenden Dachflächen zu er-

bezüglichen Knotenpunkte entfallenden Dachflächen zu en mitteln.

462. Berechnung d. Spannungen im ideellen Binder.

α) Berechnung der Spannungen im ideellen Binder. Um die Sparrenfpannung S_1 (Fig. 330) an der Windfeite zu erhalten, lege man einen beliebigen Schnitt durch *CE*, etwa nach *II II*, und betrachte das Fragment oberhalb des Schnittes. Wählt man \mathcal{F} als Momentenpunkt, fo heifst die Gleichung der flatifchen Momente (Fig. 331):

$$0 = S_1 c_1 \sin \alpha - W (e_0 + e_1) - N_0 n_0.$$

Nun ift $\overline{C\mathcal{F}} = \frac{e_1}{\sin \alpha}$ und $\cos (180 - 2 \alpha) = \frac{n_0}{\overline{C\mathcal{F}}} = -\cos 2 \alpha$, daher



Fig. 331:

 $n_0 = -\overline{C\mathcal{F}}\cos 2\alpha = -\frac{e_1}{\sin \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{e_1 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha}.$ Man erhält hiernach

$$S_1 = \frac{W(e_0 + e_1)}{c_1 \sin \alpha} + \frac{N_0 e_1 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{c_1 \sin^2 \alpha}$$

Für irgend einen Sparren FG ift K der conjugirte Punkt, und es ergiebt fich S_3 aus der Momentengleichung

$$0 = S_3 c_2 \sin \alpha - W (e_0 + e_1 + e_2) - N_0 (n_0 + n_1) - N_1 n_1 + N_2 c_2 \cos \alpha,$$

$$S_3 = \frac{1}{c_2 \sin \alpha} \left[W (e_0 + e_1 + e_2) + N_0 (n_0 + n_1) + N_1 n_1 - N_2 c_2 \cos \alpha \right],$$

$$S_3 = \frac{1}{c_2 \sin \alpha} \left[W (e_0 + e_1 + e_2) + N_0 (n_0 + n_1) + N_1 n_1 \right] - N_2 \cot \alpha.$$

Für irgend einen Sparren KL auf der Unterwindseite ift G der conjugirte Punkt und

 $0 = \mathfrak{S}_{3} c_{3} \sin \alpha + W (e_{0} + e_{1} + e_{2} + e_{3}) + \frac{N_{0} (e_{1} + e_{2} + e_{3})}{\sin \alpha} + \frac{N_{1} (e_{2} + e_{3})}{\sin \alpha} + \frac{N_{2} e_{3}}{\sin \alpha},$ woraus

$$\mathfrak{S}_{3} = -\frac{1}{c_{3}\sin\alpha} \left[W(e_{0} + e_{1} + e_{2} + e_{3}) + \frac{N_{0}(e_{1} + e_{2} + e_{3}) + N_{1}(e_{2} + e_{3}) + N_{2}e_{3}}{\sin\alpha} \right].$$

Eben fo ergeben fich leicht alle Sparrenspannungen, fowohl auf der Windfeite, wie auf der Unterwindseite.

Die Sparren auf der Windfeite werden gezogen, diejenigen auf der Unterwindfeite werden gedrückt.

Die Spannungen in den Horizontalen und Diagonalen werden gleichfalls mittels der Momentenmethode ermittelt. Um die Spannung H_3 in GL zu finden, fchneide man fchräg nach III III; alsdann ift C der conjugirte Punkt, und die Momentengleichung für C heifst

$$0 = H_3 (e_1 + e_2 + e_3) - W e_0 + \frac{N_1 e_1}{\sin \alpha} + \frac{N_2 (e_1 + e_2)}{\sin \alpha} + \frac{N_3 (e_1 + e_2 + e_3)}{\sin \alpha}$$

$$H_3 = -\frac{N_1 e_1 + N_2 (e_1 + e_2) + N_3 (e_1 + e_2 + e_3)}{(e_1 + e_2 + e_3) \sin \alpha} + \frac{W e_0}{e_1 + e_2 + e_3}.$$

wora

Die Spannung V3 endlich in der Diagonalen GK wird, da für GK wiederum C der conjugirte Punkt ift, durch die Momentengleichung für C gefunden. Diefelbe heifst, wenn y_3 der Hebelsarm von Y_3 für den Momentenpunkt C ift,

$$0 = Y_{3}y_{3} + We_{0} - \frac{N_{1}e_{1}}{\sin \alpha} - \frac{N_{2}(e_{1} + e_{2})}{\sin \alpha}$$

woraus

$$Y_3 = \frac{1}{y_3} \frac{N_1 e_1 + N_2 (e_1 + e_2)}{\sin \alpha} - \frac{W e_0}{y_3}.$$

Ob die Diagonalen und Horizontalen Druck oder Zug erhalten, hängt von der Größe des Momentes We_0 wesentlich ab. Ift W=0, so werden bei der gezeichneten Richtung der Diagonalen die Horizontalen gedrückt, die Diagonalen gezogen. Bei der entgegengefetzten Windrichtung findet entgegengefetzte Beanfpruchung statt.

Handbuch der Architektur. I. 1.

28

463. Graphifche Ermittelung im ideellen Binder.

> 464. Wirkliche

> > Stab-

fpannungen.

β) Graphifche Ermittelung der Spannungen im ideellen Binder. Wird zunächst von der Kraft W abgesehen, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit der in d. Spannungen Fig. 332 gezeichnete Kräfteplan, worin alle Stabspannungen, welche durch Winddruck erzeugt werden, enthalten find.



Fig. 333.

-W

Falls noch ein Winddruck W vorhanden ift, fo empfiehlt es fich, für die graphifche 'Beftimmung der Spannungen ftatt der wirklich vorhandenen Stäbe EC und 7C zwei Stäbe EC' und $\mathcal{F}C'$ einzuführen, wobei C' der Schnittpunkt der Kraft W mit der Mittelverticalen Fig. 333 ift; die Er-

mittelung kann dann für den Thurm mit der Spitze EO C'P J nach der Cremona'fchen Methode erfolgen. Die Spannungen in EC und JC können mit geringem Fehler denjenigen, welche fich für EO und PJ ergeben haben, gleich gefetzt werden.

7) Reduction der Spannungen im ideellen Binder auf die wirklichen Stabspannungen. Die bisher berechneten Spannungen finden im ideellen Binder



ACB (Fig. 334) ftatt. Iede Spannung in einem Stabe des ideellen Binders wird nun durch zwei Stabspannungen der beiden wirklichen Binder geleiftet, deren Ebenen mit derjenigen des ideellen Binders den Winkel (90 - α) einfchliefsen.

Die Spannung S in irgend einem Sparren des ideellen Binders wird durch zwei Spannungen S' erfetzt; demnach ift

 $S = 2 S' \cos (90 - \delta) = 2 S' \sin \delta,$ woraus

$$S' = \frac{S}{2\sin\delta}; \quad . \quad 346_{\rm s}.$$

435

eben fo

Ferner wird

Auch auf conftructivem Wege ift die Reduction leicht durchzuführen. Man conftruire (Fig. 335) den Winkel $(90 - \delta)$, bezw. ε , was keine Schwierigkeiten macht. Ift $\langle rmn - 90 - \delta$, fo ift $\overline{mr} = \frac{\overline{mn}}{\sin \delta}$. Man trage demnach die Werthe für $\frac{S}{2}$ und $\frac{\mathfrak{S}}{2}$ auf der Linie mn ab, projicire diefe Abfchnitte auf mr; alsdann erhält man in den Projectionen die gefuchten wirklichen Sparrenfpannungen. Eben fo ift die Division durch cos ε vorzunehmen.

Wenn einfache Diagonalen angeordnet werden, fo erhält jede derfelben event. Zug und Druck; will man nur gezogene Diagonalen haben, fo find Gegendiagonalen einzuführen, worüber nach Früherem (fiehe Art. 390, S. 355) nichts hinzugefügt zu werden braucht.

2) Achtfeitiges Pyramidendach.

Wir nehmen hier die Windrichtung, der einfachen Rechnung halber, horizontal an und berechnen aus demfelben Grunde den Winddruck fo, als wenn die Seiten-

flächen vertical ftänden. Der dabei gemachte Fehler ift gering. Wenn die Windrichtung im Grundrifs normal zu der Seite mn (Fig. 336) angenommen wird, die Seitenlänge des regulären Achteckes an der Unterkante der Pyramide mit a, die Höhe der Pyramide mit h und

der Druck pro Flächeneinheit mit p bezeichnet wird, fo ift der Druck gegen die Fläche F demnach

$$W = \frac{p a h}{2} \quad . \quad 350.$$

Der Winddruck auf die Fläche F_1 ergiebt fich unter obigen vereinfachenden Annahmen folgender Mafsen. Auf 1^{qm} der normal getroffenen Fläche mn(Fig. 337) und deren Verlängerungen kommt ein Winddruck p; einem Quadrat-Meter diefer Fläche entfpricht aber $\frac{1}{\cos \gamma}$ der (immer vertical gedachten) Fläche n o; auf 1^{qm} der letzteren kommt alfo Fig. 337.









465. Belaftung. ein Winddruck $\frac{p}{\frac{1}{\cos \gamma}} = p \cos \gamma$, mithin auf die ganze Fläche F_1 der Winddruck $\frac{p \cos \gamma a h}{2}$. Von diefem Winddruck kommt nur die normal zur Fläche ftehende

Componente zur Geltung, d. h. $\frac{p \cos \gamma a h}{2} \cos \gamma = \frac{p a h}{2} \cos^2 \gamma$.

Diese Componente zerlegt fich nun in eine Seitenkraft, welche dieselbe Richtung hat, wie W, und in eine normal hierzu stehende. Die erstere ist

Ein genau gleicher Winddruck wirkt (Fig. 337) auf die andere Fläche F_1 ; mithin ift der gefammte Winddruck auf die Pyramide

$$W+2 W_{1} = \frac{p \ a \ h}{2} (1+2 \ \cos^{3} 45^{\circ}) = \frac{p \ a \ h}{2} \left(1+\frac{2 \ \cos 45^{\circ}}{2}\right) = 0,854 \ p \ a \ h \ . \ 352.$$

Der Angriffspunkt diefer Kraft liegt in der Höhe $\frac{h}{3}$ über der Basis der Pyramide.

Für irgend einen Pyramidentheil (Fig. 338) der Höhe z erhält man, wenn die Seite des Achteckes, welches für diefen Theil die Basis bildet, mit x und die ganze Basisbreite mit y bezeichnet wird,

$$W_z = 0,854 p x z \dots 353.$$

 W_z greift in der Höhe $\frac{z}{3}$ über diefer Bafis an.

Aufser W_z wirke auf das Thurmkreuz (Fig. 338) noch ein Winddruck W in der Höhe eo über dem First; alsdann ist das Moment des Windes, bezogen auf die horizontale, in der Bafis des betreffenden Thurmftückes gelegene Schwerpunktsaxe II des Querschnittes

Diefes Moment muss durch die Spannung der Sparren an der betrachteten Stelle aufgehoben werden.

Sind die Spannungen in den vier Sparren 1, 2, 5, 6, welche um $\frac{y}{2}$ von der Axe II abstehen, S_1 , diejenigen in den vier um $\frac{x}{2}$ von der Axe II abstehenden Sparren 3, 4, 7, 8 gleich S2, fo ift, wenn mit geringem Fehler der Sparrenwinkel gegen die Horizontalebene gleich a gesetzt wird, das Moment der Sparrenfpannungen für die Axe II gleich $2 S_1 y \sin \alpha + 2 S_2 x \sin \alpha$; folgliche muß $M_z = (2 S_1 y + 2 S_2 x) \sin \alpha$ fein. Man kann annehmen, dafs bei gleicher Querfchnittsfläche aller Sparren stattfindet

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x}{y}, \quad \text{d. h.} \quad S_2 = \frac{S_1 x}{y}, \quad \text{alfo} \quad M_z = \left(2 S_1 y + \frac{2 S_1 x^2}{y}\right) \sin \alpha,$$
$$M_z = \frac{2 S_1}{y} (y^2 + x^2) \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad S_1 = \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \cdot \cdot \cdot 355.$$

Für M_z find der Reihe nach die Werthe einzuführen, welche fich bei den verschiedenen Höhen z ergeben. Diese Spannung kann in jedem Sparren sowohl

466. Spannungen in den Sparren.

als Zug, wie als Druck ftattfinden, weil der Wind von allen Seiten kommen kann. Man erhält demnach

Die genaue Berechnung der bei einfeitiger Windbelaftung in den Ringen und in den Diagonalen entstehenden Spannungen ist fehr complicirt. Wir machen, um eine einfache Rechnung zu erhalten, die

Annahme, dafs wir, wenn der Wind die Flächen EF, FO und EL (Fig. 339) belaftet, die Punkte L und O als fefte Stützpunkte betrachten können. Alsdann wirkt auf EF die Kraft N_1 , auf EL und FO je $N_1 \cos^2 45^\circ = \frac{N_1}{2}$; in E und F wirken alsdann je $\frac{N_1}{2}$ und $\frac{N_1}{4}$, wie in Fig. 340 gezeichnet. Die Gleichgewichtsbedingungen für Punkt F lauten nun:



467. Spannungen in den Ringen.

468.

Spannungen

in den

Diagonalen.



woraus

$$R_{2} = -\frac{N_{1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos 45^{\circ}\right)}{\cos 45^{\circ}} = -\frac{N_{1}}{2}\left(\frac{1}{\cos 45^{\circ}} + \frac{1}{2}\right) = -0_{,957} N_{1} \quad .356.$$

$$R_{1} = R_{2}\sin 45^{\circ} - \frac{N_{1}}{4}\sin 45^{\circ} = -\frac{N_{1}}{2}\left(\frac{\sin 45^{\circ}}{\cos 45^{\circ}} + \frac{\sin 45^{\circ}}{2} + \frac{\sin 45^{\circ}}{2}\right),$$

$$R_{1} = -0_{,854} N_{1} \quad ... \quad$$

Da der Wind von allen Seiten kommen kann, fo find alle Ringtheile für die Spannung $R_2 = -0.957 N_1$ zu dimenfioniren.

Um die in den Dachflächen angebrachten Diagonalen zu berechnen, bestimme man die auf die einzelnen Punkte L, bezw. O (Fig. 339 u. 340) wirkenden horizontalen Kräfte. Auf L und O wirkt je R_2 , und es zerlegt fich R_2 jederfeits in eine Componente $R_2 \cos 45^\circ$, welche in die Linie L P, bezw. O T fällt, und in eine normal dazu gerichtete Componente $R_2 \sin 45^\circ$, welche in die Richtung LO fällt. Um die beiden letzteren Componenten aufzuheben, empfiehlt fich die Anbringung der Zughorizontalen LO, die in Fig. 339 punktirt ift; der in diefer herrschende Zug ift $R_2 \sin 45^\circ$. Die in die Ebene LPC, bezw. OTC fallenden Componenten find nun durch das in diefen angeordnete Gitterwerk auf die festen Stützpunkte der Thurmbafis zu übertragen. Um die Diagonalen zu berechnen, denken wir wieder zunächft die beiden Dachflächen durch einen in der Symmetrieebene liegenden, ideellen Binder erfetzt, ermitteln die unter dem Einfluffe der Laften $R_2 \cos 45^\circ$ in demfelben entstehenden Diagonalspannungen auf bekannte Weise und finden aus diesen ideellen Diagonalfpannungen die wirklichen Diagonalfpannungen genau fo, wie in Art. 464, S. 434 angegeben ift. Als Belaftung der einzelnen Knotenpunkte des ideellen Binders ift felbftverftändlich überall 2 $R_2 \cos 45^\circ$ einzuführen.

3) Stabilität der Thurmdächer.

Durch die Windbelaftung werden die Sparren an der Windfeite auf Zug, diejenigen an der Unterwindfeite auf Druck beanfprucht; durch das Eigengewicht erhalten alle Sparren Druck. Wenn der in dem Sparren mögliche gröfste Zug in Folge des Winddruckes gröfser ift, als der durch das Eigengewicht erzeugte Druck, fo ift Gleichgewicht nur möglich, wenn auf den Sparren Seitens des Auflagers ein Zug ausgeübt wird, welcher wenigftens fo grofs ift, wie der gröfste im Sparren herrfchende refultirende Zug. Diefer Zug Seitens des Auflagers wird durch Verankerung der Sparren mit dem Thurmmauerwerk erzeugt, und es mufs das Gewicht des an den Anker gehängten Mauerwerkes, welches als Zug auf den Sparren wirkt, wenigftens fo grofs fein, wie der gröfstmögliche Zug in demfelben. Es empfiehlt fich, die Verankerung weiter hinabzuführen, etwa fo weit, dafs das Mauergewicht doppelt fo grofs ift, als der gröfste Zug im Sparren.

Literatur.

Bücher über »Statik der Dachftühle«.

UNWIN, W. Wrought-iron bridges and roofs etc. London 1870.

CORDIER, E. Equilibre stabile des charpentes en fer, bois et fonte. Paris 1872.

- RITTER, Dr. A. Elementare Theorie und Berechnung eiferner Dach- und Brücken-Conftructionen. 3. Aufl. Hannover 1873.
- FABRÉ, V. Théorie des charpentes, donnant des règles pratiques pour la construction des fermes et autres appareils en bois et en fonte. Paris 1873.
- CARGILL, Th. The strains upon bridge girders and roof truffes etc. London 1873.

SHREVE, S. A treatife on the strength of bridges and roofs etc. New-York 1873.

TETMAJER, L. Die äufseren und inneren Kräfte an ftatisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen. Zürich 1875.

NICOUR, Ch. Calcul d'un comble en fer du système Polonceau. Paris 1875.

SCHWEDLER, W. Die Conftruction der Kuppeldächer. 2. Aufl. Berlin 1878.

TRÉLAT, E. La rigidité dans les combles. Paris 1878.

Deutsche bautechnische Taschenbibliothek. Heft 10: Berechnung der Dachwerke. Von W. Jeep. Leipzig 1876.

4. Abfchnitt.

Gewölbe.

469. Allgemeines. Die Gewölbe find aus einzelnen, mehr oder weniger keilförmig geftalteten Elementen zufammengefetzte Bauconftructionen, welche bei verticalen Belaftungen fchiefe Drücke auf die fie ftützenden Conftructionstheile ausüben. Indem wir die verfchiedenen Gewölbearten hier als bekannt vorausfetzen, bemerken wir, dafs wir uns im vorliegenden Abfchnitt hauptfächlich mit den Tonnen-, bezw. Kappengewölben, den Kreuzgewölben und den Kuppelgewölben befchäftigen werden, auf welche alle anderen Gewölbearten leicht zurückgeführt werden können.

Der allgemeinen theoretifchen Unterfuchung foll das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe zu Grunde gelegt werden; dabei werden wir ftets, falls nichts Anderes