Tabelle I.
Eigengewichte
von Decken-Conftructionen (Zwifchendecken).

Bezeichnung der Conftruction	Entfernung der Balken von Mitte zu Mitte 0,90 m — Balkenftärke in Centim. 20 × 25	0,90 m: 25 × 30	1,20 m: 20 × 25	1,20 m: 25 × 30
Balken mit Fussbodendielen	61	81	56	66
Einfache Caffetten-Decke ohne Stuck	122	142	112	132
Einfache Caffetten-Decke mit halbem Windelboden und Stuck	279	330	305	376
Geftreckter Windelboden mit Lehm	203	228	198	213
Halber Windelboden	254	305	279	345
Ganzer Windelboden	355	406	380	447
	Kilogr. pro 1 qm Deckenfläche.			

Tabelle II.
Mobile Belaftungen

Belaftung	
in Wohnräumen	152
» Tanzfälen	253
» Heuböden	406
» Fruchtböden	457
» Waarenfpeichern	760
durch Menfchengedränge:	
genügende Annahme	400
gröfste Annahme	560
	Kilogr. pro 1 qm Deckenfläche.

Das Gewicht der Windelböden erhöht fich für eine Zunahme der Balkenhöhe von je 2,5 cm um ca. 25 kg pro 1 qm Deckenfläche.

Tabelle III.
Gewichte der Decken-Conftructionen einfchl. der mobilen Belaftung.

Art der Decke	Gewicht	Art der Decke	Gewicht
Balkenlage mit einfacher Dielung ohne Stakung	280	Gewölbte Decken zwifchen eifernen Trägern, 1/2 Stein ftark, mit Hintermauerung, Fufsbodenlage und Dielung	750
desgl. geftakter Windelboden mit Lehm-Eftrich	430	Diefelbe Decke ohne Fufsboden	700
desgl. ausgeftakt und verfchalt in Wohnhäufern	500	diefelbe, 1/4 Stein ftark, mit Fufsboden .	525
desgl. bei Tanzfälen	710	diefelbe, ohne Fufsboden	485
desgl. in Werkftätten	760	Decke in Salzfpeichern, wenn 3 Tonnenreihen über einander liegen	800
desgl. mit ganzem Windelboden	580	Balkenlage in Kornfpeichern	850
Dachbalkenlage in Wohngebäuden . . .	735	Balkenlage in Wollfpeichern	750
	Kilogr. pro 1 qm Deckenfläche.		Kilogr. pro 1 qm Deckenfläche.

In den folgenden Artikeln foll für die wichtigften Balkenträger und für verfchiedene Belaftungsarten die Ermittelung der Auflager-Reactionen, der Transverfalkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung und eventuell auch auf dem der Conftruction gezeigt werden.

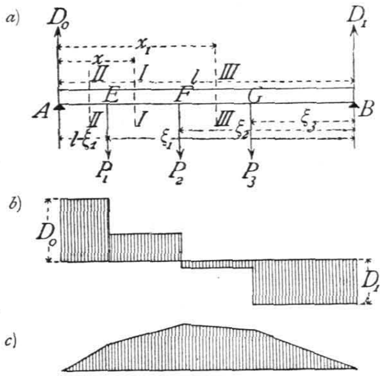
1) Balkenträger auf zwei Stützen.

Bei den Balkenträgern auf zwei Stützen können für die im Hochbauwefen vorkommenden Belaftungsarten hauptfächlich die nachftehenden vier Fälle unterfchieden werden.

Erfter Fall: Der Träger wird durch beliebige Einzellaften belaftet. 360. Belaftung durch Einzellaften.

Die Stützweite des Balkenträgers (Fig. 153 *a*) fei (von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet) l; der Träger werde durch die neben ftehend näher bezeichneten Einzellaften P_1, P_2, P_3 belaftet. Es find die Transverfalkräfte und Momente für fämmtliche Querfchnitte des Balkens zu ermitteln.

Fig. 153.



α) Berechnung. Zunächft find die nicht gegebenen äufseren Kräfte, die Auflager-Reactionen D_0 und D_1 zu beftimmen. Da Gleichgewicht ftattfindet, fo ift die algebraifche Summe der ftatifchen Momente aller Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um D_0 zu ermitteln, wählt man zweckmäfsig einen Punkt auf der Richtungslinie von D_1 als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte D_1 das ftatifche Moment Null habe, alfo nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann ift, wenn B als Drehpunkt für die Gleichung der ftatifchen Momente gewählt wird:

$$O = D_0\, l - P_1\, \xi_1 - P_2\, \xi_2 - P_3\, \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1\, \xi_1}{l} + \frac{P_2\, \xi_2}{l} + \frac{P_3\, \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 152.$$

Wählt man in gleicher Weife ein zweites Mal A als Drehpunkt, fo ergiebt fich

$$D_1 = \frac{P_1\,(l-\xi_1)}{l} + \frac{P_2\,(l-\xi_2)}{l} + \frac{P_3\,(l-\xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P\,(l-\xi)}{l}\right] \quad . \; . \; 153.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellaft zur Gefammt-Auflager-Reaction leiftet, ift, wie man aus den Gleichungen 152. und 153. erfieht, ganz unabhängig von der Gröfse und Art der übrigen Belaftungen; die Auflager-Reactionen find die bezw. Summen der durch die einzelnen Laften erzeugten Partial-Auflager-Reactionen.

Nunmehr laffen fich die Transverfalkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querfchnitt *I I*, im Abftande x vom linken Auflager A, ift die Transverfalkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äufseren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - P_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 154.$$

In diefem Ausdrucke kommt die Abfciffe x des Querfchnittes gar nicht vor; die Transverfalkraft ift alfo, fo lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von x, d. h. conftant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querfchnitte zwifchen E und F; denn für einen Querfchnitt links von E, etwa für *II II*, ift

$$Q_{II} = D_0 = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right);$$

für einen folchen rechts von F, etwa für *III III*, ift

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - \sum_0^{x_1} (P).$$

Es folgt daraus: Falls eine Belaftung nur durch Einzellaften ftattfindet, ift die Transverfalkraft für alle Querfchnitte zwifchen je zwei Laftpunkten, fo wie zwifchen einem Auflagerpunkt und einem Laftpunkt conftant; eine Aenderung der Transverfalkraft findet nur in den Laftpunkten ftatt.

Die Transversalkraft hat denselben Werth, wenn der Trägertheil rechts von dem betreffenden Querschnitt betrachtet wird. Für den Querschnitt $I\,I$ ergiebt sie sich für diesen Fall zu

$$Q_x^1 = -D_1 + P_2 + P_3 = -\frac{P_1(l-\xi_1)}{l} - \frac{P_2(l-\xi_2)}{l} - \frac{P_3(l-\xi_3)}{l} + P_2 + P_3,$$

$$Q_x^1 = \frac{P_1\,\xi_1}{l} + \frac{P_2\,\xi_2}{l} + \frac{P_3\,\xi_3}{l} - P_1 = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - P_1,$$

d. h. genau wie in Gleichung 154.

Dieses Resultat ist selbstverständlich, weil die auf beide Trägertheile wirkenden Resultanten einander genau gleich sein müssen, damit Gleichgewicht stattfinde; der entgegengesetzte Sinn beider Transversalkräfte ist durch das Vorzeichen berücksichtigt, indem die nach oben auf den Theil rechts wirkenden Kräfte negativ eingeführt sind.

Das Gesetz der Aenderung der Transversalkräfte wird sehr anschaulich, wenn man in jedem Querschnitte die daselbst stattfindende Transversalkraft als Ordinate nach beliebigem, aber für alle Querschnitte gleichem Massstabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Es ergiebt sich die in Fig. 153 *b* gezeichnete Linie, in welcher die positiven Werthe von der Abscisse nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen sind.

Schliesslich erübrigt noch die Bestimmung der Momente.

Für den Querschnitt $I\,I$ ist:

$$M_I = D_0\,x - P_1(x - l + \xi_1) = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) x - P_1(x - l + \xi_1) \quad . \quad . \quad 155.$$

Für den Querschnitt $III\,III$ ist

$$M_{III} = D_0\,x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - P_2(x_1 - l + \xi_2) = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) x_1 - \sum_0^{x_1} P(x_1 - l + \xi) \quad 156.$$

Innerhalb je zweier Lastpunkte, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt ändert sich demnach das Moment nach dem Gesetze einer geraden Linie; denn für verschiedene Werthe von x_1, bezw. x bleiben alle in den Gleichungen 155. und 156. vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von x_1 und x constant; diese einzigen Variabelen kommen aber nur in der ersten Potenz vor. Trägt man also auch hier in den verschiedenen Querschnitten die Werthe von M als Ordinaten auf, so erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Lastpunkt ändert sich der Ausdruck für M, also auch die Gerade. In Fig. 153 *c* ist die Aenderung der Momente graphisch dargestellt.

Da eine Gerade ihre grösste Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, letztere aber mit den Lastpunkten zusammenfallen, so folgt, dass die grössten Momentenwerthe an den Lastpunkten stattfinden.

B e i s p i e l. Ein schmiedeeiserner Unterzug (Fig. 154) von 8^m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abstand von Mitte zu Mitte je 1^m betrage. Jeder Balken belaste den Unterzug mit einem Gewicht gleich 3000^{kg}. Es sind die Auflager-Reactionen, Transversalkräfte und Momente zu ermitteln. Nach Gleichung 152. ist

$$D_0 = \sum_0^l \left(\frac{3000\,.\,\xi}{8}\right) = \frac{3000}{8}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10\,500^{kg},$$

eben so nach Gleichung 153.

$$D_1 = \frac{3000}{8}\,28 = 10\,500^{kg}.$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belastungen symmetrisch zur Mitte des Balkens liegen und die Abstände derselben gleich sind, fasst man bequemer alle Lasten zu einer Resultirenden, hier ihrer

Summe zusammen, die in der Balkenmitte angreift. Es ist alsdann $R = 7 \,.\, 3000 = 21\,000^{\text{kg}}$ und $D_0 = \frac{21\,000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10\,500^{\text{kg}} = D_1$.

Die Transversalkräfte sind für die verschiedenen Querschnitte

zwischen A und $I = 10\,500^{\text{kg}}$,
» I » $II = 10\,500 - 3000 = 7500^{\text{kg}}$,
» II » $III = 10\,500 - 3000 - 3000 = 4500^{\text{kg}}$,
» III » $IV = 10\,500 - 3 \,.\, 3000 = 1500^{\text{kg}}$,
» IV » $V = 10\,500 - 4 \,.\, 3000 = -\ 1500^{\text{kg}}$,
» V » $VI = 10\,500 - 5 \,.\, 3000 = -\ 4500^{\text{kg}}$,
» VI » $VII = 10\,500 - 6 \,.\, 3000 = -\ 7500^{\text{kg}}$,
» VII » $B = 10\,500 - 7 \,.\, 3000 = -\ 10\,500^{\text{kg}}$.

Im Lastpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Transversalkraft von den positiven zu den negativen Werthen über.

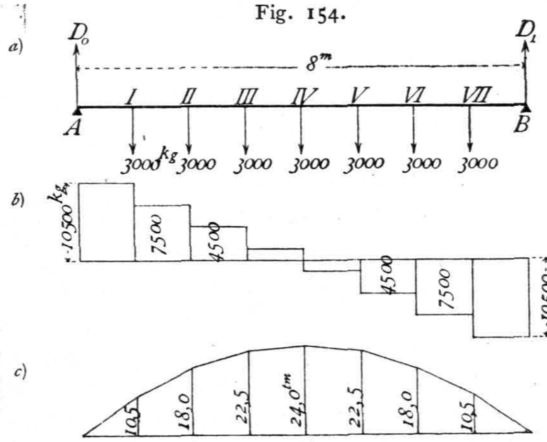
Die Momente in den Lastpunkten sind:

$M_I = 10\,500 \,.\, 1 = 10\,500^{\text{kgm}} = 1\,050\,000^{\text{kgcm}}$,
$M_{II} = 10\,500 \,.\, 2 - 3000 \,.\, 1 = 18\,000^{\text{kgm}} = 1\,800\,000^{\text{kgcm}}$,
$M_{III} = 10\,500 \,.\, 3 - 3000 \,.\, 1 - 3000 \,.\, 2 = 22\,500^{\text{kgm}} = 2\,250\,000^{\text{kgcm}}$,
$M_{IV} = 10\,500 \,.\, 4 - 3000\,(1 + 2 + 3) = 24\,000^{\text{kgm}} = 2\,400\,000^{\text{kgcm}}$,
$M_V = 10\,500 \,.\, 5 - 3000\,(1 + 2 + 3 + 4) = 22\,500^{\text{kgm}} = 2\,250\,000^{\text{kgcm}} = M_{III}$,
$M_{VI} = M_{II}$, $M_{VII} = M_I$, $M_A = M_B = 0$.

Hiernach sind die Momente und Transversalkräfte in Fig. 154 *c* und 154 *b* aufgetragen.

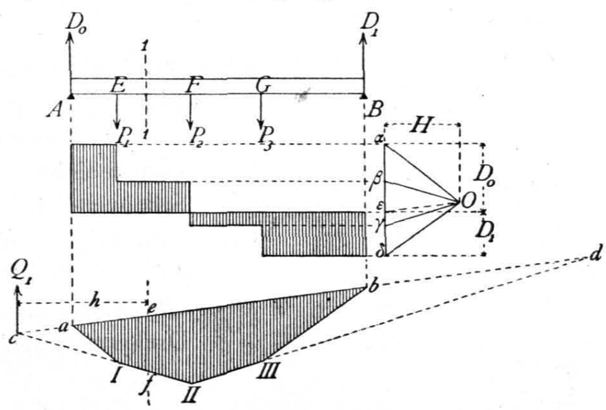
β) **Graphische Ermittelung.** Um die Auflager-Reactionen zu ermitteln, construire man für die gegebenen Kräfte das Kraft- und Seilpolygon.

Fig. 154.



Das Kraftpolygon wird hier, da alle Kräfte gleiche Richtung haben, eine Gerade sein. Es sei (Fig. 155) $P_1 = \alpha\beta$, $P_2 = \beta\gamma$, $P_3 = \gamma\delta$; alsdann wird D_1 an δ zu tragen sein. Die Gröfse von D_0 und D_1 ist vorläufig unbekannt; jedoch wissen wir, dafs das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte sich schliesst; der Endpunkt von D_0 fällt also mit α zusammen, und es ist $\delta\alpha = D_0 + D_1$. Wo der Endpunkt von D_1, welcher Punkt auch der Anfangspunkt von D_0 ist, auf der Linie $\delta\alpha$ liegt, ist noch nicht bekannt; die Ermittelung dieses Punktes geschieht mit Hilfe des Seilpolygons. Letzteres mufs sich gleichfalls schliessen, weil die Kräfte im Gleichgewicht sind. Man construire also für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon $a\ I\ II\ III\ b$; die letzte Seite des Seilpolygons ist demnach die Verbindungslinie der beiden Punkte a und b, d. h. desjenigen Punktes, in dem sich die der ersten Last vorhergehende Seilpolygonseite mit der linken Auflager-Verticalen schneidet, und desjenigen Punktes, in welchem sich die auf die letzte Last folgende Seilpolygonseite mit der rechten Auflager-Verticalen trifft. Man nennt diese Linie die Schlufslinie des Seilpolygons. Im Punkte a halten sich nun folgende Kräfte im Gleichgewicht: die Auflager-Reaction D_0, die Spannung in der Seilpolygonseite $a\ I$

Fig. 155.



und diejenige in der Seilpolygonseite oder Schlufslinie ab. Von allen drei Kräften sind die Richtungen gegeben, von einer — der Seilspannung in aI — auch die Gröfse; dieselbe ist gleich $O\alpha$. Man kann also für diese drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, construiren, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft $O\alpha$, durch α eine Parallele zur Richtung von D_0, durch den anderen Endpunkt, durch O eine Parallele zur Schlufslinie ab zieht. Der Schnittpunkt ε beider Linien ergiebt in $\varepsilon\alpha$ die Gröfse von D_0, woraus folgt, dafs $\delta\varepsilon = D_1$ ist. Es ergiebt sich hieraus die Regel:

Die Auflager-Reactionen werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol das Seilpolygon construirt, die Schlufslinie und parallel zu dieser eine Linie durch den Pol zieht. Letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach Gröfse und Richtung die Auflager-Reactionen darstellen.

Die Transversalkräfte lassen sich auf graphischem Wege in folgender Weise ermitteln.

Für alle Querschnitte von A bis E ist die Transversalkraft gleich D_0, d. h. gleich $\varepsilon\alpha$ (Fig. 155). Zieht man also durch ε und α je eine Horizontale, so giebt deren Abstand die Gröfse der Transversalkraft zwischen A und E an. Zwischen E und F ist die Transversalkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\alpha - \alpha\beta = \varepsilon\beta$; man ziehe also durch β eine horizontale Linie; alsdann giebt deren Abstand von der durch ε gezogenen Geraden an jeder Stelle zwischen E und F die Gröfse der Transversalkraft. Eben so ist zwischen F und G die Strecke $\varepsilon\gamma$, zwischen G und B die Strecke $\varepsilon\delta$ die Transversalkraft.

Die Transversalkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 267, S. 239 durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonseiten, welche die beiden äufsersten Kräfte begrenzen. Für einen Querschnitt zwischen E und F sind die beiden bezw. Seilpolygonseiten die Linien $I\,II$ und ab; die Transversalkraft geht also durch c. Für jeden Querschnitt zwischen II und III geht die Transversalkraft durch d etc.

Die graphische Bestimmung der Momente geschieht in nachstehender Weise.

Für einen beliebigen Querschnitt II (Fig. 155) ist das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Transversalkraft. Es ist demnach $M_1 = Q_1 h$. Nun ist $\Delta\, cef \backsim \Delta\, O\varepsilon\beta$, mithin $\frac{\overline{ef}}{h} = \frac{\overline{\varepsilon\beta}}{H}$, und, da $\overline{\varepsilon\beta} = Q_1$ ist, $\overline{ef} = \frac{Q_1 h}{H} = \frac{M_1}{H}$, also $M_1 = H \,.\, \overline{ef}$.

In vorstehendem Ausdruck für M ist H, der horizontale Abstand des Poles von der Kraftlinie oder die Poldistanz, für alle Querschnitte constant; die Gröfse des Momentes ist also mit $\overline{ef}$, d. h. der verticalen Höhe des Seilpolygons variabel. Daraus folgt:

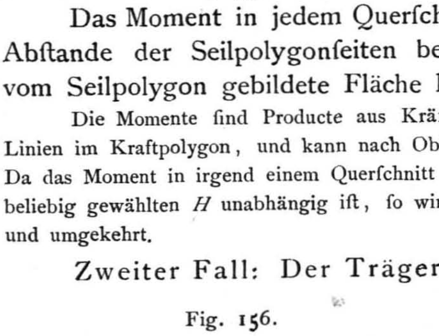
Das Moment in jedem Querschnitte ist gleich dem Producte aus dem verticalen Abstande der Seilpolygonseiten bei diesem Querschnitte in die Poldistanz. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heifst die Momentenfläche.

Die Momente sind Producte aus Kräften und Längen; H ist eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit 10^t, 20^t etc. Da das Moment in irgend einem Querschnitt einen ganz bestimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten H unabhängig ist, so wird die Höhe des Seilpolygons desto gröfser, je kleiner H ist und umgekehrt.

361. Gleichförmig vertheilte Belastung.

Zweiter Fall: Der Träger wird über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Fig. 156.



α) Berechnung. Die Belastung pro Längeneinheit des Trägers (Fig. 156) sei p, die Stützweite desselben sei l; alsdann ist die Resultirende gleich der Gesammtlast, also gleich pl und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der statischen Momente für B als Drehpunkt heifst demnach

$$D_0 l - p l \frac{l}{2} = 0,$$

und es wird

$$D_0 = \frac{p\,l}{2}; \quad \text{eben fo} \quad D_1 = \frac{p\,l}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 157.$$

Die Transverfalkraft beträgt für einen beliebigen Querfchnitt C im Abftande x von A

$$Q_x = D_0 - p\,x = \frac{p\,l}{2} - p\,x = \frac{p}{2}(l - 2\,x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 158.$$

Die graphifche Darftellung der Veränderung der Transverfalkraft ergiebt die Linie der Gleichung 158., d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ift $Q_0 = \frac{pl}{2}$; für $x = l$ ift $Q_l = -\frac{pl}{2}$. Q_x wird Null für $l - 2\,x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie $b\,d$ (Fig. 156 b) ergeben die Transverfalkräfte.

Das Moment für den Punkt C ift

$$M_x = D_0\,x - p\,x\,\frac{x}{2} = \frac{p\,l}{2}\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p}{2}(l\,x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 159.$$

Die graphifche Darftellung der Momente für die verfchiedenen Querfchnitte ergiebt die Curve der Gleichung 159., d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ift $M_0 = 0$; für $x = l$ ift $M_l = 0$. M_x wird ein Maximum für $\frac{d\,M_x}{d\,x} = \frac{p}{2}(l - 2\,x) = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$; demnach

$$M_{max} = \frac{p}{2}\left[l\,\frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = \frac{p\,l^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 159_a.$$

Hiernach kann die Parabel leicht conftruirt werden (Fig. 156 c).

Beifpiele. 1) Ein Corridor von 4 m Lichtweite ift mit einer Decke aus Kappengewölben zwifchen eifernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen fei 2,2 m; die Träger follen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu 4,3 m, d. i. zu 430 cm angenommen werden; alsdann ift $l = 430$ cm. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von 2,2 m Breite und 1 m Länge; mithin ift die Laft pro laufendes Meter Träger, bei einer Maximalbelaftung von 750 kg pro 1 qm Grundfläche, gleich 2,2 . 750 = 1650 kg und pro laufendes Centimeter Träger p = 16,5 kg. Die Auflager-Reactionen find alfo nach Gleichung 157.

$$D_0 = D_1 = \frac{16{,}5 \cdot 430}{2} = 3547 \text{ kg}$$

und das Moment nach Gleichung 159_a.

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16{,}5 \cdot 430^2}{8} = 381\,356 \text{ kgcm}.$$

Nun ift der Querfchnitt nach Art. 301, S. 263 fo zu beftimmen, dafs $\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381\,356}{700} = 544{,}8$ ift. Falls ein I-Querfchnitt gewählt wird, ift Nr. 28 der »Deutfchen Normalprofile« (vergl. die Tabelle auf S. 198) zu wählen, da bei demfelben $\frac{\mathfrak{J}}{a} = 547$ ift [165]).

[165]) Man mufs beim Einfetzen der Zahlenwerthe für p und l vorfichtig fein. Es ift eigentlich felbftverftändlich, dafs, wenn man l in Metern einführt, p die Belaftung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn l in Centimetern eingeführt wird, p die Belaftung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner K, die zuläffige Banfpruchung in Kilogramm pro 1 qcm und das Moment M in Kilogramm-Centimetern an, fo find in Gleichung 36.: $\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für $\mathfrak{J}$ und a auf Centimeter bezogen einzufetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüffig fein, hier befonders darauf aufmerkfam zu machen, da von Anfängern und Ungeübten oft in diefer Hinficht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt fich, ftets alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

2) Es sollen die Dimensionen bestimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6^m zu geben sind, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte $0{,}9^m$ und die Gesammtbelastung der betreffenden Decke (Eigengewicht und mobile Last) 500^{kg} pro 1^{qm} beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von $0{,}9^m$ Breite zu tragen, d. h. eine Last von $0{,}9 \cdot 500 = 450^{kg}$; mithin beträgt die Belastung pro laufendes Centimeter des Balkens $p = 4{,}5^{kg}$. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite l nehmen wir zu $6{,}3^m = 630^{cm}$ an. Das gröfste Moment, welches hier, da der Balkenquerschnitt constant ist, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden mufs, findet in der Balkenmitte statt, und es ist nach Gleichung 159_a.

$$M_{max} = \frac{4{,}5 \cdot 630^2}{8} = 223\,256^{kgcm};$$

mithin nach Art. 303, S. 264

$$\frac{J}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223\,256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 43. $J = \frac{b\,h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ ist, wird $\frac{b\,h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25^{cm}$ angenommen wird,

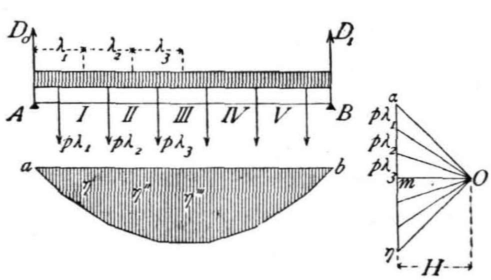
$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 3721}{25}} = 29{,}9^{cm} = \sim 30^{cm}.$$

Es genügt sonach ein Querschnitt von 25×30^{cm}.

β) Graphische Ermittelung. Im vorliegenden Falle werden die Auflager-Reactionen, Momente und Transversalkräfte eben so ermittelt, wie oben für Einzellasten gezeigt worden ist.

Man zerlegt die ganze Belastung in einzelne Theile $p\,\lambda_1$, $p\,\lambda_2$, $p\,\lambda_3 \ldots$ (Fig. 157) von den Längen λ_1, λ_2, $\lambda_3 \ldots$ Diese Einzellasten wirken in den Mitten der Abtheilungen λ. Für diese Einzellasten wird nun Kraft- und Seilpolygon construirt und die Schlufslinie $a\,b$ gezogen; alsdann giebt die durch O zu $a\,b$ gezogene Parallele $O\,m$ die Auflager-Reactionen $D_1 = \eta\,m$ und $D_0 = m\,a$.

Fig. 157.



Das Seilpolygon ist eine gebrochene Linie, welche sich einer Curve desto mehr nähert, je kleiner die einzelnen Abtheilungen gewählt werden. In Wirklichkeit entspricht der stetigen Belastung eine stetig gekrümmte Linie, eine Curve als Seilpolygon. Die gezeigte Construction ergiebt eine Reihe von Punkten dieser Curve. In denjenigen Querschnitten nämlich, welche einer Abtheilungsgrenze entsprechen, in $I, II, III \ldots$, ist das durch die concentrirten Lasten erzeugte Moment genau eben so grofs, wie dasjenige durch die stetige Belastung bis zu diesem Querschnitte, und zwar ist nach Früherem $M_I = H\eta'$, $M_{II} = H\eta''$, $M_{III} = H\eta''' \ldots$ Diese Ordinaten η', η'', $\eta''' \ldots$, kurz alle Ordinaten, welche den Abtheilungsgrenzen entsprechen, sind also genau richtig, so dafs die genaue Curve leicht construirt werden kann.

362. Partielle gleichförmig vertheilte Belastung.

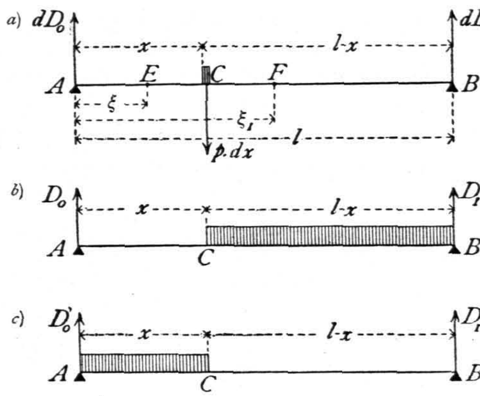
Dritter Fall: Der Träger wird auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Eine Belastung $p\,d\,x$ im Abstande x (Fig. 158) vom linken Auflager A erzeugt die Auflager-Reactionen

$$d\,D_0 = p\,d\,x\,\frac{l-x}{l} \quad \text{und} \quad d\,D_1 = p\,d\,x\,\frac{x}{l}.$$

Die Transversalkraft ist für jeden Querschnitt E links vom Lastpunkte C $Q = d\,D_0 = p\,d\,x\,\frac{l-x}{l}$, d. h. positiv, für jeden Querschnitt F rechts vom Lastpunkte $Q_1 = d\,D_0 - p\,d\,x = -\frac{p\,x\,d\,x}{l}$, d. h. negativ. Daraus folgt das Gefetz: Jede Belaftung rechts von einem Querfchnitte erzeugt in demfelben eine pofitive, jede Belaftung links von einem Querfchnitte erzeugt in demfelben eine negative Transverfalkraft. In irgend einem Querfchnitt, etwa C, wird demnach Q_{max} ftattfinden, wenn die ganze Abtheilung rechts von C belaftet, der übrige Trägertheil unbelaftet ift (Fig. 158 *b*). Q_{min} wird ftattfinden, wenn die Abtheilung AC links von C belaftet, die Abtheilung CB unbelaftet ift (Fig. 158 *c*).

Fig. 158.



Man erhält für die erftere Belaftungsart

$$D_0 = Q_{max} = \int_x^l p \, d\, x \left(\frac{l-x}{l}\right) = \frac{p}{2l}(l-x)^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 160.$$

für die zweite Belaftungsart

$$Q_{min} = \int_0^x - \frac{p\, x\, d\, x}{l} = - \frac{p}{2\, l} x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 161.$$

Das Moment für irgend einen Querfchnitt E (Fig. 158) links vom Laftpunkt C ift

$$d\, M = \xi \, d\, D_0 = p \, \frac{l-x}{l} \, \xi \, d\, x\,,$$

d. h. pofitiv; für einen Querfchnitt F rechts vom Laftpunkt C ift

$$d\, M_1 = \xi_1 \, d\, D_0 - p\, d\, x\, (\xi_1 - x) = p\, x\, d\, x \, \frac{l - \xi_1}{l}\,,$$

d. h. ebenfalls pofitiv. Hieraus folgt: Jede Belaftung erzeugt in allen Querfchnitten pofitive Momente. In jedem Querfchnitt findet demnach das gröfste Moment bei totaler Belaftung des Trägers mit der gleichförmigen Belaftung p pro Längeneinheit ftatt. Bei diefer Belaftung ift nach Gleichung 159. für einen Querfchnitt mit der Abfciffe x

$$M_x = \frac{p}{2}(l\, x - x^2),$$

und es ift dies das gröfste Moment im betreffenden Querfchnitt.

363. Gleichförmig vertheilte Laft u. Einzellaften.

Vierter Fall: Der Träger wird durch eine über feine ganze Länge gleichförmig vertheilte Belaftung und durch Einzellaften belaftet.

In Art. 360 ift nachgewiefen, dafs jede Laft eine von den anderen fonft noch auf dem Balken befindlichen Laften unabhängige Auflager-Reaction erzeugt, und dafs die Gefammt-Auflager-Reaction gleich der algebraifchen Summe der Partial-Reactionen ift. Daraus folgt, dafs auch die Transverfalkräfte und Momente für alle Querfchnitte gleich den algebraifchen Summen der bezw. Partial-Transverfalkräfte und -Momente find.

Wir brauchen alfo im vorliegenden Falle nur die Reactionen, Transverfalkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belaftungen, derjenigen durch Einzellaften und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Laft, fich ergeben haben, algebraifch zu addiren.

Hiernach betragen die Auflager-Reactionen (Fig. 159)

$$D_0 = \frac{p\,l}{2} + \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{p\,l}{2} + \sum_0^l \left[\frac{P\,(l-\xi)}{l}\right] \quad . \quad . \quad . \quad 162.$$

Die Tranſverſalkraft für einen Punkt G mit der Abſciſſe x_1 iſt

$$Q_{x_1} = D_0 - P_1 - p\,x_1 = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - \sum_0^{x_1}(P) + \frac{p}{2}\,(l - 2\,x_1) \quad . \quad . \quad . \quad 163.$$

und für den Punkt L mit der Abſciſſe x_2

$$Q_{x_2} = D_0 - P_1 - P_2 - p\,x_2 = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - \sum_0^{x_2}(P) + \frac{p}{2}\,(l - 2\,x_2).$$

Das Moment für den Punkt G iſt

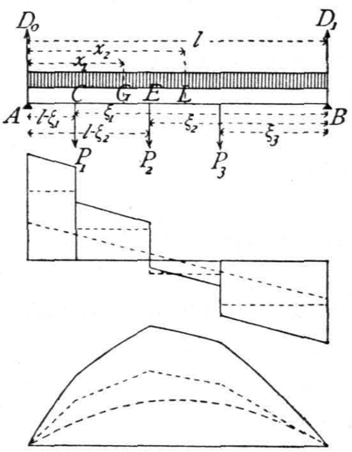
$$M_{x_1} = D_0\,x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - \frac{p\,x_1^2}{2} = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) x_1 - \sum_0^{x_1}\left[P(x_1 - l + \xi)\right] + \frac{p}{2}\,(l\,x_1 - x_1^2) \quad 164.$$

und für den Punkt L

$$M_{x_2} = D_0\,x_2 - P_1\,(x_2 - l + \xi_1) - P_2\,(x_2 - l + \xi_2) - \frac{p\,x_2^2}{2},$$

$$M_{x_2} = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) x_2 - \sum_0^{x_2}\left[P\,(x_2 - l + \xi)\right] + \frac{p}{2}\,(l\,x_2 - x_2^2) \quad . \quad . \quad . \quad 165.$$

Fig. 159.



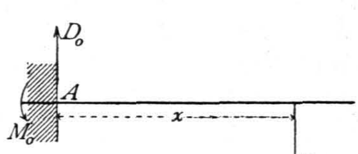
Die graphiſche Darſtellung der in den verſchiedenen Querſchnitten ſtattfindenden Tranſverſalkräfte und Momente wird gleichfalls erhalten, indem man die bei den einzelnen Belaſtungsarten ſich ergebenden Ordinaten der bezüglichen Darſtellungen algebraiſch addirt. Es ergeben ſich die in Fig. 159 gezeichneten Linienzüge, in denen die poſitiven Werthe nach oben, die negativen nach unten abgetragen ſind. Die punktirten Linien geben die Werthe von Q und M für Belaſtung nur durch Einzellaſten, bezw. für gleichförmig vertheilte Laſt; die voll gezogenen Linien geben die Summen.

Die Ermittelung der Momente etc. auf graphiſchem Wege ergiebt ſich aus dem auf S. 321 Geſagten ſo einfach, daſs darauf nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

2) Conſole-Träger.

364. Princip. Conſole-Träger ſind am einen Ende unterſtützte, am anderen Ende frei ſchwebende Träger. Als äuſsere Kräfte wirken auf dieſelben die Belaſtungen und die Reactionen der Unterſtützungsſtelle. Letztere laſſen ſich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht ſei, muſs zunächſt die algebraiſche Summe der Verticalkräfte gleich Null ſein, d. h., wenn die verticale Componente der Reaction bei A (Fig. 160) gleich D_0 iſt, wird $0 = D_0 - P$ oder

Fig. 160.



$$D_0 = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 166.$$

Eine äuſsere horizontale Belaſtung ſei nicht vorhanden; es wird alſo die Reaction keine horizontale Componente haben. Es muſs aber auch die algebraiſche