

2. Kapitel.

Träger.

Wie bereits im Eingange zum vorliegenden Abschnitte gefagt wurde, versteht man unter Trägern folche Bauconstructions, bei denen die Belastungen ausschließ- lich oder vorwiegend normal zur Richtung der Längsaxe wirken. Die Längsaxe kann fowohl eine gerade, wie eine gebrochene Linie, bezw. eine Curve sein. Dem- nach rechnen wir zu den Trägern im weiteren Sinne auch die Dachstühle, die Sprengwerke u. A., bei denen allerdings die Längsaxe nicht so deutlich vor die Augen tritt, wie etwa bei den gewöhnlichen Balken, ferner auch die Gewölbe, bei denen die Längsaxe eine Curve ist.

355-
Allgemeines.

Um die obige Definition der Träger auch für diese Constructions unbedingt richtig zu stellen, könnte man statt der Längsaxe die Verbindungslinie der Auf- lagerpunkte einführen und demnach die Träger folgender Mafsen erklären: Träger find Bauconstructions, bei denen die Belastungen ausschließ- lich oder vorwiegend normal zur Verbindungslinie der Auflager, d. h. der festen Stützpunkte der Con- struction, wirken. Im vorliegenden Kapitel sollen jedoch nur die Träger im engeren Sinne, welche man gewöhnlich als Balken bezeichnet, behandelt werden, während die Dachstühle und die Gewölbe in den beiden nächsten Abschnitten besprochen werden. Von den Sprengwerken werden wir bei den Dachstühlen eine Special- form kennen lernen.

Die auf die Bauconstructions wirkenden äußeren Kräfte find nach Art. 252, S. 231: 1) die Belastungen, d. h. die Eigengewichte und die Nutzlasten, und 2) die Reactionen der Auflager, d. h. diejenigen Kräfte, welche in den Auflager- punkten auf die Constructions übertragen werden.

356.
Äußere
Kräfte.

Die Träger haben stets zwei oder mehrere Stützpunkte, die fog. Auflager- punkte; selbst bei den Trägern, welche scheinbar nur einen Stützpunkt haben, bei den fog. Console-Trägern, ist Gleichgewicht ohne einen zweiten Stützpunkt nicht möglich, und es existirt in der That noch ein folcher.

Die Träger werden nach verschiedenen Gesichtspunkten eingetheilt. Nach der Art der Unterstützung unterscheidet man:

357-
Classification.

1) Balkenträger, d. h. Träger, auf welche bei verticalen Belastungen nur verti- cale Auflager-Reactionen wirken. Fig. 150 zeigt einen Balkenträger; D_0 und D_1 find die Auflager-Reactionen.

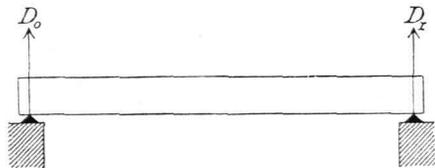


Fig. 150.

2) Sprengwerks- und Hängewerks- träger, d. h. Träger, welche bei verticalen Belastungen schiefe Auflager-Reactionen erleiden; diese schiefen Reactionen setzen sich aus einer horizontalen und einer verticalen Componente zusammen.

Wirkt die horizontale Componente auf den Träger als Druck, so hat man den Sprengwerksträger (Fig. 151); falls die Trägeraxe eine Curve ist, den Bogenträger. Wirkt die horizontale Componente auf den Träger als Zug, so hat man den Hängewerksträger (Fig. 152).

Fig. 151.

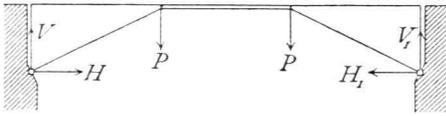
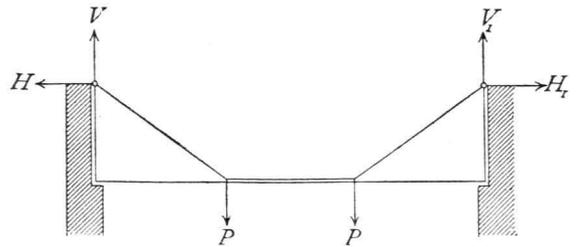


Fig. 152.



Für den Hochbau sind die Balkenträger weitaus die wichtigsten; die Sprengwerks- und Hängewerksträger werden im Hochbau nicht gern angewendet, weil die Mauern, welche die Stützpunkte der Träger bilden, bei diesen Trägerarten Horizontalkräfte zu erleiden haben, wodurch eine große Mauerstärke bedingt wird.

Bei den Balkenträgern ist die Längsaxe meistens eine Gerade oder weicht von der Geraden nicht sehr ab; man nennt deshalb die Balkenträger auch wohl gerade Träger.

Man unterscheidet ferner statisch bestimmte Träger und statisch unbestimmte Träger.

Unter statisch bestimmten Trägern verstehen wir solche, bei denen zur Ermittlung der Auflager-Reactionen die Gesetze der Statik fester Körper hinreichen; bei den statisch unbestimmten Trägern genügen zur Ermittlung der Auflager-Reactionen diese Gesetze nicht.

Zur Ermittlung der Auflager-Reactionen bietet die Statik fester Körper, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirkend angenommen werden können, drei Gleichungen (vergl. Art. 253, S. 232); falls also in den Reactionen nur drei Unbekannte enthalten sind, so genügen diese drei Gleichungen zur Ermittlung der Unbekannten, d. h. der Fall ist statisch bestimmt. Enthalten dagegen die Auflager-Reactionen mehr als drei Unbekannte, so genügen die drei Gleichungen zu deren Ermittlung nicht mehr; der Fall ist alsdann statisch unbestimmt. Die fehlenden Gleichungen liefert die Elastizitätslehre.

Hierbei können zwei Hauptfälle vorkommen:

1) Alle drei Gleichgewichtsbedingungen sind anwendbar, d. h. die Auflager-Reactionen enthalten sowohl horizontale, wie verticale Seitenkräfte. Dieser Fall tritt bei den Sprengwerksträgern, Bogenträgern etc. ein.

2) Nur zwei Gleichgewichtsbedingungen sind anwendbar. Dieser Fall tritt ein, wenn die äußeren Kräfte gar keine horizontalen Componenten haben, also z. B. wenn bei einem horizontalen Balken nur verticale Belastungen und verticale Auflager-Reactionen wirken. Alsdann bleiben von den in Art. 256, S. 234 angegebenen Gleichgewichtsbedingungen nur die folgenden:

- 1) die algebraische Summe der Verticalkräfte muß gleich Null sein;
- 2) die algebraische Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Drehpunkt, muß gleich Null sein.

Der einfachste Fall ist hier der des Balkens auf zwei Stützen. Wir haben bei diesem zwei Gleichungen und zwei Unbekannte (D_0 und D_1 in Fig. 150); der

Fall ist also statisch bestimmt. Sind dagegen drei Stützpunkte vorhanden, so haben wir drei Unbekannte (D_0 , D_1 und D_2), aber nur zwei Gleichungen, also einen statisch unbestimmten Fall.

Man nennt die Träger, welche mehr als zwei Stützpunkte haben, *continuirliche Träger*. Dieselben sind demnach statisch unbestimmte Träger.

Man hat von den statisch bestimmten, bezw. statisch unbestimmten Trägern wohl zu unterscheiden die statisch bestimmten, bezw. unbestimmten Systeme. Während es sich bei den ersteren um die Ermittlung der äußeren Kräfte handelt, ist bei den statisch bestimmten, bezw. unbestimmten Systemen die Frage, ob zur Ermittlung der inneren Kräfte die Gesetze der Statik fester Körper ausreichen oder nicht.

a) Äußere Kräfte der Balkenträger.

Die Querschnitte der Balken sind so zu bestimmen, daß die zulässigen Beanspruchungen auch unter ungünstigsten Bedingungen in keinem Theile der Querschnittsflächen je überschritten werden. Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, sind aber für die in den einzelnen Fasern entstehenden Beanspruchungen oder Spannungen die äußeren Kräfte maßgebend, insbesondere zwei von den äußeren Kräften abhängige Größen: die Biegemomente, auch kurz Momente genannt, und die Transversalkräfte, bei nur verticalen Kräften wohl auch Verticalkräfte genannt (vergl. Art. 295, S. 257). Für jeden Querschnitt ergibt sich bei einer gegebenen Belastung ein ganz bestimmtes Moment und eine ganz bestimmte Transversalkraft. Wir haben bei den vertical belasteten Balkenträgern nur mit verticalen Kräften zu thun und werden demnach zunächst und, falls das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird, stets solche voraussetzen.

358.
Momente
und
Transversal-
kräfte.

Ferner werden wir die Transversalkräfte als positiv einführen, wenn sie auf den Trägertheil links von dem betrachteten Querschnitt nach oben, bezw. auf den Trägertheil rechts von dem betrachteten Querschnitt nach unten wirken; als negativ, wenn sie auf den Theil links nach unten, bezw. auf den Theil rechts nach oben wirken. Die Momente nennen wir positiv, wenn sie auf den Theil links vom Querschnitt nach rechts drehend, also in der Richtung des Uhrzeigers, bezw. auf den Theil rechts vom Querschnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken so zu drehen streben, daß er seine convexe Seite nach unten kehrt.* Die entgegengesetzte Drehrichtung werden wir als negativ einführen, d. h. diejenige Drehrichtung, welche den Balken in eine nach oben convexe Lage dreht.

Die Belastungen sind entweder nach einem bestimmten Gesetze *continuirlich* über den Träger vertheilt — im Hochbau meistens gleichmäßig über die Horizontalprojection der Trägeraxe, oder sie greifen in einzelnen Punkten als *concentrirte* Lasten an. Zu den gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilten Belastungen rechnen wir die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau ist, auch wenn die Trägerquerschnitte nicht constant sind.

359.
Belastungen.

Für die gewöhnlichen Decken-Constructionen können die in nachfolgenden Tabellen angegebenen Eigengewichte angenommen werden¹⁶⁴⁾. Die Eigengewichte und mobilen Belastungen der Dächer folgen im nächsten Kapitel.

¹⁶⁴⁾ Nach: Heinzerling, F. Die angreifenden und widerstehenden Kräfte der Brücken- und Hochbau-Constructionen. 2. Aufl. Berlin 1876. S. 58 u. ff.
Deutscher Baukalender 1882.

Tabelle I.
Eigengewichte
von Decken-Constructionen (Zwifchendecken).

Bezeichnung der Construction	Entfernung der Balken von Mitte zu Mitte			
	0,90 ^m		1,20 ^m	
	Balkenstärke in Centim.			
	20×25	25×30	20×25	25×30
Balken mit Fussboden- dielen	61	81	56	66
Einfache Caffetten- Decke ohne Stuck	122	142	112	132
Einfache Caffetten- Decke mit halbem Windelboden und Stuck	279	330	305	376
Geftreckter Windel- boden mit Lehm	203	228	198	213
Halber Windelboden	254	305	279	345
Ganzer Windelboden	355	406	380	447

Kilogr. pro 1^{qm} Deckenfläche.

Tabelle II.
Mobile Belastungen
von Decken-Constructionen (Zwifchendecken).

Belastung	
in Wohnräumen	152
» Tanzsälen	253
» Heuböden	406
» Fruchtböden	457
» Waarenspeichern	760
durch Menschengedränge:	
genügende Annahme	400
größte Annahme	560

Kilogr. pro
1^{qm}
Decken-
fläche.

Das Gewicht der Windelböden erhöht sich für eine Zunahme der Balkenhöhe von je 2,5^{cm} um ca. 25^{kg} pro 1^{qm} Deckenfläche.

Tabelle III.
Gewichte der Decken-Constructionen einchl. der mobilen Belastung.

Art der Decke	Ge- wicht	Art der Decke	Ge- wicht
Balkenlage mit einfacher Dielung ohne Stakung	280	Gewölbte Decken zwischen eisernen Trä- gern, 1/2 Stein stark, mit Hintermauerung, Fußbodenlage und Dielung	750
desgl. gestakter Windelboden mit Lehm- Estrich	430	Dieselbe Decke ohne Fußboden	700
desgl. ausgefakt und verschalt in Wohn- häusern	500	dieselbe, 1/4 Stein stark, mit Fußboden	525
desgl. bei Tanzsälen	710	dieselbe, ohne Fußboden	485
desgl. in Werkstätten	760	Decke in Salzspeichern, wenn 3 Tonnen- reihen über einander liegen	800
desgl. mit ganzem Windelboden	580	Balkenlage in Kornspeichern	850
Dachbalkenlage in Wohngebäuden	735	Balkenlage in Wollspeichern	750

Kilogr.
pro 1^{qm}
Decken-
fläche.

Kilogr.
pro 1^{qm}
Decken-
fläche.

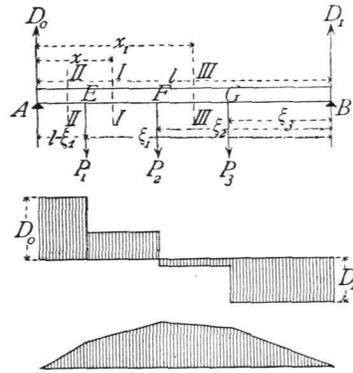
In den folgenden Artikeln soll für die wichtigsten Balkenträger und für verschiedene Belastungsarten die Ermittlung der Auflager-Reactionen, der Transversalkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung und eventuell auch auf dem der Construction gezeigt werden.

1) Balkenträger auf zwei Stützen.

Bei den Balkenträgern auf zwei Stützen können für die im Hochbauwesen vorkommenden Belastungsarten hauptsächlich die nachstehenden vier Fälle unterschieden werden.

Erster Fall: Der Träger wird durch beliebige Einzellasten belastet. Die Stützweite des Balkenträgers (Fig. 153 a) sei (von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet) l ; der Träger werde durch die neben stehend näher bezeichneten Einzellasten P_1, P_2, P_3 belastet. Es sind die Transversalkräfte und Momente für sämtliche Querschnitte des Balkens zu ermitteln.

Fig. 153.



a) Berechnung. Zunächst sind die nicht gegebenen äußeren Kräfte, die Auflager-Reaktionen D_0 und D_1 zu bestimmen. Da Gleichgewicht stattfindet, so ist die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um D_0 zu ermitteln, wählt man zweckmäÙig einen Punkt auf der Richtungslinie von D_1 als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte D_1 das statische Moment Null habe, also nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann ist, wenn B als Drehpunkt für die Gleichung der statischen Momente gewählt wird:

$$0 = D_0 l - P_1 \xi_1 - P_2 \xi_2 - P_3 \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} + \frac{P_3 \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) \dots \dots \dots 152.$$

Wählt man in gleicher Weise ein zweites Mal A als Drehpunkt, so ergibt sich

$$D_1 = \frac{P_1 (l - \xi_1)}{l} + \frac{P_2 (l - \xi_2)}{l} + \frac{P_3 (l - \xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P (l - \xi)}{l} \right] \dots \dots \dots 153.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellast zur Gesamt-Auflager-Reaction leistet, ist, wie man aus den Gleichungen 152. und 153. ersieht, ganz unabhängig von der GröÙe und Art der übrigen Belastungen; die Auflager-Reactionen sind die bezw. Summen der durch die einzelnen Lasten erzeugten Partial-Auflager-Reactionen.

Nunmehr lassen sich die Transversalkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querschnitt II , im Abstände x vom linken Auflager A , ist die Transversalkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äußeren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - P_1 \dots \dots \dots 154.$$

In diesem Ausdrucke kommt die Abscisse x des Querschnittes gar nicht vor; die Transversalkraft ist also, so lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von x , d. h. constant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querschnitte zwischen E und F ; denn für einen Querschnitt links von E , etwa für $II II$, ist

$$Q_{II} = D_0 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right);$$

für einen solchen rechts von F , etwa für $III III$, ist

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - \sum_0^{x_1} (P).$$

Es folgt daraus: Falls eine Belastung nur durch Einzellasten stattfindet, ist die Transversalkraft für alle Querschnitte zwischen je zwei Lastpunkten, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt constant; eine Aenderung der Transversalkraft findet nur in den Lastpunkten statt.

Die Transversalkraft hat denselben Werth, wenn der Trägertheil rechts von dem betreffenden Querschnitt betrachtet wird. Für den Querschnitt II ergibt sie sich für diesen Fall zu

$$Q_x^I = -D_1 + P_2 + P_3 = -\frac{P_1(l - \xi_1)}{l} - \frac{P_2(l - \xi_2)}{l} - \frac{P_3(l - \xi_3)}{l} + P_2 + P_3,$$

$$Q_x^I = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} + \frac{P_3 \xi_3}{l} - P_1 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - P_1,$$

d. h. genau wie in Gleichung 154.

Dieses Resultat ist selbstverständlich, weil die auf beide Tragertheile wirkenden Resultanten einander genau gleich sein müssen, damit Gleichgewicht stattfindet; der entgegengesetzte Sinn beider Transversalkräfte ist durch das Vorzeichen berucktigt, indem die nach oben auf den Theil rechts wirkenden Kräfte negativ eingeführt sind.

Das Gesetz der Aenderung der Transversalkräfte wird sehr anschaulich, wenn man in jedem Querschnitte die dafelbst stattfindende Transversalkraft als Ordinate nach beliebigem, aber für alle Querschnitte gleichem Maßstab aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Es ergibt sich die in Fig. 153 *b* gezeichnete Linie, in welcher die positiven Werthe von der Abscisse nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen sind.

Schließlich erübrigt noch die Bestimmung der Momente.

Für den Querschnitt II ist:

$$M_I = D_0 x - P_1(x - l + \xi_1) = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) x - P_1(x - l + \xi_1) \quad . \quad . \quad 155.$$

Für den Querschnitt III ist

$$M_{III} = D_0 x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - P_2(x_1 - l + \xi_2) = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) x_1 - \sum_0^{x_1} P(x_1 - l + \xi) \quad 156.$$

Innerhalb je zweier Lastpunkte, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt ändert sich demnach das Moment nach dem Gesetze einer geraden Linie; denn für verschiedene Werthe von x_1 , bzw. x bleiben alle in den Gleichungen 155. und 156. vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von x_1 und x constant; diese einzigen Variablen kommen aber nur in der ersten Potenz vor. Trägt man also auch hier in den verschiedenen Querschnitten die Werthe von M als Ordinaten auf, so erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Lastpunkt ändert sich der Ausdruck für M , also auch die Gerade. In Fig. 153 *c* ist die Aenderung der Momente graphisch dargestellt.

Da eine Gerade ihre größte Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, letztere aber mit den Lastpunkten zusammenfallen, so folgt, dafs die größten Momentenwerthe an den Lastpunkten stattfinden.

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Unterzug (Fig. 154) von 8^m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abstand von Mitte zu Mitte je 1^m betrage. Jeder Balken belaste den Unterzug mit einem Gewicht gleich 3000 kg. Es sind die Auflager-Reactionen, Transversalkräfte und Momente zu ermitteln. Nach Gleichung 152. ist

$$D_0 = \sum_0^l \left(\frac{3000 \cdot \xi}{8} \right) = \frac{3000}{8} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10\,500 \text{ kg},$$

eben so nach Gleichung 153.

$$D_1 = \frac{3000}{8} \cdot 28 = 10\,500 \text{ kg}.$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belastungen symmetrisch zur Mitte des Balkens liegen und die Abstände derselben gleich sind, faßt man bequemer alle Lasten zu einer Resultirenden, hier ihrer

Summe zusammen, die in der Balkenmitte angreift. Es ist alsdann $R = 7 \cdot 3000 = 21\,000\text{ kg}$ und

$$D_0 = \frac{21\,000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10\,500\text{ kg} = D_1.$$

Die Transversalkräfte sind für die verschiedenen Querschnitte zwischen A und $I = 10\,500\text{ kg}$,

- » I » $II = 10\,500 - 3000 = 7500\text{ kg}$,
- » II » $III = 10\,500 - 3000 - 3000 = 4500\text{ kg}$,
- » III » $IV = 10\,500 - 3 \cdot 3000 = 1500\text{ kg}$,
- » IV » $V = 10\,500 - 4 \cdot 3000 = -1500\text{ kg}$,
- » V » $VI = 10\,500 - 5 \cdot 3000 = -4500\text{ kg}$,
- » VI » $VII = 10\,500 - 6 \cdot 3000 = -7500\text{ kg}$,
- » VII » $B = 10\,500 - 7 \cdot 3000 = -10\,500\text{ kg}$.

Im Lastpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Transversalkraft von den positiven zu den negativen Werthen über.

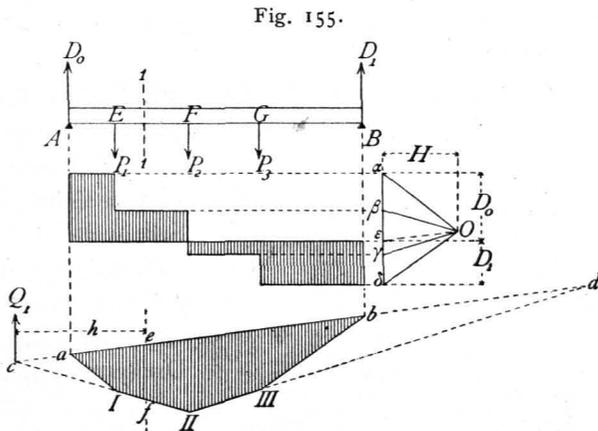
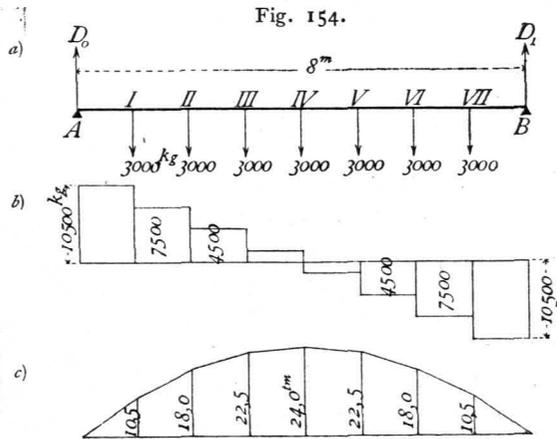
Die Momente in den Lastpunkten sind:

$$\begin{aligned} M_I &= 10\,500 \cdot 1 = 10\,500\text{ kgm} = 1\,050\,000\text{ kgcm}, \\ M_{II} &= 10\,500 \cdot 2 - 3000 \cdot 1 = 18\,000\text{ kgm} = 1\,800\,000\text{ kgcm}, \\ M_{III} &= 10\,500 \cdot 3 - 3000 \cdot 1 - 3000 \cdot 2 = 22\,500\text{ kgm} = 2\,250\,000\text{ kgcm}, \\ M_{IV} &= 10\,500 \cdot 4 - 3000(1 + 2 + 3) = 24\,000\text{ kgm} = 2\,400\,000\text{ kgcm}, \\ M_V &= 10\,500 \cdot 5 - 3000(1 + 2 + 3 + 4) = 22\,500\text{ kgm} = 2\,250\,000\text{ kgcm} = M_{III}, \\ M_{VI} &= M_{II}, \quad M_{VII} = M_I, \quad M_A = M_B = 0. \end{aligned}$$

Hiernach sind die Momente und Transversalkräfte in Fig. 154 *c* und 154 *b* aufgetragen.

β) Graphische Ermittlung. Um die Auflager-Reaktionen zu ermitteln, construirt man für die gegebenen Kräfte das Kraft- und Seilpolygon.

Das Kraftpolygon wird hier, da alle Kräfte gleiche Richtung haben, eine Gerade sein. Es sei (Fig. 155) $P_1 = \alpha\beta$, $P_2 = \beta\gamma$, $P_3 = \gamma\delta$; alsdann wird D_1 an δ zu tragen sein. Die Größe von D_0 und D_1 ist vorläufig unbekannt; jedoch wissen wir, daß das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte sich schließt; der Endpunkt von D_0 fällt also mit α zusammen, und es ist $\delta\alpha = D_0 + D_1$. Wo der Endpunkt von D_1 , welcher Punkt auch der Anfangspunkt von D_0 ist, auf der Linie $\delta\alpha$ liegt, ist noch nicht bekannt; die Ermittlung dieses Punktes geschieht mit Hilfe des Seilpolygons. Letzteres muß sich gleichfalls schließen, weil die Kräfte im Gleichgewicht sind. Man construirt also für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon $a I III III b$; die letzte Seite des Seilpolygons ist demnach die Verbindungslinie der beiden Punkte a und b , d. h. desjenigen Punktes, in dem sich die der ersten Last vorhergehende Seilpolygonseite mit der linken Auflager-Verticalen schneidet, und desjenigen Punktes, in welchem sich die auf die letzte Last folgende Seilpolygonseite mit der rechten Auflager-Verticalen trifft. Man nennt diese Linie die Schlußlinie des Seilpolygons. Im Punkte a halten sich nun folgende Kräfte im Gleichgewicht: die Auflager-Reaction D_0 , die Spannung in der Seilpolygonseite $a I$



und diejenige in der Seilpolygonseite oder Schluslinie ab . Von allen drei Kräften sind die Richtungen gegeben, von einer — der Seilspannung in aI — auch die Größe; dieselbe ist gleich $O\alpha$. Man kann also für diese drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, construiren, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft $O\alpha$, durch α eine Parallele zur Richtung von D_0 , durch den anderen Endpunkt, durch O eine Parallele zur Schluslinie ab zieht. Der Schnittpunkt ε beider Linien ergibt in $\varepsilon\alpha$ die Größe von D_0 , woraus folgt, daß $\delta\varepsilon = D_1$ ist. Es ergibt sich hieraus die Regel:

Die Auflager-Reactionen werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol das Seilpolygon construirt, die Schluslinie und parallel zu dieser eine Linie durch den Pol zieht. Letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach Größe und Richtung die Auflager-Reactionen darstellen.

Die Transversalkräfte lassen sich auf graphischem Wege in folgender Weise ermitteln.

Für alle Querschnitte von A bis E ist die Transversalkraft gleich D_0 , d. h. gleich $\varepsilon\alpha$ (Fig. 155). Zieht man also durch ε und α je eine Horizontale, so giebt deren Abstand die Größe der Transversalkraft zwischen A und E an. Zwischen E und F ist die Transversalkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\alpha - \alpha\beta = \varepsilon\beta$; man ziehe also durch β eine horizontale Linie; alsdann giebt deren Abstand von der durch ε gezogenen Geraden an jeder Stelle zwischen E und F die Größe der Transversalkraft. Eben so ist zwischen F und G die Strecke $\varepsilon\gamma$, zwischen G und B die Strecke $\varepsilon\delta$ die Transversalkraft.

Die Transversalkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 267, S. 239 durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonseiten, welche die beiden äußersten Kräfte begrenzen. Für einen Querschnitt zwischen E und F sind die beiden bezw. Seilpolygonseiten die Linien II und ab ; die Transversalkraft geht also durch c . Für jeden Querschnitt zwischen II und III geht die Transversalkraft durch d etc.

Die graphische Bestimmung der Momente geschieht in nachstehender Weise.

Für einen beliebigen Querschnitt II (Fig. 155) ist das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Transversalkraft. Es ist demnach $M_1 = Q_1 h$. Nun ist $\Delta cef \sim \Delta O\varepsilon\beta$, mithin $\frac{ef}{h} = \frac{\varepsilon\beta}{H}$, und, da $\varepsilon\beta = Q_1$ ist, $ef = \frac{Q_1 h}{H} = \frac{M_1}{H}$, also $M_1 = H \cdot ef$.

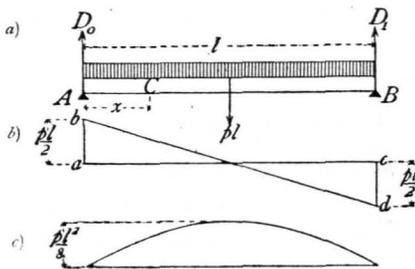
In vorstehendem Ausdruck für M ist H , der horizontale Abstand des Poles von der Kraftlinie oder die Poldistanz, für alle Querschnitte constant; die Größe des Momentes ist also mit ef , d. h. der verticalen Höhe des Seilpolygons variabel. Daraus folgt:

Das Moment in jedem Querschnitte ist gleich dem Producte aus dem verticalen Abstände der Seilpolygonseiten bei diesem Querschnitte in die Poldistanz. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heißt die Momentenfläche.

Die Momente sind Producte aus Kräften und Längen; H ist eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit 10^t , 20^t etc. Da das Moment in irgend einem Querschnitt einen ganz bestimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten H unabhängig ist, so wird die Höhe des Seilpolygons desto größer, je kleiner H ist und umgekehrt.

Zweiter Fall: Der Träger wird über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belaftet.

Fig. 156.



a) Berechnung. Die Belastung pro Längeneinheit des Trägers (Fig. 156) sei p , die Stützweite desselben sei l ; alsdann ist die Resultirende gleich der Gesamtlast, also gleich $p l$ und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der statischen Momente für B als Drehpunkt heißt demnach

$$D_0 l - p l \frac{l}{2} = 0,$$

361.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

und es wird

$$D_0 = \frac{p l}{2}; \text{ eben so } D_1 = \frac{p l}{2} \dots \dots \dots 157.$$

Die Transversalkraft beträgt für einen beliebigen Querschnitt C im Abstände x von A

$$Q_x = D_0 - p x = \frac{p l}{2} - p x = \frac{p}{2} (l - 2 x) \dots \dots \dots 158.$$

Die graphische Darstellung der Veränderung der Transversalkraft ergibt die Linie der Gleichung 158., d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p l}{2}$; für $x = l$ ist $Q_l = -\frac{p l}{2}$. Q_x wird Null für $l - 2 x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie $b d$ (Fig. 156 *b*) ergeben die Transversalkräfte.

Das Moment für den Punkt C ist

$$M_x = D_0 x - p x \frac{x}{2} = \frac{p l}{2} x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l x - x^2) \dots \dots \dots 159.$$

Die graphische Darstellung der Momente für die verschiedenen Querschnitte ergibt die Curve der Gleichung 159., d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. M_x wird ein Maximum für $\frac{d M_x}{d x} = \frac{p}{2} (l - 2 x) = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$; demnach

$$M_{max} = \frac{p}{2} \left[l \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] = \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 159a.$$

Hiernach kann die Parabel leicht construirt werden (Fig. 156 *c*).

Beispiele. 1) Ein Corridor von 4 m Lichtweite ist mit einer Decke aus Kappengewölben zwischen eisernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen sei 2,2 m; die Träger sollen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu 4,3 m, d. i. zu 430 cm angenommen werden; alsdann ist $l = 430$ cm. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von 2,2 m Breite und 1 m Länge; mithin ist die Last pro laufendes Meter Träger, bei einer Maximalbelastung von 750 kg pro 1 qm Grundfläche, gleich $2,2 \cdot 750 = 1650$ kg und pro laufendes Centimeter Träger $p = 16,5$ kg. Die Auflager-Reactionen sind also nach Gleichung 157.

$$D_0 = D_1 = \frac{16,5 \cdot 430}{2} = 3547 \text{ kg}$$

und das Moment nach Gleichung 159a.

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16,5 \cdot 430^2}{8} = 381\,356 \text{ kgcm.}$$

Nun ist der Querschnitt nach Art. 301, S. 263 so zu bestimmen, das $\frac{F}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381\,356}{700} = 544,8$ ist. Falls ein I-Querschnitt gewählt wird, ist Nr. 28 der »Deutschen Normalprofile« (vergl. die Tabelle auf S. 198) zu wählen, da bei demselben $\frac{F}{a} = 547$ ist ¹⁶⁵⁾.

¹⁶⁵⁾ Man muß beim Einsetzen der Zahlenwerthe für p und l vorsichtig sein. Es ist eigentlich selbstverständlich, das, wenn man l in Metern einführt, p die Belastung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn l in Centimetern eingeführt wird, p die Belastung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner K , die zulässige Bannspruchung in Kilogramm pro 1 qcm und das Moment M in Kilogramm-Centimetern an, so sind in Gleichung 36.: $\frac{F}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für F und a auf Centimeter bezogen einzusetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüssig sein, hier besonders darauf aufmerksam zu machen, das von Anfängern und Ungeübten oft in dieser Hinsicht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt sich, stets alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

2) Es sollen die Dimensionen bestimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6 m zu geben sind, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte 0,9 m und die Gesamtbelastung der betreffenden Decke (Eigengewicht und mobile Last) 500 kg pro 1 qm beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von 0,9 m Breite zu tragen, d. h. eine Last von $0,9 \cdot 500 = 450 \text{ kg}$; mithin beträgt die Belastung pro laufendes Centimeter des Balkens $p = 4,5 \text{ kg}$. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite l nehmen wir zu $6,3 \text{ m} = 630 \text{ cm}$ an. Das größte Moment, welches hier, da der Balkenquerschnitt constant ist, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden muss, findet in der Balkenmitte statt, und es ist nach Gleichung 159a.

$$M_{max} = \frac{4,5 \cdot 630^2}{8} = 223\ 256 \text{ kgcm};$$

mithin nach Art. 303, S. 264

$$\frac{f}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223\ 256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 43. $f = \frac{b h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ ist, wird $\frac{b h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25 \text{ cm}$ angenommen wird,

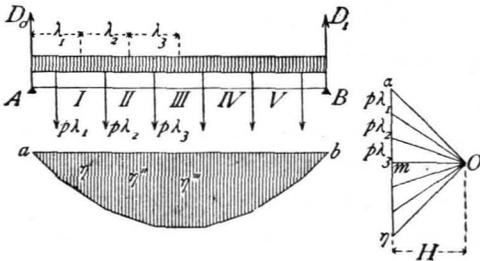
$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 3721}{25}} = 29,9 \text{ cm} \approx 30 \text{ cm}.$$

Es genügt fonach ein Querschnitt von $25 \times 30 \text{ cm}$.

β) Graphische Ermittlung. Im vorliegenden Falle werden die Auflager-Reaktionen, Momente und Transversalkräfte eben so ermittelt, wie oben für Einzel-lasten gezeigt worden ist.

Man zerlegt die ganze Belastung in einzelne Theile $p \lambda_1, p \lambda_2, p \lambda_3 \dots$ (Fig. 157) von den Längen

Fig. 157.



$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$. Diese Einzellasten wirken in den Mitten der Abtheilungen λ . Für diese Einzellasten wird nun Kraft- und Seilpolygon construiert und die Schlusslinie ab gezogen; alsdann giebt die durch O zu ab gezogene Parallele Om die Auflager-Reaktionen $D_1 = \eta m$ und $D_0 = m a$.

Das Seilpolygon ist eine gebrochene Linie, welche sich einer Curve desto mehr nähert, je kleiner die einzelnen Abtheilungen gewählt werden. In Wirklichkeit entspricht der stetigen Belastung eine stetig gekrümmte Linie, eine Curve als Seilpolygon. Die gezeigte Construction ergibt eine Reihe von Punkten dieser Curve. In denjenigen

Querschnitten nämlich, welche einer Abtheilungsgrenze entsprechen, in $I, II, III \dots$, ist das durch die concentrirten Lasten erzeugte Moment genau eben so groß, wie dasjenige durch die stetige Belastung bis zu diesem Querschnitte, und zwar ist nach Früherem $M_I = H \eta'$, $M_{II} = H \eta''$, $M_{III} = H \eta''' \dots$. Diese Ordinaten $\eta', \eta'', \eta''' \dots$, kurz alle Ordinaten, welche den Abtheilungsgrenzen entsprechen, sind also genau richtig, so dass die genaue Curve leicht construiert werden kann.

Dritter Fall: Der Träger wird auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Eine Belastung $p dx$ im Abstände x (Fig. 158) vom linken Auflager A erzeugt die Auflager-Reaktionen

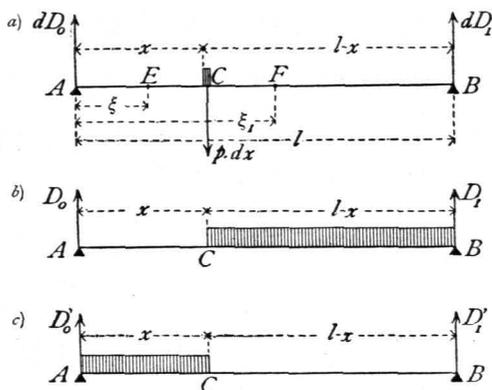
$$d D_0 = p dx \frac{l-x}{l} \quad \text{und} \quad d D_1 = p dx \frac{x}{l}.$$

Die Transversalkraft ist für jeden Querschnitt E links vom Lastpunkte C $Q = d D_0 = p dx \frac{l-x}{l}$, d. h. positiv, für jeden Querschnitt F rechts vom Lastpunkte $Q_1 = d D_0 - p dx = - \frac{p x dx}{l}$, d. h. negativ. Daraus folgt das Ge-

362.
Partielle
gleichförmig
vertheilte
Belastung.

Fig. 158.

setz: Jede Belastung rechts von einem Querschnitte erzeugt in demselben eine positive, jede Belastung links von einem Querschnitte erzeugt in demselben eine negative Transversalkraft. In irgend einem Querschnitt, etwa C , wird demnach Q_{max} stattfinden, wenn die ganze Abtheilung rechts von C belastet, der übrige Trägertheil unbelastet ist (Fig. 158 *b*). Q_{min} wird stattfinden, wenn die Abtheilung AC links von C belastet, die Abtheilung CB unbelastet ist (Fig. 158 *c*).



Man erhält für die erstere Belastungsart

$$D_0 = Q_{max} = \int_x^l p \, dx \left(\frac{l-x}{l} \right) = \frac{p}{2l} (l-x)^2; \dots \dots \dots 160.$$

für die zweite Belastungsart

$$Q_{min} = \int_0^x - \frac{p x \, dx}{l} = - \frac{p}{2l} x^2 \dots \dots \dots 161.$$

Das Moment für irgend einen Querschnitt E (Fig. 158) links vom Lastpunkt C ist

$$dM = \xi \, dD_0 = p \frac{l-x}{l} \xi \, dx,$$

d. h. positiv; für einen Querschnitt F rechts vom Lastpunkt C ist

$$dM_1 = \xi_1 \, dD_0 - p \, dx (\xi_1 - x) = p x \, dx \frac{l - \xi_1}{l},$$

d. h. ebenfalls positiv. Hieraus folgt: Jede Belastung erzeugt in allen Querschnitten positive Momente. In jedem Querschnitt findet demnach das größte Moment bei totaler Belastung des Trägers mit der gleichförmigen Belastung p pro Längeneinheit statt. Bei dieser Belastung ist nach Gleichung 159. für einen Querschnitt mit der Abscisse x

$$M_x = \frac{p}{2} (lx - x^2),$$

und es ist dies das größte Moment im betreffenden Querschnitt.

Vierter Fall: Der Träger wird durch eine über seine ganze Länge gleichförmig vertheilte Belastung und durch Einzellaften belastet.

363.
Gleichförmig
vertheilte
Last u.
Einzellaften.

In Art. 360 ist nachgewiesen, daß jede Last eine von den anderen sonst noch auf dem Balken befindlichen Lasten unabhängige Auflager-Reaction erzeugt, und daß die Gesamt-Auflager-Reaction gleich der algebraischen Summe der Partial-Reactionen ist. Daraus folgt, daß auch die Transversalkräfte und Momente für alle Querschnitte gleich den algebraischen Summen der bezw. Partial-Transversalkräfte und -Momente sind.

Wir brauchen also im vorliegenden Falle nur die Reactionen, Transversalkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belastungen, derjenigen durch Einzellaften und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Last, sich ergeben haben, algebraisch zu addiren.

Hiernach betragen die Auflager-Reactionen (Fig. 159)

$$D_0 = \frac{p l}{2} + \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{p l}{2} + \sum_0^l \left[\frac{P(l - \xi)}{l} \right] \quad \dots \quad 162.$$

Die Transversalkraft für einen Punkt G mit der Abcisse x_1 ist

$$Q_{x_1} = D_0 - P_1 - p x_1 = \sum_0^{x_1} \left(\frac{P \xi}{l} \right) - \sum_0^{x_1} (P) + \frac{p}{2} (l - 2 x_1) \quad \dots \quad 163.$$

und für den Punkt L mit der Abcisse x_2

$$Q_{x_2} = D_0 - P_1 - P_2 - p x_2 = \sum_0^{x_2} \left(\frac{P \xi}{l} \right) - \sum_0^{x_2} (P) + \frac{p}{2} (l - 2 x_2).$$

Das Moment für den Punkt G ist

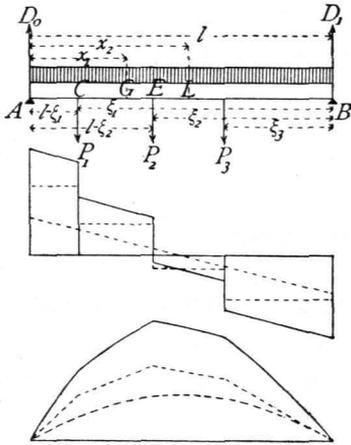
$$M_{x_1} = D_0 x_1 - P_1(x_1 - l + \xi_1) - \frac{p x_1^2}{2} = \sum_0^{x_1} \left(\frac{P \xi}{l} \right) x_1 - \sum_0^{x_1} [P(x_1 - l + \xi)] + \frac{p}{2} (l x_1 - x_1^2) \quad 164.$$

und für den Punkt L

$$M_{x_2} = D_0 x_2 - P_1(x_2 - l + \xi_1) - P_2(x_2 - l + \xi_2) - \frac{p x_2^2}{2},$$

$$M_{x_2} = \sum_0^{x_2} \left(\frac{P \xi}{l} \right) x_2 - \sum_0^{x_2} [P(x_2 - l + \xi)] + \frac{p}{2} (l x_2 - x_2^2) \quad \dots \quad 165.$$

Fig. 159.



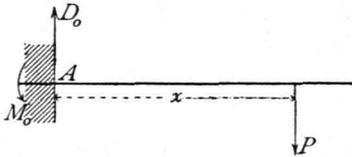
Die graphische Darstellung der in den verschiedenen Querschnitten stattfindenden Transversalkräfte und Momente wird gleichfalls erhalten, indem man die bei den einzelnen Belastungsarten sich ergebenden Ordinaten der bezüglichen Darstellungen algebraisch addirt. Es ergeben sich die in Fig. 159 gezeichneten Linienzüge, in denen die positiven Werthe nach oben, die negativen nach unten abgetragen sind. Die punktirten Linien geben die Werthe von Q und M für Belastung nur durch Einzellasten, bezw. für gleichförmig vertheilte Last; die voll gezogenen Linien geben die Summen.

Die Ermittlung der Momente etc. auf graphischem Wege ergibt sich aus dem auf S. 321 Gefagten so einfach, daß darauf nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

2) Console-Träger.

Console-Träger sind am einen Ende unterstützte, am anderen Ende freischwebende Träger. Als äußere Kräfte wirken auf dieselben die Belastungen und die Reactionen der Unterstütsungsstelle. Letztere lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln.

Fig. 160.



Damit der Träger im Gleichgewicht sei, muß zunächst die algebraische Summe der Verticalkräfte gleich Null sein, d. h., wenn die verticale Componente der Reaction bei A (Fig. 160) gleich D_0 ist, wird $0 = D_0 - P$ oder

$$D_0 = P \quad \dots \quad 166.$$

Eine äußere horizontale Belastung sei nicht vorhanden; es wird also die Reaction keine horizontale Componente haben. Es muß aber auch die algebraische

Summe der statischen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, also etwa für A , gleich Null sein; mithin muß, da das Moment der gegebenen Kräfte für A nicht gleich Null ist, D_0 aber für den Drehpunkt A kein statisches Moment hat, an der Unterstützungsstelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren resultierendes Moment mit demjenigen der Belastungen zusammen die Summe Null ergibt. Bei A wirkt also ein Moment M_0 , dessen Größe sich ergibt zu

$$M_0 = - P x \dots \dots \dots 167.$$

Dieses Moment, dessen Drehrichtung, wie das Vorzeichen anzeigt, derjenigen von P entgegengesetzt ist, kann auf verschiedene Weise erzeugt werden, am einfachsten durch Einmauerung, bezw. Einspannung des Balkens.

Soll für jede Belastungsart Gleichgewicht vorhanden sein, so muß der Balken derart eingemauert werden, daß das von der Mauer geleistete Moment auch die größten Werthe des Momentes der Belastungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheile liegende Mauergewicht geleistet, wonach dieses eventuell zu bestimmen ist.

Auch in anderer Weise kann ein Moment in A erzeugt werden, z. B. dadurch, daß der Balken über den Punkt A hinaus, bis zu einer zweiten Stütze B verlängert wird, in welchem Falle die Belastung des Balkentheiles AB das Moment M_0 leistet.

Die Console-Träger sind statisch bestimmt, da die beiden Unbekannten: die Auflager-Reaction D_0 und das Moment M_0 , nach den Gesetzen der Statik ermittelt werden können. Wir suchen im Folgenden die Auflager-Reaction, die Transversalkräfte und die Momente, wie beim Balkenträger auf zwei Stützen, und unterscheiden betreff der Belastungsart drei Fälle.

Erster Fall: Der Console-Träger wird durch beliebige Einzellaften belastet.

365.
Belastung
durch
Einzellaften.

a) Berechnung. Die freie Balkenlänge AB (Fig. 161) sei $= l$; alsdann ist die Auflager-Reaction

$$D_0 = P_1 + P_2 + P_3 = \sum_0^l (P) \dots \dots \dots 168.$$

und das Moment

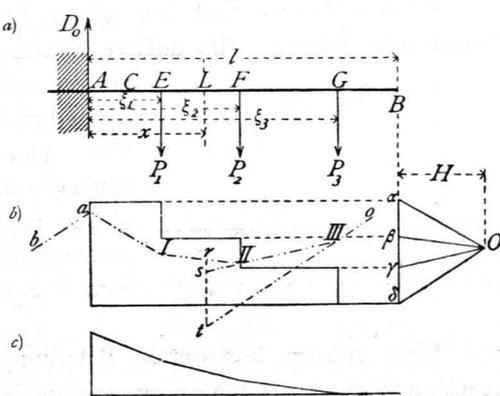
$$M_0 = - (P_1 \xi_1 + P_2 \xi_2 + P_3 \xi_3) = - \sum_0^l (P \xi) \dots \dots \dots 169.$$

Für einen beliebigen Querschnitt C zwischen A und E ist die Transversalkraft $Q = D_0 - \sum (P)$; diesen Werth hat Q für alle Punkte zwischen A und E . Für irgend einen Querschnitt L zwischen E und F ist $Q_1 = D_0 - P_1$; fonach wird allgemein

$$Q = \sum_0^l (P) - \sum_0^x (P) = \sum_x^l (P) \dots \dots \dots 170.$$

Die Transversalkraft in jedem Querschnitte ist also gleich der Summe der zwischen diesem Querschnitte und dem freien Ende befindlichen Lasten.

Fig. 161.



Es folgt dies schon aus der Definition der Transversalkraft. Als graphische Darstellung der Veränderung der Transversalkräfte ergibt sich die umflehende Construction (Fig. 161 b).

Für einen beliebigen Punkt L mit der Abscisse x wird das Moment $M = - [P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x)]$; allgemein wird sonach

$$M = - \sum_x^l [P (\xi - x)] \dots \dots \dots 171.$$

Die graphische Darstellung der Momente zwischen zwei Lastpunkten ist also eine Gerade, wie in Fig. 161 c gezeichnet.

β) Graphische Ermittlung. Man construirt das Kraftpolygon $\alpha \beta \gamma \delta \alpha$ und das Seilpolygon $a III III 0$, letzteres für eine beliebige Poldistanz H . Da $D = \delta \alpha$ ist, so ergeben sich die verschiedenen Werthe von Q leicht, wie in Fig. 161 angegeben.

Für den Punkt L ist

$$M = - [P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x)].$$

Nun ist $\Delta s t III \sim \Delta \gamma \delta O$, d. h. $\frac{\overline{st}}{\xi_3 - x} = \frac{\gamma \delta}{H} = \frac{P_3}{H}$ und $H \cdot \overline{st} = P_3 (\xi_3 - x)$; weiters ist $\Delta r s II \sim \Delta \beta \gamma O$, d. h. $\frac{\overline{rs}}{\xi_2 - x} = \frac{\beta \gamma}{H} = \frac{P_2}{H}$ und $H \cdot \overline{rs} = P_2 (\xi_2 - x)$. Hiernach wird abfolut genommen

$$M = P_3 (\xi_3 - x) + P_2 (\xi_2 - x) = H (\overline{st} + \overline{rs}) = H \cdot \overline{rt}.$$

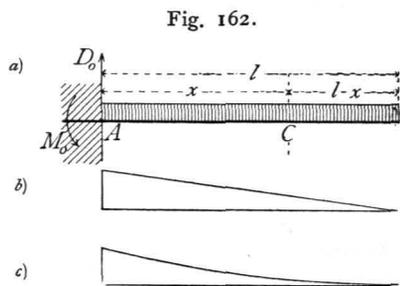
Das Moment ist gleich dem Product aus der Poldistanz in die verticale Höhe des Seilpolygons an der betreffenden Stelle, falls diese von der verlängerten Seilpolygonseite aus gerechnet wird, welche auf die dem Balkenende zunächst liegende Kraft folgt.

Das hier gefundene Resultat stimmt mit demjenigen des Art. 360, S. 322 überein; auch hier schließt das Seilpolygon; denn ein Kräftepaar, wie es hier bei A wirkt, ist eine unendlich kleine, unendlich ferne Kraft. Außer den Lasten P und der Auflager-Reaction D wirkt also noch eine unendlich ferne Kraft, deren Schnittpunkt mit der Seilpolygonseite ab aufzufuchen und mit III zu verbinden ist, um die Schlusslinie zu erhalten. Man sieht, die durch III parallel zu ab gezogene Seilpolygonseite ist die Schlusslinie.

Zweiter Fall: Der Console-Träger wird durch eine gleichförmig verteilte Last belastet.

Für den Auflagerpunkt A (Fig. 162) ergibt sich die Auflager-Reaction und das Moment mit

$$D_0 = pl \text{ und } M_0 = - \frac{p l^2}{2}; \dots 172.$$



für einen Punkt C mit der Abscisse x beträgt die Transversalkraft und das Moment

$$Q_x = p (l - x) \text{ und } M_x = - \frac{p (l - x)^2}{2} \dots 173.$$

Die graphische Darstellung der Werthe von Q ist eine Gerade; für $x = 0$ ist $Q_0 = pl$, für $x = l$ ist $Q_l = 0$. Diejenige der Werthe von M ist eine Parabel; für $x = 0$ ist $M_0 = - \frac{p l^2}{2}$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. Da ferner für

$x = l$ auch $\frac{d M_x}{d x} = + p (l - x)$ Null wird, so ist die Abscissenaxe im Punkte $x = l$ eine Tangente an die Parabel. Die Momente und Transversalkräfte sind in Fig. 162 c

366.
Gleichförmig
verteilte
Belastung.

und 162 b graphisch dargestellt. Der größte Werth des Momentes und der Transversalkraft findet an derselben Stelle, an der Einspannungsfstelle statt.

Die graphische Ermittlung von D_0 , Q und M bietet hier keine Vortheile, ist auch leicht nach den für Einzellasten gegebenen Regeln vorzunehmen.

Dritter Fall: Der ConSOLE-Träger wird durch eine gleichförmig vertheilte Belastung und durch Einzellasten belastet.

367.
Gleichförmig
vertheilte
Last u.
Einzellasten.

Die Auflager-Reactionen, Transversalkräfte und Momente ergeben sich als die Summe der bei den partiellen Belastungen stattfindenden Reactionen, Transversalkräfte und Momente. Es wird deshalb genügen, hier die Werthe anzugeben (Fig. 163):

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= P_1 + P_2 + P_3 + pl = \sum_0^l P + pl; \\ Q_x &= \sum_x^l P + p(l-x); \\ M_x &= - \sum_x^l [P(\xi-x)] - \frac{p(l-x)^2}{2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 174.$$

Eben so wird die Veränderlichkeit der Q und M graphisch dargestellt durch graphische Addition der für die Partialbelastungen sich ergebenden Werthe von Q und M .

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Balkonträger von 2 m freier Länge hat als Eigengewicht eine gleichmäsig vertheilte Belastung von 500 kg pro lauf. Meter und eine Nutzlast von 800 kg pro lauf. Meter zu tragen, außerdem noch das Gewicht der Brüstung mit 800 kg in 1,8 m Abstand von der Wand. Es ist demnach, wenn Alles auf Centimeter reducirt wird, $g = 5$ kg, $p = 8$ kg, $P = 800$ kg, $\xi = 180$ cm und $l = 200$ cm.

Die Nutzlast habe nur eine Länge von 170 cm.

Als Berechnungsweite darf man in den meisten Fällen nicht die freie Länge bis zur Wand einführen, sondern muß diejenige bis zur Auflagermitte nehmen, welche hier etwa 25 cm hinter der Mauerkante liegen möge. Alsdann ist für den Punkt A (Fig. 164), wenn M_g das Maximalmoment für permanente, M_p dasjenige für mobile Last bezeichnet, abfolut genommen:

$$M_g = P(\xi + 25) + gl \left(\frac{l}{2} + 25 \right) = 800 \cdot 205 + 1000 \cdot 125 = 289\,000 \text{ kgcm},$$

$$M_p = p \cdot 170 \left(\frac{170}{2} + 25 \right) = 8 \cdot 170 \cdot 110 = 149\,600 \text{ kgcm}.$$

Der Querschnitt an der Stelle A ist so zu bestimmen, dafs nach Gleichung 39. und 41. stattfindet

$$\frac{f}{a} = \frac{M_g}{K_1} + \frac{M_p}{(1 - \alpha_1) K_1} = \frac{289\,000}{1200} + \frac{149\,600}{720} = 448,6.$$

Nr. 26 der »Deutschen Normalprofile für I-Eisen« (siehe Seite 198) hat ein Widerstandsmoment $\frac{f}{a} = 446$ und dürfte für vorliegenden Fall ausreichend sein.

Fig. 163.

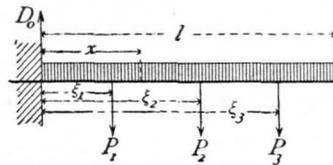
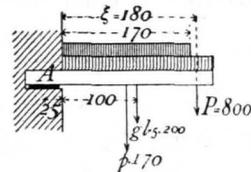


Fig. 164.



3) Continuirliche Gelenkträger.

Die Querschnittsgröße der Träger und damit die zu denselben gebrauchte Materialmenge ist wesentlich von der Größe der in den einzelnen Querschnitten stattfindenden Maximalmomente abhängig. Eine Verminderung der Momente hat auch eine Querschnittsverringerung zur Folge. Eine solche Verringerung der Momente wird den gewöhnlichen Trägern auf zwei Stützen gegenüber durch die fog. continuirlichen Gelenkträger erreicht, bei denen die Stützpunkte eines Theiles

368.
Princip.

der Träger durch Confolen der Nachbarträger gebildet werden. Man erhält dadurch für die verschiedenen Oeffnungen verschiedene Trägerarten, und zwar wechselt immer ein Träger mit einer, bzw. zwei Confolen an den Enden und ein solcher ohne Confolen ab.

Für drei neben einander liegende Oeffnungen *I, II, III* sind die hauptsächlich vorkommenden Combinationen in Fig 165 u. 166 dargestellt. Entweder hat, wie in

Fig. 165.

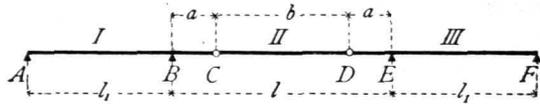


Fig. 166.

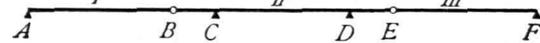


Fig. 165 gezeichnet, jeder Seitenträger *I* und *III* eine über das Auflager *B*, bzw. *E* vorragende Console *BC*, bzw. *DE*, auf deren Enden der Mittelträger *CD* frei aufruhet, oder der Mittelträger *CD* hat, wie in

Fig. 166, jederseits eine Console *BC*, bzw. *DE*, und die Seitenträger *AB* und *EF* ruhen aufser auf den Endstützpunkten *A*, bzw. *F* auf den Enden *B* und *E* der erwähnten Confolen. Durch diese Constructionsart werden einmal die Momente in den Trägern, an deren Enden die Confolen sind, in Folge der Console-Belastungen wesentlich vermindert, auferdem aber auch die Längen der frei aufliegenden Träger — in Fig. 165 des Trägers über Oeffnung *II*, in Fig. 166 der Träger über Oeffnung *I* und *III* — verkürzt, wodurch wiederum die Momente sich verringern.

Im Folgenden soll nur der für den Hochbau vorwiegend wichtige Belastungsfall einer gleichmäfsig vertheilten totalen Belastung ins Auge gefaßt werden, und zwar für die beiden angegebenen Combinationen.

369.
Erste
Combination.

Erste Combination: Die Confolen befinden sich an den Seitenträgern (Fig. 165).

α) Seitenträger mit einseitiger Console. Es sei $AB = l_1$, $BE = l$, $BC = DE = a$ und $CD = b$, also $l = 2a + b$; es sei ferner die Belastung pro Längeneinheit des Trägers p . Alsdann wirkt aufer dieser Belastung auf den Seitenträger in *C* eine Kraft nach unten, welche der in dem Punkte *C* auf den Balken *CD* nach oben wirkenden Auflager-Reaction (nach dem Gesetze der Wechselwirkung, vergl. Art. 259, S. 234) genau gleich ist, d. h. eine Kraft $\frac{pb}{2}$. Die

Reaction im Auflagerpunkte *A* (Fig. 167 a) ergibt sich durch Aufstellung der Gleichung der statischen Momente für Punkt *B* zu

$$D_0 = \frac{p l_1}{2} - \frac{p}{2} \frac{a b + a^2}{l_1}$$

Setzen wir die Constante $\frac{a b + a^2}{l_1} = c_1$, so ist

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) \dots \dots \dots 175.$$

Weiters ist die Reaction im Auflagerpunkte *B*

$$D_1 = \frac{p l_1}{2} + \frac{p b}{2} \cdot \frac{l_1 + a}{l_1} + p a \frac{l_1 + \frac{a}{2}}{l_1} = \frac{p}{2} (l_1 + c_1 + 2a + b) \dots 176.$$

In der Strecke *AB* beträgt die Transversalkraft für einen Punkt *L* mit der Abciffe *x*, von *A* aus gerechnet,

$$Q_x = D_0 - p x = \frac{p}{2} (l_1 - c_1 - 2 x), \dots \dots \dots 177.$$

d. h. die graphische Darstellung ist eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1)$; für $x = l_1$ ist $Q_{l_1} = -\frac{p}{2} (l_1 + c_1)$; die Transversalkraft wird Null für $x_0 = \frac{l_1 - c_1}{2}$.

In der Strecke BC ist die Transversalkraft für einen Punkt L_1 mit der Abscisse x_1 , von C aus gerechnet,

$$Q_{x_1} = \frac{p}{2} (b + 2 x_1), \dots \dots \dots 178.$$

d. h. die graphische Darstellung derselben ist eine Gerade. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{p b}{2}$; für $x_1 = a$ ist $Q_a = \frac{p}{2} (b + 2 a)$. Die Transversalkräfte sind in Fig. 167 *b* graphisch dargestellt.

In der Strecke AB ist das Moment für den Punkt L

$$M_x = D_0 x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l_1 x - x^2) - \frac{p c_1 x}{2} \dots \dots 179.$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks ist das Moment, welches in einem frei aufliegenden Balken AB von der Länge l_1 entstehen würde;

in Folge der Console und ihrer Belaftung erhalten wir demnach hier an jeder Stelle ein um $\frac{p c_1 x}{2}$ kleineres Moment. Die

graphische Darstellung giebt eine Parabel $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 167 *c*); die Linie $\alpha\delta$ ist die Linie der Gleichung $y = -\frac{p c_1 x}{2}$. Trägt

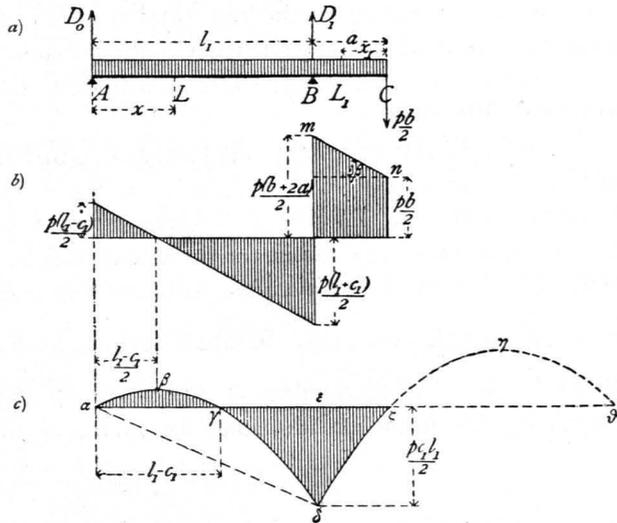
man also von dieser aus die Ordinaten $z = \frac{p}{2} (l_1 x - x^2)$ auf, so ergeben die von $\alpha\epsilon$ aus gemessenen Ordinaten die Momente an den einzelnen Stellen. Für $x = 0$ ist $M_x = 0$;

für $x = l_1$ ist $M_{l_1} = -\frac{p c_1 l_1}{2} = \epsilon\delta$. M_x wird Null für jenen Werth von x , für welchen stattfindet: $0 = \frac{p}{2} (l_1 - x) - \frac{p c_1}{2}$, d. h. für $x_0 = l_1 - c_1$; $\alpha\gamma$ ist also gleich

$l_1 - c_1$. M_x hat sein Maximum für $\frac{dM_x}{dx} = 0$, d. h. für $x_{max} = \frac{l_1 - c_1}{2}$, und es ist

$$M_{max} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} \cdot \frac{l_1 + c_1}{2} - \frac{p c_1}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} = \frac{p (l_1 - c_1)^2}{8}.$$

Fig. 167.



In der Strecke BC ist das Moment für den Punkt L_1

$$M_{x_1} = -\frac{p b}{2} x_1 - \frac{p x_1^2}{2} = -\frac{p}{2} (b x_1 + x_1^2), \dots 180.$$

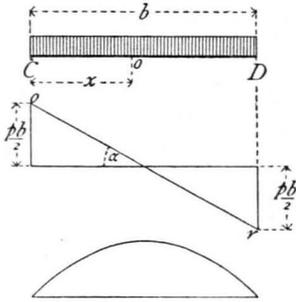
d. h. die graphische Darstellung liefert eine Parabel. M_{x_1} wird Null für $x_1 = 0$ und für $b x_1 + x_1^2 = 0$, d. h. für $x_1 = -b$, also für Punkt C , und wenn die Curve über den Nullpunkt C nach rechts auf die negative Seite der Abscissenaxe fortgesetzt wird, für den Punkt D (Fig. 165). Ferner wird M_{x_1} ein Maximum für $0 = b + 2x_1$, d. h. es wird $x_{1max} = -\frac{b}{2}$. Für $x_1 = a$, d. h. für den Auflagerpunkt B wird

$$M_{x_1} = -\frac{p}{2} (a b + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1 \text{ wie bereits oben gefunden. Hiernach ist die}$$

Parabel $\delta \zeta \eta \vartheta$ in Fig. 167 c construiert.

β) Balkenträger auf den beiden Confolen. Für diesen Träger CD (Fig. 168) gilt das unter 1. für den Träger auf zwei Stützen Gefundene. Es ist also für einen Punkt o mit der Abscisse x

Fig. 168.

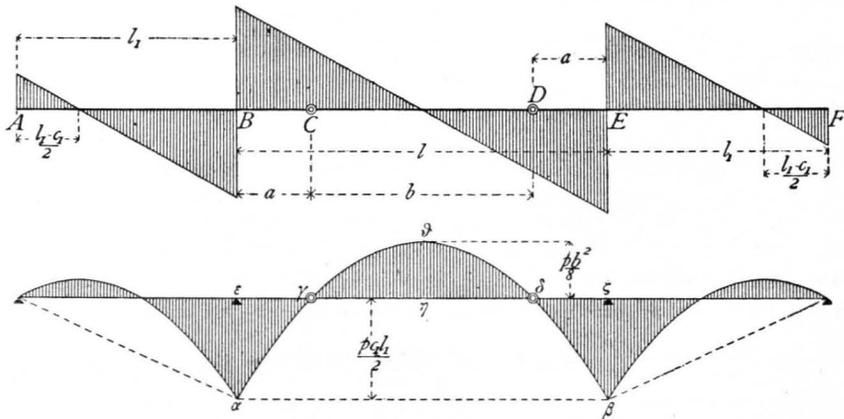


$$Q_x = \frac{p}{2} (b - 2x) \text{ und } M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2). 181.$$

Die graphischen Darstellungen der Transversalkräfte und Momente giebt die Fig. 168.

γ) Ganzer Träger. Betrachtet man nun den ganzen Träger (Fig. 169), so sieht man zunächst, dass die Transversalkräfte und Momente in C gleiche Größe haben, ob man vom Träger ABC oder vom Träger CD ausgeht. Auch die Neigung der Linie or , welche die Transversalkraft auf CD darstellt (Fig. 168), ist mit derjenigen von mn (Fig. 167 b), welche die Transversalkraft der Strecke BC darstellt, identisch; denn es ist

Fig. 169.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{p b}{2}}{\frac{2}{2}} = p \text{ und } \operatorname{tg} \beta = \frac{p a}{a} = p, \text{ d. h. } \beta = \alpha;$$

demnach bilden die beiden Linien or und mn eine einzige Linie. Auch die

Momentencurven beider Theile find identisch; denn für die Abtheilung BC ist nach Gleichung 180. $M_{x_1} = -\frac{p}{2} (b x_1 + x_1^2)$ und für negative x_1 , d. h. für Punkte, welche rechts von C liegen, ist $M_{x_1} = -\frac{p}{2} (-b x_1 + x_1^2) = +\frac{p}{2} (b x_1 - x_1^2)$. Dies ist aber nach Gleichung 181. der Werth, welcher sich für das Moment auf der Strecke CD ergibt. Die in Fig. 167 c punktirte Curve $\zeta \eta \vartheta$ ist also die richtige Momentencurve.

In Fig. 169 find die Momente und Transversalkräfte für den ganzen Träger angegeben.

δ) Vergleich mit dem Träger auf zwei Stützen. Für den mittleren Träger $BCDE$ (Fig. 169) find die Transversalkräfte genau, wie bei einem frei aufliegenden Träger von der Spannweite $l = 2a + b$; für die Seitenträger find die Transversalkräfte an jeder Stelle um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, als beim einfachen, auf den Stützen A und B aufruhenden Balkenträger. Die absoluten Werthe der Transversalkräfte find also auf der positiven Seite um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, auf der negativen Seite um $\frac{p c_1}{2}$ gröfser, als dort.

Was die Momente anbelangt, so ist für die Seitenträger oben bereits nachgewiesen, dafs das Moment an jeder Stelle um $\frac{p c_1 x}{2}$ kleiner ist, als beim frei aufliegenden Balkenträger von der Spannweite l_1 . Falls der Mittelträger in B und E frei aufläge, würde an einer beliebigen Stelle mit der Abciffe ξ von B aus gemessen das Moment $M_\xi = \frac{p}{2} (l \xi - \xi^2) = \frac{p}{2} [(b + 2a) \xi - \xi^2] = p a \xi + \frac{p}{2} b \xi - \frac{p \xi^2}{2}$ sein, oder, wenn man des bequemeren Vergleiches halber die Abciffen vom Punkt C aus rechnet und mit x bezeichnet (nach rechts positiv), so wird $\xi = a \pm x$ und nach einigen Umformungen $M_x = \frac{p}{2} (b x - x^2)$ $+ \frac{p}{2} c_1 l_1$. Für den Mittelträger $BCDE$ mit den Gelenken in C und D ist nach Gleichung 181.

das Moment $M_x = \frac{p}{2} (b x - x^2)$, also um $\frac{p}{2} c_1 l_1$ kleiner, als wenn die Auflagerung in gewöhnlicher Weise in B und E erfolgte. Nun ist aber diese Differenz $\frac{p}{2} c_1 l_1$ gerade das negative Moment an den Stützen B und E ; die von der Horizontalen $\alpha \beta$ in Fig. 169 aus gemessenen Ordinaten ergeben daher die Momente des in B und E frei aufliegenden Trägers. Construiert man demnach die Parabel der Gleichung $\frac{p}{2} (l \xi - \xi^2)$ in gewöhnlicher Weise und zieht durch die Punkte γ und δ , in welchen die Verticalen der Confolenenden die Curve schneiden, eine Horizontale $\varepsilon \zeta$, so find die von dieser Horizontalen aus gemessenen Ordinaten die Momente.

Es empfiehlt sich oft, die Confolenlänge fo zu bestimmen, dafs das negative Moment über den Stützen genau fo groß ist (absolut genommen), wie das positive Moment in der Mitte. Man theile dann einfach die Pfeilhöhe der Parabel $\alpha \vartheta \beta$ in zwei gleiche Theile und ziehe durch den Theilpunkt eine Horizontale; alsdann geben die Längen $\varepsilon \gamma$, bezw. $\delta \zeta$ die Längen der Confolen.

Schließlich ist der Vergleich noch in Betreff der Materialmenge anzustellen. Die Querschnittsfläche ist nach Früherem hauptsächlich von der Gröfse des Maximalmomentes in den verschiedenen Querschnitten abhängig. Ist aber die Querschnittsfläche der Gröfse von M proportional, so ist die Materialmenge auf die Länge dx dem Werthe $M dx$, auf die Gesamtlänge dem Werthe $\int M dx$ proportional. $\int M dx$ ist aber die Fläche, welche zwischen der Momentencurve und derjenigen Horizontalen liegt, von welcher aus die Ordinaten abgetragen werden, also für den Fall des Trägers BE auf den Stützen B und E die Fläche $\alpha \gamma \vartheta \delta \beta \alpha$, für den hier vorliegenden Fall des Trägers CD und der Confolen BC und DE (Fig. 169) die Fläche $\alpha \varepsilon \gamma + \gamma \eta \vartheta \delta + \delta \zeta \beta$, wobei selbstverständlich alle Flächen positiv gerechnet werden, da es für die Querschnittsgröfse gleichgiltig ist, ob das Moment positiv oder negativ ist. Wie man durch einen Blick auf die neben stehende Figur sieht, ist die Momentenfläche, mithin auch der Materialverbrauch, im zweiten Falle wesentlich kleiner, als im ersten.

Bei gegebener Weite l wird der Materialverbrauch für die Mittelöffnung BE ein Minimum sein, wenn der Flächeninhalt der Momentenfläche ein Minimum wird. Als Momentenfläche ergibt sich leicht

$$\gamma \eta \delta \vartheta + \alpha \varepsilon \gamma + \delta \zeta \beta = \frac{p}{12} (2b^3 + 6c_1 l_1 l - l^3);$$

wenn $c_1 = \frac{a^2 + ab}{l_1}$ und $a = \frac{l-b}{2}$ eingesetzt wird, erhält man nach einfachen Umformungen

$$f = \frac{p}{12} \left(2b^3 + \frac{l^3}{2} - \frac{3}{2} l b^2 \right).$$

Das Minimum des Flächeninhaltes findet statt für $\frac{df}{db} = 0$, d. h. für $6b^2 - 3lb = 0$ oder $b = \frac{l}{2}$. Wird für b dieser Werth in obige Gleichung für f eingeführt, so wird $f_{min} = \frac{p l^3}{32}$.

Für einen Balken auf zwei Stützen mit der Stützweite l ist die Momentenfläche $f_1 = \frac{2}{3} l \frac{p l^2}{8} = \frac{p l^3}{12}$. Die Ersparnis bei der günstigsten Anordnung, bei welcher $BC = DE = \frac{l}{4}$ ist, ist also proportional dem Werthe $f_1 - f_{min}$.

Zweite Combination: Die Consolen befinden sich am Mittelträger.

α) Mittelträger mit beiderseitigen Consolen. Die Länge des Mittelfeldes (Fig. 170) sei l_1 , diejenige der Console sei a und die Länge jedes Seitenträgers b ; alsdann ist bei totaler Belastung die Auflager-Reaction

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 + 2a + b) = D_1 \quad 182.$$

In der Strecke BC ist die Transversalkraft

$$Q_x = -\frac{pb}{2} - px \quad 183.$$

Für $x=0$ ist $Q_0 = -\frac{pb}{2}$; für $x=a$ ist $Q_a = -\frac{pb}{2} - pa = -\frac{p}{2} (b + 2a)$.

In der Strecke CD ist die Transversalkraft

$$Q_{x_1} = D_0 - \frac{pb}{2} - pa - px_1 = \frac{p}{2} (l_1 - 2x_1), \dots \quad 184.$$

d. h. genau so groß, wie ohne Console. Für $x_1=0$ ist $Q_0 = \frac{pl_1}{2}$; für $x_1=l_1$ ist

$$Q_{l_1} = -\frac{pl_1}{2}.$$

In der Strecke DE ist die Transversalkraft eben so groß wie in BC ; nur ist hier positiv, was dort negativ ist. Die graphische Darstellung der Transversalkräfte giebt Fig. 171 a.

In den Strecken BC und DE haben die Momente die gleichen Werthe, wie bei den in Art. 369, S. 332 behandelten Consolen. Es ist demnach, vom Punkte B aus gerechnet,

$$M_x = -\frac{pb}{2} x - \frac{px^2}{2} = -\frac{p}{2} (bx + x^2) \quad 185.$$

Für $x=0$ ist $M_0=0$; für $x=a$ ist $M_a = -\frac{p}{2} (ab + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1$.

In der Strecke CD ist das Moment

$$M_{x_1} = D_0 x_1 - \frac{px_1^2}{2} - pa \left(\frac{a}{2} + x_1 \right) - \frac{pb}{2} (a + x_1) = \frac{p}{2} (l_1 x_1 - x_1^2) - \frac{p}{2} c_1 l_1 \quad 186.$$

370.
Zweite
Combination.

Fig. 170.

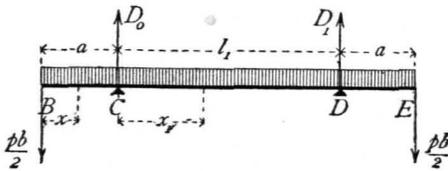
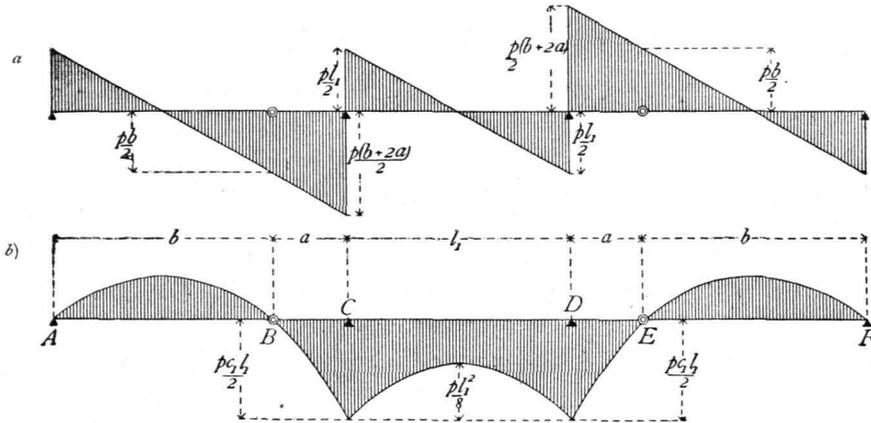


Fig. 171.



Der erste Theil des Momentes ist das Moment für einen frei aufliegenden Balken von der Stützweite l_1 ; der zweite Theil ist das Moment über der Stütze C , bezw. D .

Also auch hier gilt dasselbe, was im vorhergehenden Artikel über den dortigen Mittelträger gesagt wurde. Die graphische Darstellung der Momente ist in Fig. 171 b gegeben.

β) Seitenträger. Die Seitenträger sind frei auf zwei Stützpunkten gelagerte Träger, für welche Alles gilt, was in Art. 361, S. 323 entwickelt wurde. Demnach ist, wenn der linke Auflagerpunkt hier als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt wird,

$$Q_x = \frac{p}{2} (b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2), \quad \dots \quad 186_a.$$

und es ergibt sich leicht, wie in Art. 369, dass die Curven für die Momente und die Transversalkräfte identisch sind mit denjenigen, welche für die Console BC gefunden worden sind.

Die Momente und Transversalkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind in Fig. 171 graphisch aufgetragen.

Zum Schlusse erübrigt noch eine Untersuchung über das günstigste Verhältniss der Gröfsen a und b , d. h. über jenes Verhältniss, welches den geringsten Materialaufwand bedingt.

371.
Günstiges
Verhältniss
von a und b .

Im Hochbau wird man meistens Träger mit constantem oder nahezu constantem Querschnitt verwenden; derselbe muss alsdann so groß sein, wie das größte überhaupt im Träger vorkommende Moment es verlangt. Die Anordnung wird demnach praktisch so getroffen, dass die in den verschiedenen Stellen stattfindenden Maximalmomente einander (absolut genommen) gleich sind.

Beim Träger mit beiderseitigen Consolen (Art. 370, S. 334; Fig. 166) finden die größten Momente über den Stützen C , bezw. D und in der Mitte der Oeffnung statt. Die Bedingung, dass dieselben einander (absolut genommen) gleich sein sollen, giebt eine Gleichung für die günstigste Länge von a . Es ist

$$M_c = \frac{p}{2} c_1 l_1 \quad \text{und} \quad M_{mitte} = \frac{p l_1^2}{8} - \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Es muß demnach $\frac{p}{2} c_1 l_1 = \frac{p l_1^2}{8} - \frac{p}{2} c_1 l_1$ sein, woraus $\frac{l_1}{8} = c_1$. Da nun $c_1 = \frac{a^2 + a b}{l_1}$ ist, wird $a^2 + a b = \frac{l_1^2}{8}$; da ferner $b = l - a$, wird

$$a^2 + a l - a^2 = \frac{l_1^2}{8} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{l} = \frac{1}{8} \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 187.$$

Für $l_1 = l$ würde $a = \frac{l}{8}$; für $l_1 = \frac{4}{3} l$ würde $a = \frac{2}{9} l$ etc.

Beim Träger mit einseitiger Console (Art. 369, S. 330; Fig. 165) würde sich dieses Verhältniß in folgender Weise ergeben. Das Moment über dem Auflager ist $\frac{p}{2} c_1 l_1$; das Maximalmoment in der Oeffnung ist $M_{max} = \frac{p}{8} (l_1 - c_1)^2$; mithin ist die Bedingungsgleichung

$$\frac{p}{8} (l_1 - c_1)^2 = \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt $c_1 = l_1 (3 - \sqrt{8}) = 0,172 l_1$ und, da $c_1 = \frac{a^2 + a b}{l_1}$, ferner $b = l - 2 a$, so wird nach einfachen Umformungen

$$\frac{a}{l} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0,688 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2}}{2} \dots \dots \dots 188.$$

Für die verschiedenen Werthe von $\frac{l_1}{l}$ ergeben sich aus den Gleichungen 187. und 188. die nachfolgenden Werthe für $\frac{a}{l}$:

$\frac{l_1}{l} =$		0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\frac{a}{l}$	Träger mit beiderseitiger Console	0,06	0,08	0,11	0,125	0,15	0,18	0,21
$\frac{a}{l}$	Träger mit einseitiger Console	0,093	0,125	0,168	0,22	0,30	—	—

Von einer genauen Untersuchung darüber, bei welchem Verhältniß der Spannweiten l und l_1 und der Consolelängen a die Momentenfläche und damit der Materialverbrauch ein Minimum würde, kann hier abgesehen werden, da man im Hochbau nur ganz ausnahmsweise so große derartige Träger anordnet, daß man sich der theoretischen Materialmenge einigermaßen nähert.

4) Continuirliche Träger.

Die continuirlichen Träger oder die Träger auf mehr als zwei Stützpunkten sind nach Art. 357, S. 317 statisch unbestimmt. Die Auflager-Reactionen werden mit Hilfe der Elasticitätslehre ermittelt, indem die Deformationen des Balkens bestimmt werden. Diese Operationen sind in vielen Fällen ziemlich umständlich, und

372.
Auflager-
Reactionen u.
Momente.

es erscheint bei der verhältnißmäßig geringen Verwendung dieser Träger und um den hier disponibeln Raum nicht zu überschreiten, als genügend, für eine Reihe von gewöhnlichen Belastungsfällen die Größe der Auflager-Reactionen und der wichtigsten Momente anzugeben¹⁶⁶⁾.

Im Folgenden bezeichnen: $D_0, D_1, D_2 \dots$ die Auflager-Reactionen in den verschiedenen Stützpunkten $0, 1, 2 \dots$; $M_0, M_1, M_2 \dots$ die Momente an diesen Stützpunkten; $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3 \dots$ die Maximalmomente in den Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$; l die Stützweite jeder Oeffnung, falls alle Stützweiten gleich groß sind; $l_1, l_2, l_3 \dots$ die Stützweiten der Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$, falls nicht alle Stützweiten gleich groß sind; $p_1, p_2, p_3 \dots$ die gleichförmig vertheilten Belastungen pro Längeneinheit in den Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$ des Trägers.

α) Sämmtliche Oeffnungen haben die gleiche Stützweite l und die gleiche totale Belastung p pro Längeneinheit zu tragen. Die maßgebenden Werthe von M, D und \mathfrak{M} sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Anzahl der Oeffnungen.																	
2			3			4			2			3			4		
$M_0 =$	0	0	0	}	$p l^2$	$D_0 =$	0,375	0,100	0,3929	}	$p l$	$\mathfrak{M}_1 =$	0,07031	0,08	0,0771	}	$p l^2$
$M_1 =$	0,125	0,10	0,10714			$D_1 =$	1,250	1,100	1,1428			$\mathfrak{M}_2 =$	0,07031	0,025	0,0863		
$M_2 =$	0	0,10	0,0714			$D_2 =$	0,375	1,100	0,9186			$\mathfrak{M}_3 =$	—	0,08	0,0863		
$M_3 =$	—	0	0,10714			$D_3 =$	—	0,400	1,1428			$\mathfrak{M}_4 =$	—	—	0,0771		
$M_4 =$	—	—	0			$D_4 =$	—	—	0,3929								

β) Die Oeffnungen sind ungleich weit und haben die totalen Belastungen $p_1, p_2, p_3 \dots$ pro Längeneinheit zu tragen.

Nehmen wir zunächst zwei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1 und l_2 an, so ist

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}, \quad \dots \quad 189.$$

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 (l_1 + l_2)}, & D_1 &= \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 l_2} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}, \\ D_2 &= \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_2 (l_1 + l_2)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 190.$$

¹⁶⁶⁾ Für das Studium der »Theorie der continuirlichen Träger« seien folgende Schriften empfohlen:

Clapeyron. *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés. Comptes rendus, tome 45ème, S. 1076.*
 Mohr. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen. *Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1860, S. 323; 1868, S. 19.*
 Culmann, K. Die graphische Statik. Zürich 1866. S. 273.
 Winkler, E. Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit etc. I. Theil. Prag 1867. S. 112.
 Ritter, W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken. Zürich 1871.
 Lippich, F. Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. *Allg. Bauz. 1871, S. 104 u. 175.* (Auch als Separat-
 abdruck erschienen: Wien 1871.)
 Weyrauch, J. J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.
 Winkler, E. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. I. Heft. Aeusere Kräfte gerader Träger. 2. Aufl. Wien 1875. S. 53.
 Laifse, F. u. A. Schübler. Der Bau der Brückenträger mit besonderer Rückficht auf Eisen-Constructionen. I. Theil. 4. Aufl. Stuttgart 1876. S. 161.
 Schäffer. Belastungsgesetze für den continuirlichen geraden stabförmigen Körper von constantem Querschnitt. *Zeitfchr. f. Bauw. 1876, S. 239.*
 Grashof, F. Theorie der Elasticität und Festigkeit etc. 2. Aufl. Berlin 1878. S. 100.
 Landsberg. Beitrag zur graphischen Berechnung continuirlicher Träger. *Centrabl. d. Bauverw. 1881, S. 164 u. 174.*
 Canovetti. *Théorie des poutres continues etc. Paris 1882.*

Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1 , l_2 und l_1 ergeben sich folgende Resultate:

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(3l_2 + 2l_1)} \quad \dots \quad 191.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2} \quad 192.$$

b) Innere Kräfte der Gitterträger.

373.
Allgemeines.

Die Balkenträger sind entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den ersteren bildet der ganze Querschnitt eine zusammenhängende Fläche; bei den letzteren besteht derselbe aus zwei getrennten Theilen, den sog. Gurtungsquerschnitten; beide Gurtungen sind durch ein System von Stäben mit einander verbunden.

Die Ermittlung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und gußeisernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äußeren Kräfte erzeugt werden, ist bereits im 4. Kapitel des 1. Abschnittes vorgeführt worden; dafelbst ist auch die Querschnittsbestimmung für diese Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel sollen deshalb nur die in den Gitterträgern entstehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

Gitterträger sind aus einzelnen Stäben combinirte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heißen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwischen ihnen angeordnete Gitterwerk.

374.
Classification
der
Gitterträger.

Nach der Form der Gurtung unterscheidet man:

1) Parallelträger, d. h. Träger, deren beide Gurtungen parallel (gewöhnlich auch horizontal) sind.

2) Träger mit einer krummen und einer geraden Gurtung oder mit zwei krummen Gurtungen. Die ersteren nennt man, wenn die Endhöhe des Trägers gleich Null ist und die obere Gurtung krumm, die untere Gurtung gerade ist, Bogenföhnensträger; wenn die untere Gurtung gekrümmt, die obere Gurtung gerade ist, Fischbauchträger. Je nach der Curve der Krümmung unterscheidet man Parabelträger, Hyperbel- (Schwedler-) Träger, Ellipsensträger etc.

3) Dreieck- und Trapezträger, d. h. Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltrapez bilden.

Nach der Anordnung des Gitterwerkes werden unterschieden:

1) Träger mit einfachem Gitterwerk oder Träger, bei denen nur zwei Lagen von Gitterstäben vorhanden sind;

2) Träger mit combinirtem Gitterwerk, falls drei Lagen von Gitterstäben vorhanden sind.

Wir werden uns mit den letzteren nur in so fern beschäftigen, als man die Träger mit Gegendagonalen zu denselben rechnen kann.

Eintheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem sich jeder Gitterstab nur in den Gurtungen mit den anderen Gitterstäben kreuzt; mehrtheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem jeder Gitterstab sich aufer in den Gurtungen noch ein oder mehrere Male mit anderen Gitterstäben kreuzt.

Für die Zwecke des Hochbaues ist wohl immer das eintheilige Gitterwerk

welches eine exacte Berechnung zuläßt, ausreichend, so dafs wir hier nur Träger mit eintheiligem Gitterwerk besprechen werden.

Die Gitterstäbe sind entweder geneigt oder vertical; sie werden in der Folge als Diagonalen und Verticalen bezeichnet werden.

Gitterwerk mit zwei Lagen Diagonalen nennen wir Netzwerk, Gitterwerk mit einer Lage Diagonalen und einer Lage Verticalen Fachwerk.

Die Dachbinder sind in den allermeisten Fällen Gitterträger, so dafs die hier zunächst zu entwickelnden allgemeinen Regeln und Gesetze auch für die im nächsten Kapitel zu behandelnden Dachbinder gültig sind.

Bei den nachstehenden Untersuchungen werden folgende Annahmen gemacht:

- 1) die Belastungen finden nur in den Knotenpunkten statt, und
- 2) die Stäbe sind in den Knotenpunkten so mit einander verbunden, dafs sie sich um dieselben frei drehen können.

375.
Voraus-
setzungen.

1) Methoden für die Bestimmung der Stabspannungen.

Die Ermittlung der inneren Kräfte oder Spannungen erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 254, S. 232 angegeben worden ist. Der Körper wird an derjenigen Stelle durchschnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabspannungen, kennen lernen will; an den Schnittstellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Fragment die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar sind, so muß jede Stabspannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zusammenfallen. Es ergibt sich sonach folgende Regel:

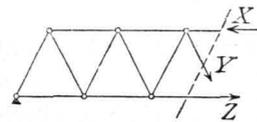
376.
Verfahren
im
Allgemeinen.

Man denke den Träger so durchschnitten, dafs die Stäbe, deren Spannung man sucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zusammenfallenden Stabspannungen als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 172) und stelle für das Fragment die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Es ergibt sich leicht, dafs die Aufgabe auf dem angegebenen Wege nur dann lösbar ist, wenn stets nur drei Unbekannte vorhanden sind, d. h., wenn für jeden Stab ein Schnitt möglich ist, bei welchem aufer demselben nur noch zwei andere Stäbe geschnitten werden; anderenfalls erhält man ein statisch unbestimmtes System.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im ersten Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab (Y und Z in Fig. 172); im zweiten Falle wirkt sie nach dem Knotenpunkt hin (X in Fig. 172). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanspruchung kennt, so werden wir zunächst stets alle Spannungen als Zugspannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergibt entweder einen positiven oder negativen Werth. Das erstere Resultat bedeutet, dafs die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. dafs im Stabe Zug herrscht. Das zweite Resultat bedeutet, dafs die wirkliche Spannung der angenommenen gerade entgegengesetzt (mit $\cos 180^\circ$ zu multipliciren) ist, d. h. im Stabe Druck herrscht.

Fig. 172.



- a) Analytische Bestimmung der Stabspannungen. Dieselbe kann in zweifacher Weise geschehen, entweder durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen oder nach der sog. Momentenmethode.

377.
Analytisches
Verfahren.

378.
Gleichgewichts-
bedingungen.

a) Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Fragment (Fig. 173), welches, wie im vorigen Artikel angegeben, behandelt ist, ergibt drei Gleichungen, welche nach Art. 256, S. 233 lauten:

$$\left. \begin{aligned} X \cos \sigma + Y \sin \tau + Z = 0; \quad D_0 - P_1 - P_2 + X \sin \sigma - Y \cos \tau = 0 \\ D_0 \cdot 2a - P_1 a - Zz = 0 \end{aligned} \right\} \quad 193.$$

Als Drehpunkt für die dritte Gleichung ist der Punkt C gewählt; alsdann haben X , Y und P_2 kein statisches Moment, weil sie für diesen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

Die angegebene Methode führt stets, wenn nur 3 Unbekannte, also 3 geschnittene Stäbe vorhanden sind, zum Ziele; sie hat den Nachtheil, daß meistens 3 Gleichungen gelöst werden müssen, selbst wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

379.
Ritter'sche
Methode.

b) Das Charakteristische der von *Ritter* angegebenen Momenten-Methode ist, daß man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die dritte Gleichgewichtsbedingung des vorhergehenden Artikels. Wird der Momentenpunkt so gewählt, daß zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, so bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das statische Moment jeder der beiden Kräfte ist aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Krafrichtungen, weil für diesen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Die Methode ist demnach folgende:

Man lege durch den Träger einen Schnitt, so daß nur 3 Stäbe mit unbekanntem Spannungen geschnitten werden, bringe diese Spannungen und alle am Fragment wirkenden äußeren Kräfte an, setze die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte gleich Null und wähle dabei als Momentenpunkt für die Ermittlung der Spannung eines Stabes stets den Schnittpunkt der beiden mit durchschnittenen Stäbe.

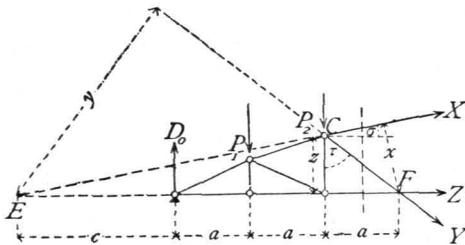


Fig. 173.

Um in Fig. 173 die Spannung X zu finden, wählt man F als Momentenpunkt; die Gleichung der statischen Momente heißt dann

$$Xx + D_0 \cdot 3a - P_1 \cdot 2a - P_2 a = 0,$$

woraus sich die einzige Unbekannte X leicht finden läßt. Für C als Momentenpunkt ergibt sich

$$D_0 \cdot 2a - P_1 a - Zz = 0,$$

woraus Z zu berechnen ist, und für E als Momentenpunkt

$$Yy - D_0 c + P_1 (c + a) + P_2 (c + 2a) = 0,$$

woraus Y zu ermitteln ist.

Die Länge der Hebelsarme ergibt sich meistens genügend genau aus der Zeichnung, kann aber auch leicht rechnerisch ermittelt werden.

Wir werden den für einen Stab nach dieser Methode sich ergebenden Momentenpunkt den diesem Stabe conjugirten Punkt nennen.

380.
Graphisches
Verfahren.

β) Graphische Bestimmung der Stabspannungen. Auch das graphische Verfahren kann nach zwei verschiedenen Methoden durchgeführt werden, entweder nach der Schnittmethode oder nach der Polygonalmethode.

a) Die Schnittmethode wurde von *Culmann* angegeben.

Werden die sämtlichen am Fragment wirkenden äusseren Kräfte zu einer Resultierenden Q (Fig. 174) zusammengefasst, so wirken auf dasselbe 4 Kräfte, nämlich Q und die 3 unbekanntnen Spannungen. Für diese 4 Kräfte ergibt sich ein geschlossenes Kraftpolygon. Von einer dieser Kräfte, nämlich von Q , ist Grösse, Richtung und Lage bekannt; von den drei anderen wohl Richtung und Lage, nicht aber die Grösse. Ersetzt man 2 der unbekanntnen Kräfte, etwa X und Y , durch ihre Mittelkraft R , so bleiben nur noch die 3 Kräfte Q , Z und R , welche sich nach Art. 258, S. 234 in einem Punkte schneiden müssen. R muss also durch den Schnittpunkt O von Q und Z gehen. Da R ausserdem durch den Schnittpunkt E von X und Y geht, so sind 2 Punkte der Richtungslinie von R , es ist also auch diese Richtung selbst bekannt. R hat die Richtung OE . Im Punkte O halten sich demnach 3 Kräfte Q , R und Z im Gleichgewichte; das für dieselben construirte Kraftpolygon ist eine geschlossene Figur, hier ein Dreieck. Ist $Q = \alpha\beta$, so ziehe man durch β eine Parallele zur Richtung von Z , durch α eine solche zur Richtung von R ; der Schnittpunkt γ beider Linien ergibt die beiden Kräfte $R = \gamma\alpha$ und $Z = \beta\gamma$.

In derselben Weise kann nun R in seine beiden Seitenkräfte X und Y zerlegt werden, indem man durch die beiden Endpunkte von R Parallelen zu den Richtungen von bezw. X und Y zieht. Es ergibt sich $\gamma\delta = Y$ und $\delta\alpha = X$.

Es ist für das Endresultat gleichgiltig, welche zwei von den unbekanntnen Spannungen man zu einer Mittelkraft vereinigt. Man kann auch Y und Z (Fig. 175) durch ihre Mittelkraft R' ersetzen, welche dann durch F und den Schnittpunkt O' der Kraft X mit Q geht. Als Kraftpolygon erhält man $\alpha\beta\epsilon\zeta$. Eben so kann man auch X und Z zu einer Resultierenden vereinigen, und erhält die ebenfalls in Fig. 175 gezeichnete Construction.

Die angegebene Construction giebt zugleich Aufschluss darüber, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt werden. Da die am Fragment wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so haben sie nach Art. 264, S. 237 denselben Umfahrungsinn, und es ist demnach der Sinn aller im Kraftpolygon vorkommenden Kräfte bekannt, wenn der Sinn einer derselben bekannt ist. Hier ist stets der Sinn von Q bekannt; denn dieses ist die Transversalkraft für den bezüglichen Querschnitt. Q hat den Sinn von α nach β ; also ist in Fig. 174 Z von β nach γ , d. h. vom Knotenpunkt L ab gerichtet, Y von γ nach δ , und X von δ nach α gerichtet.

X wirkt also nach dem Knotenpunkt E hin, ist demnach Druck, während Z und Y Zug bedeuten. Richtung, Grösse und Lage der Transversalkraft Q für eine gegebene Belastung sind mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygons leicht bestimmbar. (Siehe Art. 360, S. 322.)

b) Die Polygonalmethode ist von *Cremona* angegeben worden.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Randstäbe seien Stäbe, welche zwei auf einander folgende äussere Knotenpunkte mit einander verbinden, also $I II$, $II III$... in Fig. 176; Zwischenstäbe seien Stäbe, welche zwei nicht

Fig. 174.

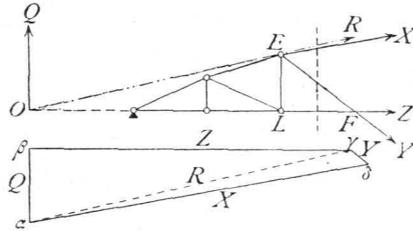
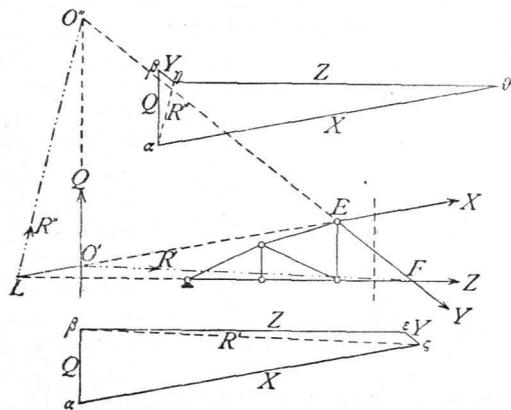


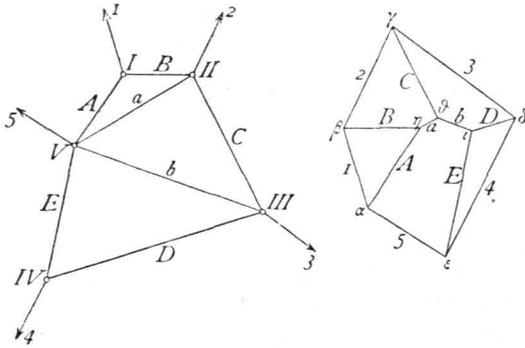
Fig. 175.



auf einander folgende äußere Knotenpunkte verbinden, also $II V$, $III V \dots$ in Fig. 176.

Da alle auf das System wirkenden äußeren Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist für dieselben ein geschlossenes Kraftpolygon möglich, welches, wenn alle äußeren

Fig. 176.

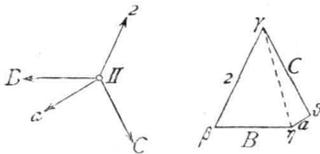


Kräfte nach Größe und Richtung gegeben sind, leicht construirt werden kann. Außerdem sind an jedem Knotenpunkte die an demselben wirkenden Kräfte für sich im Gleichgewicht; es ist also für jeden dieser Knotenpunkte ein kleines secundäres, sich schließendes Kraftpolygon möglich. An jedem Knotenpunkte wirken: eine äußere Kraft, die im speciellen Falle Null sein kann, und die Spannungen der Stäbe, welche sich in ihm schneiden, also im Knotenpunkte II die Kräfte $2, B, C, a$.

In den meisten der kleinen Kraftpolygone kommt nun je eine äußere Kraft vor, welche bereits im großen Hauptpolygon der äußeren Kräfte enthalten ist; es wird also offenbar möglich sein, jedes kleine Kraftpolygon so an das große zu legen, daß die beiden gemeinsame äußere Kraft durch dieselbe Gerade dargestellt wird. Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, so kommt jede Stabspannung in zwei secundären Kraftpolygone vor. Es wird nun durch rationelle Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone so in das große einzufachtern, daß nicht nur jede äußere Kraft, sondern auch jede Stabspannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt, d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann so zusammen, daß die beiden gemeinsame Stabspannung durch dieselbe Gerade dargestellt wird.

Für die Construction der kleinen Kraftpolygone ist nun Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier, die Richtung sämtlicher Kräfte bekannt ist und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte sich schließt, so ist die Construction desselben stets möglich, wenn am Knotenpunkte nur 2 unbekannte Kräfte vorhanden sind. Denn seien etwa in Fig. 177 B und 2 bekannt, a und C unbekannt, so erfordert

Fig. 177.



das Gleichgewicht, daß die Resultirende von a und C der bekannten Resultirenden von 2 und B der Größe nach genau gleich ist. Die bekannte Resultirende von 2 und B ist aber die Verbindungslinie $\eta\gamma$ im Kraftpolygon, und es ist dieselbe im entgegengesetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte C und a zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa γ , eine Parallele zu C , durch den anderen Endpunkt, etwa η , eine Parallele zu a gezogen wird. Der Schnittpunkt ϑ ergibt $\gamma\vartheta = C$ und $\vartheta\eta = a$. Alsdann ist $\beta\gamma\vartheta\eta$ das kleine Kraftpolygon für Punkt II .

Man muß es demnach bei der Construction der kleinen Kraftpolygone so einrichten, daß stets nur 2 Unbekannte da sind. Zu dem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, hier also etwa mit I (Fig. 176). Die äußere Kraft ist bekannt; unbekannt sind demnach nur A und B und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu II . Bekannt sind hier 2 und B , unbekannt C und a , demnach leicht ermittelt. So schreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, ist bei den Gitterträgern stets vorhanden.

Damit nun jede äußere Kraft und jede Stabspannung nur einmal in dem entstehenden Kräftezuge — dem Kräfteplan — vorkomme, ist folgende Regel zu befolgen. Man vereine sämtliche äußeren Kräfte zu einem geschlossenen Kraftpolygon, indem man sie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man sagt,

in cyclischer Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte dieses Kraftpolygons Parallelen zu den Randstäben derart, daß die Parallele zu einem Randstabe, etwa zu A , durch denjenigen Eckpunkt des großen Kraftpolygons geht, welcher zwischen den beiden äußeren Kräften liegt, zwischen denen der betreffende Randstab im System sich befindet. Der Randstab A liegt im System zwischen den äußeren Kräften 1 und 5 ; die Parallele zu A wird also durch den Punkt α zwischen 1 und 5 gezogen; eben so die Parallele zum Randstab B durch β zwischen 1 und 2 etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen construirt man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone, so erhält man einen Linienzug zwischen den Randstäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwischenstabspannung darstellt und in welchem jede Zwischenstabspannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randstäben abgechnittenen Längen geben die Spannungen der Randstäbe an.

Der Sinn der Stabspannungen wird hier genau in derselben Weise aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ist.

2) Parallelträger mit Netzwerk.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diese Spannungen für eine beliebige Belastung zu ermitteln, nennen wir die Mittelkraft aller auf das Fragment links vom Schnitte II (Fig. 178) wirkenden Kräfte Q ; da nun für irgend einen Stab CE der oberen Gurtung F der Momenten- oder conjugirte Punkt ist, so ist das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf diesen Punkt $M = Q \eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung:

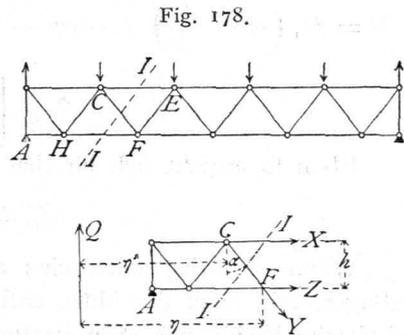
383.
Berechnung
der Gurtungs-
spannungen.

$$0 = M + Xh, \text{ woraus } X = -\frac{M}{h} \dots \dots \dots 194.$$

In gleicher Weise ergibt sich für C als Momentenpunkt, wenn M_1 das Moment von Q in Bezug auf C ist,

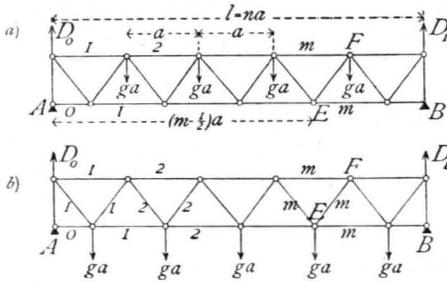
$$0 = M_1 - Zh, \text{ woraus } Z = \frac{M_1}{h} \dots \dots \dots 195.$$

Da bei einem Träger auf zwei Stützen M stets die angegebene Drehrichtung hat (stets positiv ist, vergl. Art. 358, S. 317), so folgt aus den Gleichungen 194. und 195: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren Gurtungsstäbe stets gezogen. Ferner: X_{max} und Z_{max} wird bei derselben Belastung wie M_{max} stattfinden, d. h. in jedem Gurtungsstabe findet Maximalbeanspruchung bei derjenigen Belastung statt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt sein Maximum erreicht. Wird gleichmäßig vertheilte Belastung zu Grunde gelegt, so findet für jeden Querschnitt das Maximalmoment bei voller Belastung statt; sämtliche Gurtungsstäbe werden demnach bei totaler Belastung am meisten beansprucht.



α) Das Eigengewicht der Construction kann als eine gleichmäßig über die Länge des Trägers vertheilte Belastung angesehen werden. Wir bezeichnen es mit g pro Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, daß alle Belastungen durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für die Hochbau-Praxis stets ausreichen wird. Die Entfernung der Knotenpunkte sei a (Fig. 179), die Felderzahl des Trägers n , mithin $l = na$. Jeder Mittenknotenpunkt

Fig. 179.



ist mit ga belastet; die Belastungen der Knotenpunkte über den Auflagern berücksichtigen wir nicht, weil diese direct vom Auflager aufgenommen werden.

Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 179 a), so ist bei der angenommenen Diagonalenanordnung die Auflager-Reaction $D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{ga}{2}$. Für den m -ten Stab der oberen Gurtung ist E der conjugirte Punkt, und

$$M = D_0 \left(m - \frac{1}{2} \right) a - (m - 1) ga \left(\frac{m - 2}{2} a + \frac{a}{2} \right),$$

$$M = \frac{g a^2}{2} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right];$$

$$X_m^g = - \frac{g a^2}{2h} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \dots \dots \dots 196.$$

Für den m -ten Stab der unteren Gurtung ist F der conjugirte Punkt, und

$$M_1 = D_0 m a - (m - 1) ga \frac{m a}{2} = \frac{g a^2}{2} m (n - m);$$

$$Z_m^g = \frac{g a^2}{2h} m (n - m) \dots \dots \dots 197.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an, so ist bei der in Fig. 179 b gezeichneten Diagonalenanordnung die Auflager-Reaction $D_0 = D_1 = \frac{n g a}{2}$. Für den m -ten Stab der oberen Gurtung ist wiederum E der conjugirte Punkt, und

$$M = D_0 \left(m - \frac{1}{2} \right) a - (m - 1) ga \frac{m a}{2} = \frac{g a^2}{2} \left[m (n - m + 1) - \frac{n}{2} \right];$$

$$X_m^g = - \frac{g a^2}{2h} \left[m (n - m + 1) - \frac{n}{2} \right] \dots \dots \dots 198.$$

Eben so ergibt sich für den m -ten Stab der unteren Gurtung

$$Z_m^g = \frac{g a^2}{2h} m (n - m) \dots \dots \dots 199.$$

Wenn die Diagonalen eine andere Richtung haben, so daß die erste vom Auflagerpunkt nach der Mitte ansteigt, so ergeben sich etwas andere Formeln, die auf gleiche Weise, wie eben gezeigt, zu ermitteln sind.

b) Die größten Gurtungsspannungen in Folge mobiler gleichmäßig vertheilter Belastung finden statt, wenn der ganze Träger belastet ist. Nennen wir die gleichmäßig vertheilte mobile Belastung pro Längeneinheit p , so ergeben sich offenbar für diese Belastung, die pro Knotenpunkt gleich pa ist, genau dieselben Formeln, wie für das Eigengewicht, wobei nur g durch p zu ersetzen ist. Wir erhalten also für an der oberen Gurtung angreifende Lasten (Fig. 179 a)

$$X_m^p = - \frac{p a^2}{2h} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \text{ und } Z_m^p = \frac{p a^2}{2h} m (n - m), \dots 200.$$

für an der unteren Gurtung angreifende Lasten (Fig. 179 b)

$$X_m^p = - \frac{p a^2}{2h} \left[m(n-m+1) - \frac{n}{2} \right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p a^2}{2h} m(n-m) \quad \dots \quad 201.$$

c) Findet eine Belastung des Trägers durch Einzellaften P_1, P_2, P_3 (Fig. 180) statt, so ist die Auflager-Reaktion $D_0 = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} = \Sigma \left(\frac{P \xi}{l} \right)$. Für den m -ten Stab der oberen, bzw. der unteren Gurtung betragen die Spannungen

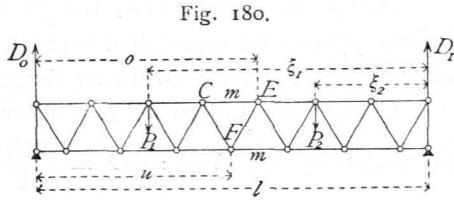


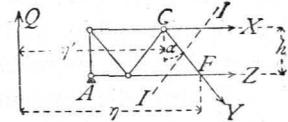
Fig. 180.

$$X_m = - \frac{D_0 u - P_1 \frac{3}{2} a}{h} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{D_0 o - P_1 \cdot 2 a}{h} \quad \dots \quad 202.$$

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Es sei für eine beliebige Belastung die Mittelkraft aller auf das Fragment links vom Schnitt II (Fig. 181) wirkenden Kräfte Q ; alsdann ist für eine nach rechts fallende Diagonale

Fig. 181.

$$0 = Q - Y \cos \alpha, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad 203.$$



384.
Berechnung
d. Gitterstabs-
spannungen.

und für eine nach rechts steigende Diagonale (Fig. 182)

$$0 = Q' + Y' \cos \beta, \quad \text{woraus} \quad Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta} \quad \dots \quad 204.$$

a) Das Eigengewicht erzeugt, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angreifen, die Auflager-Reaktion (Fig. 179 a) $D_0 = D_1 = (n-1) \frac{g a}{2}$. Für den m -ten nach rechts fallenden Stab ist

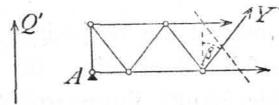
Fig. 182.

$$Q_m = (n-1) \frac{g a}{2} - (m-1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2m + 1),$$

sonach

$$Y_m^g = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 1); \quad \dots \quad 205$$

für den m -ten nach rechts steigenden Stab ist



$$Q'_m = \frac{g a}{2} (n - 2m + 1), \quad \text{daher} \quad Y'_m{}^g = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2m + 1) \quad 206.$$

Y_m^g ist positiv, wenn der Klammerfactor $n - 2m + 1 > 0$ ist, d. h. wenn $m < \frac{n+1}{2}$; negativ, wenn $m > \frac{n+1}{2}$ ist. Bei geradem n ist für alle Felder links von der Mitte $m < \frac{n+1}{2}$,

für alle Felder rechts von der Mitte $m > \frac{n+1}{2}$. Mithin werden alle nach rechts fallenden Diagonalen links von der Mitte gezogen, rechts von der Mitte gedrückt. $Y'_m{}^g$ ist negativ, d. h. die m -te rechts steigende Diagonale wird gedrückt, wenn der Klammerfactor positiv ist; $Y'_m{}^g$ ist positiv, d. h. die m -te rechts steigende Diagonale wird gezogen, wenn der Klammerfactor negativ ist. Mithin werden die nach rechts steigenden Diagonalen links von der Mitte gedrückt, rechts von der Mitte gezogen.

Bei ungerader Felderzahl ist für alle Felder links vom Mittelfelde $m < \frac{n+1}{2}$, d. h. Y^g Zug und Y'^g Druck. Für alle Felder rechts vom Mittelfelde ist $m > \frac{n+1}{2}$, mithin Y^g Druck und Y'^g

Zug. Für das Mittelfeld ist $m = \frac{n+1}{2}$, d. h. der Klammerfactor gleich Null; demnach ist in den zum Mittelfelde gehörigen Diagonalen die durch das Eigengewicht erzeugte Spannung gleich Null.

Allgemein ergibt sich: Bei gleichmäÙig über den Träger vertheilter Belastung g (oder p) pro Längeneinheit werden die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an, so ergibt sich die Auflager-
Reaction (Fig. 179 *b*) $D_0 = D_1 = \frac{ng a}{2}$, und für die m -te rechts fallende Diagonale

$$Y = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2m + 2), \dots \dots \dots 207.$$

für die m -te rechts steigende Diagonale

$$Y' = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2m) \dots \dots \dots 208.$$

Das Gesetz, daß bei dieser Belastungsart die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt werden, ist auch hier gültig und ergibt sich in derselben Weise, wie soeben für an der oberen Gurtung angreifende Lasten gezeigt wurde.

b) Um die ungünstigsten Gitterstabspannungen, welche in Folge mobiler Belastung entstehen, zu ermitteln, erwäge man, daß bei beliebiger Belastung für rechts fallende Diagonalen nach Gleichung 203. $Y = \frac{Q}{\cos \alpha}$ und für rechts steigende

Diagonalen nach Gleichung 204. $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$ ist. Das Maximum von Y findet

demnach bei derjenigen Belastung statt, bei welcher sich das Maximum der Transversalkraft ergibt. Nach Art. 362, S. 325 hat aber die Transversalkraft für einen Querschnitt ihren größten positiven Werth, wenn der Trägertheil rechts von dem betrachteten Querschnitte belastet, der Trägertheil links davon unbelastet ist, ihren größten negativen Werth bei der umgekehrten Belastung. Daraus folgt: Jede nach rechts fallende Diagonale erleidet den größten Zug durch mobile Belastung, wenn die rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belastet, die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte unbelastet sind; dagegen der größte Druck, wenn die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belastet, die übrigen unbelastet sind.

Da $Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta}$, so findet in den nach rechts steigenden Diagonalen der größte Druck statt, wenn nur die Knotenpunkte rechts vom Schnitte, der größte Zug, wenn nur die Knotenpunkte links vom Schnitte belastet sind.

Allgemeiner kann die Regel wie folgt ausgesprochen werden: Jede Diagonale erleidet den größten Zug, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Fußpunkte und demjenigen Auflager, nach welchem dieser Fußpunkt zeigt, belastet sind; jede Diagonale erleidet den größten Druck, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Kopfpunkte und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem dieser Kopfpunkt hinweist. Dieser Satz gilt allgemein, ob die Lastpunkte an der oberen oder unteren Gurtung liegen.

Die positiven, bzw. negativen Maximalwerthe für Y und Y' ergeben sich nun in folgender Weise. Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 183), so ist Q genau eben so groß, als wenn bei dem homogen angenommenen Träger

die Einzellasten pa je auf die Längen a gleichmäÙig vertheilt wären, d. h. als wenn die Last p pro Längeneinheit von der Mitte des äuÙersten Feldes am rechten, bezw. linken Auflager bis zur Mitte desjenigen Feldes der oberen Gurtung vorgeerückt ist, dem die Diagonale angehört. Denn im ersten Falle ist, wenn r belastete Knotenpunkte vorhanden sind,

$$D_0 = \frac{rap}{l} \left(\frac{ra}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{rpa^2}{2l} (r + 1),$$

und da $x = ra + \frac{a}{2} = a \left(r + \frac{1}{2} \right)$, also $x + \frac{a}{2} = a(r + 1)$ ist, so wird

$$D_0 = \left(x + \frac{a}{2} \right) \frac{rpa}{2l} = \frac{p}{2l} \left(x + \frac{a}{2} \right) \left(x - \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right].$$

Derfelbe Werth ergibt sich für den homogenen Träger in Fig. 183, nämlich $D_0 = \frac{p}{2l} \left(x - \frac{a}{2} \right) \left(x + \frac{a}{2} \right)$. Es gilt dies allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mobil belasteten Gurtung um eine ganze Feldweite von den Auflagern abliegen.

Nun ist für diejenigen Diagonalen, für welche die gezeichnete Belastung Maximalzug bzw. Maximaldruck erzeugt, $Q_{max} = D_0$, daher

$$Y_{max} = \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]. \quad 209.$$

In gleicher Weise ergibt sich nach Fig. 184

$$D_0 = \frac{p \left(l - x - \frac{a}{2} \right)}{l} \left(x + \frac{l - x - \frac{a}{2}}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[\left(l - \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right];$$

$$Q_{x \min} = \frac{p}{2l} \left[\left(l - \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right] - p \left(l - \frac{a}{2} - x \right) = - \frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

$$\text{und } Y_{\min} = - \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]. \quad \dots \quad 210.$$

Dem entsprechend wird

$$Y'_{\min} = - \frac{Q_{max}}{\cos \beta} = - \frac{p}{2l \cos \beta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \dots \quad 211.$$

$$Y'_{\max} = - \frac{Q_{\min}}{\cos \beta} = \frac{p}{2l \cos \beta} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \dots \quad 212.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 185), so ist (wenn mit ganz geringem Fehler die Belastung der beiden den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte gleichfalls mit pa eingeführt wird) Q_{max} , bezw. Q_{\min} eben so groß, wie bei einem homogenen Träger, bei welchem die Last p pro Längeneinheit vom rechten, bezw. linken Auflager aus bis zur Mitte desjenigen Feldes der unteren

Fig. 183.

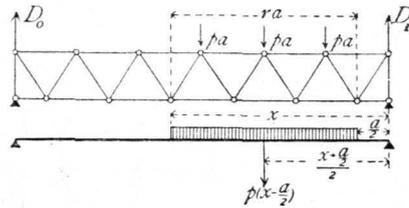


Fig. 184.

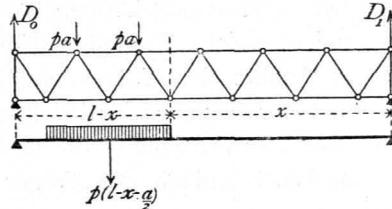
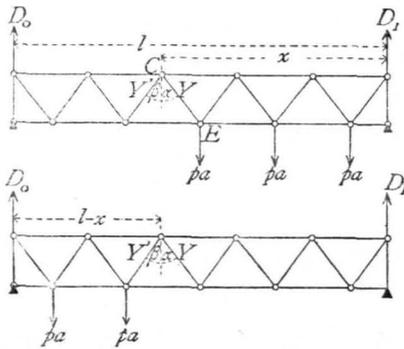


Fig. 185.



Es ergibt sich nun

$$Y_{max} = \frac{p x^2}{2l \cos \alpha} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p(l-x)^2}{2l \cos \alpha}, \quad \dots \quad 213.$$

$$Y'_{min} = -\frac{p x^2}{2l \cos \beta} \quad \text{und} \quad Y'_{max} = \frac{p(l-x)^2}{2l \cos \beta} \quad \dots \quad 214.$$

Die zusammengehörigen Werthe von Y und Y' beziehen sich auf zwei Diagonalen, welche demselben Felde der unteren Gurtung angehören.

c) Erfährt der Träger eine totale Belaftung p pro Längeneinheit, so sind die sub a für Eigengewichtbelaftung gefundenen Werthe auch für diesen Fall gültig, wenn statt des dortigen g die Gröfse p eingeführt wird.

b) Wird endlich der Träger durch Einzellasten beansprucht (Fig. 186), so erzeugt die Last P im Abstände ξ von B die Reaction $D_0 = \frac{P\xi}{l}$. In sämmtlichen

rechts fallenden Diagonalen links vom Lastpunkt wird dann $Y = \frac{D_0}{\cos \alpha} = \frac{P\xi}{l \cos \alpha}$;

in sämmtlichen rechts steigenden Diagonalen links vom Lastpunkte ist $Y' = -\frac{P\xi}{l \cos \beta}$.

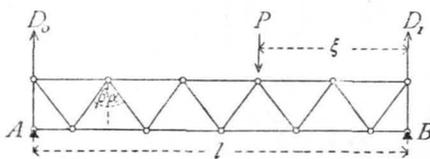
Eben so ist für alle Querschnitte rechts vom Lastpunkte $Q = D_0 - P = -\frac{P(l-\xi)}{l}$,

mithin für die nach rechts fallenden Diagonalen dieser Strecke $Y_1 = -\frac{P(l-\xi)}{l \cos \alpha}$,

für die nach rechts steigenden Diagonalen dieser $Y'_1 = \frac{P(l-\xi)}{l \cos \beta}$. Daraus folgt die Regel:

Die nach dem Lastpunkte zu fallenden Diagonalen werden gezogen, die nach demselben steigenden Diagonalen werden gedrückt.

Fig. 186.



385.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

β) Graphische Ermittlung der Spannungen. Setzen wir zunächst eine gleichmäfsig vertheilte Belaftung (Eigengewicht, bzw. totale mobile Belaftung) voraus, so macht es für die Construction keinen wesentlichen Unterschied, ob die Lasten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Wenn in jedem Knotenpunkte, z. B. der oberen Gurtung (Fig. 187) die Belaftung ga , bzw. pa wirkt, so

Gurtung vorgerückt ist, welchem die Diagonale angehört. Der Beweis ist in gleicher Weise, wie oben, zu führen und gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mobil belafteten Gurtung um eine halbe Feldweite von den Auflagern entfernt sind. Demnach ist

$$Q_{max} = \frac{p x^2}{2l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p(l-x)^2}{2l}.$$

x bedeutet in diesen Gleichungen den Abstand der Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vom rechten Auflager, zu welchem die Diagonale gehört.

empfiehlt sich für die Ermittlung der Spannungen die Polygonmethode, weil dieselbe sämtliche Stabspannungen in einem Linienzuge giebt.

Nachdem D_0 und D_1 auf bekannte Art gefunden sind, trägt man sämtliche äußeren Kräfte $1, 2, 3, 4, D_1$ und D_0 in cyclischer Reihenfolge an einander. Es sei $\alpha\beta = 1, \beta\gamma = 2$ etc.; nun trägt man an ε (den Endpunkt von d) $D_1 = \varepsilon\gamma$ und $D_0 = \gamma\alpha$. Damit schließt sich das Kraftpolygon der äußeren Kräfte. Wir gehen nun von demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, d. h. von A aus. In A wirken D_0, a und b ; die Zerlegung von D_0 in die beiden Componenten a und b ergibt $a = D_0$ und $b = 0$. Im Knotenpunkte L wirken jetzt a, c und d . Bei der Zerlegung von $a (= \gamma\alpha)$ ist zu beachten, daß die Parallele zum Randstabe d durch den Punkt im Kraftpolygon gehen muß, der zwischen D_0 und 1 liegt, d. h. durch α . Man erhält $\alpha\xi = d$ und $\xi\gamma = c$. (Nach Art. 381, S. 341 ist d Druck und c Zug.) Geht man nun zum Knotenpunkte E über, so wirken daselbst ($b = 0$) c, e und f ; bekannt ist $c = \gamma\xi$. Demnach sind e und f durch Zerlegung zu ermitteln, wobei die Parallele zum Randstabe f durch den Punkt γ im Kraftpolygon gehen muß, welcher zwischen D_1 und D_0 liegt, da der Randstab f im System sich zwischen den Kräften D_0 und D_1 befindet. Man erhält leicht e und f . (Da c , wie oben gefunden, Zug ist, erhält e Druck, f Zug.) Geht man so weiter, so ergibt sich der in Fig. 187 gezeichnete Kräfteplan. In demselben sind die Druckspannungen durch doppelte, die Zugspannungen durch einfache Linien bezeichnet; m ist Druck, fällt aber mit einer Anzahl von Zugspannungen zusammen und ist deshalb besonders herausgezeichnet. Die Endpunkte der Stabspannungen sind stets durch dieselben Buchstaben bezeichnet, welche die bezüglichen Stäbe im System führen. Die Spannungen b, l, n, w werden gleich Null.

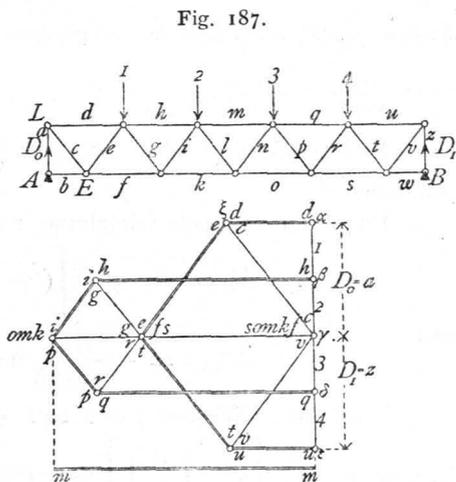


Fig. 187.

Uebergangen wir nunmehr dazu, die Maximalspannungen in den Gitterstäben, welche durch mobile Belastung hervorgebracht werden, zu bestimmen, so war, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angreifen, oder allgemein, wenn die an der mobil belasteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächst den Auflagern von diesen um eine ganze Feldweite a entfernt sind, nach Art. 384, S. 347 für die nach rechts fallenden Diagonalen

$$V_{max} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}.$$

Die graphische Darstellung von

$$Q_{max} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$$

ergibt eine Parabel.

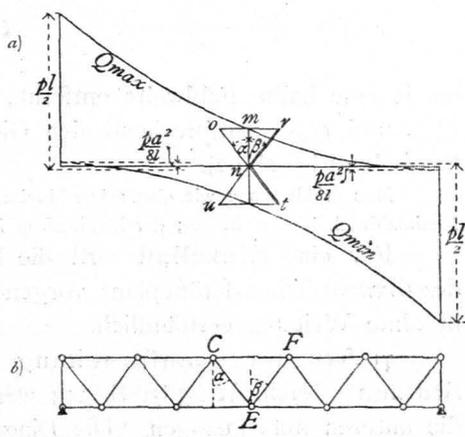
Für $x = 0$ wird $Q_{max} = -\frac{p a^2}{8l}$; für $x = l$

wird $Q_{max} = \frac{p}{2l} \left[l^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{p l}{2} - \frac{p a^2}{8l}, Q_{max}$

wird Null für $x = \frac{a}{2}$; die Curve hat ein Minimum für $0 = 2x$, d. h. für $x = 0$. Danach ist die Curve in Fig. 188 a) construirt.

Hier sind diejenigen Ordinaten der Curve als Werthe von Q_{max} einzuführen, welche den Fußpunkten der betreffenden Diagonalen entsprechen. Für die Diagonale CE ergibt sich mn als Werth von Q_{max} . Die

Fig. 188.



durch n parallel zur Diagonale CE gezogene Linie no giebt den Werth von $Y = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}$; denn es ist $\frac{no}{\cos \alpha} = \frac{m n}{\cos \alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}$.

Nach Gleichung 211. ist $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta}$, also $n r$ der größte Druck in der rechts steigenden Diagonale EF .

Es ist ferner nach Gleichung 210. und 212.

$$Y_{min} = -\frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{Q_{min}}{\cos \alpha}$$

und

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta} = \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \frac{1}{\cos \beta}.$$

Wird die Differenz $l-x = \xi$ gesetzt, so ergibt sich, dass die Curve für

$$Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]$$

derjenigen für Q_{max} congruent ist.

Für $\xi = 0$ ist $Q_{min} = +\frac{p a^2}{8l}$; für $\xi = l$ ist $Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] = -\frac{p l}{2} + \frac{p a^2}{8l}$.

Man erhält die in Fig. 188 a gezeichnete Curve, in welcher für die rechts fallende Diagonale CE das Minimum nt , für die rechts steigende Diagonale das Maximum nu eingezeichnet ist.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an oder allgemein, sind die an der mobil belasteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächst den Auflagern von diesen

Fig. 189.

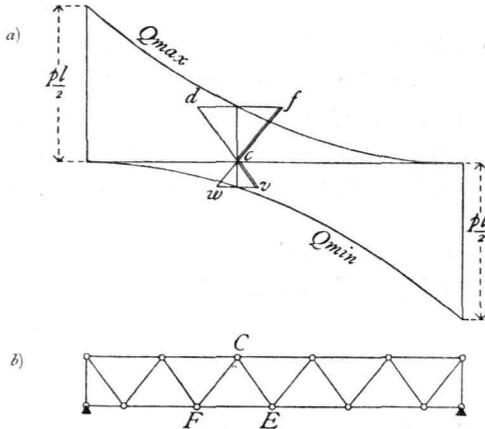
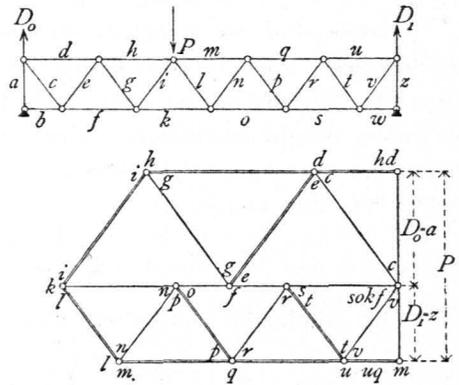


Fig. 190.



um je eine halbe Feldweite entfernt, so ergibt die Verzeichnung der Curven für Q_{max} und Q_{min} entsprechend den Gleichungen in Art. 384, S. 348 oben stehende Parabeln (Fig. 189 a).

Man erhält genau wie oben: Der Maximalzug in CE ist cd ; der Maximaldruck in CF ist cf ; der Maximaldruck in CE ist cv ; der Maximalzug in CF ist cw .

Für eine Einzellaft wird die Ermittlung der Spannungen bequem mittels des *Cremona'schen* Kräfteplans vorgenommen, wie in Fig. 190 geschehen ist; dieselbe ist ohne Weiteres verständlich.

γ) Art der Beanspruchung der Stäbe bei einem Träger auf zwei Stützen. Nach Art. 383, S. 343 werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren stets gezogen. Die Diagonalen erhalten verschiedene Beanspruchungen.

Durch das Eigengewicht erhalten die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Zug, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen Druck; durch die ungünstigste mobile Belastung erhalten im Allgemeinen alle Diagonalen sowohl Zug, wie Druck. Wenn der größte Druck, der in einer Diagonalen durch mobile Belastung entsteht, kleiner ist, als der Zug durch das Eigengewicht, so erleidet die Diagonale nur Zug, umgekehrt nur Druck. Für die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen nahe dem Auflager ist der Zug in Folge des Eigengewichtes meistens viel größer, als der größte Druck durch mobile Belastung, und es werden daher diese Diagonalen meistens nur gezogen. Eben so ergibt sich, daß die nahe dem Auflager befindlichen, nach der Mitte zu ansteigenden Diagonalen nur Druck erhalten. Die Diagonalen in dem mittleren Theile des Trägers werden dagegen sowohl gezogen, wie gedrückt.

3) Parallelträger mit Fachwerk.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Für eine beliebige Belastung wird im vorliegenden Falle genau so, wie in Art. 383, S. 343, wenn M das Biegemoment für den einem oberen Gurtungsstabe conjugirten Punkt, M' das Biegemoment für den einem unteren Gurtungsstabe conjugirten Punkt bezeichnet,

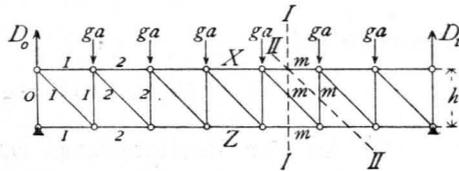
386.
Berechnung
d. Gurtungs-
spannungen.

$$X = -\frac{M}{h} \quad \text{und} \quad Z = \frac{M'}{h} \dots \dots \dots 215.$$

Auch hier findet das Maximum der Beanspruchung der Gurtungsstäbe bei totaler Belastung des Trägers statt.

Für die Belastung durch Eigengewicht, bzw. totale gleichmäßig vertheilte mobile Belastung (Fig. 191) ist die Spannung in den Gurtungsstäben davon unabhängig, ob die Lasten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Es ist die Auflager-Reaction

Fig. 191.



$$D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{g a}{2}.$$

Für den m -ten Stab der oberen, bzw. der unteren Gurtung erhält man die durch das Eigengewicht g pro Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_g = -\frac{g a^2 m (n - m)}{2 h} \quad \text{und} \quad Z_g = \frac{g a^2}{2 h} (m - 1) (n - m + 1) \dots 216.$$

und die durch totale mobile Belastung p pro Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_p = -\frac{p a^2 m (n - m)}{2 h} \quad \text{und} \quad Z_p = \frac{p a^2}{2 h} (m - 1) (n - m + 1) \dots 217.$$

X_p und Z_p sind zugleich die Maximalspannungen, die durch mobile Belastung hervorgerufen werden.

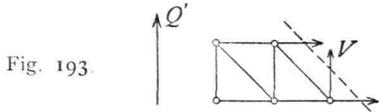
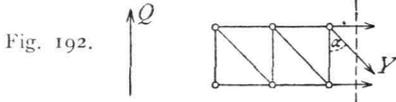
β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für das Fragment in Fig. 192 sei bei beliebiger Belastung die Transversalkraft Q ; alsdann ist für die Spannung in der Diagonalen

387.
Berechnung
d. Gitterstabs-
spannungen.

$$Y \cos \alpha = Q, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \dots \dots \dots 218.$$

Ist in Fig. 193 die Transversalkraft für das Fragment Q' , so ist die Spannung in der Verticalen

$$V = - Q' \dots \dots \dots 219.$$



Für die Diagonalen ist es, da der Schnitt vertical gelegt werden kann, gleichgiltig, ob die Last in der oberen oder unteren Gurtung liegt; für die Verticalen dagegen ergibt sich, da der Schnitt bei diesen schräg gelegt wird, ein wesentlich anderes Q' , wenn die Last oben, als wenn sie unten liegt.

a) Das Eigengewicht erzeugt (Fig. 191)

die Auflager-Reaction $D_0 = (n - 1) \frac{g a}{2}$. Um die Spannung in den Diagonalen zu finden, führen wir den Schnitt II durch die m -te Diagonale; alsdann ist die Transversalkraft $Q_m = D_0 - (m - 1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2 m + 1)$ und

$$Y_g = \frac{Q_m}{\cos \alpha} = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2 m + 1) \dots \dots \dots 220.$$

Denfelben Ausdruck fanden wir in Art. 384, S. 345, Gleichung 205. für die beim Netzwerk rechts fallenden Diagonalen. Die in Bezug auf Zug und Druck dort gefundenen Resultate gelten demnach auch hier. Die nach der Mitte fallenden Diagonalen erhalten durch das Eigengewicht Zug; die nach der Mitte steigenden Diagonalen erhalten Druck.

Für die Ermittlung der Spannungen in den Verticalen ist zu unterscheiden, ob die Lastpunkte oben oder unten sich befinden. Im ersteren Falle (Fig. 191) ist

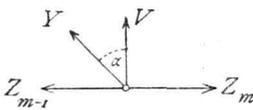
$$V_m = - Q_m = - \frac{g a}{2} (n - 2 m + 1), \dots \dots \dots 221.$$

im zweiten Falle

$$V'_m = - Q'_m = - \frac{g a}{2} (n - 1 - 2 m) \dots \dots \dots 222.$$

Die Art der Beanspruchung ergibt sich entweder, wie oben in Art. 384, S. 345 gezeigt wurde, oder durch Betrachtung eines beliebigen nicht belasteten Knotenpunktes (Fig. 194).

Fig. 194.



An einem Knotenpunkte der unteren Gurtung wirken, wenn etwa die Lasten an der oberen Gurtung angenommen werden, nur die Spannungen der Stäbe, welche sich an ihm kreuzen. Die algebraische Summe aller Vertical-componenten muß Null sein, d. h. es muß $0 = Y \cos \alpha + V$ und $V = - Y \cos \alpha$ sein. Hieraus folgt der Satz: Die beiden Gitterstabsparungen am Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung haben entgegengesetzte Beanspruchung; die Belastung, welche in einer Diagonalen Zug erzeugt, erzeugt in derjenigen Verticalen, welche mit ihr an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammen trifft, Druck und umgekehrt.

b) Für die ungünstigste Beanspruchung der Gitterstäbe, welche durch mobile Belastung hervorgebracht wird, ergibt sich betreff der Diagonalen durch dieselbe Beweisführung, wie in Art. 384, S. 346, die gleiche Regel wie dort. Für die Verticalen ergibt sich zugleich aus dem Schlusssatze unter a: Jede Verticale erhält ihren größten Druck (bezw. Zug) bei derjenigen Belastung, bei welcher die mit ihr

an einem unbelasteten Knotenpunkte zusammentreffende Diagonale ihren größten Zug (bezw. Druck) erhält.

Wirken die Lasten an der oberen Gurtung, so ergeben sich die Werthe für die Spannungen, wenn wir wiederum zur Ermittlung von Q die Knotenpunktsbelastungen durch gleichförmig vertheilte Lasten ersetzt denken, wie folgt. Für das Maximum von Y_m und das Minimum von V_m ergibt sich nach Fig. 195 die Auflager-Reaction

Fig. 195.

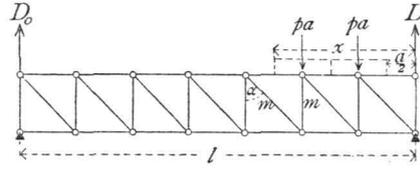
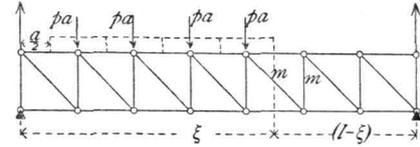


Fig. 196.



$$D_0 = \frac{p \left(x - \frac{a}{2} \right)}{2l} \left(x + \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = Q_m.$$

Sonach

$$Y_{m_{max}} = \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \text{ und } V_{m_{min}} = - \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad 223.$$

Für Y_{min} und V_{max} findet man nach Fig. 196

$$D_0 = \frac{p \left(\xi - \frac{a}{2} \right) \left[\frac{\xi - \frac{a}{2}}{2} + l - \xi \right]}{l} = p \left(\xi - \frac{a}{2} \right) - \frac{p}{2l} \left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right];$$

$$Q = - \frac{p}{2l} \left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right];$$

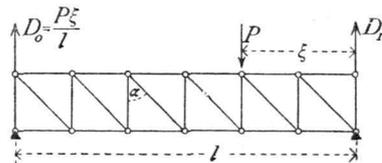
$$Y_{m_{min}} = - \frac{p}{2l \cos \alpha} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \text{ und } V_{m_{max}} = - \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad 224.$$

x bedeutet den Abstand der Mitte desjenigen Feldes, zu dem die Diagonale gehört, vom rechten Auflager; bei den Verticalen die Mitte des Feldes, zu welchem diejenige Diagonale gehört, die mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft (hier also der unteren Gurtung).

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an, so stimmen die Formeln für die Diagonalen genau mit den eben entwickelten; auch diejenigen für die Verticalen, wenn man beachtet, dass x den soeben erwähnten Werth hat, dass sich also x hier auf die Mitte des Feldes bezieht, zu dem die Diagonale gehört, welche mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der oberen Gurtung sich schneidet.

c) Wenn der Träger durch eine Einzellast belastet wird (Fig. 197), so erhält jede Diagonale zwischen dem Lastpunkt und dem linken Auflager, nach welchem hier die Diagonalen steigen, einen Zug

Fig. 197.



$$Y = \frac{P \xi}{l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 225.$$

jede Verticale auf dieser Seite der Last einen Druck

$$V = - \frac{P \xi}{l} \dots \dots \dots 226.$$

Jede Diagonale zwischen dem Lastpunkt und dem rechten Auflager, nach dem die Diagonalen hier fallen, erhält einen Druck

$$Y = - \frac{P(l - \xi)}{l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 227.$$

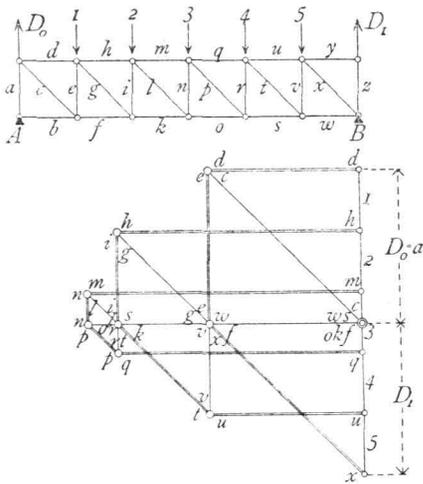
jede Verticale auf dieser Seite einen Zug

$$V = \frac{P(l - \xi)}{l} \dots \dots \dots 228.$$

388.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Der Träger sei durch eine gleichmäÙig vertheilte Last (Eigengewicht, bzw. totale mobile Belastung) belastet; in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung wirke die Last $g a$, bzw. $p a$. Hiernach ist in Fig. 198 der Kräfteplan nach der Cremona'schen Methode construiert, worüber weitere Bemerkungen unnöthig sind.

Fig. 198.



Wenn die Zeichnung für eine Belastung g pro Längeneinheit construiert ist, so geben die Längen der einzelnen Linien auch zugleich die Beanspruchungen für die Belastung p pro Längeneinheit, falls dieselben nur auf einem Maßstabe abgegriffen werden, auf welchem diejenige Länge $p a$ bedeutet, welche vorher $g a$ bedeutet hatte.

Sind die Maximalspannungen in den Gitterstäben, welche durch mobile Belastung erzeugt werden, zu bestimmen, so ergibt die Vergleichung der in Art. 387, S. 353 für Y_{max} und V_{max} gefundenen Werthe

mit den in Art. 384, S. 347 für den Parallelträger mit Netzwerk gefundenen Werthen für Y und Q die genaue Uebereinstimmung beider, falls x den in Art. 387, S. 353 angegebenen Werth hat.

Die unten stehende Curve (Fig. 199) ergibt demnach die Werthe für Q_{max}

Fig. 199.

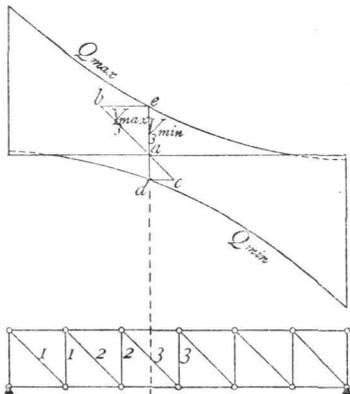
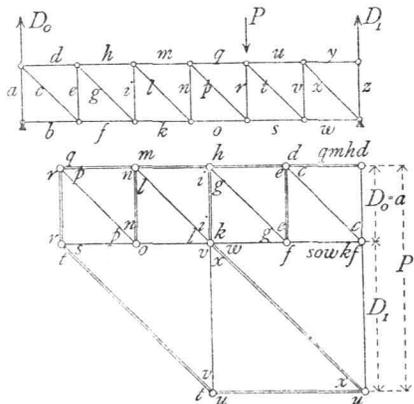


Fig 200.



so wie Q_{min} und damit, wie gezeichnet, leicht die Werthe für Y und V . Der für V_{3min} angegebene Werth entspricht einer Belastung der oberen Gurtung.

Auch die *Culmann'sche* Methode giebt rasch die gefuchten Resultate.

Die Ermittlung fämmlicher Spannungen, welche eine Einzellaft hervorbringt, ergibt sich leicht mittels des *Cremona'schen* Kräfteplans, wie neben stehend (Fig. 200) gezeichnet ist.

4) Parallelträger mit nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Diagonalen.

Im vorhergehenden Kapitel ist gezeigt worden, dass die gedrückten Stäbe mit Rücksicht auf Widerstand gegen Zerknicken wesentlich stärker construirt werden müssen, als die einfache Druckbeanspruchung erfordert. Bei der Bestimmung der Querschnittsgröße sind Zuschläge zu machen, welche bei den gezogenen Stäben nicht nöthig sind. Man wird deshalb bei gewissen Materialien, besonders bei Schmiedeeisen, die Verwendung gedrückter Stäbe möglichst beschränken, und statt deren, wenn möglich, gezogene anordnen. Wo aber gedrückte Stäbe nicht entbehrt werden können, empfiehlt es sich, die kürzeren Stäbe als gedrückte, die längeren als gezogene anzuordnen. Bei manchen Materialien hingegen, insbesondere beim Holz, macht die Anordnung der Verbindungen eine möglichst geringe Verwendung von Zugstäben und eine möglichst ausgedehnte Verwendung von Druckstäben wünschenswerth.

Bei den Trägern mit Fachwerk ist die Anordnung von nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Diagonalen möglich.

Wir betrachten zunächst die Träger mit nur gezogenen Diagonalen.

Wie in Art. 387, S. 352 nachgewiesen ist, erzeugt das Eigengewicht, so wie auch eine totale gleichmäßige Belastung aller Knotenpunkte in den nach der Mitte fallenden Diagonalen Zug, in den nach der Mitte steigenden Diagonalen Druck. Soll also durch die angegebene Belastung, welche für den Hochbau weitaus die wichtigste ist, in den Diagonalen nur Zug entstehen, so ordnet man nur nach der Mitte fallende Diagonalen an, construirt also den Träger genau symmetrisch zur Mitte (Fig. 201). Ist die Felderzahl ungerade, so erhalten die Diagonalen in dem Mittelfelde bei dieser Belastung den Zug und Druck Null (Fig. 202). Bei dieser Trägerform erhalten je zwei symmetrisch zur Mitte liegende Stäbe gleiche Spannungen; dieselben wurden früher für die eine Hälfte gefunden und sind demnach leicht zu übertragen.

Die in Fig. 201 und 202 gezeichneten Diagonalen erhalten aber durch mobile, nicht über den ganzen Träger ausgedehnte Belastung eventuell Druckbeanspruchungen, und zwar findet, wie oben ermittelt, in einer Diagonalen der grösste Druck statt, wenn die Knotenpunkte vom Kopfpunkte der Diagonalen bis zu demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist, belastet, die übrigen Knotenpunkte aber unbelastet sind. Durch das stets noch vorhandene Eigengewicht findet andererseits in den Diagonalen eine beständige Zugspannung statt, welche die erwähnte Druckbeanspruchung vermindert. Diejenigen Diagonalen nun, bei denen (beides

389.
Princip.

390.
Träger
mit nur
gezogenen
Diagonalen.

Fig. 201.

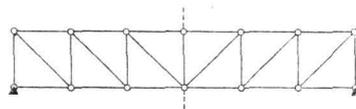
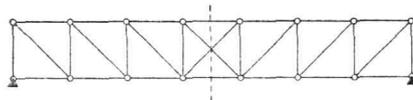


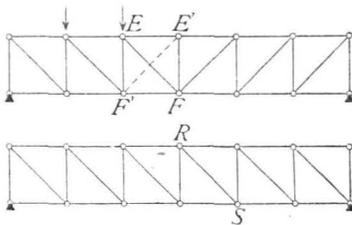
Fig. 202.



absolut genommen) die Zugspannung durch das Eigengewicht größer ist, als die größte Druckspannung in Folge mobiler Last, werden stets gezogen, nie gedrückt. Bei denjenigen Diagonalen dagegen, welche durch das Eigengewicht einen geringeren Zug erhalten, als ungünstigsten Falles der Druck durch mobile Belastung beträgt (wiederum beides absolut genommen), wird eine Druckbeanspruchung eintreten, die zu vermeiden ist. Man bringt deshalb in dem betreffenden Felde eine zweite Diagonale mit einer solchen Richtung an, daß die mobile Belastung, welche in der bereits im Felde vorhandenen Diagonalen Druck erzeugt, in der zweiten Diagonalen Zug hervorruft. Die Diagonale muß demnach so gerichtet sein, daß die erwähnte mobile Belastung die Knotenpunkte vom Fußpunkte der Diagonalen an bis zu demjenigen Auflager belastet, nach welchem dieser Fußpunkt hinweist; mit anderen Worten, man bringt eine Diagonale an, welche die bereits vorhandene Diagonale kreuzt, eine sog. Gegendiagonale (in Fig. 203 die punktierte Diagonale $E'F'$).

Damit dieselbe aber auch wirksam sei, erhält die Hauptdiagonale EF einen derartigen Querschnitt, daß sie bei Druckspannungen ausbiegt, daß sie also in diesem

Fig. 203.

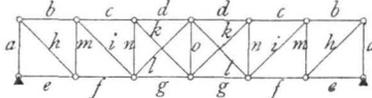


Falle als nicht vorhanden angesehen werden kann. Solche Gegendiagonalen sind in denjenigen Feldern anzuordnen, in welchen die Hauptdiagonalen eventuell Druckspannungen erhalten. In den Feldern nahe an dem Auflager ist die Zugspannung durch das Eigengewicht meistens groß, die Druckspannung durch mobile Last meistens klein, so daß in diesen Feldern keine Gegendiagonalen nötig sind; in den mittleren dagegen sind sie anzuordnen. Die

Spannungen in den Gegendiagonalen sind dann

genau so zu ermitteln, als wären die Hauptdiagonalen nicht vorhanden; jede Gegendiagonale, z. B. etwa $E'F'$, befindet sich genau in derselben Lage, wie die

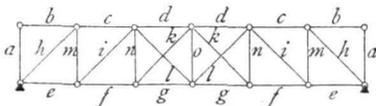
Fig. 204.



Die oben gefundenen Spannungen sind daher hier sofort zu verwerthen. Der Träger würde demnach die Form der Fig. 204 erhalten, in welcher je zwei Stäbe mit gleichen Bezeichnungen gleiche Spannungen erleiden.

Bei der Construction eines Trägers mit nur gedrückten Diagonalen ist nach gleichen Principien zu verfahren. Zunächst sind beiderseits nur nach der Mitte ansteigende Diagonalen zu verwenden, damit man für Belastung durch Eigengewicht, bezw. Totallast nur Druck erhalte. In denjenigen Feldern alsdann, in welchen die Diagonalen eventuell Zugspannung erhalten würden, sind wie oben Gegendiagonalen anzuordnen (Fig. 205). Die Verbindung in den Knotenpunkten ist so anzuordnen, daß die Hauptdiagonalen keinen Zug übertragen können.

Fig. 205.



Die Beanspruchung der Verticalen ergibt sich nach Art. 387, S. 352 stets der Beanspruchung derjenigen Diagonalen entgegengesetzt, welche an einem unbelasteten Knotenpunkte mit der Verticalen

zusammentrifft. Werden demnach alle Diagonalen nur gezogen, so werden alle Verticalen nur gedrückt (Fig. 204); werden alle Diagonalen nur gedrückt, so werden alle Verticalen nur gezogen (Fig. 205). Im zweiten Falle werden dieselben meistens aus Schmiedeeisen hergestellt, während die Diagonalen aus Holz bestehen.

Beispiel. Eine als Parallelträger mit Fachwerk (nach Art der Fig. 201) construirte Dachpfette hat folgende Dimensionen und Belastungen: Stützweite $l = 15$ m; Höhe zwischen den Gurtungs-Schwerpunkten $h = 0,6$ m; Anzahl der Felder $n = 20$; Feldweite $a = 0,75$ m; die Diagonalen fallen jederseits nach der Trägermitte zu; Gegendiagonalen sind nicht vorhanden. Die Belastung durch das Eigengewicht pro lauf. Meter ist $g = 66$ kg, also pro Knotenpunkt $g a = 66 \cdot 0,75 = 49,5$ kg oder rot. 50 kg. Die verticale Belastung durch Schnee- und Winddruck pro lauf. Meter ist $p = 235$ kg, also pro Knotenpunkt $p a = 235 \cdot 0,75 = \infty 175$ kg. Es sind die durch diese Belastungen entstehenden Spannungen zu berechnen.

392.
Beispiel.

1) Spannungen in den Gurtungen. Nach Gleichung 216. und 217. sind für den m -ten Stab der oberen Gurtung

$$X_g = - \frac{50 \cdot 0,75 \cdot m (20 - m)}{1,2} = - 31,25 m (20 - m);$$

$$X_p = - \frac{175 \cdot 0,75 \cdot m (20 - m)}{1,2} = - 109,37 m (20 - m).$$

Für den m -ten Stab der unteren Gurtung sind nach Gleichung 216. und 217.

$$Z_g = \frac{50 \cdot 0,75}{1,2} (m - 1) (21 - m) = + 31,25 (m - 1) (21 - m) \text{ und } Z_p = 109,37 (m - 1) (21 - m).$$

Man erhält aus vorstehenden Ausdrücken, indem man der Reihe nach für m die Werthe 1, 2, 3, . . . 9, 10 einführt, die Gurtungsspannungen der Stäbe links der Mitte. Die Spannungen in den symmetrisch zur Mitte liegenden Stäben sind den gefundenen genau gleich. Die Addition der Werthe X_g und X_p ergibt die Maximalspannungen in der oberen, die Addition der Werthe Z_g und Z_p die Maximalspannungen in der unteren Gurtung. Die Resultate sind in umfendender Tabelle 1 angegeben.

2) Spannungen in den Diagonalen. α) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 220. ist für die m -te Diagonale die Spannung durch das Eigengewicht, da hier $\cos \alpha = \frac{0,6}{\sqrt{0,6^2 + 0,75^2}} = 0,625$,

$$Y_g = \frac{50}{1,25} (21 - 2m) = 40 (21 - 2m).$$

Durch Einsetzung der Zahlenwerthe 1, 2, 3, . . . 9, 10 für m erhält man die Spannungen der umfendenden Tabelle 2.

β) Durch die mobile Belastung. Im vorliegenden Fall ist die mobile Belastung in zwei Theile zu trennen. Der Winddruck kann nur gleichzeitig den ganzen Träger belasten; die durch diesen erzeugten Spannungen berechnen sich also nach der obigen Formel der Gleichung 220., wenn in dieselbe statt g die Verticalcomponente der Windbelastung pro lauf. Meter eingeführt wird. Dieselbe beträgt im vorliegenden Falle 88 kg; mithin ist

$$Y_w = \frac{88 \cdot 0,75}{1,25} (21 - 2m) = 53 (21 - 2m).$$

Die Schneebelastung pro lauf. Meter des Trägers ist $p_1 = 147$ kg. Die Maximal-Zug-, bezw. -Druckspannungen, welche durch diese Belastung in den Diagonalen hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 223. u. 224.

$$Y_p \max = \frac{147}{2 \cdot 15 \cdot 0,625} (x^2 - 0,375^2) = 7,84 (x^2 - 0,141);$$

$$Y_p \min = - \frac{147}{2 \cdot 15 \cdot 0,625} [(l - x)^2 - 0,375^2] = - 7,84 [(15 - x)^2 - 0,141].$$

Für x sind der Reihe nach die Werthe einzusetzen: $15 - \frac{a}{2} = 14,625$, $15 - \frac{3a}{2} = 13,875$, $15 - \frac{5a}{2} = 13,125$, $15 - \frac{7a}{2} = 12,375$, 11,625, 10,875, 10,125, 9,375, 8,625, 7,875. Die symmetrisch zur Mitte liegenden Diagonalen erhalten gleich große Spannungen.

Man erhält die in der umfendenden Tabelle 2 angegebenen Werthe.

3) Spannungen in den Verticalen. α) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 221. ist, da die Lastpunkte oben liegen,

Tabelle 1: Spannungen in den Gurtungen (in Kilogr.).

Für		$m = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Obere Gurtung,	X_g	= - 594	- 1125	- 1594	- 2000	- 2344	- 2625	- 2844	- 3000	- 3094	- 3125	- 3125	- 3094	- 3000	- 2844	- 2625	- 2344	- 2000	- 1594	- 1125	- 594
	X_p	= - 2078	- 3937	- 5579	- 7000	- 8204	- 9187	- 9954	- 10500	- 10829	- 10937	- 10937	- 10829	- 10500	- 9954	- 9187	- 8204	- 7000	- 5579	- 3937	- 2078
	$X_g + \beta$	= - 2672	- 4062	- 7173	- 9000	- 10548	- 11812	- 12798	- 13500	- 13923	- 14062	- 14062	- 13923	- 13500	- 12798	- 11812	- 10548	- 9000	- 7173	- 4062	- 2672
Untere Gurtung,	Z_g	= 0	594	1125	1594	2000	2344	2625	2844	3000	3094	3094	3000	2844	2625	2344	2000	1594	1125	594	0
	Z_p	= 0	2078	3937	5579	7000	8204	9187	9954	10500	10829	10829	10500	9954	9187	8204	7000	5579	3937	2078	0
	$Z_g + \beta$	= 0	2672	4062	7173	9000	10548	11812	12798	13500	13923	13923	13500	12798	11812	10548	9000	7173	4062	2672	0

Tabelle 2: Spannungen in den Diagonalen (in Kilogr.).

Für		$m = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y_g	=	760	680	600	520	440	360	280	200	120	40	40	120	200	280	360	440	520	600	680	760
Y_w	=	1007	901	795	689	583	477	371	265	159	53	53	159	265	371	477	583	689	795	901	1007
x	=	$\approx 14,6$	13,9	13,1	12,4	11,6	10,9	10,1	9,4	8,6	7,9	7,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$V_p max$	=	+ 1666	1513	1344	1204	1054	930	799	692	579	488	488	579	692	799	930	1054	1204	1344	1513	1666
$V_p min$	=	0	- 8	- 27	- 52	- 90	- 131	- 187	- 245	- 320	- 394	- 394	- 320	- 245	- 187	- 131	- 90	- 52	- 27	- 8	0

Tabelle 3: Spannungen in den Verticalen (in Kilogr.).

Für		$m = 0^*)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ^{**)}	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 ^{*)}
V_g	=	- 500	- 475	- 425	- 375	- 325	- 275	- 225	- 175	- 125	- 75	- 50	- 75	- 125	- 175	- 225	- 275	- 325	- 375	- 425	- 475	- 500
V_w	=	- 660	- 627	- 561	- 495	- 429	- 363	- 297	- 231	- 165	- 99	- 66	- 99	- 165	- 231	- 297	- 363	- 429	- 495	- 561	- 627	- 660
x	=		14,6	13,9	13,1	12,4	11,6	10,9	10,1	9,4	8,6	7,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$V_p min$	=	- 1103	- 1044	- 946	- 840	- 753	- 659	- 581	- 499	- 433	- 362	- 110 ^{*)}	- 362	- 433	- 499	- 581	- 659	- 753	- 840	- 946	- 1044	- 1103
$V_p max$	=	0	0	+ 5	+ 17	+ 33	+ 56	+ 82	+ 117	+ 153	+ 200	0	+ 200	+ 153	+ 117	+ 82	+ 56	+ 33	+ 17	+ 5	0	0

* In der Endverticalen ist der Druck stets gleich der Auflager-Reaction, d. h., da die Belaftung des Endknotenpunkts $\frac{g \cdot a}{2}$ hinzukommt, für Eigengewicht = $-\frac{g \cdot a}{2} (n - 1) - \frac{g \cdot a}{2}$ = $-\frac{g \cdot a}{2} n = -25 \cdot 20 = -500$ kg; für Winddruck = $-\frac{88 \cdot 0,75}{2} n = -660$ kg. Die größte Beanspruchung durch Schneelast findet in derselben bei totaler Belaftung durch Schnee statt, weil bei dieser die Auflager-Reaction am größten ist. Demnach ist $V_p min = -\frac{p \cdot a}{2} n = -\frac{147 \cdot 0,75}{2} \cdot 20 = -1103$ kg. Zug kann in dieser Verticalen nicht entstehen.

** Auf die Mittelverticale (Nr. 10) sind die obigen Gleichungen nicht anwendbar, weil an ihrem unteren Endpunkte sich die zwei Diagonalen der aufstossenden Felder treffen, also der schiefe Schnitt andere Stäbe trifft, als bei der Entwicklung der Formeln vorgesehen war. Da am oberen Endpunkt der Verticalen keine Diagonale ansetzt, so kann dieselbe nur solche Verticalkräfte aufnehmen, welche im oberen Knotenpunkte direct angreifen. Wir erhalten also die Spannungen in derselben genau so groß, wie die Knotenpunktsbelaftungen. Diese Werthe sind in der obigen stehende Tabelle eingefetzt worden.

$$V_g = -\frac{50}{2} (21 - 2m) = -25 (21 - 2m).$$

3) Durch mobile Belaftung. Die Spannung in den Verticalen durch den Winddruck ist entsprechend dem sub 2. Angeführten

$$V_w = -\frac{88 \cdot 0,75}{2} (n - 2m + 1) = -33 (21 - 2m).$$

Die Maximal-Druck-, bezw. -Zugspannungen durch Schneelast endlich ergeben sich aus den Gleichungen 223. u. 224. zu

$$V_p \text{ min} = -\frac{147}{2 \cdot 15} (x^2 - 0,141) = -4,9 (x^2 - 0,141) \text{ und } V_p \text{ max} = 4,9 [(l - x^2) - 0,141].$$

Für x sind dieselben Werthe, wie bei den Diagonalen einzuführen. Man erhält die Werthe der neben stehenden Tabelle 3.

4) Zusammenstellung der Spannungen für die Querschnittsbestimmung. Sollen die Querschnitte nach der neueren Methode bestimmt werden, so ist für jeden Stab die Spannung durch die permanente Belaftung P_g , die Maximalspannung durch mobile Belaftung P_1 und die Minimalspannung durch dieselbe Belaftung P_2 zu ermitteln (siehe Art. 284 bis 287, S. 250 bis 252). Ueberwiegt im Stabe der Zug, so ist P_1 der Maximalzug, P_2 der Maximaldruck durch mobile Belaftung; überwiegt im Stabe der Druck, so ist P_1 der Maximaldruck, P_2 der Maximalzug durch mobile Belaftung. Die Werthe für P_0 , P_1 und P_2 ergeben sich leicht aus neben stehenden Tabellen. Zunächst geben die X_g , Z_g , Y_g und V_g die Werthe der P_0 , die X_p , Z_p , Y_p und V_p die Werthe der P_1 , endlich die $Y_p \text{ min}$ und $V_p \text{ max}$ die Werthe der P_2 . Danach ist folgende Tabelle zusammengestellt.

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen: Ueberwiegender Zug				Verticalen: Ueberwiegender Druck			
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 20	- 594	- 2078	1 u. 20	0	0	1 u. 20	+ 760	+ 2673	0	10 u. 20	- 500	- 1763	0
2 u. 19	- 1125	- 3937	2 u. 19	+ 594	+ 2078	2 u. 19	+ 680	+ 2414	- 8	1 u. 19	- 475	- 1671	0
3 u. 18	- 1594	- 5579	3 u. 18	+ 1125	+ 3937	3 u. 18	+ 600	+ 2139	- 27	2 u. 18	- 425	- 1507	+ 5
4 u. 17	- 2000	- 7000	4 u. 17	+ 1594	+ 5579	4 u. 17	+ 520	+ 1893	- 52	3 u. 17	- 375	- 1335	+ 17
5 u. 16	- 2344	- 8204	5 u. 16	+ 2000	+ 7000	5 u. 16	+ 440	+ 1637	- 90	4 u. 16	- 325	- 1182	+ 33
6 u. 15	- 2625	- 9187	6 u. 15	+ 2344	+ 8204	6 u. 15	+ 360	+ 1407	- 131	5 u. 15	- 275	- 1022	+ 56
7 u. 14	- 2844	- 9954	7 u. 14	+ 2625	+ 9187	7 u. 14	+ 280	+ 1170	- 187	6 u. 14	- 225	- 878	+ 82
8 u. 13	- 3000	- 10500	8 u. 13	+ 2844	+ 9954	8 u. 13	+ 200	+ 957	- 245	7 u. 13	- 175	- 730	+ 117
9 u. 12	- 3094	- 10829	9 u. 12	+ 3000	+ 10500	9 u. 12	+ 120	+ 738	- 320	8 u. 12	- 125	- 598	+ 153
10 u. 11	- 3125	- 10937	10 u. 11	+ 3094	+ 10829	10 u. 11	+ 40	+ 541	- 394	9 u. 11	- 75	- 461	+ 200
										10	- 50	- 176	0
	Kilogr.			Kilogr.			Kilogramm.				Kilogramm.		

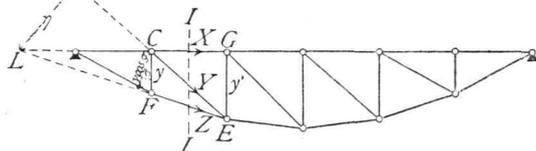
5) Parabelträger.

Wir wollen hier von den Trägern, bei denen nicht beide Gurtungen geradlinig sind, nur die Parabelträger besprechen. Parabelträger sind Träger mit einer oder zwei nach Parabeln gekrümmten Gurtungen. Es sollen nur Träger mit einer geraden und einer gekrümmten Gurtung behandelt werden.

a) Berechnung der Spannungen in der gekrümmten Gurtung. Ist die obere Gurtung gerade (Fig. 206),

so ist für einen Stab FE der unteren Gurtung C der conjugirte Punkt; mithin wird, wenn M das Moment der an der einen Seite des Schnittes II wirkenden äußeren Kräfte bezogen auf C als Drehpunkt bezeichnet,

Fig. 206.



$$0 = M - Z y \cos \sigma, \text{ woraus } Z = \frac{M}{y \cos \sigma} \dots \dots \dots 229.$$

393.
Berechnung
d. Spannungen
in d. gekrümmten
Gurtung.

Liegt die Diagonale rechts der Mitte, so fällt der conjugirte Punkt rechts vom rechten Auflager. Die Aufstellung der Momentengleichung für diesen Punkt ergibt genau wie in Gleichung 234. die Diagonalspannung als Quotienten aus dem Moment der am Fragment wirkenden äußeren Kräfte, dividirt durch den Hebelsarm der Diagonalspannung.

Häufig ist ein anderer Ausdruck der Diagonalspannung bequemer, als Gleichung 234. Die am Knotenpunkt C der geraden Gurtung (Fig. 209) angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht; die algebraische Summe aller Horizontal-Componenten ist demnach gleich Null; mithin

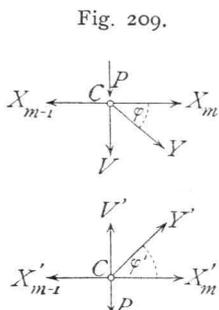


Fig. 209.

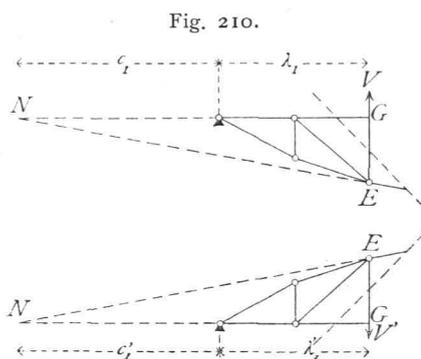


Fig. 210.

Häufig ist ein anderer Ausdruck der Diagonalspannung bequemer, als Gleichung 234. Die am Knotenpunkt C der geraden Gurtung (Fig. 209) angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht; die algebraische Summe aller Horizontal-Componenten ist demnach gleich Null; mithin

$$0 = Y \cos \varphi + X_m - X_{m-1}, \quad \text{woraus } Y = - \frac{X_m - X_{m-1}}{\cos \varphi}$$

$$\text{bzw. } 0 = Y' \cos \varphi' + X'_m - X'_{m-1}, \quad \text{woraus } Y' = - \frac{X'_m - X'_{m-1}}{\cos \varphi'}$$

} . 235.

Für die Bestimmung der Spannungen in den Verticalen ist der Schnitt schief zu legen (Fig. 210). Der conjugirte Punkt für die Verticale EG ist N . Bezeichnet M_2 , bzw. M'_2 das Moment der am Fragment wirkenden äußeren Kräfte für N als Drehpunkt, so wird

$$0 = V(\lambda_1 + c_1) + M_2, \quad \text{woraus } V = - \frac{M_2}{\lambda_1 + c_1}, \quad \dots \quad 236.$$

$$\text{bzw. } 0 = V'(\lambda'_1 + c'_1) - M'_2, \quad \text{woraus } V' = \frac{M'_2}{\lambda'_1 + c'_1} \dots \dots \dots 237.$$

Falls der conjugirte Punkt nach rechts vom rechten Auflager fällt, ergibt sich eine geringe Modification der Gleichungen 236. und 237.

Ein für manche Fälle bequemerer Ausdruck wird wiederum durch Betrachtung des Knotenpunktes an der geraden Gurtung erhalten. Es ergibt sich, da die Kräfte an demselben im Gleichgewicht sind,

$$0 = Y \sin \varphi + V + P, \quad \text{woraus } V = - (Y \sin \varphi + P),$$

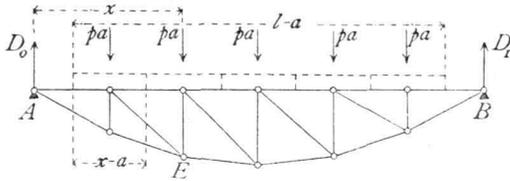
$$\text{bzw. } 0 = Y' \sin \varphi' + V' - P, \quad \text{woraus } V' = - (Y' \sin \varphi' - P)$$

} . 238.

δ) Totale Belastung durch mobile Last p (bzw. Eigengewicht g) pro Längeneinheit. Nehmen wir wiederum an, daß die Lasten nur in den Knotenpunkten angreifen, so kommt auf jeden Knotenpunkt bei der Feldweite a eine Last gleich pa . Die Auflager-Reactionen D_0 und D_1 sind bei dieser Belastung genau eben so groß, als wenn bei dem homogen angenommenen Träger die Einzellasten pa sich je auf die Länge a gleichmäßig vertheilten; denn im zweiten Falle ist $D_0 = \frac{p(l-a)}{2}$, während im ersten Falle $D_0 = \frac{pa(n-1)}{2}$ ist. Da nun $(n-1)a = l-a$ ist, so ist im ersten Falle gleichfalls $D_0 = \frac{p(l-a)}{2}$.

396.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

Fig. 211.



Für irgend einen Knotenpunkt E (Fig. 211) ist auch das Moment in beiden Fällen gleich, wenn nur die Belaftung von der Mitte des dem Auflager zunächst liegenden Feldes bis zur Mitte desjenigen Feldes gerechnet wird, welches E vorhergeht.

Dann ist für den Punkt E

$$M_x = \frac{p(l-a)}{2} x - p(x-a) \left(\frac{x-a}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2} (lx - x^2).$$

Dies ist aber nach Gleichung 159. der Ausdruck für das Moment im Punkte E bei einem homogenen, gleichmäßig total mit p pro Längeneinheit belafteten Träger. Für die gekrümmte Gurtung ist nach Gleichung 229.

$$Z \cos \sigma = \frac{M}{y}.$$

Wird für M der eben gefundene Werth, für y der Werth aus Gleichung 231. eingeführt, so wird

$$\left. \begin{aligned} Z \cos \sigma &= \frac{\frac{p}{2} (lx - x^2)}{\frac{4h}{l^2} (lx - x^2)} = \frac{p l^2}{8h} \\ \text{eben so} \quad Z' \cos \sigma &= -\frac{p l^2}{8h} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 239.$$

$Z \cos \sigma$ ist die Horizontalcomponente H der Spannung in der gekrümmten Gurtung; die rechte Seite der Gleichung enthält nur constante Größen, so dass sich hieraus ergibt: Beim Parabelträger ist für gleichmäßige Belaftung des ganzen Trägers die Horizontalcomponente der Spannung in der gekrümmten Gurtung constant.

Da $\cos \sigma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (y' - y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}}$ ist, erhält man aus

Gleichung 239.

$$Z = \frac{p l^2}{8h} \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \dots \dots \dots 240.$$

Für die gerade Gurtung ist nach Gleichung 232. und 233.

$$X = -\frac{M'}{y'} \quad \text{und} \quad X' = +\frac{M'}{y'}.$$

Nun ist für die in Rede stehende Belaftung $\frac{M}{y}$ constant, und zwar gleich $Z \cos \sigma = H$, also auch

$$X = -H = -\frac{p l^2}{8h} \quad \text{und} \quad X' = H = \frac{p l^2}{8h} \dots \dots \dots 241.$$

Beim Parabelträger ist sonach für eine gleichmäßig über den ganzen Träger vertheilte Belaftung die Spannung in der geraden Gurtung constant.

Für die Spannung in den Diagonalen wurde die Gleichung 235. aufgestellt. Da nun $X_m = X_{m-1} = -H$ ist, folgt aus dieser Gleichung

$$Y = 0; \text{ eben so } Y' = 0.$$

Beim Parabelträger ist daher für die mehr erwähnte Belastungsart die Spannung in den Diagonalen gleich Null.

Die Spannung in den Verticalen ergibt sich aus Gleichung 238., da Y gleich Null, $P = p a$ ist, zu

$$V = -p a, \text{ eben so } V' = p a.$$

Die Spannung in den Verticalen ist sonach beim Parabelträger und bei der angegebenen Belastung gleich der im Knotenpunkte der geraden Gurtung wirkenden Last, und zwar Zug, wenn die untere Gurtung gerade, und Druck, wenn die obere Gurtung gerade ist. (Dabei ist angenommen, dass die Lasten an der geraden Gurtung wirken.)

Die sämtlichen hier gefundenen Resultate gelten auch für die Belastung durch das Eigengewicht; nur ist überall statt der Last p das Eigengewicht g einzuführen. Da ferner die Momente für die Knotenpunkte aufgestellt sind, und dabei nur vorausgesetzt ist, dass y eine Parabelordinate sei, so gelten die vorhergehenden Entwicklungen auch, wenn nur die Knotenpunkte auf einer Parabel liegen, also die Curve durch ein der Parabel eingeschriebenes Polygon ersetzt wird.

ε) Ungünstigste Belastungen und grösste Stabspannungen. Da es keinen principiellen Unterschied macht, ob die obere oder die untere Gurtung gerade ist, so soll im Folgenden nur der Fall der geraden oberen Gurtung behandelt werden. Die Modificationen für den Fall der geraden unteren Gurtung ergeben sich leicht.

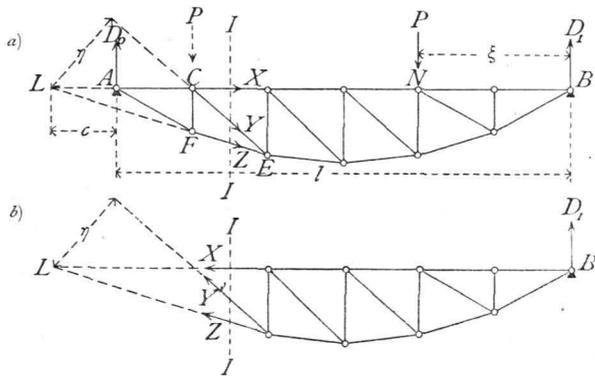
397.
Ungünstigste
Belastungen
u. grösste
Spannungen.

Die Spannungen in den Gurtungen hängen nach den Gleichungen 229., 230., 232. und 233. nur von der Grösse der Momente ab; diese aber sind bei totaler Belastung des ganzen Trägers am grössten; mithin findet Maximalspannung in den Gurtungen bei totaler mobiler Belastung statt.

Die Gleichungen 240. und 241. geben für die obere, bezw. untere Gurtung die durch totale mobile Belastung p pro Längeneinheit erzeugten Spannungen.

Die ungünstigste Belastung für eine Diagonale CE (Fig. 212 a) ergibt sich, wie folgt. Eine Last P rechts von dem durch die Mitte der Diagonalen gelegten Verticalschnitt erzeugt eine Auflager-Reaction $D_0 = \frac{P \xi}{l}$. Die Gleichung der statischen Momente für den Punkt L als Momentenpunkt und das Fragment des Trägers links vom Schnitt II ergibt

Fig. 212.



$$0 = Y \eta - D_0 c, \text{ woraus } Y = \frac{D_0 c}{\eta} = \frac{P \xi c}{l \eta} \dots 242.$$

So lange die Last sich rechts vom Schnitt II befindet, gilt der hier für Y gefundene Ausdruck. Jede Last rechts vom Schnitt erzeugt also in CE einen Zug.

Befindet sich die Last P links vom Schnitt II (Fig. 212 b), so betrachte man das Fragment an der rechten Seite des Schnittes; auf dasselbe wirken die Auflager-

Reaction D_1 in B und die 3 Spannungen X , Y' und Z . Die Gleichung der statischen Momente für L als Drehpunkt heisst dann

$$0 = Y' \eta + D_1 (l + c), \text{ woraus } Y' = - \frac{D_1 (l + c)}{\eta} \dots 243.$$

Die Last P links von II erzeugt also in den Diagonalen Druck und in gleicher Weise jede links vom Schnitt liegende Last.

Handelt es sich um eine rechts der Mitte liegende Diagonale, bei welcher der conjugirte Punkt von B nach rechts fällt, so findet man dieselben Resultate für die ungünstigste Belaftung.

Es ergibt sich hiernach leicht Folgendes: Wenn am Fragment des Trägers, auf welchem die Einzellast nicht liegt, die betrachtete Stabspannung und die Auflager-Reaction in gleichem Sinne um den conjugirten Punkt drehen, so findet im Stabe Druck statt; wenn die Stabspannung und die Auflager-Reaction in entgegengesetztem Sinne um den conjugirten Punkt drehen, so findet im Stabe Zug statt. Die Anwendung dieses Satzes ergibt, dass auch hier das für die Parallelträger (Art. 384, S. 346) gefundene Gesetz gilt: Jede Belaftung zwischen dem durch die Diagonalenmitte gelegten Verticalschnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fusspunkt der Diagonale hinweist, erzeugt in derselben Zug; jede Belaftung zwischen dem erwähnten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonale hinweist, erzeugt in derselben Druck.

Maximalzug durch mobile Belaftung findet demnach in einer Diagonalen statt, wenn die ganze Zugabtheilung und nur diese belaftet ist, d. h. wenn alle Knotenpunkte zwischen dem Schnitte und demjenigen Auflager belaftet sind, nach welchem der Fuss der Diagonale hinweist; Maximaldruck durch mobile Belaftung findet statt, wenn die Knotenpunkte zwischen dem Schnitte und demjenigen Auflager belaftet sind, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist.

Dieses Gesetz gilt sowohl, wenn die untere, als wenn die obere Gurtung gekrümmt ist.

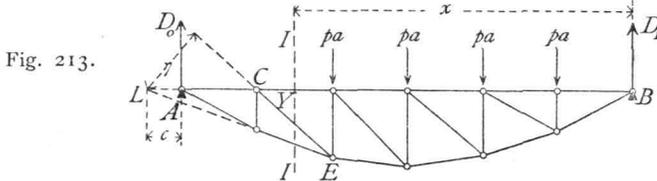


Fig. 213.

Die grösste Zugbelaftung in einer Diagonalen CE findet daher bei der in Fig. 213 gezeichneten Belaftung statt; sie ist nach Gleichung 242.

$$Y_{max} = \frac{D_0 c}{\eta}.$$

Genau, wie in Art. 387, S. 353, erhält man für die Auflager-Reaction

$$D_0 = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

also

$$Y_{max} = \frac{p c}{2l \eta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots 244.$$

Die grösste Druckbeanspruchung in einer Diagonalen CE findet bei der in Fig. 214 gezeichneten Belaftung statt und ist (wenn der Trägertheil rechts vom Schnitte II betrachtet wird) nach Gleichung 243.

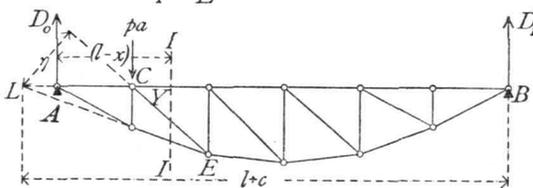


Fig. 214.

$$Y_{min} = -D_1 \left(\frac{l+c}{\eta} \right).$$

Nun ist die Auflager-Reaction $D_1 = \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$, also

$$Y_{min} = -\frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{l+c}{\eta} \dots \dots \dots 245.$$

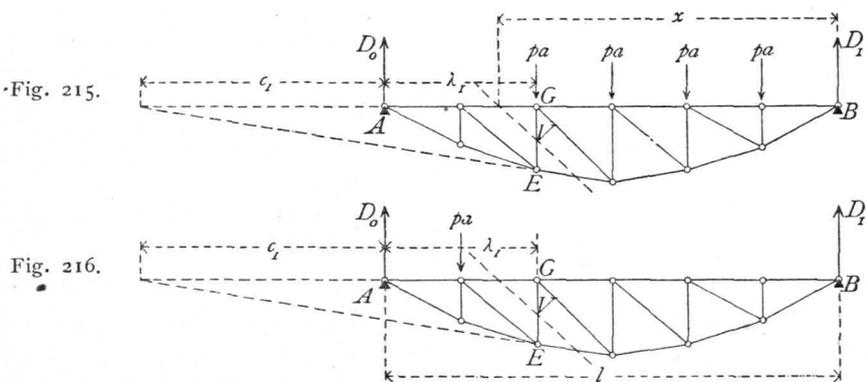
Die Gleichungen 244. und 245. gelten, wenn die Diagonalen, wie hier, nach rechts fallen, nur für diejenigen links der Mitte; für die Diagonalen rechts der Mitte, bei denen der conjugirte Punkt von B nach rechts fällt, ergeben sich folgende Werthe, in denen η_1 den Hebelsarm von Y , c_2 den Abstand des conjugirten Punktes von B bedeutet:

$$Y_{max} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{l+c_2}{\eta_1} \text{ und } Y_{min} = -\frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{c_2}{\eta_1} \quad 246.$$

Bei der angenommenen Belastungsart genügt es, Y_{max} oder Y_{min} auszurechnen; denn für die Belastung aller Knotenpunkte mit je pa ist die Diagonalspannung nach Art. 395, S. 362 gleich Null. Sind nur die Knotenpunkte der Druckabtheilung belastet, so ist die Spannung in der Diagonalen gleich Y_{min} ; sind nur die Knotenpunkte der Zugabtheilung belastet, so ist die Spannung gleich Y_{max} . Bei totaler Belastung ist die Spannung $Y_{summa} = Y_{max} + Y_{min}$ und zwar ist $Y_{summa} = 0$, d. h. $0 = Y_{max} + Y_{min}$ und $Y_{min} = -Y_{max}$.

Für die ungünstigste Belastung in einer Verticalen ergibt sich in gleicher Weise, wie bei den Diagonalen gezeigt ist, folgendes Gesetz: Jede Last zwischen einem durch die Verticale gelegten schrägen Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fußpunkt der Diagonale hinweist, welche mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht mobil belasteten Gurtung zusammentrifft, erzeugt Druck; jede Last zwischen dem Schnitte und dem Auflager, nach welchem der Kopf der erwähnten Diagonale weist, erzeugt in der Verticalen Zug. Auch hier findet demnach Maximaldruck, bezw. -Zug in einer Verticalen bei derselben Belastung statt, welche in derjenigen Diagonalen Maximalzug, bezw. -Druck erzeugt, die mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht mobil belasteten Gurtung zusammentrifft.

Es wird also Maximaldruck in GE bei der in Fig. 215 gezeichneten Belastung, Maximalzug bei der in Fig. 216 gezeichneten Belastung stattfinden.



Die Maximalspannungen in den Verticalen ergeben sich mit

$$\left. \begin{aligned} V_{min} &= -\frac{D_0 c_1}{\lambda_1 + c_1} = -\frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{c_1}{\lambda_1 + c_1} \\ V_{max} &= \frac{D_1 (l + c_1)}{\lambda_1 + c_1} = \frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{l + c_1}{\lambda_1 + c_1} \end{aligned} \right\} \dots 247.$$

Falls der conjugirte Punkt um c'_1 nach rechts von B fällt, was hier bei allen Verticalen rechts der Mitte incl. der Mittelverticalen stattfindet, so ergeben sich für V_{min} und V_{max} die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} V'_{min} &= -\frac{D_0 (l + c'_1)}{c'_1 + l - \lambda_1} = -\frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{l + c'_1}{c'_1 + l - \lambda_1} \\ V'_{max} &= \frac{D_1 c'_1}{c'_1 + l - \lambda_1} = \frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{c'_1}{c'_1 + l - \lambda_1} \end{aligned} \right\} \dots 247a.$$

Die Modificationen für Berechnung der Stabspannungen bei entgegengesetzter Richtung der Diagonalen ergeben sich aus Vorstehendem so einfach, daß darauf hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

Die bei einer Belaftung durch eine oder mehrere Einzellaften erzeugten Spannungen ergibt die Momentenmethode ohne Mühe.

ζ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Wird eine gleichmäßig vertheilte Belaftung (Eigengewicht, bezw. totale mobile Belaftung) vorausgesetzt, so ergibt der in Fig. 217 gezeichnete Cremona'sche Kräfteplan sofort die Spannungen.

Was die durch mobile Belaftung erzeugten Maximalspannungen betrifft, so ergeben sich die größten Gurtungs- spannungen aus dem eben erwähnten Kräfteplan (Fig. 217), falls eine Belaftung des ganzen Trägers mit der Last p pro Längeneinheit zu Grunde gelegt wird.

Zur Bestimmung der größten Diagonal- spannungen, welche bei den im Art. 397, S. 364 angegebenen Belaftungen stattfinden, empfiehlt sich die Schnitt- methode.

Auf das Fragment links vom Schnitte II wirken bei der in Fig. 218 a gezeichneten Maximal- Zugbelaftung für die Diagonale CE die Kräfte D_0, X, Y, Z . Die Werthe von D_0 , welche für die ver-

schiedenen Diagonalen zu Grunde zu legen sind, ergeben sich aus der Gleichung $D_0 = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$; dieselben sind in der Curve (Fig. 218 b) aufgetragen. — Für die Diagonale CE z. B. ist $D_0 = mn$; diese Kraft ist nach den Richtungen AE und X zerlegt in no und om ; no ist alsdann noch nach den Richtungen Z und Y in np und po zerlegt; po ist gleich Y_{max} .

Um die Y_{min} zu erhalten, kann man für $D_1 = \frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$ die Curve auftragen und für das Fragment rechts vom Schnitt nach der angegebenen Methode zerlegen. Da aber $Y_{min} = -Y_{max}$ ist, so kann diese Construction unterbleiben.

Die Maximalspannungen in den Verticalen werden in gleicher Weise ermittelt.

398.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

Fig. 217.

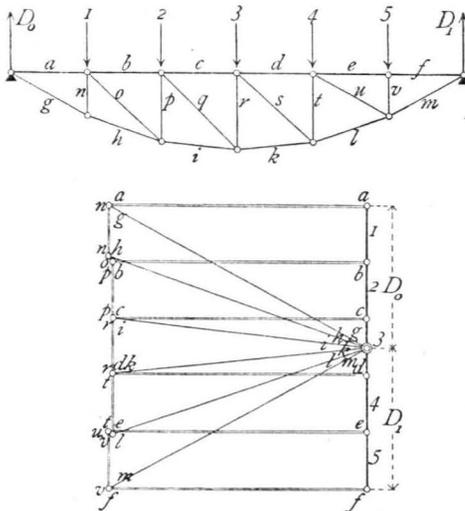


Fig. 218.

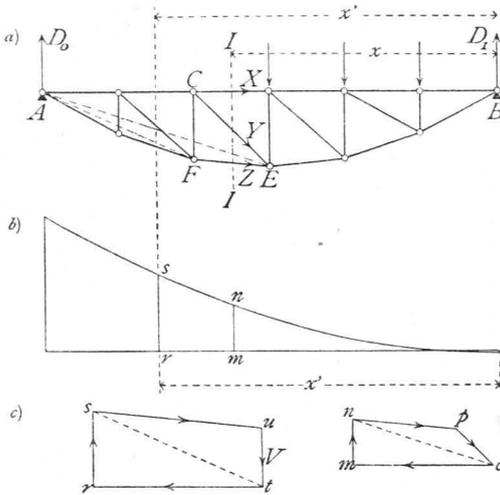


Fig. 219.

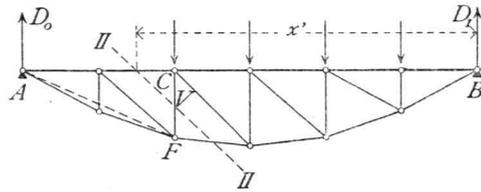
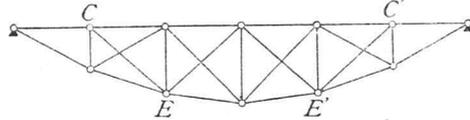


Fig. 220.



In der Verticalen CF findet Maximaldruck bei der in Fig. 219 gezeichneten Belastung statt. D_0 ist hier gleich derjenigen Ordinate der Curve in Fig. 218, welche zu x' gehört, d. h. gleich rs . Nun wird genau wie oben zerlegt. Es wird $V_{min} = ut$. Eben so ist der Maximalzug in CF zu ermitteln.

η) Träger mit Gegendiagonalen. Jede Diagonale erleidet durch die mobile Belastung sowohl Zug, wie Druck; durch das Eigengewicht entsteht in den Diagonalen die Spannung Null; die resultierende Spannung ist also identisch mit derjenigen durch die mobile Belastung. Sollen nur gezogene Diagonalen vorkommen, so wird nach Art. 390, S. 356 in jedem Felde eine Gegendiagonale angeordnet werden müssen. Man erhält die in Fig. 220 gezeichnete Trägerform. Die Gegendiagonale $C'E'$ wird genau eben so beansprucht werden, wie die symmetrisch zur Mitte liegende Hauptdiagonale CE des Trägers mit einseitig fallenden Diagonalen. Dasselbe gilt von allen Gegendiagonalen; es wird also die Berechnung eines Trägers mit nach einer Richtung fallenden Diagonalen genügen.

399.
Träger
mit Gegen-
diagonalen.

Beispiel. Ein als Unterzug dienender Parabelträger mit gerader oberer und gekrümmter unterer Gurtung hat die nachfolgenden Hauptabmessungen und Belastungen: Stützweite $l = 12,0\text{ m}$; Pfeilhöhe $h = 1,20\text{ m}$; Feldweite $a = 1,0\text{ m}$; Eigengewicht der Construction pro lauf. Meter des Trägers $g = 320\text{ kg}$, also pro Knotenpunkt $ga = 320\text{ kg}$; mobile Belastung pro lauf. Meter des Trägers $p = 1280\text{ kg}$, also pro Knotenpunkt $pa = 1280\text{ kg}$. Der Träger hat ein aus Verticalen und Diagonalen bestehendes Gitterwerk; die Diagonalen fallen beiderseits nach der Mitte zu; der Träger ist also zur Mitte symmetrisch angeordnet. Es sind die in den einzelnen Stäben entstehenden Spannungen zu ermitteln. Wegen der Symmetrie des Trägers brauchen wir nur die Spannungen in den Stäben links der Mitte zu bestimmen; die symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe erhalten gleiche Beanspruchungen.

400.
Beispiel.

1) Form der unteren Gurtung. Die Parabelordinaten ergeben sich nach Gleichung 231. aus der Relation $y = \frac{4 \cdot 1,2}{144} x(12 - x) = 0,033 x(12 - x)$.

Man erhält für

$x = 1\text{ m}$	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m
$y = 0,36\text{ m}$	$0,66\text{ m}$	$0,89\text{ m}$	$1,06\text{ m}$	$1,16\text{ m}$	$1,2\text{ m}$	$1,16\text{ m}$	$1,06\text{ m}$	$0,89\text{ m}$	$0,66\text{ m}$	$0,36\text{ m}$

2) Spannungen in der oberen Gurtung. Durch das Eigengewicht, bzw. totale mobile Belastung entsteht in sämtlichen Stäben der oberen Gurtung eine Spannung nach Gleichung 241.

$$H_g = -\frac{320 \cdot 12^2}{8 \cdot 1,2} = -4800\text{ kg} \text{ und } H_p = -\frac{1280 \cdot 12^2}{8 \cdot 1,2} = -19\,200\text{ kg.}$$

H_p ist zugleich die größte durch mobile Belastung entstehende Spannung.

3) Spannungen in der unteren Gurtung. Nach Gleichung 240. find die durch Eigengewicht, bezw. totale mobile Belastung erzeugten Spannungen aus der Relation zu finden:

$$Z_g = 4800 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad \text{und} \quad Z_p = 19200 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}.$$

Hiernach erhält man:

Stab Nr.	y'	y	$\frac{y' - y}{a}$	$\sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}$	Z_g	Z_p
1	0,36	0,0	0,36	1,063	5102	20 410
2	0,66	0,36	0,30	1,044	5011	20 045
3	0,89	0,66	0,23	1,026	4925	19 699
4	1,06	0,89	0,17	1,014	4867	19 469
5	1,16	1,06	0,10	1,005	4824	19 296
6	1,20	1,16	0,04	1,008	4804	19 216
	Meter				Kilogr.	

Die Werthe Z_p find zugleich die größten durch mobile Belastung entfehenden Spannungen.

4) Spannungen in den Diagonalen. Die Spannungen durch das Eigengewicht find nach Art. 396, S. 362 gleich Null. Die durch mobile Belastung erzeugten Maximal- und Minimalspannungen find für die Diagonalen links der Mitte nach Gleichung 244. und 245.

$$Y_{max} = \frac{1280}{2 \cdot 12} (x^2 - 0,25) \frac{c}{\eta} = 53,33 \frac{c}{\eta} (x^2 - 0,25) \quad \text{und} \quad Y_{min} = -53,33 \left[(l - x)^2 - 0,25 \right] \frac{l + c}{\eta}.$$

Die Größen c und η können berechnet oder construirt werden; die Werthe für c werden besser berechnet, weil die Zeichnung wegen der spitzen Schnittwinkel der Gurtungsftabrichtungen keine genauen Resultate ergibt. Man erhält mit Hilfe ähnlicher Dreiecke leicht:

$$\frac{c_2 + a}{y_1} = \frac{a}{y_2 - y_1}; \quad \frac{c_3 + 2a}{y_2} = \frac{a}{y_3 - y_2}; \quad \frac{c_4 + 3a}{y_3} = \frac{a}{y_4 - y_3};$$

$$\frac{c_5 + 4a}{y_4} = \frac{a}{y_5 - y_4} \quad \text{und} \quad \frac{c_6 + 5a}{y_5} = \frac{a}{y_6 - y_5}.$$

Die Werthe für η können in ähnlicher Weise leicht berechnet werden; doch können, besonders wenn c berechnet und der Schnittpunkt entsprechend den Rechnungsergebnissen aufgetragen wird, die η mit hinreichender Genauigkeit construirt werden. Die Werthe für c , η , x , Y_{max} und Y_{min} find in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Diagonale Feld-Nr.	c	η	x	Y_{max}	Y_{min}
2	0,2	0,66	10,5	+ 1777	- 1971
3	0,87	1,91	9,5	+ 2186	- 2156
4	2,23	3,8	8,5	+ 2304	- 2396
5	6,6	8,03	7,5	+ 2449	- 2460
6	24	22,3	6,5	+ 2410	- 2582
	Meter			Kilogr.	

Nach Art. 397, S. 365 müssen die absoluten Werthe der Y_{max} und Y_{min} einander gleich fein; dies ist hier nicht der Fall, und es hat dies seinen Grund darin, dass nicht die genauen Parabelordinaten der Berechnung zu Grunde gelegt sind, sondern eine Abrundung auf zwei Decimalen stattgefunden hat. Aus demselben Grunde würden sich auch die durch das Eigengewicht erzeugten Spannungen nicht genau gleich Null ergeben, wenn man sie nach Gleichung 234. berechnete. Immerhin ergeben sich diese Spannungen so gering, dass sie vernachlässigt werden können.

5) Spannungen in den Verticalen. Durch das Eigengewicht entsteht in jeder Verticalen nach Art. 396, S. 363 der Druck $V = -320$ kg. Die durch mobile Belastungen in den Verticalen links der Mitte erzeugten Maximalspannungen find nach Gleichung 247.

$$V_{min} = -53,33 (x^2 - 0,25) \frac{c_1}{\lambda + c_1} \quad \text{und} \quad V_{max} = +53,33 \left[(l - x)^2 - 0,25 \right] \frac{12 + c_1}{\lambda_1 + c_1}.$$

Man erhält für die verschiedenen Verticalen die in folgender Tabelle zusammengestellten Werthe von c_1 , λ_1 , x , $(l-x)$, V_{min} und V_{max} . Die 6. (die Mittel-)Verticale, an deren Fußpunkt sich die zwei Diagonalen der anschließenden Felder schneiden, kann nicht nach den obigen Gleichungen berechnet werden, da die dort für den Schnitt gemachten Voraussetzungen hier nicht zutreffen. Nachdem im oberen Knotenpunkte derselben keine Diagonale ansetzt, so kann dieselbe nur die Kräfte aufnehmen, welche direct in derselben wirken, d. h. der größte Druck ist gleich der Knotenpunktsbelastung dafelbst.

Verticale Nr.	c_1	λ_1	x	$l-x$	V_{min}	V_{max}
1	0,2	1,0	11,5	0,5	- 1173	0
2	0,87	2,0	10,5	1,5	- 1778	+ 478
3	2,23	3,0	9,5	2,5	- 2047	+ 870
4	6,60	4,0	8,5	3,5	- 2391	+ 1123
5	24	5,0	7,5	4,5	- 2469	+ 1324
6	—	—	—	—	- 1280	0
Meter					Kilogr.	

6) Zur Bestimmung der Querschnitte nach der neueren Methode (siehe Art. 283 bis 287, S. 248 bis 252) ergeben sich dann für die einzelnen Stäbe die in der folgenden Tabelle angegebenen Werthe von P_0 , P_1 und P_2 :

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen.				Verticalen: Druck überwiegt			
Stab Nr.	P_0	P	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1	- 4800	- 19 200	1	5102	20 410					1	- 320	- 1173	0
2	- 4800	- 19 200	2	5011	20 045	2	0	+ 1777	- 1971	2	- 320	- 1778	+ 478
3	- 4800	- 19 200	3	4925	19 699	3	0	+ 2186	- 2156	3	- 320	- 2047	+ 870
4	- 4800	- 19 200	4	4867	19 469	4	0	+ 2304	- 2396	4	- 320	- 2391	+ 1123
5	- 4800	- 19 200	5	4824	19 296	5	0	+ 2449	- 2460	5	- 320	- 2469	+ 1324
6	- 4800	- 19 200	6	4804	19 216	6	0	+ 2410	- 2582	6	- 320	- 1280	0
7	- 4800	- 19 200	7	4804	19 216	7	0	+ 2410	- 2582	7	- 320	- 2469	+ 1324
8	- 4800	- 19 200	8	4824	19 296	8	0	+ 2449	- 2460	8	- 320	- 2391	+ 1123
9	- 4800	- 19 200	9	4867	19 469	9	0	+ 2304	- 2396	9	- 320	- 2047	+ 870
10	- 4800	- 19 200	10	4925	19 699	10	0	+ 2186	- 2156	10	- 320	- 1778	+ 478
11	- 4800	- 19 200	11	5011	20 045	11	0	+ 1777	- 1971	11	- 320	- 1173	0
12	+ 4800	- 19 200	12	5102	20 410								
Kilogr.			Kilogr.			Kilogramm.				Kilogramm.			

In die Gleichungen 15., 18., 21. u. 24. sind die absoluten Zahlenwerthe für P_0 , P_1 , P_2 einzusetzen; es folgt dies aus der Entwicklung derselben.

6) Dreiecksträger.

Dreieck- und Trapezträger sind, wie bereits in Art. 374, S. 338 gefagt wurde, Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bzw. ein Paralleltapez bilden. Die eine

Fig. 221.

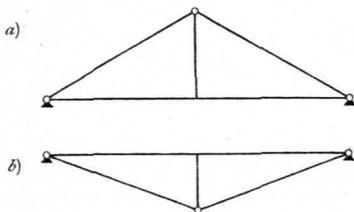
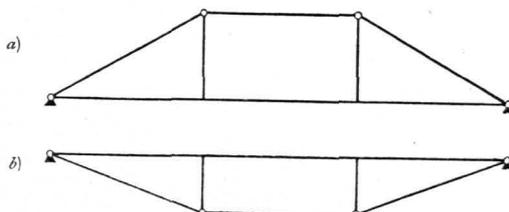


Fig. 222.

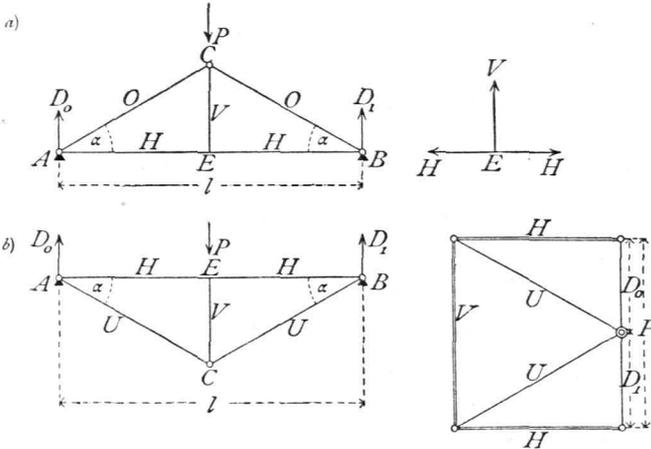


Gurtung zeigt eine gerade, die andere eine gebrochene Linie. Ist die untere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des einfachen, bezw. doppelten Hängebockes bekannte Trägerform (Fig. 221 a, bezw. 222 a) — nicht zu verwechseln mit den Hängewerkträgern, welche nach Art. 357, S. 315 von der hier betrachteten wesentlich verschieden sind. Ist die obere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des armirten Balkens bekannte Trägeranordnung (Fig. 221 b u. 222 b).

401.
Concentrirte
Belastung.

α) Concentrirte Belastung (Fig. 223). Wenn im Mittelknotenpunkte C

Fig. 223.



oder in dem Knotenpunkte E des Hängebockes (Fig. 223 a) die Last P wirkt, so wird die Auflager-Reaction $D_0 = D_1 = \frac{P}{2}$. Die im Punkte A wirkenden 3 Kräfte D_0 , O und H halten einander im Gleichgewicht, und es sind demnach die algebraischen Summen der in diesem Knotenpunkte wirkenden Horizontalcomponenten, bezw. Verticalcomponenten je gleich Null, d. h. es ist

$$0 = D_0 + O \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad O = -\frac{P}{2 \sin \alpha} \dots \dots \dots 248.$$

$$0 = O \cos \alpha + H, \quad \text{woraus} \quad H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \dots \dots \dots 249.$$

Die Spannungen der symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe sind gleich.

Falls die Last P im Punkte C angreift, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung für den Punkt E die Relation $0 = V$; falls P in E angreift, so heißt die Gleichgewichtsbedingung $0 = V - P$, woraus

$$V = P \dots \dots \dots 250.$$

Eben so ergibt sich für den armirten Träger (Fig. 223 b):

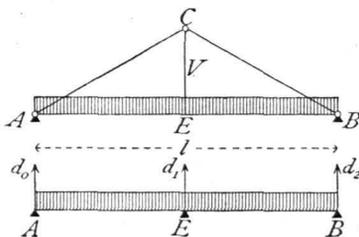
$$U = \frac{P}{2 \sin \alpha}; \quad H = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad V = -P \dots \dots \dots 251.$$

Die Construction der Spannungen ergibt den Kräfteplan der Fig. 223, welcher ohne weitere Erläuterung verständlich ist.

402.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

β) Gleichförmig vertheilte, totale Belastung. Wird der Berechnung eine gleichförmig vertheilte Belastung zu Grunde gelegt, so ist die totale Belastung

Fig. 224.



auch die ungünstigste; denn jede Last, wo sie auch liegen möge, erzeugt in A und B (Fig. 224) Auflager-Reactionen, also in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denen der unteren Gurtung Zug. Bei dieser Belastung ist AEB wie ein continuirlicher Balken auf 3 Stützen A, E und B aufzufassen; die Mittelfstütze wird durch die Hängefäule CE gebildet. In derselben entsteht demnach ein Zug, welcher nach dem Principe von Wirkung

und Gegenwirkung genau so groß ist, wie die Auflager-Reaction bei der Mittelstütze E des continuirlichen Trägers AEB . Nach der Zusammenstellung in Art. 372, S. 337 ist dieselbe hier $d_1 = 1,25 p \frac{l}{2} = \frac{5}{8} pl$, während $d_0 = d_2 = 0,375 p \frac{l}{2} = \frac{3}{16} pl$ ist; die letzteren Drücke werden vom Auflager aufgenommen und belasten das System nicht. Die Stabspannungen werden demnach die sub α gefundenen Werthe haben, wenn statt P die Größe $\frac{5}{8} pl$ eingesetzt wird. Es wird also beim Hängebock

$$V = P = \frac{5}{8} pl, \quad O = -\frac{5}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad H = \frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \dots \quad 252.$$

Eben so ergibt sich im armirten Balken für diese Belastungsart

$$H = -\frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad U = \frac{5}{16} \frac{pl}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad V = -\frac{5}{8} pl \quad \dots \quad 253.$$

In der geraden Gurtung AEB wirkt also die Zug-, bezw. Druckspannung $H = \pm \frac{5}{16} \frac{pl}{\operatorname{tg} \alpha}$; da aber diese gerade Gurtung gleichzeitig als continuirlicher Träger zum Uebertragen der Lasten auf die Knotenpunkte dient, so wirken in derselben auch noch die Momente und Transversalkräfte, welche in den verschiedenen Querschnitten des continuirlichen Trägers AEB entstehen. Nach der Zusammenstellung in Art. 372, S. 337 findet das Maximalmoment am Mittelaufleger statt, und es ist dasselbe

$$M_1 = 0,125 p \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{pl^2}{32}.$$

γ) Querschnittsbestimmung. Die Querschnitte der nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Stäbe ergeben sich leicht, wie in den Art. 281 ff., S. 247 ff. und im vorhergehenden Kapitel angegeben ist. Der Querschnitt der geraden Gurtung AEB ist für die combinirte Beanspruchung durch Zug, bezw. Druck und die Momente zu construiren. Wird der ganze Querschnitt (für Holz) als constant angenommen, so ist das größte im Balken wirkende Moment der Berechnung zu Grunde zu legen. An der Stelle des Maximalmoments M_{max} ist die größte in der äußersten Faser stattfindende Axialspannung pro Flächeneinheit nach Art. 296, S. 261

403.
Querschnitts-
bestimmung.

$$N_{max} = \pm \left(\frac{H}{F} + \frac{M_{max} a}{\mathcal{J}} \right).$$

Beim Rechteckquerschnitt ist $F = bh$, $\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{bh^2}{6}$, und wenn noch statt N_{max} die größte zulässige Spannung K eingeführt wird, so ergibt sich als Bedingungsgleichung für den Querschnitt:

$$K = \pm \left(\frac{H}{bh} + \frac{6 M_{max}}{bh^2} \right) \dots \dots \dots 254.$$

In dieser Gleichung sind b und h unbekannt. Man nimmt praktisch zunächst für b einen Werth probeweise an und bestimmt h aus Gleichung 254.; ergibt sich für h eine unpraktische Größe, so nehme man für b einen anderen Werth an und bestimme wiederum h nach Gleichung 254. Es werden sich meistens bei der zweiten Rechnung entsprechende Werthe für b und h ergeben.

7) Trapezträger.

α) Concentrirte Belastungen. Für die Belastungen in Fig. 225 a sind die Auflager-Reactionen beim Hängebock

404.
Concentrirte
Belastungen.

$$D_0 = \frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l}.$$

Die Stabspannungen ergeben sich dann durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte, wie folgt:

$$0 = D_0 + O_1 \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad O_1 = -\frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l \sin \alpha} \dots \dots \dots 255.$$

$$0 = O_1 \cos \alpha + U_1, \text{ woraus } U_1 = \frac{P_2 a + P_1(a+b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = [P_2 a + P_1(a+b)] \frac{a}{lh} \quad 256.$$

$$0 = U_1 - U_2, \text{ woraus } U_2 = U_1 = [P_2 a + P_1(a+b)] \frac{a}{lh} \quad \dots \quad 257.$$

$$0 = D_1 + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } O_3 = - \frac{P_1 a + P_2(a+b)}{l \sin \alpha} \quad \dots \quad 258.$$

$$0 = U_3 + O_3 \cos \alpha, \text{ woraus } U_3 = \frac{P_1 a + P_2(a+b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = [P_1 a + P_2(a+b)] \frac{a}{lh} \quad 259.$$

$$0 = O_2 - O_3 \cos \alpha, \text{ woraus } O_2 = - \frac{P_1 a + P_2(a+b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = - [P_1 a + P_2(a+b)] \frac{a}{lh} \quad 260.$$

$$0 = V_1 \text{ (falls die Last } P_1 \text{ in } C \text{ wirkt, so ist } V_1' = P_1) \quad \dots \quad 261.$$

$$0 = P_2 + V_2 + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } V_2 = (P_1 - P_2) \frac{a}{l} \quad \dots \quad 262.$$

(Falls die Last P_2 in E wirkt, so wird

$$0 = V_2' + O_3 \sin \alpha, \text{ woraus } V_2' = \frac{P_1 a + P_2(a+b)}{l} \quad \dots \quad 263).$$

$$0 = U_2 + Y \cos \beta - U_3, \text{ woraus } Y = - \frac{U_2 - U_3}{\cos \beta} = - \frac{ab}{lh \cos \beta} (P_1 - P_2),$$

$$Y = + (P_2 - P_1) \frac{a}{l \sin \beta} \quad \dots \quad 264.$$

Falls die Lasten in der unteren Gurtung, in C und E , angreifen, so wird

$$Y' \sin \beta + V_2' - P_2 = 0, \text{ woraus } Y' = \frac{P_2 - V_2'}{\sin \beta} = \frac{P_2}{\sin \beta} - \frac{P_1 a + P_2(a+b)}{l \sin \beta}$$

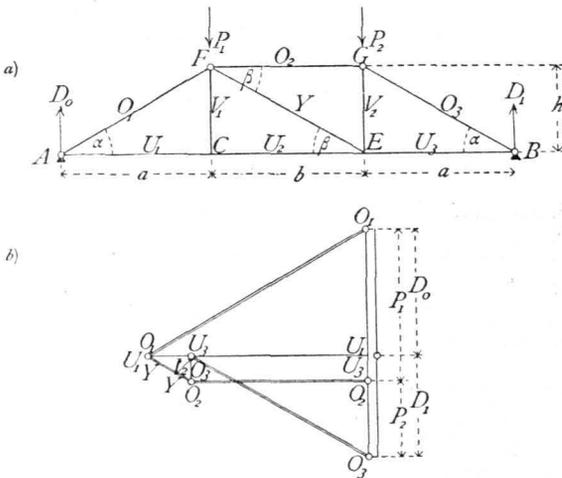
$$Y' = (P_2 - P_1) \frac{a}{l \sin \beta}, \quad \dots \quad 265.$$

d. h. eben so groß, wie in Gleichung 264.

Wenn, wie meistens, $P_1 = P_2 = P$ ist, wird

$$\left. \begin{aligned} O_1 = - \frac{P}{\sin \alpha}; U_1 = \frac{Pa}{h} = U_2; O_2 = - \frac{Pa}{h}; O_3 = - \frac{P}{\sin \alpha}; \\ U_3 = \frac{Pa}{h}; V_1 = 0; V_2 = 0; Y = 0 \end{aligned} \right\} \quad 266.$$

Fig. 225.



Die Construction ergibt neben stehenden, ohne Erklärung verständlichen Kräfteplan (Fig. 225 b).

Was den armirten Balken (Fig. 222 b) anbelangt, so sind bei diesem die Spannungen sowohl in der oberen, wie in der unteren Gurtung den soeben für die gerade, bzw. gebrochene Gurtung des doppelten Hängebockes gefundenen Spannungen der absoluten Größe nach gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt. Die Werthe derselben können demnach aus den Gleichungen 255. bis 260. durch Umkehrung der Vorzeichen genom-

men werden. Die Spannungen in der Diagonalen und in den Verticalen ergeben sich leicht durch Betrachtung des Gleichgewichtes der einzelnen Knotenpunkte, wie beim doppelten Hängebock gezeigt ist.

β) Gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Belastung (Fig. 226). Jede Belastung erzeugt in den Stäben der unteren Gurtung Zug, in denjenigen der oberen Gurtung Druck, wie sich aus den Gleichungen 255. bis 260. ergibt. Maximalzug, bezw. -Druck findet also in den Gurtungen bei Belastung des ganzen Trägers statt.

Die untere Gurtung wirkt, wenn keine Gelenke in den Knotenpunkten derselben angenommen werden, wie ein continuirlicher Balken auf 4 Stützen. Die Endstützen sind *A* und *B*; die

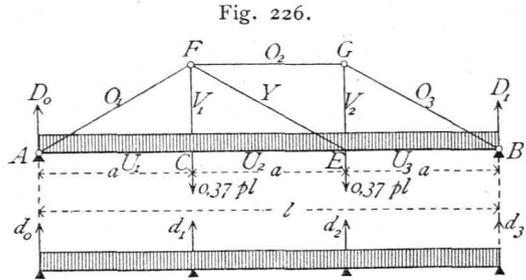


Fig. 226.

405.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

Mittelfützen werden durch die Verticalen *FC* und *GE* gebildet. Wird $a = b$ gesetzt, so ergibt sich bei Belastung des ganzen Trägers mit der Last p pro Längeneinheit als Auflager-Reaction der Mittelfützen nach der Zusammenstellung in Art. 372, S. 337 $d_1 = d_2 = 1,1 \frac{pl}{3} = 0,37 pl$. Eben so groß ist die Last, welche in den Knotenpunkten *C* und *E* des Systemes nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung nach unten wirkt. Werden diese Werthe für P_1 und P_2 in die obigen Gleichungen eingeführt, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} O_1 &= -\frac{0,37 pl}{\sin \alpha}; U_1 = 0,37 pl \frac{a}{h}; O_2 = -0,37 pl \frac{a}{h}; O_3 = -\frac{0,37 pl}{\sin \alpha}; \\ U_2 &= 0,37 pl \frac{a}{h}; U_3 = 0,37 pl \frac{a}{h}; V_1 = 0,37 pl; V_2 = 0,37 pl; Y = 0 \end{aligned} \right\} 267.$$

Die hier gefundenen Spannungen *O* und *U* sind die Maximalspannungen, welche durch gleichförmig vertheilte mobile Belastung entstehen; wird statt p das Eigengewicht g pro Längeneinheit eingeführt, so ergeben sich die durch das Eigengewicht entstehenden Stabspannungen.

γ) Ungünstigste Beanspruchung der Diagonale und der Verticalen. Den allgemeinen Ausdruck für die Diagonalspannung giebt die Gleichung 264. *Y* wird seinen größten positiven Werth (Zug) haben, wenn P_2 möglichst groß, P_1 möglichst klein ist; *Y* wird seinen größten negativen Werth (Druck) erreichen, wenn P_2 möglichst klein, P_1 möglichst groß ist. Wird als mobile Belastung eine gleichmäÙig vertheilte Last eingeführt, so kann man, wenn $a = b$ ist, mit für die Zwecke des Hochbaues hinreichender Sicherheit annehmen, dass die Diagonale den größten Zug erleidet, wenn der Punkt *E* am Fußpunkte derselben mit $pa + 0,37 gl$ belastet ist, der Punkt *C* (in der Verticalen des Kopfes der Diagonalen) nur das Eigengewicht $0,37 gl$ trägt. Bei der umgekehrten Belastung dagegen erleidet die Diagonale ihren größten Druck. Demnach wird

$$Y_{\max}^{\min} = \pm \frac{pa^2}{l \sin \beta} \dots \dots \dots 268.$$

Ferner ist hier, wo die Lasten unten wirken, $V_1 = P_1$, d. h.

$$V_{1\max} = (g + p) 0,37 l \text{ und } V_{1\min} = 0,37 gl \dots \dots \dots 269.$$

406.
Ungünstigste
Beanspruchung
der
Gitterstäbe.

Dieselben Werthe ergeben sich für V_2 ; denn es ist nach Gleichung 263. für die Belastung der unteren Knotenpunkte $V'_2 = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l}$; da nun V_{2max} für $P_1 = P_2 = 0,37 (g + p) l$ eintritt, wird

$$V_{2max} = 0,37 (g + p) l \quad \text{und} \quad V_{2min} = 0,37 g l \quad 270$$

407.
Querschnitts-
bestimmung.

δ) Die Querschnittsbestimmung ist in genau gleicher Weise vorzunehmen, wie dies in Art. 403, S. 371 beim Dreiecksträger gezeigt ist. Die Maximalmomente in der geraden Gurtung finden bei C und E statt und sind für $a = b$ nach der Zusammenstellung in Art. 372, S. 337 $M = p \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{10} = \frac{p l^2}{90}$. Die Dimensionen b und h des rechteckigen Querschnittes (für Holz) sind demnach aus der Gleichung zu bestimmen:

$$N_{max} = K = \pm \left(\frac{U}{b h} + \frac{6 M_{max}}{b h^2} \right).$$

Die Dreieck- und Trapezträger mit einer größeren Anzahl von Lastpunkten werden durch Einfügen von secundären Dreiecken in die oben (Fig. 221 u. 222) dargestellten Trägerformen hergestellt. Die Berechnung ist der vorstehenden analog, kann aber auch bequem nach der Momentenmethode vorgenommen werden.

3. Abschnitt.

Dachstuhl.

408.
Dach-
binder.

Den wesentlichen und charakteristischen Theil der Dachstühle bilden die sog. Dachbinder; sie sind die Hauptträger der Dachconstructions und haben die übrigen Theile derselben, wie Pfetten, Sparren etc.¹⁶⁷⁾ zu tragen. Sie werden in bestimmten Entfernungen von einander angeordnet.

Im vorliegenden Abschnitt werden wir uns mit der Berechnung der Dachbinder beschäftigen. Was die Querschnittsermittlung der Pfetten, der Sparren, des Windverbandes etc. betrifft, so ist einerseits in den beiden vorhergehenden Abschnitten bereits das Erforderliche vorgeführt worden; andererseits wird im III. Theile dieses »Handbuches« (Band 3, Abschn. 2, E: Dachstuhl-Constructions) nochmals auf diesen Gegenstand zurückgekommen werden.

Bei den meisten Dachconstructions ist jeder Binder unter dem Einflusse der äusseren Kräfte für sich stabil; eine Ausnahme machen die neueren Kuppeldächer und gewisse Arten von Zeltdächern, bei denen alle Binder zusammen ein im Gleichgewicht befindliches System bilden.

Für die Grösse der Belastungen, welche der Berechnung zu Grunde zu legen sind, ist die Stellung der Binder zu einander von grosser Wichtigkeit. Die Binder sind entweder einander parallel gestellt, oder sie convergiren gegen einander. Im ersten Falle ist die Belastung pro Längeneinheit des Binders auf der ganzen Binderlänge constant, im zweiten Falle variabel, und zwar meistens nach dem Gesetze der geraden Linie.

¹⁶⁷⁾ Es kann hier nicht der Ort sein, die Begriffe »Pfetten, Sparren etc.« zu definiren, eben so wenig als an dieser Stelle auf die Erklärung der verschiedenen Benennungen von Dächern, wie »Sattel-, Walm-, Pult-, Zelt-, Kuppel- etc. Dächer, eingegangen werden kann. Es sei diesfalls auf Theil III. dieses »Handbuches« (Bd. 3, Abschn. 2, D: Dächer und Dachformen) verwiesen.