2. Abſchnitt.

Stützen und Träger.

Man bezeichnet mit dem Namen Stützen ſolche Bauconſtructionen, bei denen die Längsaxe ganz oder nahezu mit der Richtung der Belaſtungen zuſammen fällt. Die Belaſtungen wirken in den meiſten Fällen vertical, in der Richtung der Schwere, und es ergiebt ſich daraus, daſs die Stützen meiſtens verticale oder nahezu verticale Längsaxen haben. Wir rechnen dahin die Pfeiler und die Säulen, die ſich wohl auch unter dem gemeinſchaftlichen Namen Freiſtützen zuſammenfaſſen laſſen.

Träger ſind Bauconſtructionen, bei denen die Belaſtungen ausſchlieſslich oder vorwiegend normal zur Richtung der Längsaxe wirken. Da die Belaſtungen meiſt vertical gerichtet ſind, haben die Träger meiſt horizontale oder nur wenig davon abweichende Längsaxen.

---

1. Kapitel.

Stützen.

Im vorliegenden Kapitel ſollen überhaupt Stäbe, welche auf Zerknicken in Anſpruch genommen werden, demnach nicht allein die Freiſtützen (Pfeiler und Säulen), ſondern auch ſonſtige auf Zerknicken beanſpruchte Conſtructionen, wie ſie bei Decken- und Dachſtuhlanlagen vorkommen, in Betracht gezogen werden.

Die Stützen haben meiſtens nur einen Stützpunkt und einen Laſtpunkt; der letztere wird oft durch die weitere Conſtruction feſtgelegt. Der Stützpunkt liegt gewöhnlich am unteren Ende, der Laſtpunkt am oberen Ende der Stütze.

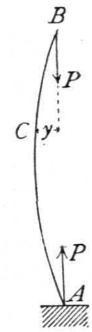
a) Theorie des Widerſtandes gegen Zerknicken.

332. Voraus-ſetzungen.

Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte P wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zuſammenfallen, ſo findet in den einzelnen Faſern des Stabes nur eine Zugbeanſpruchung ſtatt. Wirken auf einen eben ſolchen Stab zwei Druckkräfte P ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengeſetzt, ſo müſſten nach Früherem in den einzelnen Faſern gleichfalls nur Druckbeanſpruchungen ſtattfinden, welche bei conſtantem Stabquerſchnitt in allen Faſern pro Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu ſeiner Querſchnittsfläche groſs iſt, ſo wird unter dem Einfluſſe der drückenden Kräfte ein Ausbiegen ſtattfinden, und es wirkt alsdann auf jeden Querſchnitt C (Fig. 121) auſser der Axialkraft P noch ein Moment Py. In dieſem Falle findet Beanſpruchung des Stabes auf Zerknicken ſtatt, und es iſt derſelbe mit Rückſicht auf dieſe Beanſpruchungsweiſe zu berechnen.

Es kann auffallen, daſs hier ſcheinbar ein Widerſpruch zwiſchen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit iſt derſelbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Richtung der Stabaxe wirken, iſt ein Ausbiegen nicht möglich; die kleinſte zufällige Abweichung der Kraftrichtung von der Stabaxe erzeugt aber für jeden Punkt des Stabes ein Moment, hat alſo bei geringer Querſchnittsfläche des Stabes ein Ausbiegen zur Folge. Man kann daher in dieſem Falle von einem labilen Gleichgewichtszuſtand ſprechen.

Fig. 121.

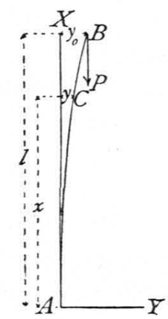


Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig. 121 gezeichneten Richtung ſtattfinden, ſondern iſt nach allen möglichen Richtungen denkbar; es iſt demnach zu unterſuchen, nach welcher Richtung ein ſolches Ausbiegen am leichteſten ſtattfindet und der Querſchnitt des Stabes danach zu disponiren. Für die folgenden Unterſuchungen ſoll angenommen werden, daſs: 1) als äuſsere Kräfte nur die Axialkräfte P wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab einen conſtanten Querſchnitt habe.

333. Elaſtiſche Linie.

Wir legen durch den Schwerpunkt des einen Endquerſchnittes des Stabes (Fig. 122) drei Coordinatenaxen: die X-Axe falle mit der urſprünglichen Lage der Stabaxe, die Y-Axe mit der einen Hauptaxe des Querſchnittes zuſammen; die Z-Axe ſtehe normal zu den beiden genannten, ſie projicirt ſich demnach in der YX-Ebene, d. i. der Bildebene als Punkt. Zunächſt nehmen wir an, daſs das Ausbiegen des Stabes in der YX-Ebene erfolge und daſs der Punkt B nach der Deformation des Stabes die Ordinate y_0 habe. Für irgend einen Punkt C mit der Abſciſſe x ſei die Ordinate y; das Moment für dieſen Punkt iſt $M = P\,(y_0 - y)$ und die elaſtiſche Linie demnach aus der Gleichung 86. zu ermitteln. Danach wird

Fig. 122.



$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P\,(y_0 - y)}{E \mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots \quad 88.$$

Darin iſt $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des Querſchnittes bei C, bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe deſſelben, welche normal zur Kraftebene, alſo zur XY-Ebene ſteht. Der Querſchnitt iſt nach obiger Vorausſetzung als conſtant angenommen, alſo auch $\mathfrak{J}$ für die Integration conſtant; da P und E gleichfalls conſtant ſind, ſo iſt bei der Integration $\frac{P}{E \mathfrak{J}}$ als ein conſtanter Factor einzuführen. Abkürzungsweiſe ſetzen wir

$$a^2 = \frac{P}{E \mathfrak{J}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 89.$$

ſo daſs die Differentialgleichung der elaſtiſchen Linie lautet:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a^2\,(y_0 - y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 90.$$

Die zweimalige Integration ergiebt als Gleichung der elaſtiſchen Linie:

$$y = y_0 + A \sin a x + B \cos a x \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91.$$

Die beiden Conſtanten A und B ſind für die verſchiedenen Arten der Stabunterſtützung verſchieden.

Bekanntlich iſt

$\sin \alpha = \sin(2\pi + \alpha) = \sin(2n\pi + \alpha)$ und $\cos \alpha = \cos(2\pi + \alpha) = \cos(2n\pi + \alpha)$, worin n eine beliebige ganze Zahl oder Null bedeutet, alſo gleich 0, 1, 2, 3 ... geſetzt werden kann. Es iſt alſo auch

$$\sin a x = \sin(a x + 2\pi) = \sin\left[a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right] \text{ und}$$

$$\cos a x = \cos (a x + 2\pi) = \cos \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right].$$

Die Gleichung 91. kann alſo auch geſchrieben werden:

$$y = y_0 + A \sin a \left[\left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] + B \cos \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] \quad . \quad . \quad 92.$$

Die Ordinaten y zweier Punkte, deren Abſciſſen um $\frac{2\pi}{a}$ von einander verſchieden ſind, haben daher die gleichen Werthe. Die elaſtiſche Linie iſt demnach eine Wellenlinie; die Wellenlänge iſt

$$\lambda = \frac{2\pi}{a}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 93.$$

und da nach Gleichung 89. $a = \sqrt{\frac{P}{E\mathfrak{J}}}$ iſt,

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{E\mathfrak{J}}{P}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 94.$$

Aus dieſer Gleichung kann man, falls E, $\mathfrak{J}$ und P gegeben iſt, die Wellenlänge berechnen. Iſt dagegen λ gegeben, ſo kann man aus Gleichung 94. diejenige Kraft P berechnen, welche die Durchbiegungen y erzeugen kann. Es folgt aus Gleichung 94.

$$P = \frac{4\pi^2 E\mathfrak{J}}{\lambda^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 95.$$

Es ſoll hier noch auf eine wichtige Eigenthümlichkeit der allgemeinen Gleichung 90. hingewieſen werden. Dieſelbe bleibt giltig, wenn man beiderſeits mit der Zahl m multiplicirt; ſie heiſst alsdann:

$$m \frac{d^2 y}{d x^2} = m a^2 (y_0 - y) = a^2 (m y_0 - m y).$$

Es ſei $m y_0 = \eta_0$ und $m y = \eta$; alsdann iſt auch $m \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \eta}{d x^2}$, alſo

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = a^2 (\eta_0 - \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 96.$$

Die Gleichung 90. gilt alſo für beliebig groſse Werthe von y. Ergeben ſich demnach unter Einwirkung einer Kraft P die Durchbiegungen y als möglich, ſo können dieſelben auch m-mal ſo groſs, d. h. beliebig groſs werden, alſo auch ſo groſs, daſs der Stab zerknickt wird.

Der Werth von P in Gleichung 95., welcher die Durchbiegungen y erzeugen kann, kann alſo auch den Stab zerknicken. P iſt ſonach der Grenzwerth der Tragkraft.

Bei der vorſtehenden Ableitung iſt angenommen worden, daſs die Ausbiegung in der XY-Ebene erfolge; dieſelbe kann aber auch in der XZ-Ebene ſtattfinden. Die Entwickelung für dieſen Fall bleibt genau dieſelbe, wie die obige, und man erhält für P denſelben Ausdruck, wie dort; nur iſt alsdann unter $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des Querſchnittes bezogen auf die zur XZ-Ebene normale Schwerpunktsaxe zu verſtehen, welche Axe parallel zur Y-Axe iſt. Nennen wir daſſelbe $\mathfrak{J}_1$, die entſprechenden Werthe von P und λ aber P_1 und λ_1, ſo iſt:

$$P_1 = \frac{4\pi^2 E\mathfrak{J}_1}{\lambda_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 97.$$

Ein Ausbiegen des Stabes kann nun fowohl in der XY-Ebene, wie in der XZ-Ebene ftattfinden; die wirkliche dem Stabe zuzumuthende Belaftung darf den Grenzwerth nicht erreichen. Die Gleichungen 95. und 97. geben zwei Grenzwerthe, und es ift naturgemäfs der kleinere von beiden als mafsgebend einzuführen. Nimmt man in beiden Richtungen gleiche λ an, fo unterfcheiden fich beide Grenzwerthe nur durch die Werthe der Trägheitsmomente. Es ift demnach in den Ausdruck für P von den beiden Hauptträgheitsmomenten das kleinere einzufetzen.

Wenn die Ausbiegung nach allen Richtungen möglich ift, fo kann man mit hinreichender Genauigkeit annehmen, dafs diefelbe normal zu derjenigen Hauptaxe erfolgt, welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment entfpricht; denn diefes ift nach Art. 314, S. 270 das kleinfte der für alle Schweraxen möglichen Trägheitsmomente. Von einer genauen Unterfuchung, nach welcher Richtung die Ausbiegung erfolgen wird, kann hier füglich abgefehen werden.

Für die weiteren Betrachtungen find die verfchiedenen möglichen Fälle ins Auge zu faffen.

1) Einfeitig eingefpannter, an dem einen Ende axial belafteter Stab (Fig. 123). Aus der allgemeinen Gleichung 91. für die elaftifche Linie folgt

334. Einfeitig eingefpannter Stab.

$$\frac{dy}{dx} = A\,a \cos a\,x - B\,a \sin a\,x \quad \dots\dots\dots \quad 98.$$

Wir beftimmen die Conftanten A und B aus den befonderen Bedingungen für diefen Fall.

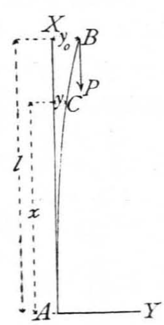
Für $x = 0$ ift $\frac{dy}{dx} = 0$, demnach in Gleichung 98. $0 = A\,a$ oder, da a nicht gleich Null ift, $A = 0$. Eben fo ift für $x = 0$ auch $y = 0$, daher in Gleichung 91. $0 = y_0 + B$ oder $B = -y_0$. Sonach lautet die Gleichung der elaftifchen Linie für diefen Fall

$$y = y_0 - y_0 \cos a\,x = y_0\,(1 - \cos a\,x) \quad \dots \quad 99.$$

Für $x = l$ wird $y = y_0$, demnach $y_0 = y_0\,(1 - \cos a\,l)$ oder

$$\cos a\,l = 0 \quad \dots\dots\dots \quad 100.$$

Fig. 123.



Damit letztere Gleichung erfüllt werde, mufs

$$a\,l = (2\,n + 1)\,\frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots \quad 101.$$

fein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 ... annehmen kann.

Aus Gleichung 93. folgt nun für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\,\pi\,l\,.\,2}{(2\,n + 1)\,\pi} = \frac{4\,l}{2\,n + 1} \quad \dots\dots\dots \quad 102.$$

Damit ift nun auch die Gröfse des Grenzwerthes der Belaftung für diefen Fall gefunden; man braucht nur in die Gleichung 95. für λ den foeben ermittelten Werth einzuführen. Alsdann wird

$$P = \frac{4\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{16\,l^2}\,(2\,n + 1)^2 = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\,l^2}\,(2\,n + 1)^2 \quad \dots\dots \quad 103.$$

Für die verfchiedenen Werthe von n ergeben fich auch verfchiedene Werthe für P und λ.

Für $n = 0$ ift $\lambda = 4\,l$, alfo die ganze Wellenlänge 4-mal fo grofs, als die freie Stablänge; diefer Fall ift in Fig. 124 dargeftellt. Alsdann ift

$$P = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\,l^2} \quad \dots\dots\dots \quad 104.$$

Fig. 124.

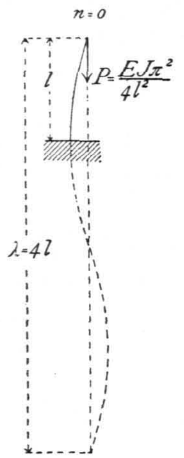


Fig. 125.

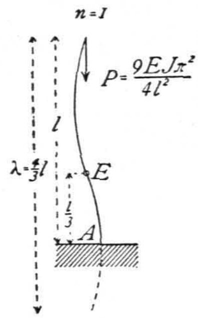
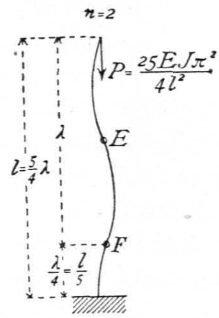


Fig. 126.



Für $n = 1$ wird $\lambda = \frac{4}{3}\, l$, alfo die freie Länge l gleich $\frac{3}{4}$ einer Wellenlänge. Diefer Fall ift in Fig. 125 dargeftellt, und es ift

$$P = \frac{9\, E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{4\, l^2} \quad . \quad 105.$$

Diefer Fall tritt ein, wenn der Punkt E in dem Abftande $\frac{l}{3}$ von A fixirt ift.

Für $n = 2$ ift $\lambda = \frac{4}{5}\, l$, alfo $l = \frac{5}{4}\, \lambda$ und

$$P = \frac{25\, E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{4\, l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 106.$$

Die Punkte E und F (Fig. 126) in den Abftänden $\frac{1}{5}\, l$ und $\frac{3}{5}\, l$ find fixirt.

Man fieht, wie wefentlich der Grenzwerth P durch rationelle Conftruction erhöht werden kann.

335. Stab mit freien Enden.

2) Stab mit beiderfeits frei drehbaren Enden (Fig. 127). Die fymmetrifche Belaftung des Stabes wird zur Folge haben, dafs beide Stabhälften, oberhalb und unterhalb der Stabmitte, fich genau gleich verhalten; man kann demnach diefen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, dafs man den Anfangspunkt des Coordinatenfyftems in die Stabmitte legt. Jede Hälfte verhält fich dann genau eben fo, wie der Stab im vorigen Artikel; die zerknickende Kraft P, d. h. der Grenzwerth von P ift demnach aus der Gleichung 103. zu entnehmen, jedoch mit der Modification, dafs ftatt des dortigen l hier $\frac{l}{2}$ einzufetzen ift, weil die dort mit l bezeichnete Länge hier nur $\frac{l}{2}$ beträgt.

Fig. 127.

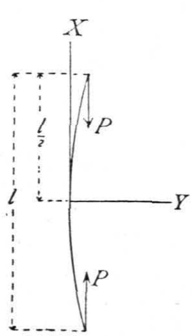
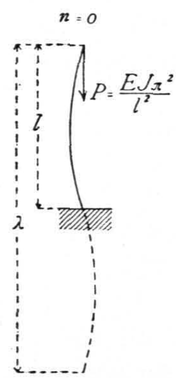


Fig. 128.



Für den vorliegenden Fall ift alfo

$$P = \frac{E\, \mathfrak{J}\, \pi^2\, (2\, n + 1)^2}{4 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{E\, \mathfrak{J}\, \pi^2}{l^2}\, (2\, n + 1)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 107.$$

und

$$\lambda = \frac{4\, \frac{l}{2}}{2\, n + 1} = \frac{2\, l}{2\, n + 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 108.$$

Für $n = 0$ (Fig. 128) ist $\lambda = 2\,l$ und $P = \dfrac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2}$ . . . . 109.

Für $n = 1$ (Fig. 129) ist $\lambda = \dfrac{2}{3}\,l$, $l = \dfrac{3}{2}\,\lambda$ und $P = \dfrac{9\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2}$ . . 110.

Die beiden Punkte E und F sind in diesem durch Fig. 129 dargestellten Falle fixirt.

Fig. 129.

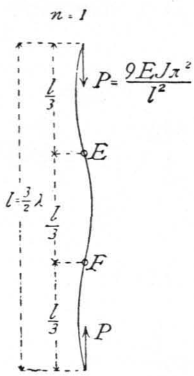
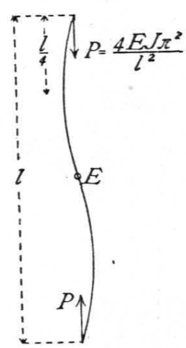


Fig. 130.



Ist ein Punkt E in der Mitte der Stablänge fixirt (Fig. 130), so ist der Fall auf denjenigen des vorigen Artikels zurückzuführen, in dem man statt des dortigen l hier $\dfrac{l}{4}$ einführt.

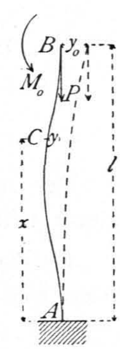
Alsdann ist nach Gleichung 104.

$$P = \frac{E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{4\left(\frac{l}{4}\right)^2} = \frac{4\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2} \quad . \quad 111.$$

3) Stab mit eingespannten Enden (Fig. 131). Der Endpunkt B verbleibt in Folge der Einspannung in der Verticalen der Axe XX; die Tangente an die Axe in diesem Punkte bleibt vertical. Wäre der Punkt B frei, so würde er nach der Deformation die Ordinate $-y_0$ haben; das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf den Punkt A würde $= -Py_0$ sein; da aber in Folge der Einspannung der Punkt B in der Verticalen bleibt, so ist das Moment der äußeren Kräfte für den Punkt A gleich Null. Die Einspannung des Stabes bei B hat demnach genau dieselbe Wirkung, wie ein Moment M_0, dessen Größe $= Py_0$, dessen Drehrichtung derjenigen von P entgegen gesetzt ist. Es ist also $M_0 = Py_0$.

336.
Stab mit eingespannten Enden.

Fig. 131.



Für einen beliebigen Punkt C mit der Abscisse x ist das Biegungsmoment

$$M = M_0 - Py = Py_0 - Py = P\,(y_0 - y).$$

Demnach lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie auch hier wiederum (vergl. die Gleichungen 88. und 90.)

$$E\,\mathfrak{J}\,\frac{d^2y}{dx^2} = P\,(y_0 - y) \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^2\,(y_0 - y).$$

y_0 ist hier die negative Ordinate, welche der Punkt B haben würde, wenn er frei wäre. Als Gleichung der elastischen Linie ergiebt sich (eben so wie in Art. 333, S. 295)

$$y = y_0 + A \sin a\,x + B \cos a\,x,$$

und wenn der Werth $y_0 = \dfrac{M_0}{P}$ eingesetzt wird,

$$y = \frac{M_0}{P} + A \sin a\,x + B \cos a\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 112.$$

ferner

$$\frac{dy}{dx} = A\,a \cos a\,x - B\,a \sin a\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 113.$$

Die Constanten A und B ergeben sich in folgender Weise. Für $x = 0$ ist $y = 0$, demnach in Gleichung 112. $0 = \dfrac{M_0}{P} + B$ und $B = -\dfrac{M_0}{P}$. Für $x = 0$ wird

$\frac{dy}{dx} = 0$, folglich in Gleichung 113. $0 = A\,a$ und, da a nicht gleich Null ift, $A = 0$. Die Gleichung der elaftifchen Linie lautet fonach im vorliegenden Falle:

$$y = \frac{M_0}{P} - \frac{M_0}{P} \cos a\,x = \frac{M_0}{P}\,(1 - \cos a\,x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 114.$$

Für $x = l$ ift $y = 0$, demnach $0 = \frac{M_0}{P}\,(1 - \cos a\,l)$ oder

$$\cos a\,l = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 115.$$

Fig. 132.

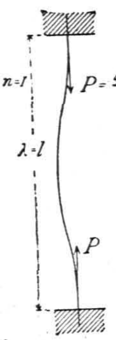
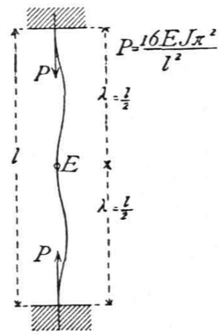


Fig. 133.



Damit diefe Gleichung erfüllt werde, mufs

$$a\,l = 2\,n\,\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 116.$$

fein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 ... haben kann.

Aus Gleichung 93. folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\,\pi\,l}{2\,n\,\pi} = \frac{l}{n} \text{ oder } \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad 117.$$

Ferner wird nach Gleichung 89.

$$a^2 = \frac{P}{E\,\mathfrak{J}} = \frac{4\,\pi^2}{\lambda^2} \text{ und } P = \frac{4\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{\lambda^2} \quad 118.$$

Die beiden Gleichungen 117. und 118. geben über die Gröfse von P Auffchlufs. Es ift

für $n = 1$:

$$\frac{\lambda}{l} = 1 \text{ oder } \lambda = l;$$

$$P = \frac{4\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad 119.$$

für $n = 2$:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{l}{2};$$

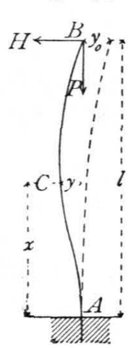
$$P = \frac{16\,E\,\mathfrak{J}\,\pi^2}{l^2} \quad . \quad . \quad 120.$$

Der erftere Fall ift durch Fig. 132, der zweite durch Fig. 133 dargeftellt; letzterer tritt ein, wenn der Punkt E in der Stabmitte fixirt ift.

337.
Stab mit einem eingefpannten und einem geführten Ende.

4) **Stab mit einem eingefpannten und einem in der Verticalen geführten Ende** (Fig. 134). Die Führung des Punktes B in der Verticalen $A\,X$ wird durch eine auf diefen Punkt wirkende Horizontalkraft H erreicht. Für irgend einen Punkt C des gebogenen Stabes ift alsdann das Moment $M = H\,(l - x) - P\,y$.

Fig. 134.



Wenn H nicht wirkte, würde der Punkt B die Ordinate $-y_0$ haben, wie punktirt; alsdann würde das Moment der Kraft P für den Punkt A betragen: $M_0 = -P\,y_0$. Im vorliegenden Falle ift das Moment der Kraft P für den Punkt A gleich Null; der Einflufs der Kraft H zeigt fich alfo in dem Aufheben des Momentes M_0 der Kraft P. Das Moment der Kraft H in Bezug auf den Punkt A mufs alfo dem Momente $P\,y_0$ der Gröfse nach gleich, der Drehrichtung nach entgegen gefetzt fein, d. h. es mufs $H\,l = P\,y_0$ fein.

Es ift defshalb

$$M = H\,(l - x) - P\,y = H\,l - H\,x - P\,y = P\,(y_0 - y) - H\,x$$

und die Differentialgleichung der elaftifchen Linie (fiehe Gleichung 88.)

$$E\,\mathfrak{J}\,\frac{d^2 y}{d\,x^2} = P\,(y_0 - y) - \frac{P\,y_0}{l}\,x \text{ oder } \frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{P}{E\,\mathfrak{J}}\left(y_0 - y - \frac{x\,y_0}{l}\right) \quad 121.$$

Die Differentialgleichung wird aufgelöst, indem man $\frac{d^2 y}{d x^2} = z$ fetzt. Es fei wiederum abkürzungsweife $\frac{P}{E \mathfrak{J}} = a^2$; alsdann ift

$$z = a^2 \left(y_0 - y - y_0 \frac{x}{l}\right) \quad \text{und} \quad \frac{d z}{d x} = a^2 \left(- \frac{d y}{d x} - \frac{y_0}{l}\right);$$

ferner

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = - a^2 \frac{d^2 y}{d x^2} = - a^2 z.$$

Die Auflöfung diefer Differentialgleichung ergiebt wiederum genau wie in Art. 333, S. 295:

$$z = A \sin a x + B \cos a x, \quad \ldots \ldots \quad 122.$$

und wenn für z der Werth eingeführt wird,

$$a^2 \left(y_0 - y - \frac{y_0 x}{l}\right) = A \sin a x + B \cos a x \quad \ldots \ldots \quad 123.$$

Die Differentiation nach x ergiebt:

$$- a^2 \left(\frac{d y}{d x} + \frac{y_0}{l}\right) = A a \cos a x - B a \sin a x \quad \ldots \ldots \quad 124.$$

Die beiden Gleichungen 123. und 124. ergeben die Werthe für die Conftanten A und B, wie folgt.

Für $x = 0$ ift $y = 0$, alfo nach Gleichung 123. $a^2 y_0 = B$; für $x = 0$ ift $\frac{d y}{d x} = 0$, alfo nach Gleichung 124. $- \frac{a^2 y_0}{l} = A a$ und $A = - \frac{a y_0}{l}$. Für $x = l$ ift $y = 0$, alfo nach Gleichung 123. $a^2 (y_0 - y_0) = 0 = A \sin a l + B \cos a l$, woraus

$$\operatorname{tg} (a l) = - \frac{B}{A} = \frac{a^2 y_0 l}{a y_0} = a l \quad \ldots \ldots \quad 125.$$

Diefe Relation findet ftatt für $a l = 0$, aufserdem aber auch für den Winkel $257^0\ 27'\ 12''$; für diefen Winkel ift $\operatorname{tg} a l = a l = 4{,}4934$, alfo

$$P = \frac{E \mathfrak{J} (4{,}4934)^2}{l^2} = 20{,}19 \frac{E \mathfrak{J}}{l^2} \quad \ldots \ldots \quad 126.$$

Dies ift der Werth von P, für welchen Gleichung 125. erfüllt ift und einen Sinn hat; der Werth $a l = 0$ ift nicht zu verwerthen.

In Art. 334 bis 337 find diejenigen Werthe der zerknickenden Kraft entwickelt worden, welche für die Praxis hauptfächlich von Bedeutung find. 338. Zufammenftellung.

Nachftehend find diefelben in den Fig. 135 bis 138 überfichtlich zufammen geftellt, wobei überall der Stab auf feine ganze Länge frei angenommen ift; der vierte Fall ift zum Zwecke des bequemen Vergleiches ebenfalls auf den Ausdruck $\frac{C E \mathfrak{J} \pi^2}{l^2}$ gebracht. Die Tragfähigkeit der Stäbe verhält fich demnach

in den Fällen	1	2	4	3
wie	$\frac{1}{4}$:	1 :	2,048 :	4.

Fig. 135.
Fall 1.

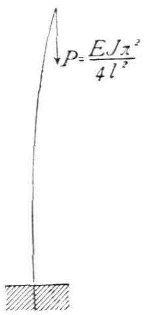


Fig. 136.
Fall 2.

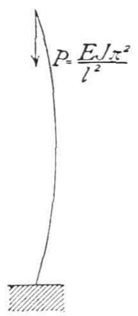


Fig. 137.
Fall 3.

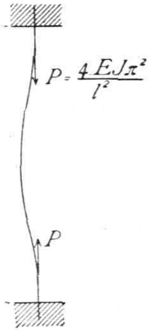
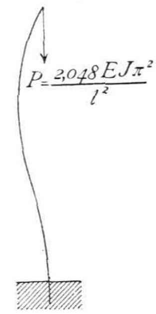


Fig. 138.
Fall 4.



Durch entſprechende Endanordnung würde man alſo die Tragfähigkeit des Stabes verſechzehnfachen können. Die angegebenen Kräfte ſind thatſächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und es ſind deſshalb Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

b) Querſchnittsermittelung für gedrückte Stäbe mit Rückſicht auf den Widerſtand gegen Zerknicken.

339.
Zuläſſige Beanſpruchung.

Die unter a. für die Tragkraft der Stäbe entwickelten Formeln ſind nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge ſehr klein, alſo auch das im Nenner der Werthe für P, welche in den Fig. 135 bis 138 eingeſchrieben ſind, vorkommende l^2 ſehr klein wird, ſo ergeben ſich für P ſehr groſse Werthe, gröſsere Werthe, als die Druckfeſtigkeit des Stabes geſtattet. Soll der Stab nicht durch einfachen Druck zerſtört werden, ſo darf die Kraft P nicht ſo groſs werden, daſs die Druckbeanſpruchung pro Flächeneinheit des Querſchnittes die Druckfeſtigkeit erreicht. Führt man Sicherheits-Coefficienten ein und bezeichnet die zuläſſige Beanſpruchung auf einfachen Druck pro Flächeneinheit der Querſchnittsfläche F mit K, ſo darf höchſtens ſtattfinden:

$$P = F K \qquad \text{127.}$$

Mit Rückſicht auf Widerſtand gegen Zerknicken darf höchſtens ſtattfinden, wenn s der Sicherheits-Coefficient und C ein Coefficient iſt, der von der Endbefeſtigung abhängt,

$$P = \frac{C E \mathfrak{J}}{s\, l^2} \qquad \text{128.}$$

Gröſser als der Werth in Gleichung 127. iſt, darf P mit Rückſicht auf die zuläſſige Druckbeanſpruchung nicht werden; gröſser, als der Werth in Gleichung 128. iſt, darf P des Zerknickens wegen nicht werden; es iſt alſo ſtets der kleinere dieſer beiden Werthe für diejenige Belaſtungsgröſse maſsgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei groſser Stablänge l ergiebt die Gleichung 128., bei geringer Stablänge l die Gleichung 127. kleinere Werthe für P. Der Grenzwerth von l, etwa l_1, wird derjenige ſein, für welchen aus beiden Gleichungen derſelbe Werth von P folgt. Dieſer Grenzwerth ergiebt ſich durch Gleichſetzung der beiden Werthe von P in den Relationen 127. und 128. zu

$$l_1 = \sqrt{C}\,\sqrt{\frac{E}{K s}}\,\sqrt{\frac{\mathfrak{J}}{F}} \qquad \text{129.}$$