

253.
Ermittlung
der äußeren
Kräfte.

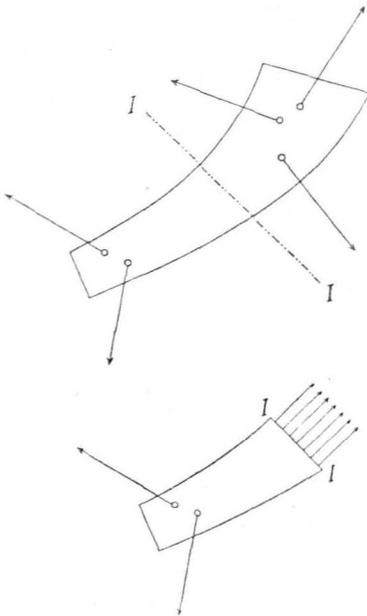
Da sich die Statik der Bauconstructions nur mit solchen Körpern beschäftigt, welche unter der Einwirkung der äußeren Kräfte im Gleichgewicht sind, so kann man für die sämtlichen äußeren Kräfte, welche auf eine Construction wirken, die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen und mittels der so gefundenen Gleichungen die unbekanntes äußeren Kräfte, die Reactionen ermitteln. Man führt deshalb die Reactionen als vorläufig unbekanntes Kräfte ein und stellt die Gleichgewichtsbedingungen auf. So lange die Kräfte in einer Ebene wirken, wie es in den hier zu betrachtenden Fällen meistens stattfindet, giebt es drei Gleichgewichtsbedingungen, also auch drei Gleichungen für die Ermittlung der Unbekannten. Aus drei Gleichungen kann man nur drei Unbekannte finden; sind mehr als drei Unbekannte vorhanden, so genügt die angegebene Methode nicht mehr. Die Reactionen dürfen also nicht mehr als drei Unbekannte enthalten, wenn die Aufgabe auf dem angegebenen Wege lösbar sein soll; anderenfalls ist zur Ermittlung der Reactionen die Elasticitätslehre zu Hilfe zu nehmen.

254.
Ermittlung
der inneren
Kräfte.

Nachdem die sämtlichen äußeren Kräfte gefunden sind, müssen die inneren Kräfte oder Spannungen aufgesucht werden. Das hierbei einzuschlagende Verfahren ist folgendes.

Man denkt den Körper an derjenigen Stelle, an welcher man die inneren Kräfte kennen lernen will, durch eine Ebene II (Fig. 52) durchgeschnitten und den

Fig. 52.



Theil links oder rechts dieser Ebene fortgenommen. Hier möge der Theil rechts fortgenommen werden. Vor dem Durchschneiden wurden auf das übrig bleibende Fragment links der Ebene von dem fortgehobenen Theile gewisse innere Kräfte übertragen, welche das Fragment im Verein mit den auf dasselbe wirkenden äußeren Kräften im Gleichgewicht hielten; denn nicht nur der ganze Körper, sondern auch jeder Theil desselben war vorher im Gleichgewichte. Bringt man demnach diese inneren Kräfte an der Schnittstelle wieder an, so befindet sich das Fragment wiederum im Gleichgewichte. Man kann daher auf das Fragment die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden und aus diesen die unbekanntes inneren Kräfte ermitteln. Wie oben, stehen auch hier drei Bedingungsgleichungen zu Gebote; deshalb ist auch hier die Ermittlung der unbekanntes inneren Kräfte auf diesem Wege nur dann möglich, wenn dieselben bloß drei Unbekannte enthalten.

a) Grundgesetze der Statik fester Körper.

Obleich die Statik fester Körper im Allgemeinen hier als bekannt vorausgesetzt werden kann, sollen im Folgenden doch einige der wichtigsten zu verwendenden Sätze kurz angeführt werden, damit über die gemachten Annahmen keine Unklarheit herrsche.

1) Satz des statischen Momentes. Bekanntlich ist das statische Moment einer Kraft R in Bezug auf einen Punkt o (Fig. 53) das Product aus der Größe

255.
Statische
Momente.

der Kraft R in den normalen Abstand der Richtung dieser Kraft vom Punkte o , d. h. das statische Moment von R in Bezug auf den Punkt o ist $M = Rr$.

Dabei wird der normale Abstand r der Krafrichtung vom Punkte o der Hebelsarm der Kraft R für o genannt.

Aus dieser Erklärung folgt, daß die statischen Momente stets Producte von Kräften und Längen sind. Die Maßeinheiten, in denen sie ausgedrückt werden, sind demnach Producte aus Längen- und Kräfteinheiten. Ist die Kraft in Kilogrammen, die Länge in Centimetern angegeben, so ergibt sich das statische Moment in Kilogramm-Centimetern; ist die Kraft in Tonnen, die Länge in Metern angegeben, so ergibt sich das statische Moment in Tonnen-Metern etc.

Die Kraft R hat das Bestreben, die Ebene um den als fest gedachten Punkt o , resp. um eine im Punkte o normal zur Krafebene errichtete Axe zu drehen, hier also nach links. Wenn die statischen Momente mehrerer Kräfte aufzustellen sind, so ist zu beachten, daß die verschiedenen Kräfte allgemein verschiedene Drehrichtungen haben. Welche von diesen als positiv eingeführt wird, ist gleichgültig; ist aber die eine Drehrichtung als positiv angenommen, so ist die entgegengesetzte als negativ einzuführen.

Der im Folgenden häufig anzuwendende Satz des statischen Momentes lautet: Das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene, in welcher die Kräfte liegen, ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte in Bezug auf denselben Punkt.

Dieser Satz giebt oft ein bequemes Mittel zur Ermittlung der Unbekannten. Wählt man den Punkt, in Bezug auf welchen man das statische Moment aufstellt, auf der Richtungslinie der Mittelkraft, so hat die letztere in Bezug auf diesen Punkt den Hebelsarm Null, also auch das statische Moment Null. Für diesen besonderen Fall heißt der obige Satz: Die algebraische Summe der statischen Momente einer Reihe von Kräften in Bezug auf einen auf der Richtungslinie der Mittelkraft liegenden Punkt ist gleich Null.

2) Satz vom Gleichgewicht der Kräfte. Derselbe lautet: Die an einem Körper angreifenden, in einer Ebene liegenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der in zwei normal zu einander stehende, sonst beliebige Richtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null ist und außerdem die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ist.

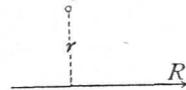
Man zerlege demnach sämtliche Kräfte ($K_1, K_2, K_3 \dots$ in Fig. 54) nach zwei Richtungen, die normal zu einander stehen, wobei die eine Richtung ganz willkürlich angenommen werden kann. Alsdann erhält man als Gleichgewichtsbedingungen für die sämtlichen Kräfte die Relationen:

$$\begin{aligned} \Sigma (K \cos \alpha) &= 0, & \Sigma (K \sin \alpha) &= 0, \\ \Sigma (K r) &= 0 \end{aligned}$$

Hier ist A als Momentenpunkt angenommen; es hätte indess auch jeder beliebige andere Punkt der Krafebene gewählt werden können.

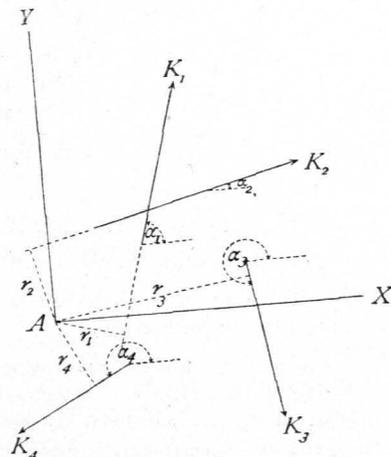
In sehr vielen Fällen ist die Mehrzahl aller

Fig. 53.



256.
Gleichgewicht
der
Kräfte.

Fig. 54.



äußeren Kräfte vertical gerichtet; fodann empfiehlt es sich, die Kräfte $K_1, K_2, K_3 \dots$ nach der horizontalen und verticalen Richtung zu zerlegen. In diesem Falle heißen die Bedingungsgleichungen, wenn wiederum alle Kräfte in einer Ebene liegen: Die an einem Körper angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

- a) die algebraische Summe der Horizontalkräfte gleich Null ist,
- β) die algebraische Summe der Verticalkräfte gleich Null ist,
- γ) die algebraische Summe der statischen Momente bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ist.

Aus dem hier vorgeführten Satze gehen ohne Weiteres die folgenden, unter 3. bis 5. ausgesprochenen Sätze hervor.

- 3) Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte halten denselben nur dann im Gleichgewicht, wenn beide der Größe nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengesetzt sind und mit ihren Richtungslinien zusammenfallen (Fig. 55); denn nur dann sind alle drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt.

Fig. 55.

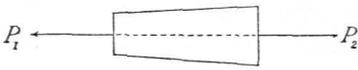
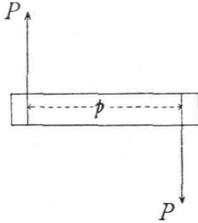


Fig. 56.

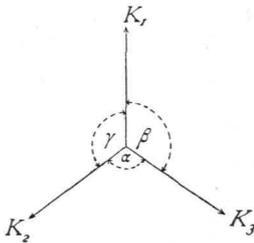


Sind die beiden Kräfte P und P (Fig. 56) zwar der Größe nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengesetzt, fallen sie aber mit ihren Richtungslinien nicht zusammen, so sind allerdings die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, nicht aber die dritte. Man nennt zwei solche Kräfte ein Kräftepaar und versteht unter dem Momente des Kräftepaars das Product aus der Größe der Kraft P in den

normalen Abstand der beiden Richtungslinien der Kräfte; d. h. es ist das Moment $M = Pp$.

- 4) Drei auf einen Körper wirkende Kräfte sind nur dann im Gleichgewichte, wenn sich ihre Richtungslinien in einem Punkte schneiden, jede der drei Kräfte numerisch genau eben so groß ist, wie die Resultirende der beiden anderen Kräfte, und mit der betreffenden Resultirenden einen Winkel von 180 Grad einschließt.

Fig. 57.



5) Wenn drei in derselben Ebene liegende Kräfte, welche sich in einem Punkte schneiden, im Gleichgewichte sind, so verhalten sich die Kräfte zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 (Fig. 57) befinden sich sonach im Gleichgewicht, wenn

$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

- 6) Gesetz der Wechselwirkung. Dasselbe lautet: Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, so erleidet er durch diesen Körper eine Kraft, welche der von ihm ausgeübten der Größe nach genau gleich, der Richtung nach genau entgegengesetzt ist.

Dieses Gesetz wird in der Folge sehr häufig angewendet werden. Es kommt unter Anderem bei den Auflagern der Träger in Betracht. Ein Träger AB (Fig. 58) übt durch sein Eigengewicht und die wirkenden Belastungen auf die Auflagerpunkte A und B die Drücke K und K_1 aus; dieselben sind nach unten gerichtet. Genau eben so groß sind die Gegendrücke, welche die Auflager auf die Träger aus-

237.
Zwei Kräfte
auf einen Körper
wirksam.

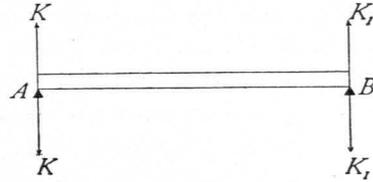
238.
Drei Kräfte
auf einen Körper
wirksam.

239.
Gesetz
der Wechsel-
wirkung.

üben. Diese sind nach oben gerichtet, da sie den ersteren Drücken K und K_1 genau entgegengesetzt gerichtet sein müssen.

Betrachtet man nur den Träger, so hat man die nach oben wirkenden Kräfte K und K_1 — als Reactionen — einzuführen; betrachtet man die Auflager, so sind die nach unten gerichteten Drücke K und K_1 der Untersuchung zu Grunde zu legen.

Fig. 58.



b) Grundlagen für die graphische Behandlung baustatischer Aufgaben.

Die Aufgaben der Statik der Bauconstructions können nicht nur durch Rechnung (auf analytischem Wege), sondern auch auf graphischem (geometrischem) Wege gelöst werden. Die graphische Behandlung hat manche Vortheile. Dieselbe führt in vielen Fällen rascher und leichter zum Ziele und gewährt fast in allen Fällen eine klarere Uebersicht über die Wirkung der Kräfte, als die Rechnung.

In den folgenden Untersuchungen werden meistens beide Methoden berücksichtigt werden. Damit über die bei der graphischen Behandlung vorauszusetzenden Begriffe volle Klarheit herrsche und um Wiederholungen zu vermeiden, sollen die Grundlagen für die graphische Behandlung hier kurz vorgeführt werden. Dabei wird die Annahme gemacht, dass sämtliche Kräfte in einer Ebene wirken.

1) Kräfte an einem Angriffspunkte. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte können durch ihre Resultirende oder Mittelkraft ersetzt werden. Um diese Mittelkraft nach GröÙe und Richtung zu erhalten, construirt man das sog. Kraftpolygon.

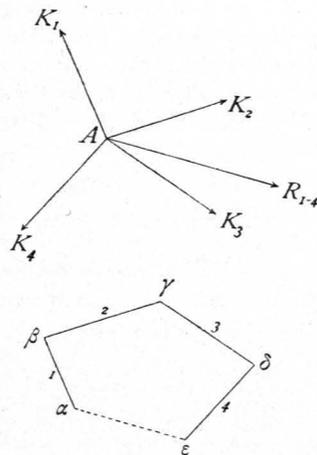
260.
Kraft-
polygon.

Das Kraftpolygon für eine Anzahl von Kräften ist derjenige Linienzug, welchen man erhält, wenn man sämtliche Kräfte nach irgend einem Maßstabe so aneinander reiht, dass die GröÙe, die Richtung und der Sinn einer jeden Kraft in diesem Linienzuge mit der GröÙe, der Richtung und dem Sinne der gegebenen Kraft übereinstimmt und dass der Anfangspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der vorhergehenden Kraft zusammenfällt.

Der Maßstab für das Auftragen der Kräfte kann beliebig angenommen werden; doch müssen sämtliche Kräfte nach demselben Maßstabe aufgetragen werden.

Um das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 zu erhalten, welche im Punkte A (Fig. 59) angreifen, trage man zunächst von einem beliebig anzunehmenden Punkte α aus nach irgend einem Maßstabe so viele Kräfteeinheiten ab, wie K_1 enthält, und zwar nach einer Richtung $\alpha\beta$, welche mit derjenigen von K_1 übereinstimmt. Ist etwa $K_1 = 20t$ und der Maßstab so gewählt, dass $1cm = 20t$ bedeutet, so würde man von α aus $1cm$ abzutragen haben. Man ziehe also durch α eine Linie parallel zur Richtung von K_1 und trage auf dieser Linie $\alpha\beta = K_1$ ab. Daran trage man K_2 ; zu dem Zwecke ziehe man durch β eine Linie parallel zur Richtung von K_2 und trage auf dieser Linie $\beta\gamma = K_2$ ab. In derselben Weise verfähre man weiter und erhält so $\gamma\delta = K_3, \delta\epsilon = K_4$. Alsdann ist $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 .

Fig. 59.



Es ist oben angegeben, dass der Sinn der Kraft im Kraftpolygon mit dem der gegebenen Kraft übereinstimmen muss. In der gegebenen Kraft ist der Sinn durch einen Pfeil ausgedrückt, so dass Unklarheit über denselben nicht bestehen kann; im Kraftpolygon ergibt sich der Sinn ebenfalls unzweideutig, wenn man die Kräfte stets so aufrägt, dass die Richtung vom früheren Buchstaben des Alphabetes bis