Anmerkungen.

1) (Seite 382). Diese Untersuchungen hängen aufs Innigste zusammen mit der Abhandlung „Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" (S. 254). Die folgende Ausführung Riemann'scher Vorschriften, welche einen Auszug aus einer (umgedruckten) Untersuchung R. Dedekind über diesen Gegenstand bildet, wird zur Erleichterung des Verständnisses des Textes beitragen.

Es sei das Quadrat des Linienelements im Raume von n Dimensionen

$$ds^2 = \sum_{\iota, \iota'} b_{\iota, \iota'} \, ds_\iota \, ds_{\iota'}.$$

Dann ergeben sich zur Bestimmung der kürzesten Linien die Differentialgleichungen

$$(1) \qquad d \sum_{\iota} b_{\iota, \mu} \frac{ds_\iota}{dr} = \tfrac{1}{2} \, dr \sum_{\iota, \iota'} \frac{\partial b_{\iota, \iota'}}{\partial s_\mu} \frac{ds_\iota}{dr} \frac{ds_{\iota'}}{dr}$$

und

$$\sum_{\iota, \iota'} b_{\iota, \iota'} \frac{ds_\iota}{dr} \frac{ds_{\iota'}}{dr} = 1,$$

wenn

$$r = \int \sqrt{\sum_{\iota, \iota'} b_{\iota, \iota'} \, ds_\iota \, ds_{\iota'}}$$

die Länge der kürzesten Linie selbst von einem willkürlichen festen Punkt 0 bis zu einen variablen Punkt bedeutet.

Man führe nun ein System neuer Variablen ein vermittelst der Substitution

$$x_1 = r c_1, \; x_2 = r c_2, \; \ldots, \; x_n = r c_n,$$

worin die Grössen c_ι die Bedeutung haben:

$$c_\iota = \left(\frac{ds_\iota}{dr}\right)_0,$$

so dass zwischen denselben die Relation besteht:

$$\sum_{\iota, \iota'} b^{(0)}_{\iota, \iota'} c_\iota c_{\iota'} = 1,$$

und dass dieselben längs einer jeden, vom Punkt 0 auslaufenden kürzesten Linie constant sind.

Ist nun, in den neuen Variablen ausgedrückt, das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = \sum_{\iota, \iota'} a_{\iota, \iota'} \, dx_\iota \, dx_{\iota'}$$

so folgt leicht, indem man längs einer von 0 auslaufenden kürzesten Linie fortschreitet

$$(2)\qquad \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, c_\iota c_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, c_\iota c_{\iota'} = 1.$$

Drückt man die Differentialgleichungen der kürzesten Linien in den neuen Variablen aus, so ergiebt sich

$$d \sum_\iota a_{\mu,\iota}\, c_\iota = \tfrac{1}{2}\, d r \sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_\mu}\, c_\iota c_{\iota'},$$

woraus folgt

$$(3)\qquad \sum_{\iota,\iota'} p_{\mu,\iota,\iota'}\, x_\iota x_{\iota'} = 0,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist

$$p_{\mu,\iota,\iota'} = \frac{\partial a_{\iota,\mu}}{\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial a_{\iota',\mu}}{\partial x_\iota} - \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_\mu}.$$

die Gleichung (3) lässt sich auch so schreiben:

$$(3')\qquad \sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_\mu}\, x_\iota x_{\iota'} = 2 \sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial a_{\iota,\mu}}{\partial x_{\iota'}}\, x_\iota x_{\iota'}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\omega_\mu = \sum_\iota a_{\mu,\iota}\, x_\iota;\quad \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} = a_{\mu,\nu} + \sum_\iota \frac{\partial a_{\mu,\iota}}{\partial x_\nu}\, x_\iota,$$

so lässt sich die Gleichung (3′) schreiben:

$$\omega_\mu + \sum_\iota \frac{\partial \omega_\iota}{\partial x_\mu}\, x_\iota = 2 \sum_\iota \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\iota}\, x_\iota.$$

Setzt man ferner

$$2\omega = \sum_\iota \omega_\iota x_\iota;\quad 2\frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = \omega_\mu + \sum_\iota \frac{\partial \omega_\iota}{\partial x_\mu}\, x_\iota,$$

so folgt hieraus:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = \sum_\iota \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\iota}\, x_\iota;\quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} + \sum_\iota \frac{\partial^2 \omega_\mu}{\partial x_\iota \partial x_\nu}\, x_\iota,$$

und hieraus:

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu} + \sum_\iota \frac{\partial}{\partial x_\iota}\left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}\right) x_\iota = 0$$

woraus hervorgeht, dass die $\dfrac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \dfrac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}$ homogene Functionen der (— 1)ten Ordnung sind. Bezeichnen wir eine solche mit $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, so hat man

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^{-1} f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Setzt man daher voraus, dass die Coefficienten $a_{\iota,\iota'}$ und ihre Ableitungen im Punkte 0 bestimmte endliche Werthe haben, so folgt, wenn man $t = 0$ setzt, dass die Function f identisch verschwinden muss, dass also $\dfrac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}$ ist.

Es ist also auch

$$\sum_\iota \frac{\partial a_{\mu,\iota}}{\partial x_\nu} x_\iota = \sum_\iota \frac{\partial a_{\nu,\iota}}{\partial x_\mu} x_\iota$$

und daraus ergiebt sich mit Hülfe von (3′):

$$\sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial a_{\mu,\iota}}{\partial x_{\iota'}} x_\iota x_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_\mu} x_\iota x_{\iota'} = 0$$

und durch Integration der Differentialgleichungen der kürzesten Linie:

$$\sum_\iota a_{\mu,\iota} c_\iota = \sum_\iota a^{(0)}_{\mu,\iota} c_\iota . \tag{4}$$

Bedeuten nun $t_{\iota,\iota'} = t_{\iota',\iota}$ irgend welche Functionen von $x_1, x_2, .., x_n$, welche mit ihren Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschliesslich im Punkt 0 bestimmte endliche Werthe haben, und besteht die identische Gleichung

$$\sum_{\iota,\iota'} t_{\iota,\iota'} x_\iota x_{\iota'} = 0,$$

so folgen daraus, wenn man dreimal differentiirt, und nach der Differentiation $x_\iota = 0$ setzt, die für den Punkt 0 gültigen Gleichungen:

$$t_{\iota,\iota'} = 0; \quad \frac{\partial t_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}} + \frac{\partial t_{\iota',\iota''}}{\partial x_\iota} + \frac{\partial t_{\iota,\iota''}}{\partial x_{\iota'}} = 0 .$$

Setzt man hierin $t_{\iota,\iota'} = p_{\mu,\iota,\iota'}$, so ergiebt sich für den Punkt 0

$$p_{\iota,\iota',\iota''} = 0; \quad \frac{\partial p_{\iota,\iota',\iota''}}{\partial x_{\iota'''}} + \frac{\partial p_{\iota,\iota'',\iota'''}}{\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial p_{\iota,\iota',\iota'''}}{\partial x_{\iota''}} = 0 .$$

Aus der ersten derselben erhält man durch Addition von $p_{\iota',\iota,\iota''} = 0$

$$\frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}} = 0, \quad \text{im Punkt } 0, \tag{5}$$

aus der zweiten

$$2\left(\frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota''}}{\partial x_{\iota'''}\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'''}}{\partial x_{\iota'}\,\partial x_{\iota''}}\right) = \frac{\partial^2 a_{\iota'',\iota'''}}{\partial x_\iota\,\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial^2 a_{\iota''',\iota'}}{\partial x_\iota\,\partial x_{\iota''}} + \frac{\partial^2 a_{\iota',\iota''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'''}}.$$

Vertauscht man hierin ι und ι, addirt und bezeichnet mit S die Summe der sechs Derivirten von der Form $\dfrac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}}$, so folgt

$$S = 3\left(\frac{\partial^2 a_{\iota'',\iota'''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'}} - \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}}\right),$$

und da S sich nicht ändert, wenn man ι'', ι''' mit ι, ι' vertauscht:

$$\frac{\partial^2 a_{\iota'',\iota'''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'}} = \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''} \partial x_{\iota'''}}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota''}}{\partial x_{\iota'''}\,\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'''}}{\partial x_{\iota'}\,\partial x_{\iota''}} = \frac{\partial^2 a_{\iota'',\iota'''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'}} + \frac{\partial^2 a_{\iota''',\iota'}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota''}} + \frac{\partial^2 a_{\iota',\iota''}}{\partial x_\iota \partial x_{\iota'''}} = 0, \tag{7}$$

im Punkt 0.

Nun ist das Quadrat eines vom Punkt 0 ausgehenden Linienelementes

$$ds_0^2 = \sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}.$$

Für ein vom Punkt $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, der dem Punkt 0 unendlich nahe ist, ausgehendes Linienelement haben wir

$$ds^2 = \sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} + \sum_{\iota,\iota',\iota''} \left(\frac{\partial a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}}\right)_0 \delta x_{\iota''}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''} \left(\frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}}\right)_0 \delta x_{\iota''}\, \delta x_{\iota'''}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}.$$

Hierin verschwindet nach (5) das zweite Glied auf der rechten Seite, und das dritte Glied lässt sich nach (6) so schreiben:

$$\tfrac{1}{2} dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} = \tfrac{1}{2} \delta\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'},$$

wenn die Variationen zweiter Ordnung ddx_ι, $d\delta x_\iota$, δdx_ι, $\delta\delta x_\iota$ gleich Null sind. Unter derselben Voraussetzung erhält man leicht aus (7)

$$dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} + 2 d\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'} = 0,$$

wodurch sich ergiebt:

$$dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'}$$

$$= \tfrac{1}{3} \left\{ dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} - 2 d\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'} + \delta\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} \right\},$$

welches wieder in die Form gebracht werden kann:

$$\tfrac{4}{3} \sum_{\iota,\iota'';\iota',\iota'''} \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}} (dx_\iota\, \delta x_{\iota''} - \delta x_\iota\, dx_{\iota''})(dx_{\iota'}\, \delta x_{\iota'''} - \delta x_{\iota'}\, dx_{\iota'''}),$$

wenn die Summe nur auf die von einander verschiedenen Paare der Indices ι, ι'' und der Indices ι', ι''' ausgedehnt wird. Hieraus folgt endlich:

$$ds^2 = ds_0{}^2$$

(8) $$+ \tfrac{2}{3} \sum_{\iota,\iota'';\iota',\iota'''} \frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}} (dx_\iota\, \delta x_{\iota''} - \delta x_\iota\, dx_{\iota''})(dx_{\iota'}\, \delta x_{\iota'''} - \delta x_{\iota'}\, dx_{\iota'''}).$$

Werden nun an Stelle der Variablen x_ι beliebige andere eingeführt, so bleiben die Gleichungen (4), (5), (6), (7) nicht bestehen, noch werden die Variationen zweiter Ordnung ddx_ι, $d\delta x_\iota$, δdx_ι, $\delta\delta x_\iota$ verschwinden. Wir müssen daher darauf ausgehen, die Bedingungen, auf denen die Bildung des Ausdrucks (8) beruht in eine Form zu bringen, welche bei Einführung beliebiger Variablen ungeändert bleibt. Dies erreichen wir, wenn wir an Stelle der Gleichungen (5), (6), (7) die folgenden setzen:

$$dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} = \delta\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} = -2 d\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'},$$

woraus hervorgeht:

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
&dd\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta x_\iota\,\delta x_{\iota'}\\
&=\tfrac{1}{3}\Big\{dd\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta x_\iota\,\delta x_{\iota'} - 2\,d\delta\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta x_{\iota'} + \delta\delta\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,dx_{\iota'}\Big\},
\end{aligned}
$$

und wenn wir die Variationen zweiter Ordnung so bestimmen, dass für eine beliebige Variation δ' die Gleichungen erfüllt sind:

$$
\begin{aligned}
\delta'\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta x_{\iota'} &= \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,d\delta' x_\iota\,\delta x_{\iota'} + \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta\delta' x_{\iota'},\\
d\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta' x_\iota\,\delta x_{\iota'} &= \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,d\delta' x_\iota\,\delta x_{\iota'},\\
\delta\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta' x_{\iota'} &= \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta\delta' x_{\iota'},
\end{aligned}
$$

woraus folgt:

$$
(10)\quad \delta'\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta x_{\iota'} - d\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta' x_\iota\,\delta x_{\iota'} - \delta\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta' x_{\iota'} = 0,
$$

und wenn man $d = \delta$ setzt:

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
\delta'\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,dx_{\iota'} - 2\,d\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta' x_{\iota'} &= 0\\
\delta'\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta x_\iota\,\delta x_{\iota'} - 2\,\delta\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta x_\iota\,\delta' x_{\iota'} &= 0.
\end{aligned}
$$

Die Bedingungen (9), (10), (11) sind für beliebige Variable x_ι nach demselben Gesetz gebildet.

Aus (10), (11) folgen noch für die Variationen zweiter Ordnung die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
2\sum_{\iota} a_{\nu,\iota}\,ddx_\iota &= -\sum_{\iota,\iota'} p_{\nu,\iota,\iota'}\,dx_\iota\,dx_{\iota'}\\
2\sum_{\iota} a_{\nu,\iota}\,d\delta x_\iota &= -\sum_{\iota,\iota'} p_{\nu,\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta x_{\iota'}\\
2\sum_{\iota} a_{\nu,\iota}\,\delta\delta x_\iota &= -\sum_{\iota,\iota'} p_{\nu,\iota,\iota'}\,\delta x_\iota\,\delta x_{\iota'}
\end{aligned}
$$

woraus man leicht den Ausdruck erhält:

$$
\begin{aligned}
&dd\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta x_\iota\,\delta x_{\iota'} - 2\,d\delta\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,\delta x_{\iota'} + \delta\delta\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,dx_{\iota'}\\
&= \sum_{\iota\iota',\iota''\iota'''} (\iota\iota', \iota''\iota''')\,(dx_\iota\,\delta x_{\iota'} - \delta x_\iota\,dx_{\iota'})\,(dx_{\iota''}\,\delta x_{\iota'''} - \delta x_{\iota''}\,dx_{\iota'''}),
\end{aligned}
$$

wenn das Summenzeichen ebenso verstanden wird wie oben, und $(\iota\iota', \iota''\iota''')$ dieselbe Bedeutung hat, wie im Riemann'schen Text.

Aus diesem Ausdruck erhalten wir nun das Krümmungsmaass unseres allgemeinen Raumes. Es seien nemlich

$$
ds = \sqrt{\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,dx_\iota\,dx_{\iota'}}, \quad \delta s = \sqrt{\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\,\delta x_\iota\,\delta x_{\iota'}}
$$

zwei Linienelemente in demselben, und

$$\frac{\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'}}{ds\,\delta s} = \cos\vartheta$$

der Cosinus des Winkels den sie einschliessen.

Der Flächeninhalt des von denselben gebildeten unendlich kleinen Dreiecks ist dann

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\, ds\,\delta s \sin\vartheta$$

und es ergiebt sich

$$4\Delta^2 = \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} - \Big(\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'}\Big)^2$$

$$= \sum_{\iota\iota'',\iota'\iota'''} (a_{\iota,\iota'} a_{\iota'',\iota'''} - a_{\iota',\iota''} a_{\iota,\iota'''})(dx_\iota \delta x_{\iota''} - \delta x_\iota dx_{\iota''})(dx_{\iota'} \delta x_{\iota'''} - \delta x_{\iota'} dx_{\iota'''}),$$

was für das Krümmungsmaass den Ausdruck giebt:

$$-\tfrac{3}{8}\,\frac{dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'}}{\Delta^2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,\frac{dd \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} - 2\, d\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'} + \delta\delta \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}}{\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} - \Big(\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'}\Big)^2}.$$

Es ist nun noch nachzuweisen, dass dieser Ausdruck mit dem übereinstimmt, den Gauss für das Krümmungsmaass einer Fläche aufstellt, wenn wir eine Fläche betrachten, welche von solchen kürzesten Linien gebildet wird, in deren Anfangselementen die Variationen der x sich verhalten wie

$$\alpha\, dx_1 + \beta\, \delta x_1 : \alpha\, dx_2 + \beta\, \delta x_2 : \ldots : \alpha\, dx_n + \beta\, \delta x_n,$$

wenn α und β beliebige Grössen bedeuten.

Wir setzen wie oben $x_\iota = r c_\iota$, so dass die c_ι in jeder vom Punkt 0 auslaufenden kürzesten Linie constant sind, und r die Länge dieser kürzesten Linie bis zu einem unbestimmten Punkt bedeutet. Dann ist, wie oben gezeigt,

$$\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, c_\iota c_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, c_\iota c_{\iota'} = 1.$$

Legen wir nun zwei feste Systeme der Grössen c_ι zu Grunde, $c^{(0)}_\iota$ und c'_i und betrachten ein veränderliches System

$$c_\iota = \alpha c^{(0)}_\iota + \beta c'_\iota, \tag{12}$$

so haben wir hiernach:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta \cos(r^{(0)}, r') + \beta^2 = 1$$

wodurch die Grössen c_ι in Functionen einer einzigen Variablen übergehen, für welche wir den Winkel φ nehmen können, den das Anfangselement von r mit dem Anfangselement von r_0 bildet, und der sich aus dem Ausdruck ergiebt

$$\cos\varphi = \sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, c_\iota c^{(0)}_{\iota'}.$$

Wenn sich nun die Grössen r, c_ι um die unendlich kleinen Grössen dr, dc_ι ändern, welche der Bedingung genügen:

$$\sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, c_\iota\, dc_{\iota'} = 0\,,$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichungen (4)

$$\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, c_\iota\, dc_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, c_\iota\, dc_{\iota'} = 0\,.$$

Ferner haben wir

$$dx_\iota = r\,dc_\iota + c_\iota\,dr\,,$$

also:

$$ds^2 = \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} = dr^2 + r^2 \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dc_\iota\, dc_{\iota'} = dr^2 + r^2 \mu\, d\varphi^2,$$

wenn zur Abkürzung

$$\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dc_\iota\, dc_{\iota'} = \mu\, d\varphi^2$$

gesetzt wird.

Nun haben wir aber:

$$\cos\varphi = \sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, c_\iota\, c^{(0)}_{\iota'}, \quad -\sin\varphi\, d\varphi = \sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, c^{(0)}_\iota\, dc_{\iota'}\,,$$

und aus (12) folgt ein Ausdruck von der Form

$$dc_\iota = a c^{(0)}_\iota + b\, c_\iota\,;$$

also:

$$-\sin\varphi\, d\varphi = a + b\cos\varphi\,,$$

$$0 = a\cos\varphi + b\,.$$

Hieraus durch Elimination von a und b:

$$\sin\varphi\, dc_\iota = d\varphi\left(c_\iota \cos\varphi - c^{(0)}_\iota\right).$$

Daraus folgt weiter

$$d\varphi^2 = \sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, dc_\iota\, dc_{\iota'}$$

und mithin

$$(13)\qquad \mu = \frac{\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dc_\iota\, dc_{\iota'}}{\sum_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\, dc_\iota\, dc_{\iota'}}\,.$$

Bezeichnen wir diesen Ausdruck durch $\frac{m^2}{r^2}$, so erhalten wir die Form, welche Gauss dem Linienelement auf einer beliebigen Fläche gegeben hat, nämlich:

$$ds^2 = dr^2 + m^2 d\varphi^2$$

(Disquisitiones generales circa superficies curvas art. 19) und für das Krümmungsmaass ergiebt sich

$$k = -\frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\,.$$

Ist nun die Oberfläche im Punkt $r = 0$ stetig gekrümmt, so ist in diesem Punkt

$$m = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial^2 m}{\partial r^2} = 0,$$

und daher in diesem Punkt

$$k = -\frac{\partial^3 m}{\partial r^3}.$$

Für die Function μ ergiebt sich hieraus für denselben Punkt

$$\mu = 1, \quad \frac{\partial \mu}{\partial r} = 0, \quad k = -\tfrac{3}{2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2}.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen sind in Folge von (13), (5) befriedigt; aus der dritten ergiebt sich

$$k = -\frac{3}{2}\,\frac{\sum\limits_{\iota\iota', \iota''\iota'''}\left(\frac{\partial^2 a_{\iota,\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}}\right)_0 c_{\iota''}\,c_{\iota'''}\,dc_\iota\,dc_{\iota'}}{\sum\limits_{\iota,\iota'} a^{(0)}_{\iota,\iota'}\,dc_\iota\,dc_{\iota'}}\,,$$

was mit dem oben gefundenen Ausdruck übereinstimmt.

2) (Zu Seite 383). Die vollständige Verification der hier aufgestellten Schlussresultate scheint noch verwickelte Rechnungen zu erfordern, die ich aus den sehr unvollständigen vorhandenen Bruchstücken nur zum Theil herstellen konnte. Was sich daraus entziffern liess, theile ich hier mit in der Hoffnung, dass es bei einem erneuten Versuch, die Resultate vollständig herzuleiten, als Grundlage dienen könne.

Wir beantworten zunächst die Frage, in welchen Fällen die Temperatur ausser von der Zeit nur von Einer Veränderlichen abhängt. In diesen Fällen hat die Differentialgleichung, nach welcher die Bewegung der Wärme geschieht, die Form

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + b\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

Wenn nun die Coefficienten a, b nicht Functionen der einzigen Variablen α sind, so zerfällt diese Differentialgleichung in die beiden folgenden:

$$a'\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + b'\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a''\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + b''\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0,$$

worin a', b', a'', b'' nur von α abhängen.

Durch Einführung einer neuen Variablen an Stelle von α lässt sich die zweite dieser Gleichungen in die Form $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$ bringen, so dass u die Form erhält $u_1\alpha + u_2$, wenn u_1, u_2 Functionen der Zeit allein sind. Die erste der obigen Gleichungen nimmt dann die Gestalt an

$$(c\alpha + c_1)\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

worin c, c_1 Constanten sind. Daraus folgt nun weiter

$$cu_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad 0 = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

also hat u die Form $\alpha e^{\lambda t} + \text{const.}$

Wenn aber in der Differentialgleichung (1) die Coefficienten a, b schon Functionen von α allein sind, so können wir unbeschadet der Allgemeinheit $b = 0$ annehmen (durch Einführung einer neuen Variablen für α), und da die Differentialgleichung (1) durch Transformation aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

hervorgegangen sein muss, so kommt unsere Aufgabe auf die folgende zurück:

Es sollen alle Functionen α der Coordinaten x, y, z gefunden werden, die den beiden Differentialgleichungen

$$\Delta = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = 0, \quad D = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2 = f(\alpha)$$

zugleich genügen.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = r, \quad p^2 + q^2 + r^2 = m,$$

und haben nun vier Fälle zu unterscheiden:

1. Wenn p, q, r von einander unabhängige Functionen der Coordinaten x, y, z sind, so ist α eine Function von m, $\varphi(m)$, und wir können p, q, r als unabhängige Variable an Stelle von x, y, z einführen. Setzen wir

$$s = \alpha - px - qy - rz, \quad ds = -x\,dp - y\,dq - z\,dr,$$

so folgt:

$$x = -\frac{\partial s}{\partial p}, \quad y = -\frac{\partial s}{\partial q}, \quad z = -\frac{\partial s}{\partial r},$$

$$\alpha = s - p\frac{\partial s}{\partial p} - q\frac{\partial s}{\partial q} - r\frac{\partial s}{\partial r} = \varphi(m).$$

Setzt man

$$s = \psi(m) + t$$

und bestimmt die Function $\psi(m)$ aus der Differentialgleichung

$$\psi(m) - 2m\psi'(m) = \varphi(m),$$

so ergiebt sich für t die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$t - p\frac{\partial t}{\partial p} - q\frac{\partial t}{\partial q} - r\frac{\partial t}{\partial r} = 0,$$

deren allgemeine Lösung ist:

$$t = p\chi\left(\frac{q}{p}, \frac{r}{p}\right) = p\chi(\beta, \gamma)$$

wenn χ eine willkürliche Function bedeutet und zur Abkürzung

$$\beta = \frac{q}{p}, \quad \gamma = \frac{r}{p}$$

gesetzt wird.

Wir haben also

$$\begin{aligned} -x &= \frac{\partial s}{\partial p} = 2p\psi'(m) + \chi - \beta\chi'(\beta) - \gamma\chi'(\gamma) \\ -y &= \frac{\partial s}{\partial q} = 2q\psi'(m) + \chi'(\beta) \qquad (2) \\ -z &= \frac{\partial s}{\partial r} = 2r\psi'(m) + \chi'(\gamma). \end{aligned}$$

Nun folgt aus der Gleichung

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

durch Einführung von p, q, r als unabhängige Variable

$$\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} = 0,$$

oder durch Substitution von (2)

$$m\left(12\psi'(m)^2 + 16\, m\, \psi'(m)\, \psi''(m)\right)$$
$$+ \sqrt{m}\left(4\psi'(m) + 4m\psi''(m)\right)\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}\left\{(\beta^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2} + 2\beta\gamma\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\,\partial\gamma} + (\gamma^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2}\right\}$$
$$+ (1+\beta^2+\gamma^2)^2\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\,\partial\gamma}\right)^2\right) = 0,$$

und da m, β, γ von einander unabhängige Variable sind, so spaltet sich diese Gleichung in die drei folgenden:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\,\partial\gamma}\right)^2 = \frac{k}{(1+\beta^2+\gamma^2)^2}, \tag{3}$$

$$(\beta^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2} + 2\beta\gamma\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta\,\partial\gamma} + (\gamma^2+1)\frac{\partial^2\chi}{\partial\gamma^2} = \frac{k_1}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}}, \tag{4}$$

$$m\left(12\psi'(m)^2 + 16m\psi'(m)\psi''(m)\right) + k_1\sqrt{m}\left(4\psi'(m) + 4m\psi''(m)\right) + k = 0, \tag{5}$$

worin k, k_1 unbestimmte Constanten bedeuten. Führt man an Stelle der Function χ eine neue Function χ_1 ein durch die Gleichung

$$\chi = \tfrac{1}{2} k_1 \sqrt{1+\beta^2+\gamma^2} + \chi_1,$$

so gehen die Gleichungen (3), (4) in folgende über:

$$\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta\,\partial\gamma}\right)^2 = \frac{k'}{(1+\beta^2+\gamma^2)^2}, \tag{6}$$

$$(\beta^2+1)\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta^2} + 2\beta\gamma\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\beta\,\partial\gamma} + (\gamma^2+1)\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\gamma^2} = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichungen können aber nur dann zusammen bestehen, wenn χ_1 eine lineare Function von β, γ, und folglich $k' = 0$ ist; denn betrachten wir

$$\chi_1 - \beta\frac{\partial\chi_1}{\partial\beta} - \gamma\frac{\partial\chi_1}{\partial\gamma},\quad \frac{\partial\chi_1}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\chi_1}{\partial\gamma}$$

als rechtwinklige Coordinaten, so ist (6) die Differentialgleichung einer Fläche mit constantem Krümmungsmass, (7) die einer Minimalfläche, zwei Eigenschaften, die bekanntlich nur bei der Ebene zusammentreffen.

Hieraus ergiebt sich, wenn a, b, c Constanten bedeuten, für χ ein Ausdruck von der Form:

$$\chi = a + b\beta + c\gamma + \tfrac{1}{2} k_1 \sqrt{1+\beta^2+\gamma^2},$$

und die Gleichungen (2) gehen in folgende über:

$$x + a = -\frac{\frac{1}{2}k_1 + 2\sqrt{m}\,\psi'(m)}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$y + b = -\frac{\left(\frac{1}{2}k_1 + 2\sqrt{m}\,\psi'(m)\right)\beta}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$z + c = -\frac{\left(\frac{1}{2}k_1 + 2\sqrt{m}\,\psi'(m)\right)\gamma}{\sqrt{1+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 = \left(\tfrac{1}{2}k_1 + 2\sqrt{m}\,\psi'(m)\right)^2,$$

woraus folgt, dass die Flächen $\alpha = \text{const.}$ oder $m = \text{const.}$ concentrische Kugeln sind.

2. Wenn zwischen den Variablen p, q, r eine von den Coordinaten x, y, z freie Gleichung besteht, so kann r als Function von p, q angesehen werden, und wir haben

$$dr = a\,dp + b\,dq,$$

wenn

$$a = \frac{\partial r}{\partial p},\quad b = \frac{\partial r}{\partial q},\quad \frac{\partial a}{\partial q} = \frac{\partial b}{\partial p}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = a\frac{\partial p}{\partial x} + b\frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial q}{\partial z} = a\frac{\partial q}{\partial x} + b\frac{\partial q}{\partial y},\quad \frac{\partial r}{\partial z} = a\frac{\partial r}{\partial x} + b\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Wenn nun nicht

$$p^2 + q^2 + r^2 = \text{const.} \tag{8}$$

ist, so wird α von denselben beiden Variablen abhängen wie p, q, r, und daraus geht hervor:

$$r = ap + bq$$

und durch Differentiation:

$$p\frac{\partial a}{\partial p} + q\frac{\partial b}{\partial p} = 0;\quad p\frac{\partial a}{\partial q} + q\frac{\partial b}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q} - \frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial b}{\partial p} = 0. \tag{9}$$

Setzen wir nun, wie vorhin, auch in dem Fall, wo die Gleichung (8) besteht,

$$s = \alpha - xp - yq - zr,$$

$$ds = -x\,dp - y\,dq - z\,dr = -(x+az)\,dp - (y+bz)\,dq,$$

so folgt, dass auch s nur von p, q abhängt, und es ergiebt sich

$$\frac{\partial s}{\partial p} = -(x+az),\quad \frac{\partial s}{\partial q} = -(y+bz). \tag{10}$$

Führt man nun in der Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

p, q, z als unabhängige Variable ein, so folgt

$$\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q} - a\left(\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial z}\right) - b\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial z}\right) = 0,$$

und daraus mit Hülfe von (10)

$$z\left\{\frac{\partial a}{\partial p}(1+b^2) - ab\left(\frac{\partial a}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial p}\right) + \frac{\partial b}{\partial q}(1+a^2)\right\}$$
$$+ \frac{\partial^2 s}{\partial p^2}(1+b^2) - 2ab\frac{\partial^2 s}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2}(1+a^2) = 0.$$

Da nun a, b, s von z unabhängig sind, so zerfällt diese Gleichung in die beiden folgenden:

(11) $$\frac{\partial^2 s}{\partial p^2}(1+b^2) - 2ab\frac{\partial^2 s}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2}(1+a^2) = 0$$

(12) $$\frac{\partial a}{\partial p}(1+b^2) - ab\left(\frac{\partial a}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial p}\right) + \frac{\partial b}{\partial q}(1+a^2) = 0.$$

Betrachten wir nun p, q, r als rechtwinklige Coordinaten, so ist (12) die Differentialgleichung einer Minimalfläche, welche nach (8) oder (9) zugleich eine Kugel oder eine in die Ebene abwickelbare Fläche sein müsste. Dies kann nur vereinigt sein, wenn die Fläche eine Ebene ist, und daher a, b Constanten sind, die man bei passender Bestimmung der Richtung der z-Axe gleich Null annehmen kann. Demnach ergiebt sich aus (11)

(13) $$\frac{\partial^2 s}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial q^2} = 0,$$

und ferner wie im ersten Fall

$$s = \psi(m) + p\chi\left(\frac{q}{p}\right),$$

$$m = p^2 + q^2, \quad r = 0,$$

$$-x = \frac{\partial s}{\partial p} = \psi'(m)\,2p + \chi(\beta) - \beta\chi'(\beta),$$

$$-y = \frac{\partial s}{\partial q} = \psi'(m)\,2q + \chi'(\beta),$$

wenn $\beta = \frac{q}{p}$ gesetzt wird.

Aus (13) folgt daher

$$\sqrt{m}\left(4\psi'(m) + 4m\psi''(m)\right) + (1+\beta^2)^{\frac{3}{2}}\chi''(\beta) = 0,$$

eine Gleichung, die in die beiden folgenden zerfällt:

$$\sqrt{m}\left(4\psi'(m) + 4m\psi''(m)\right) = k,$$

$$\chi''(\beta) = \frac{k}{\sqrt{1+\beta^2}^{\,3}},$$

worin k constant ist. Die Integration dieser letzteren Gleichung ergiebt, wenn a, b willkürliche Constanten sind,

$$\chi(\beta) = k\sqrt{1+\beta^2} + a + b\beta.$$

Demnach haben wir

$$x + a = -\frac{2\psi'(m)\sqrt{m} + k}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

$$y + b = -\frac{\left(2\psi'(m)\sqrt{m} + k\right)\beta}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = \left(2\psi'(m)\sqrt{m} + k\right)^2.$$

Die isothermen Flächen sind daher in diesem Fall Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt und gemeinschaftlicher Axe.

Der dritte Fall, in dem p, q, r Functionen einer und derselben Variablen sind, kann nicht vorkommen. Ist nemlich

$$p = \psi_1(\mu), \quad q = \psi_2(\mu), \quad r = \psi_3(\mu),$$

so folgt aus den Gleichungen

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial x}:$$

$$\psi_1'(\mu) : \psi_2'(\mu) : \psi_3'(\mu) = \frac{\partial \mu}{\partial x} : \frac{\partial \mu}{\partial y} : \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

und die Gleichung $\Delta = 0$ liefert

$$\psi_1'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial x} + \psi_2'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \psi'_3(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0$$

was sich offenbar widerspricht.

Es bleibt also nur der vierte Fall, in dem p, q, r constant sind, und daher die Schaar der isothermen Flächen aus parallelen Ebenen besteht.

Von der allgemeineren Frage, wann die Temperatur ausser von der Zeit nur von zwei Variablen abhängig ist, lässt sich der erste Fall, der im Text durch $m = 1$ charakterisirt ist, in folgender Weise beantworten.

Wir haben in diesem Fall die quadratische Form

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix},$$

in der a', b' lineare Functionen von γ sind, während c' von γ unabhängig ist. Ferner ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0, & c', & b' \\ c', & 0, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix} = 2a'b'c' - cc'c'$$

constant. Die adjungirte Form zu dieser ist

$$-(a'd\alpha + b'd\beta - c'd\gamma)^2 + 2(2a'b' - cc')\,d\alpha\, d\beta,$$

in der $2a'b' - cc'$ von γ unabhängig ist.

Nun können wir durch Einführung einer neuen Variablen an Stelle von γ, welche eine lineare Function von γ ist, diese Form in die einfachere transformiren:

$$(a\,d\alpha + c\,d\gamma)^2 + 2m\,d\alpha\,d\beta,$$

in der a eine lineare Function von γ, c und m von γ unabhängig sind. Es sind nun die Fälle aufzufinden, in welchen diese Form in eine andere mit constanten Coefficienten, oder speciell in die Form $dx^2 + dy^2 + dz^2$ transformirbar ist.

Zu dem Ende bilden wir die Gleichungen $(\iota\iota', \iota''\iota''') = 0$ (S. 381), welche in diesem Fall die Gestalt annehmen:

$$(1,1) \qquad m\frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} - \frac{\partial c}{\partial \beta}\frac{\partial m}{\partial \beta} = 0,$$

$$(2,2) \qquad mc\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha\, \partial \gamma}\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial \gamma} - \frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)\left(c\frac{\partial m}{\partial \alpha} + m\frac{\partial a}{\partial \gamma}\right) = 0,$$

$$(3,3) \qquad 2mc\left(\frac{\partial^2 a^2}{\partial \beta^2} - 2\frac{\partial^2 m}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right) + 4c\frac{\partial m}{\partial \beta}\left(\frac{\partial m}{\partial \alpha} - a\frac{\partial a}{\partial \beta}\right) - \frac{m}{c}\left(\frac{\partial a c}{\partial \beta}\right)^2 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
& 2mc\left(\frac{\partial^2 a^2}{\partial\beta\,\partial\gamma}-\frac{\partial^2 ac}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)+4m\frac{\partial c}{\partial\beta}\left(a\frac{\partial c}{\partial\alpha}-a\frac{\partial a}{\partial\gamma}+c\frac{\partial a}{\partial\alpha}\right)\\
(2,3)\qquad & +2c\left(c\frac{\partial a}{\partial\beta}-a\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial\alpha}-a\frac{\partial a}{\partial\beta}\right)-2m\frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial ac}{\partial\beta}\\
& +a\frac{\partial ac}{\partial\beta}\left(c\frac{\partial a}{\partial\beta}-a\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)=0,
\end{aligned}
$$

$$(3,1)\qquad 2mc\frac{\partial^2 ac}{\partial\beta^2}-2c\frac{\partial ac}{\partial\beta}\frac{\partial m}{\partial\beta}-2m\frac{\partial c}{\partial\beta}\frac{\partial ac}{\partial\beta}=0,$$

$$(1,2)\qquad 2m\left(2c\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{\partial^2 ac}{\partial\beta\,\partial\gamma}\right)+\left(c\frac{\partial a}{\partial\beta}-a\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)^2=0.$$

Aus (1,2) folgt, dass $c\frac{\partial a}{\partial\beta}-a\frac{\partial c}{\partial\beta}$, also auch $\frac{\partial\frac{a}{c}}{\partial\beta}$ von γ unabhängig ist; setzt man daher $a=a_1+\gamma a_2$, so folgt dass a_2 von der Form ist $cf(\alpha)$, und $f(\alpha)$ von β unabhängig.

Wir haben daher

$$(a\,d\alpha+c\,d\gamma)^2+2m\,d\alpha\,d\beta=\big(a_1\,d\alpha+c\,(f(\alpha)\,d\alpha+d\gamma)\big)^2+2m\,d\alpha\,d\beta;$$

führt man also statt γ eine neue Variable $\gamma+\int f(\alpha)\,d\alpha$ ein, so geht die quadratische Form in eine andere von derselben Gestalt über, in der nur a von γ unabhängig ist. Bei dieser Annahme erhält die Gleichung (2,2) die Form

$$m\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial m}{\partial\alpha}=0$$

woraus in Verbindung mit (1,1) hervorgeht:

$$\frac{\partial\log\frac{\partial c}{\partial\alpha}}{\partial\alpha}=\frac{\partial\log m}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\log\frac{\partial c}{\partial\beta}}{\partial\beta}=\frac{\partial\log m}{\partial\beta},$$

und daraus

$$\frac{\partial c}{\partial\alpha}=m\,\varphi(\beta),\quad \frac{\partial c}{\partial\beta}=m\,\psi(\alpha).$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden.

1) wenn $\varphi(\beta)=\psi(\alpha)=0$ ist, so ist $c=$ const. und aus (1,2) folgt $\frac{\partial a}{\partial\beta}=0$. Führt man also an Stelle von γ eine neue Variable $c\gamma+\int a\,d\alpha$ ein, so erreicht man, dass in der quadratischen Form $a=0$, $c=1$ wird, und aus (3,3) folgt dann

$$\frac{\partial^2\log m}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0,\quad 2m=\chi(\alpha)\,\vartheta(\beta).$$

Führt man daher an Stelle von α, β die Variablen $\int\chi(\alpha)\,d\alpha$, $\int\vartheta(\beta)\,d\beta$ ein, so erhält man die quadratische Form

$$d\gamma^2+d\alpha\,d\beta,$$

welche durch die Substitution $\alpha=x+iy$, $\beta=x-iy$, $\gamma=z$ übergeht in

$$dx^2+dy^2+dz^2.$$

Die isothermen Curven $\alpha=$ const., $\beta=$ const. sind also in diesem Fall parallele gerade Linien.

2) Wenn $\varphi(\beta) = 0$, $\psi(\alpha)$ nicht $= 0$ ist, so ist c von α unabhängig, und aus (1,2) folgt, dass $\frac{a}{c}$ von β unabhängig ist. Auf ähnliche Weise, wie oben erreicht man nun, dass a verschwindet, und ferner ergiebt sich

$$\frac{1}{\psi(\alpha)} \frac{\partial c}{\partial \beta} = m,$$

wodurch die Gleichungen (1,1) ... (1,2) sämmtlich befriedigt sind. Führt man $\int \frac{2\,d\alpha}{\psi(\alpha)}$, c als neue Variable an Stelle von α, β ein, so erhält man die quadratische Form $\beta^2 d\gamma^2 + d\alpha\, d\beta$, welche in $dx^2 + dy^2 + dz^2$ übergeht durch die Substitution

$$x + iy = \beta, \quad x - iy = \alpha - \beta\gamma^2, \quad z = \beta\gamma.$$

Hieraus kann man aber mittelst der Gleichungen $\alpha =$ const., $\beta =$ const. keine reellen Curven erhalten. Der Fall $\psi(\alpha) = 0$, $\varphi(\beta)$ nicht $= 0$ ist von diesen nicht wesentlich verschieden.

3) Wenn weder $\psi(\alpha)$ noch $\varphi(\beta)$ verschwindet, so führe man für α, β die neuen Variablen $\int \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)}$, $\int \frac{d\beta}{\varphi(\beta)}$ ein, wodurch man erreicht, dass

$$\frac{\partial c}{\partial \alpha} = m, \quad \frac{\partial c}{\partial \beta} = m, \quad \frac{\partial c}{\partial \alpha} - \frac{\partial c}{\partial \beta} = 0,$$

also $c = f(\alpha + \beta)$, $m = f'(\alpha + \beta)$ wird.

Nun folgt aus (1,3)

$$\frac{\partial \log \frac{\partial ac}{\partial \beta}}{\partial \beta} = \frac{\partial \log cm}{\partial \beta},$$

und daraus durch Integration

$$ac = f^2 \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$

durch Einführung der Variabeln $\gamma + \int \varphi(\alpha)\, d\alpha$ statt γ erreicht man dass $\varphi(\alpha) = 0$ und mithin $ac = \psi(\alpha)$ wird. Dann folgt aus (1,2):

$$\frac{f^3 f''}{f'} = -\psi(\alpha)^2.$$

Da nun die eine Seite dieser Gleichung nur von α, die andere nur von $\alpha + \beta$ abhängt, so muss jede derselben einer Constanten k^2 gleich sein, woraus sich für die Function f die Differentialgleichung zweiter Ordnung ergiebt:

$$f'' - \frac{k^2 f'}{f^3} = 0,$$

wonach die Gleichungen (1,1) .. (1,2) alle befriedigt sind. Die einmalige Integration dieser Gleichung ergiebt, wenn k_1 eine neue Constante bedeutet:

$$2f' = k_1^2 - \frac{k^2}{f^2}.$$

Setzen wir nun $\alpha = x + iy$, $\beta = x - iy$, und führen für γ eine neue Variable $\gamma - ik \int \frac{dx}{f^2}$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(c\,d\gamma + a\,d\alpha)^2 + 2m\,d\alpha\,d\beta &= \left(f\,d\gamma + \frac{k}{f}\,dy\right)^2 + 2f'(dx^2 + dy^2) \\ &= f^2 d\gamma^2 + 2k\,d\gamma\,dy + 2f' dx^2 + k_1^2 dy^2.\end{aligned}$$

Setzen wir ferner

$$2f'\,dx^2 = \frac{df^2}{2f'} = \frac{f^2 df^2}{k_1^2 f^2 - k^2} = d\xi^2,$$

woraus folgt

$$\xi = \frac{1}{k_1^2}\sqrt{k_1^2 f^2 - k^2}, \qquad f^2 = k_1^2 \xi^2 + \frac{k^2}{k_1^2},$$

so geht unsere quadratische Form über in

$$\left(\frac{k}{k_1}\,d\gamma + k_1\,dy\right)^2 + k_1^2 \xi^2 d\gamma^2 + d\xi^2.$$

Beziehen wir dieselbe auf Polarcoordinaten, indem wir setzen:

$$\xi = r, \quad k_1\gamma = \varphi, \quad k_1 y + \frac{k}{k_1}\gamma = z,$$

so nimmt sie die Form an:

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Die Curven $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ werden daher

$$r = \text{const.}, \qquad z - \frac{k}{k_1^2}\varphi = \text{const.}$$

worin k auch $= 0$ sein kann.

In dem Specialfall $k_1 = 0$ erhalten wir $\xi = \frac{if^2}{2k}$ und die quadratische Form wird

$$-2ki\xi\,d\gamma^2 + 2k\,d\gamma\,dy + d\xi^2,$$

oder indem wir an Stelle von ξ, $\frac{2ky}{\sqrt{-2ki}}$, $\sqrt{-2ki}\,\gamma$ wieder α, β, γ schreiben:

$$\alpha\,d\gamma^2 + d\beta\,d\gamma + d\alpha^2,$$

welche in die Form $dx^2 + dy^2 + dz^2$ übergeht durch die Substitution

$$\begin{aligned} x + iy &= \beta + \alpha\gamma - \tfrac{1}{12}\gamma^3, \\ x - iy &= \gamma, \\ z &= \alpha - \tfrac{1}{4}\gamma^2; \end{aligned}$$

aber den hieraus sich ergebenden Gleichungen

$$z + \tfrac{1}{4}(x - iy)^2 = \alpha = \text{const.},$$
$$(x + iy) - \alpha(x - iy) + \tfrac{1}{12}(x - iy)^3 = \beta = \text{const.}$$

entsprechen keine reellen Curven.

In den übrigen Fällen ist es mir nicht gelungen die Rechnung vollständig durchzuführen. W.