Erläuterungen zu den vorstehenden Fragmenten

von R. Dedekind.

Die Entstehungszeit (September 1852) des ersten der beiden Fragmente macht es wahrscheinlich, dass Riemann darauf ausging, für die Abhandlung über die trigonometrischen Reihen Beispiele von Functionen zu finden, die unendlich oft in jedem Intervall unstetig werden, und es ist möglich, dass die zweite Untersuchung, welche sich auf einem kaum leserlichen Blatt findet, demselben Zwecke dienen sollte. Die hier von Riemann benutzte Methode zur Bestimmung des Verhaltens der in der Theorie der elliptischen Functionen auftretenden Modulfunctionen für den Fall, dass das complexe Periodenverhältniss

$$\omega = \frac{K'i}{K} = \frac{\log q}{\pi i}$$

sich einem rationalen Werthe nähert, gestattet aber eine sehr interessante Anwendung auf die sogenannte Theorie der unendlich vielen Formen der ϑ-Functionen, nemlich auf die Bestimmung der bei der Transformation erster Ordnung auftretenden Constanten, welche bekanntlich von Jacobi und Hermite auf die Gauss'schen Summen, also auf die Theorie der quadratischen Reste zurückgeführt ist. Da ich diese Bemerkung erst in den letzten Tagen vor dem Abdruck gemacht habe, so ist keine Zeit übrig geblieben, die Correctheit der Riemann'schen Formeln in den reellen Theilen genau zu prüfen; da sie sich aber sämmtlich aus der im Folgenden angedeuteten Untersuchung ergeben müssen, so wird hoffentlich ihre Mittheilung auch ohne diese Prüfung gerechtfertigt erscheinen.

Den Mittelpunkt der Theorie dieser Modulfunctionen, welche man auch ganz unabhängig von der der elliptischen Functionen aufstellen kann, bildet gewissermaassen die Function

$$\eta(\omega) = 1^{\frac{\omega}{24}} \Pi(1 - 1^{\omega\nu}) = q^{\frac{1}{12}} \Pi(1 - q^{2\nu})$$

wo zur Abkürzung

$$e^{2\pi i z} = 1^z$$

gesetzt ist, und wo das Productzeichen sich auf alle positiven ganzen

Zahlen ν erstreckt. Da diese Function der complexen Variablen $\omega = x + yi$, deren Ordinate y stets positiv ist, im Innern des hierdurch begrenzten, einfach zusammenhängenden Gebietes nirgends Null oder unendlich gross wird, so sind auch alle Potenzen von $\eta(\omega)$ mit beliebigen Exponenten, und ebenso $\log \eta(\omega)$ durchaus einwerthige Functionen von ω, sobald ihr Werth an einer bestimmten Stelle festgesetzt ist. Die Function $\log \eta(\omega)$ soll dadurch definirt werden, dass, wenn y über alle Grenzen wächst, also $q = 1^{\frac{\omega}{2}}$ unendlich klein wird,

$$\log \eta(\omega) - \frac{\omega \pi i}{12} = 0$$

wird. Nun ist bekanntlich (Fundam. nova §. 36.)

$$\eta(2\omega)\,\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) = 1^{\frac{1}{48}}\eta(\omega)^3,$$

$$\sqrt[4]{k} = 1^{\frac{1}{48}}\sqrt{2}\,\frac{\eta(2\omega)}{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)},$$

$$\sqrt[4]{k'} = 1^{\frac{1}{48}}\,\frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)},$$

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1^{-\frac{1}{24}}\,\frac{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)^2}{\eta(\omega)},$$

also nach der obigen Festsetzung:

$$\log \eta(2\omega) + \log \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) + \log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) = \frac{\pi i}{24} + 3\log \eta(\omega)$$

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} \log k &= \log 4 + \frac{\pi i}{6} + 4\log \eta(2\omega) - 4\log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) \\ \log k' &= \frac{\pi i}{6} + 4\log \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) - 4\log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) \\ \log \frac{2K}{\pi} &= -\frac{\pi i}{6} + 4\log \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) - 2\log \eta(\omega) \end{aligned}$$

wo die Logarithmen linker Hand (wie in den Fund. nova §. 40) als einwerthige Functionen von ω so definirt sind, dass

$$\log k - \log 4 - \frac{\omega \pi i}{2} = \log k - \log 4\sqrt{q},$$

$$\log k' \text{ und } \log \frac{2K}{\pi}$$

mit q unendlich klein werden.

Aus diesem Verhalten der Functionen ergiebt sich nun mit Hülfe der Transformation erster Ordnung der ϑ-Functionen ihr Verhalten bei Annäherung von ω an einen reellen rationalen Werth, also bei

Annäherung von q an eine bestimmte Einheitswurzel q_0 (die irrationalen reellen Werthe gehören in gewissem Sinne gar nicht mit zur Begrenzung des Gebietes der Variablen ω). Setzt man

$$\vartheta_1(z,\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 1^{(s+\frac{1}{2})^2 \frac{\omega}{2} + (s+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})}$$

$$= 2\,\eta(\omega)\, 1^{\frac{\omega}{12}} \sin z\pi\, \Pi(1-1^{\omega\nu+z})(1-1^{\omega\nu-z})$$

so wird, wenn man die nach z genommene Derivirte durch einen Accent bezeichnet,

$$\vartheta_1'(0,\omega) = 2\pi\,\eta(\omega)^3.$$

Sind nun α, β, γ, δ vier der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende ganze Zahlen, so ist bekanntlich

$$\vartheta_1\left(z, \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = c\sqrt{\alpha+\beta\omega}\; 1^{\frac{1}{2}\beta(\alpha+\beta\omega)z^2}\, \vartheta_1\big((\alpha+\beta\omega)z, \omega\big),$$

wo c eine von α, β, γ, δ und der Wahl der Quadratwurzel abhängige achte Einheitswurzel bedeutet, deren Bestimmung von Hermite auf die Gauss'schen Summen zurückgeführt ist. (Liouville's Journal, Série II. T. III. 1858.) Für $z = 0$ ergiebt sich hieraus

$$\vartheta_1'\left(0, \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = c(\alpha+\beta\omega)^{\frac{3}{2}}\, \vartheta_1'(0,\omega)$$

also

$$\eta\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = c^{\frac{1}{3}}(\alpha+\beta\omega)^{\frac{1}{2}}\eta(\omega).$$

Man kann daher, wenn $\beta \gtrless 0$ ist,

$$\log\eta\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = \log\eta(\omega) + \frac{1}{2}\log\frac{\alpha+\beta\omega}{\beta i} + \frac{1}{4}\log\beta^2 + \frac{h\pi i}{12}$$

setzen, wo die einwerthige Function

$$\log\frac{\alpha+\beta\omega}{\beta i} = \log\left(y - \frac{\alpha+\beta x}{\beta}i\right)$$

so definirt werden soll, dass ihr imaginärer Theil zwischen den Grenzen $\pm\frac{\pi i}{2}$ liegt, während $\log\beta^2$ reell zu nehmen ist; dann wird h eine durch α, β, γ, δ vollständig bestimmte ganze Zahl sein, welche dieselbe bleibt, wenn diese vier Zahlen mit (-1) multiplicirt werden. Die vollständige Bestimmung dieser ganzen Zahl h leistet offenbar noch sehr viel mehr, als die Bestimmung der obigen Einheitswurzel c.

Um dies zu erreichen, lasse man $\omega = x + yi$ dem rationalen, in kleinsten Zahlen ausgedrückten Werthe $\frac{-\alpha}{\beta}$ sich so annähern, dass mit y auch

$$\frac{(\alpha+\beta x)^2}{y}$$

unendlich klein wird, so wird

$$\omega' = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega} = \frac{\delta}{\beta} - \frac{1}{\beta(\alpha+\beta\omega)}$$

der Art unendlich gross, dass $q' = 1^{\frac{1}{2}\omega'}$ unendlich klein, und folglich

$$\log\eta(\omega') - \frac{\omega'\pi i}{12} = 0$$

wird. Bei dieser Annäherung wird mithin

$$0 = \log\eta(\omega) + \frac{1}{2}\log\frac{\alpha+\beta\omega}{\beta i} + \frac{1}{4}\log\beta^2 + \frac{\pi i}{12\beta(\alpha+\beta\omega)} + \frac{h\pi i}{12} - \frac{\delta\pi i}{12\beta}$$

und da alle Glieder mit Ausnahme der beiden letzten nur von den beiden Zahlen α, β abhängen, so kann man

$$h\beta - \alpha - \delta = 2(-\alpha, \beta)$$

setzen, wo $2(-\alpha, \beta)$ und, wie sich leicht zeigen liesse, auch $(-\alpha, \beta)$ selbst eine lediglich von den beiden relativen Primzahlen α, β abhängende ganze Zahl bedeutet, durch deren Einführung der Annäherungssatz die Form

$$\text{(II)} \qquad 0 = \log\eta(\omega) + \frac{\pi i}{12n(n\omega - m)} + \frac{1}{2}\log\frac{n\omega - m}{ni} + \frac{1}{4}\log n^2 + \frac{2(m,n) - m}{12n}\pi i$$

annimmt, wo m und $n \gtrless 0$ zwei beliebige relative Primzahlen bedeuten, und angenommen wird, dass $\omega = x + yi$ in der angegebenen Weise sich dem Werth $\frac{m}{n}$ nähert, nemlich so, dass mit y auch

$$\frac{(nx - m)^2}{y}$$

unendlich klein wird. Ersetzt man m, n durch $-m$, $-n$, so ergiebt sich

$$\text{(III)} \qquad (-m, -n) = -(m, n)$$

ausserdem folgt aus der obigen Definition des Symbols $(-\alpha, \beta)$, weil h eine ganze Zahl und $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{\beta}$ ist, allgemein

$$\text{(IV)} \qquad 2m(m, n) \equiv m^2 + 1 \pmod{n}.$$

Zugleich nimmt die obige Gleichung für die Transformation erster Ordnung der Function $\log\eta(\omega)$ die folgende Form an:

$$\text{(V)} \qquad \log\eta\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = \log\eta(\omega) + \frac{1}{2}\log\frac{\alpha+\beta\omega}{\beta i} + \frac{1}{4}\log\beta^2 + \frac{2(-\alpha,\beta)+\alpha+\delta}{12\beta}\pi i.$$

Die Fundamentaleigenschaften des Symbols (m, n) ergeben sich nun auf folgende Weise. Aus der Definition von $\log\eta(\omega)$ folgt unmittelbar

$$\log\eta(1+\omega) = \log\eta(\omega) + \frac{\pi i}{12}.$$

Bei Annäherung von ω an $\frac{m}{n}$ nähert sich nun $1+\omega$ dem Werth $\frac{m+n}{n}$, welcher gleichfalls in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, und folglich wird nach dem obigen Annäherungs-Satze

$$0 = \log\eta(1+\omega) + \frac{\pi i}{12n(n\omega - m)} + \frac{1}{2}\log\frac{n\omega - m}{ni}$$
$$+ \frac{1}{4}\log n^2 + \frac{2(m+n,\, n) - m - n}{12n}\pi i,$$

woraus durch Vergleichung

$$(m+n,\, n) = (m,\, n)$$

also allgemein

(VI) $\qquad (m',\, n) = (m,\, n)$ wenn $m' \equiv m \pmod{n}$

folgt. Aus dem allgemeinen Transformations-Satze (V) ergiebt sich ferner

$$\log\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \log\eta(\omega) + \frac{1}{2}\log(-\omega i) + \frac{(0,\,1)\pi i}{6},$$

oder, da für $\omega = i$

(VII) $\qquad (0,\, 1) = (m,\, 1) = 0$

folgt,

$$\log\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \log\eta(\omega) + \frac{1}{2}\log(-\omega i);$$

nähert sich nun hierin ω dem Werth $\frac{m}{n}$, also $\frac{-1}{\omega}$ dem Werth $\frac{-n}{m}$, so ergiebt sich, wenn m ebenfalls von 0 verschieden ist, aus dem Annäherungs-Satze (II)

$$0 = \log\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) + \frac{\omega\pi i}{12m(n\omega - m)} + \frac{1}{2}\log\frac{n\omega - m}{\omega m i}$$
$$+ \frac{1}{4}\log m^2 + \frac{2(-n,\, m) + n}{12m}\pi i;$$

durch Vergleichung mit dem ursprünglichen Annäherungs-Satze (II) unter genauer Berücksichtigung der über die Logarithmen gemachten Festsetzungen ergiebt sich das Resultat

(VIII) $\qquad 2m(m,\, n) - 2n(-n,\, m) = 1 + m^2 + n^2 \mp 3mn$

wo das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem mn positiv oder negativ ist. Dasselbe ist nur ein specieller Fall des folgenden, welches man erhält, wenn man in dem allgemeinen Transformations-Satze (V), die Variable ω sich dem Werth $\frac{m}{n}$ annähern lässt: Sind m, n und m', n', zwei Paare von relativen Primzahlen, so wird, wenn

$$n'' = nm' - mn'$$

gesetzt und m'' durch die Congruenzen

$$m'm'' \equiv m, \quad n'm'' \equiv n \quad (\text{mod. } n'')$$

bestimmt wird,

$$2nn'(m'', n'') - 2n'n''(m, n) + 2nn''(m', n')$$
$$= n^2 + n'^2 + n''^2 \mp 3nn'n''$$

wo das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $nn'n''$ positiv oder negativ ist. Aber offenbar ist der Werth des Symbols (m, n) schon durch die Sätze (VI), (VII), (VIII) vollständig bestimmt, und man findet denselben durch eine Art Kettenbruch-Entwicklung.

Es ergiebt sich ausserdem, dass allgemein

$$(-m, n) = -(m, n), \quad (m, -n) = (m, n)$$

ist; der erstere dieser beiden Sätze kann auch daraus abgeleitet werden, dass $\log \eta(-\omega_1)$ mit $\log \eta(\omega)$ conjugirt ist, wenn ω_1 die mit ω conjugirte complexe Grösse bedeutet.

Man kann ferner ohne Verletzung dieser Sätze die Bedeutung des Symbols (m, n) auch auf den Fall $n = 0$ ausdehnen, woraus, da m stets relative Primzahl zu n sein soll, $m = \pm 1$ folgt, und es ergiebt sich

$$(\pm 1, 0) = \pm 1.$$

Es ist endlich allgemein

$$(m', n) = (m, n) \text{ wenn } mm' \equiv 1 \ (\text{mod. } n).$$

Diese Zahlen (m, n), deren Theorie die Untersuchungen von Hermite über die von ihm mit $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ bezeichneten Functionen in sich schliesst (Sur la théorie des équations modulaires. 1859), besitzen die merkwürdigsten zahlentheoretischen Eigenschaften; aber es ist nicht leicht, einen allgemeinen Ausdruck für dieselben zu finden. Mit Hülfe der von Riemann in dem zweiten Fragmente angewandten Methode gelingt es aber einen solchen Ausdruck in Form einer endlichen Summe aufzustellen.

Bedeutet r einen positiven echten Bruch, der sich der Einheit nähert, so kann man bei normaler Annäherung von ω an $\frac{m}{n}$

$$\omega - \frac{m}{n} = yi = \frac{\log r}{2\pi i}, \quad q^2 = rq_0^2 = r\alpha^m$$

setzen, wo $\log r$ reell und $\alpha = 1^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist. Gleichzeitig wird

$$\log \eta(\omega) = \frac{\omega\pi i}{12} + \sum \log(1 - q^{2\nu}) = \frac{\omega\pi i}{12} + \sum \log(1 - r^\nu \alpha^{m\nu})$$

wo die Logarithmen rechter Hand für $r = 0$ verschwinden, oder nach der Umformung von Jacobi (Fund. nova §. 39)

$$\log \eta(\omega) = \frac{\omega \pi i}{12} - \sum \frac{1}{\nu} \frac{r^\nu \alpha^{m\nu}}{1 - r^\nu \alpha^{m\nu}},$$

wo ν wieder alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen muss. Nähert sich nun r dem Werthe 1, so wird nach dem Annäherungs-Satze (II)

$$0 = -\sum \frac{1}{\nu} \frac{r^\nu \alpha^{m\nu}}{1 - r^\nu \alpha^{m\nu}} + \frac{\pi^2}{6n^2 \log \frac{1}{r}} + \frac{1}{2} \log\log \frac{1}{r}$$
$$+ \frac{1}{4} \log \frac{n^2}{4\pi^2} + \frac{(m, n)\pi i}{6n},$$

wo alle Logarithmen reell zu nehmen sind; durch den Uebergang zur conjugirten Grösse erhält man gleichzeitig

$$0 = -\sum \frac{1}{\nu} \frac{r^\nu \alpha^{-m\nu}}{1 - r^\nu \alpha^{-m\nu}} + \frac{\pi^2}{6n^2 \log \frac{1}{r}} + \frac{1}{2} \log\log \frac{1}{r}$$
$$+ \frac{1}{4} \log \frac{n^2}{4\pi^2} - \frac{(m, n)\pi i}{6n};$$

folglich wird für $r = 1$

$$\sum \frac{1}{\nu} \frac{r^\nu \alpha^{m\nu}}{1 - r^\nu \alpha^{m\nu}} - \sum \frac{1}{\nu} \frac{r^\nu \alpha^{-m\nu}}{1 - r^\nu \alpha^{-m\nu}} = \frac{(m, n)\pi i}{3n}$$

oder

$$\lim \sum \frac{a_\nu}{\nu} = \frac{(m, n)\pi i}{3n},$$

wo zur Abkürzung

$$a_\nu = \frac{1}{1 - r^\nu \alpha^{m\nu}} - \frac{1}{1 - r^\nu \alpha^{-m\nu}}$$

gesetzt ist. Es lässt sich nun beweisen, dass die Reihe

$$\sum \frac{a_\nu}{\nu},$$

wenn ihre Glieder nach wachsenden ν geordnet werden, auch noch für $r = 1$ convergirt und an dieser Stelle stetig ist, d. h. dass sie sich dem Grenzwerth

$$\sum \frac{a_\nu^0}{\nu}$$

nähert, wo a_ν^0 den aus a_ν für $r = 1$ hervorgehenden Coefficienten bedeutet. Durch Vereinigung von je zwei Gliedern a_ν, welche den Indices $\nu = sn + \sigma$ und $\nu = (s + 1)n - \sigma$ entsprechen, wo $0 < \sigma < \frac{n}{2}$, ergiebt sich nemlich leicht, dass der Modul der Summe

$$A_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu$$

für alle Werthe von r einschliesslich $r = 1$ unterhalb einer von r und

ν unabhängigen, endlichen Constanten bleibt, woraus die obige Behauptung nach einem Satze folgt, den ich durch Verallgemeinerung der Abel'schen Principien gefunden habe (Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., §. 143. Anm.). Es ist daher

$$\frac{(m, n)\pi i}{3n} = \sum \frac{a_\nu^0}{\nu},$$

und die Summe rechter Hand lässt sich nach der von Riemann angewandten, von Dirichlet herrührenden Methode (Recherches sur diverses applications etc. §. 1 in Crelle's Journal Bd. 19) in Form einer endlichen Summe bestimmen, weil

$$a_\nu^0 = a_{\nu+n}^0$$

und (wenn n positiv vorausgesetzt wird)

$$a_1^0 + a_2^0 + \cdots + a_n^0 = 0$$

ist. Durch Anwendung der Gleichung

$$\frac{1}{\nu} = \int_0^1 x^{\nu-1} dx$$

ergiebt sich auf diese Weise

$$\frac{(m, n)\pi i}{3n} = \int_0^1 \frac{f(x)}{1 - x^n} \frac{dx}{x},$$

wo

$$f(x) = \sum_{1,n}^{\nu} a_\nu^0 x^\nu$$

gesetzt ist. Durch Auflösung in Partialbrüche und Ausführung der Integration folgt

$$\frac{(m, n)\pi i}{3} = -\sum f(\alpha^{-mt}) \log(1 - \alpha^{mt}),$$

wo t ein vollständiges Restsystem (mod. n) mit Ausschluss von $t = 0$ durchläuft, und der imaginäre Theil der Logarithmen zwischen $\pm \frac{\pi i}{2}$, also

$$= \pi i \left(\left(\frac{mt}{n} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

zu nehmen ist, wenn der Deutlichkeit halber der von x um eine ganze Zahl abstehende, zwischen $\pm \frac{1}{2}$ liegende Werth nicht mit (x), sondern mit $((x))$ bezeichnet wird. Durch Anwendung der Transformation

$$\frac{1}{1 - \alpha^{m\nu}} = -\frac{1}{n} \sum_{0,n-1}^{\sigma} \sigma \alpha^{m\nu\sigma}$$

erhält man den auch für $\nu = n$ geltenden Ausdruck

$$a^0_\nu = \frac{1}{n}\sum \sigma\alpha^{-m\nu\sigma} - \frac{1}{n}\sum \sigma\alpha^{m\nu\sigma}$$

und hieraus folgt leicht

$$f(\alpha^{-mt}) = \sum a^0_\nu \alpha^{-mt\nu} = [-t] - [t] = -2n\left(\left(\frac{t}{n} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

wenn allgemein mit $[t]$ der in der Reihe $\sigma = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ befindliche Rest der Zahl t nach dem Modul n bezeichnet wird. Man erhält daher, wenn, wie oben vorausgesetzt wurde, n positiv ist,

$$\frac{(m,n)}{3} = \sum \{[t] - [-t]\}\left(\left(\frac{mt}{n} - \frac{1}{2}\right)\right) = 2n\sum\left(\left(\frac{t}{n} - \frac{1}{2}\right)\right)\left(\left(\frac{mt}{n} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

wo t ein vollständiges Restsystem (mod. n) zu durchlaufen hat. Dieser Ausdruck für (m, n) in Form einer endlichen Summe lässt sich noch umformen und bedeutend vereinfachen, was aber hier unterbleiben soll. Es sollen hier nur noch zum Schluss die Formeln zusammengestellt werden, die sich aus dem Hauptsatze II. und dem Formelsystem I. für die Annäherung von ω an den Werth $\frac{m}{n}$ ergeben, woraus die Riemann'schen Resultate folgen müssen. In demselben ist zur Abkürzung gesetzt

$$A = \frac{\pi i}{24n(n\omega - m)}, \quad B = \frac{1}{2}\log\frac{n\omega - m}{ni} + \frac{1}{4}\log n^2.$$

Es folgt dann:

$$0 = \log\eta(\omega) + 2A + B + \frac{\pi i}{12n}\left\{2(m,n) - m\right\}$$

$$0 = \log\eta(2\omega) + A + B + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi i}{6n}\left\{(2m,n) - m\right\}$$

wenn $n \equiv 1$ (mod. 2)

$$0 = \log\eta(2\omega) + 4A + B + \frac{\pi i}{6n}\left\{2\left(m, \frac{n}{2}\right) - m\right\}$$

wenn $n \equiv 0$ „

$$0 = \log\eta\left(\frac{\omega}{2}\right) + A + B + \frac{\pi i}{24n}\left\{2(m, 2n) - m\right\}$$

wenn $m \equiv 1$ „

$$0 = \log\eta\left(\frac{\omega}{2}\right) + 4A + B - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi i}{12n}\left\{2\left(\frac{m}{2}, n\right) - \frac{m}{2}\right\}$$

wenn $m \equiv 0$ „

$$0 = \log\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) + A + B + \frac{\pi i}{24n}\left\{2(m+n, 2n) - m - n\right\}$$

wenn $m + n \equiv 1$ (mod. 2)

$$0 = \log\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right) + 4A + B - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi i}{12n}\left\{2\left(\frac{m+n}{2}, n\right) - \frac{m+n}{2}\right\}$$

wenn $m + n \equiv 0$ (mod. 2)

und hieraus:

I. wenn $m \equiv n \equiv 1 \pmod{2}$

$$2(2m, n) + (m, 2n) + 2\left(\frac{m+n}{2}, n\right) = 6(m, n)$$

$$\log k = 12A - 2\log 2 + \frac{m\pi i}{2n} + \frac{2\pi i}{3n}\left\{\left(\frac{m+n}{2}, n\right) - (2m, n)\right\}$$

$$\log k' = 12A - 2\log 2 \qquad + \frac{\pi i}{3n}\left\{2\left(\frac{m+n}{2}, n\right) - (m, 2n)\right\}$$

$$\log\frac{2K}{\pi} = -12A - 2B + 2\log 2 + \frac{\pi i}{3n}\left\{(m, n) - 2\left(\frac{m+n}{2}, n\right)\right\}$$

II. wenn $m \equiv 0,\ n \equiv 1 \pmod{2}$

$$2(2m, n) + 2\left(\frac{m}{2}, n\right) + (m+n, 2n) = 6(m, n)$$

$$\log k = \qquad \frac{m\pi i}{2n} + \frac{\pi i}{3n}\left\{(m+n, 2n) - 2(2m, n)\right\}$$

$$\log k' = -12A + 2\log 2 \qquad + \frac{\pi i}{3n}\left\{(m+n, 2n) - 2\left(\frac{m}{2}, n\right)\right\}$$

$$\log\frac{2K}{\pi} = -2B \qquad + \frac{\pi i}{3n}\left\{(m, n) - (m+n, 2n)\right\}$$

III. wenn $m \equiv 1,\ n \equiv 0 \pmod{2}$

$$4\left(m, \frac{n}{2}\right) + (m, 2n) + (m+n, 2n) = 6(m, n)$$

$$\log k = -12A + 2\log 2 + \frac{m\pi i}{2n} + \frac{\pi i}{3n}\left\{(m+n, 2n) - 4\left(m, \frac{n}{2}\right)\right\}$$

$$\log k' = \qquad + \frac{\pi i}{3n}\left\{(m+n, 2n) - (m, 2n)\right\}$$

$$\log\frac{2K}{\pi} = -2B \qquad + \frac{\pi i}{3n}\left\{(m, n) - (m+n, 2n)\right\}$$
