XXV.

Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen.*)

Das Problem, die Vertheilung der statischen Electricität oder der Temperatur im stationären Zustand in unendlichen cylindrischen Leitern mit parallelen Erzeugenden zu bestimmen, vorausgesetzt dass im ersteren Fall die vertheilenden Kräfte, im letzteren die Temperaturen der Oberflächen constant sind längs geraden Linien, die zu den Erzeugenden parallel sind, ist gelöst, sobald eine Lösung der folgenden mathematischen Aufgabe gefunden ist:

In einer ebenen, zusammenhängenden, einfach ausgebreiteten, aber von beliebigen Curven begrenzten Fläche S eine Function u der rechtwinkligen Coordinaten x, y so zu bestimmen, dass sie im Innern der Fläche S der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und an den Grenzen beliebige vorgeschriebene Werthe annimmt.

Diese Aufgabe lässt sich zunächst auf eine einfachere zurückführen:

Man bestimme eine Function $\zeta = \xi + \eta i$ des complexen Arguments $z = x + yi$, welche an sämmtlichen Grenzcurven von S nur reell ist, in je einem Punkt einer jeden dieser Grenzcurven unendlich von der ersten Ordnung wird, übrigens aber in der ganzen Fläche S endlich und stetig bleibt. Es lässt sich von dieser Function leicht zeigen, dass sie jeden beliebigen reellen Werth auf jeder der Grenzcurven ein und nur einmal annimmt, und dass sie im Innern der Fläche S jeden complexen Werth mit positiv imaginärem Theil $n$mal annimmt, wenn n die Anzahl der Grenzcurven von S ist, vorausgesetzt dass bei einem positiven Umgang um eine der Grenzcurven ζ von $-\infty$ bis $+\infty$ geht. Durch diese Function erhält man auf der obern Hälfte der Ebene, welche die complexe Variable ζ repräsentirt, eine $n$fach ausgebreitete

---

*) Von dieser und den folgenden Abhandlungen liegen ausgeführte Manuscripte von Riemann nicht vor. Sie sind aus Blättern zusammengestellt, welche ausser wenigen Andeutungen nur Formeln enthalten. W.

Fläche T, welche ein conformes Abbild der Fläche S liefert, und welche durch die Linien begrenzt ist, die in den n Blättern mit der reellen Axe zusammenfallen. Da die Flächen S und T gleich vielfach zusammenhängend sein müssen, nemlich n-fach, so hat T in seinem Innern $2n - 2$ einfache Verzweigungspunkte, (vgl. Theorie der Abel'schen Functionen, Art. 7. S. 106) und unsere Aufgabe ist zurückgeführt auf die folgende:

Eine wie T verzweigte Function des complexen Arguments ζ zu finden, deren reeller Theil u im Innern von T stetig ist und an den n Begrenzungslinien beliebige vorgeschriebene Werthe hat.

Kennt man nun eine wie T verzweigte Function $\varpi = h + ig$ von ζ, welche in einem beliebigen Punkt ε im Innern von T logarithmisch unendlich ist, deren imaginärer Theil ig ausser in ε in T stetig ist und an der Grenze von T verschwindet, so hat man nach dem Green'schen Satze: (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse Art. 10. S. 18. f.)

$$u_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi}\int u\frac{\partial g}{\partial \eta}\, d\xi,$$

wo die Integration über die n Begrenzungslinien von T erstreckt ist.

Die Function g aber lässt sich auf folgende Art bestimmen. Man setze die Fläche T über die ganze Ebene ζ fort, indem man auf der unteren Hälfte (wo ζ einen negativ imaginären Theil besitzt) das Spiegelbild der oberen Hälfte hinzufügt. Dadurch erhält man eine die ganze Ebene ζ $n$fach bedeckende Fläche, welche $4n - 4$ einfache Verzweigungspunkte besitzt und welche sonach zu einer Klasse algebraischer Functionen gehört, für welche die Zahl $p = n - 1$ ist. (Theorie der Abel'schen Functionen Art. 7. und 12. S. 106, 112.)

Die Function ig ist nun der imaginäre Theil eines Integrals dritter Gattung, dessen Unstetigkeitspunkte in dem Punkt ε und in dem dazu conjugirten ε' liegen, und dessen Periodicitätsmoduln sämmtlich reell sind. Eine solche Function ist bis auf eine additive Constante völlig bestimmt und unsere Aufgabe ist somit gelöst, sobald es gelungen ist, die Function ζ von z zu finden.

Wir werden diese letztere Aufgabe unter der Voraussetzung weiter behandeln, dass die Begrenzung von S aus n Kreisen gebildet ist. Es können dabei entweder sämmtliche Kreise ausser einander liegen, so dass sich die Fläche S ins Unendliche erstreckt, oder es kann ein Kreis alle übrigen einschliessen, wobei S endlich bleibt. Der eine Fall kann durch Abbildung mittelst reciproker Radien leicht auf den andern zurückgeführt werden.

Ist die Function ζ von z in S bestimmt, so lässt sich dieselbe über die Begrenzung von S stetig fortsetzen, dadurch dass man zu jedem Punkt von S in Bezug auf jeden der Grenzkreise den harmonischen Pol nimmt und in diesem der Function ζ den conjugirt imaginären Werth ertheilt. Dadurch wird das Gebiet S für die Function ζ erweitert, seine Begrenzung besteht aber wieder aus Kreisen, mit denen man ebenso verfahren kann, und diese Operation lässt sich ins Unendliche fortsetzen, wodurch das Gebiet der Function ζ mehr und mehr über die ganze z-Ebene ausgedehnt wird.

Im Folgenden bedienen wir uns, um auszudrücken, dass zwei Grössen a, a' conjugirt imaginär sind, des Zeichens:

$$a \mathrel{\frac{|}{|}} a',$$

die dadurch ausgedrückte Verknüpfung zweier Grössen bleibt bestehen, wenn beiderseits conjugirt imaginäre Grössen addirt werden, oder wenn mit solchen multiplicirt oder dividirt wird; auch kann beiderseits die Wurzel gezogen werden, wenn dieselbe richtig erklärt wird.

Ist nun $\zeta \mathrel{\frac{|}{|}} \zeta'$ und entsprechen den Werthen ζ, ζ' die Werthe z, z', so ist, wenn r der Radius eines der Grenzkreise von S ist, und z im Mittelpunkt desselben den Werth p hat:

$$\frac{z-p}{r} \mathrel{\frac{|}{|}} \frac{r}{z'-p}$$

woraus sich ergiebt:

$$z \mathrel{\frac{|}{|}} \frac{az'+b}{cz'+\partial}$$

wenn a, b, c, ∂ Constanten bedeuten. Hieraus:

$$\frac{dz}{d\zeta} \mathrel{\frac{|}{|}} \frac{a\partial - bc}{(cz'+\partial)^2}\frac{dz'}{d\zeta'}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} \mathrel{\frac{|}{|}} \frac{1}{\sqrt{a\partial - bc}} \frac{cz'+\partial}{\sqrt{\frac{dz'}{d\zeta'}}}$$

$$\frac{z}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} \mathrel{\frac{|}{|}} \frac{1}{\sqrt{a\partial - bc}} \frac{az'+b}{\sqrt{\frac{dz'}{d\zeta'}}}.$$

Setzt man also:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} = y, \quad \frac{z}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} = y_1$$

und bezeichnet die Werthe, welche y, y_1 für ζ' annehmen mit y', y'_1 so ergiebt sich:

$$(1) \qquad \begin{aligned} y &\mathrel{\frac{|}{|}} \frac{cy'_1 + \partial y'}{\sqrt{a\partial - bc}} \\ y_1 &\mathrel{\frac{|}{|}} \frac{ay'_1 + by'}{\sqrt{a\partial - bc}} \end{aligned}$$

woraus:

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{d\zeta^2} = \pm \frac{c\dfrac{d^2y'_1}{d\zeta'^2} + \partial\dfrac{d^2y'}{d\zeta'^2}}{\sqrt{a\partial - bc}}$$

$$\frac{d^2y_1}{d\zeta^2} = \pm \frac{a\dfrac{d^2y'_1}{d\zeta'^2} + b\dfrac{d^2y'}{d\zeta'^2}}{\sqrt{a\partial - bc}}.$$

Nun folgt aus

$$(3)\qquad z = \frac{y_1}{y}$$

durch Differentiation:

$$y\frac{dy_1}{d\zeta} - y_1\frac{dy}{d\zeta} = 1$$

$$y\frac{d^2y_1}{d\zeta^2} - y_1\frac{d^2y}{d\zeta^2} = 0$$

oder

$$(4)\qquad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{d\zeta^2} = \frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{d\zeta^2}$$

und ebenso:

$$(5)\qquad \frac{1}{y'}\frac{d^2y'}{d\zeta'^2} = \frac{1}{y'_1}\frac{d^2y'_1}{d\zeta'^2}$$

Hieraus und aus (1), (2) folgt weiter:

$$(6)\qquad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{d\zeta^2} = \frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{d\zeta^2} = \pm \frac{1}{y'}\frac{d^2y'}{d\zeta'^2} = \frac{1}{y'_1}\frac{d^2y'_1}{d\zeta_1'^2}.$$

Setzen wir also

$$(7)\qquad \frac{d^2y}{d\zeta^2} = sy$$

so ist s eine Function von ζ die für conjugirt imaginäre Werthe von ζ selbst conjugirt imaginäre Werthe erhält, und die sich also nicht ändert, wenn man in der Fläche T und ihrer symmetrischen Fortsetzung auf beliebigem Weg zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Mithin ist s eine wie T verzweigte algebraische Function von ζ; y und y_1 sind particuläre Lösungen der linearen Differentialgleichung (7) und z ist das Verhältniss derselben. Nimmt man umgekehrt die algebraische Function s in T beliebig an, jedoch so dass sie in conjugirten Punkten conjugirt imaginäre Werthe erhält und mithin für reelle Werthe von ζ reell wird, und nimmt irgend zwei particuläre Lösungen von (7), so liefert die Function $z = \frac{y_1}{y}$ ein conformes Abbild der Fläche T, welches durch Kreise begrenzt wird. Die dabei auftretenden unbestimmten Constanten hat man dadurch zu bestimmen, dass dieses Abbild in seinem Innern von singulären Punkten frei und mithin in der z-Ebene einfach ausgebreitet ist, und dass die Grenzkreise gegebene Lagen erhalten.