XVI.

Estratto di una lettera scritta in lingua Italiana il dì 21 Gennaio 1864 al Sig. Professore Enrico Betti.

(Annali di Matematica, Ser. 1. T. VII.)

Carissimo Amico

... Per trovare l'attrazione di un cilindro omogeneo retto ellissoidale qualunque, io considero, introducendo coordinate rettangolari $x, y, z,$ il cilindro infinito limitato della diseguaglianza:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0$$

ripieno di massa di densità costante $+1$, se $z < 0$, e di densità -1, se $z > 0$. Allora se poniamo, come è solito, il potenziale nel punto x, y, z eguale a V e

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X, \ \frac{\partial V}{\partial y} = Y, \ \frac{\partial V}{\partial z} = Z,$$

si ha per $z = 0$, $V = 0$, $X = 0$, $Y = 0$.

Z è eguale al potenziale dell' ellisse:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0$$

colla densità 2, e si trova col metodo di Dirichlet, se denotiamo con σ la radice maggiore dell' equazione:

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{s} = F = 0,$$

e

$$\sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right) s}$$

con D:

$$4 \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\sqrt{F}\, ds}{D}.$$

X ed Y si possono determinare dalle equazioni:

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \ \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

e dalle condizioni:

$$X = 0, \; Y = 0$$

per $z = 0$.

Per effettuare questa determinazione conviene di sostituire invece di $4 \int\limits_{\sigma}^{\infty}$, $2 \int\limits_{\infty}^{\infty}$ esteso per il contorno intero di un pezzo del Piano degli s, che contiene il valore σ senza contenere verun altro valore di diramazione o di discontinuità della funzione sotto il segno integrale. Se denotiamo le radici di $F = 0$ in ordine di grandezza con σ, σ', σ'', questi valori sono tutti reali e in ordine di grandezza:

$$\sigma, 0, \sigma', -b^2, \sigma'', -a^2,$$

in modo che:

$$\sigma > 0 > \sigma' > -b^2 > \sigma'' > -a^2.$$

Posto

$$F = t - \frac{z^2}{s}$$

viene

$$Z = 2 \int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{ts - z^2}}{D\sqrt{s}}\, ds,$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{s \frac{\partial t}{\partial x} (ts - z^2)^{-\frac{1}{2}}}{D\sqrt{s}}\, ds;$$

ma:

$$\int\limits_0^z (ts - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \int\limits_0^{\frac{z}{\sqrt{ts}}} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi = \int\limits_0^{\frac{z}{\sqrt{ts}}} \left(\frac{1}{\xi^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} d \log \xi,$$

e:

$$\frac{s \frac{\partial t}{\partial x} ds}{D\sqrt{s}} = -2abx\,(a^2 + s)^{-\frac{3}{2}} (b^2 + s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{4abx}{b^2 - a^2} d \sqrt{\frac{b^2 + s}{a^2 + s}}.$$

Dunque si trova per integrazione parziale:

$$X = \frac{2abxz}{b^2 - a^2} \int\limits_{\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{b^2 + s}{a^2 + s}} (ts - z^2)^{-\frac{1}{2}} d \log ts.$$

Se si prende la via dell' integrazione come nella espressione di Z il valore dell' integrale sodisfa sempre alla condizione:

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x};$$

ma può differire di funzioni di x e di y, la funzione sotto segno integrale essendo discontinua anche per $t = 0$. Dunque occorre una determinazione olteriore della via dell' integrazione.

Nella espressione di $\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$ la funzione sotto segno integrale è continua per $s = 0$; dunque il pezzo del piano degli s, per il cui contorno l'integrale è esteso, deve contenere $s = \sigma$ e può contenere o no $s = 0$, ma nessuno altro dei valori sopra notati. Nella espressione di X questo pezzo deve essere determinato in modo che X sia $= 0$ per $z = 0$; e affinchè ciò avvenga, dovendo contenere $s = \sigma$, deve anche contenere la maggiore radice di $ts = 0$ (la quale è la maggiore radice di $t = 0$, se

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0,$$

ed è $= 0$, se:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0)$$

ma nessun altra radice di $ts = 0$. Perchè per $z = 0$ le radici di $F = 0$ coincidono colle radici di $ts = 0$, e se la via dell' integrazione passasse tra due valori di discontinuità che coincidono per $z = 0$, doverebbe per $z = 0$ passare per questo valore in modo che l'integrale nella espressione di X diverrebbe infinito ed il valore nonostante il fattore z rimarrebbe finito. —

Vostro aff$^{\text{mo}}$ Amico Riemann.